CPE LYON

5/20

Parties I à III

Année universitaire 2015/2016

NOM : Delomméa .... **PRENOM :** Romain ....

Consignes relatives au déroulement de l'épreuve

Date : 19 novembre 2015 I. 3,5/5 II. 1/6 III. 0/4

Contrôle de : Traitement des Signaux Aléatoires

Durée: 2 h

Professeurs responsables : P. Pittet – N. Gache – P. Gonçalves

Documents : ☐ **autorisés** ☒ **non autorisés**

Calculatrices : ☐ **autorisées** ☒ **non autorisées**

LES TELEPHONES PORTABLES ET AUTRES APPAREILS DE STOCKAGE DE DONNEES NUMERIQUES NE SONT PAS AUTORISES.

Les téléphones portables doivent être éteints pendant toute la durée de l'épreuve et rangés dans les cartables.

S'agissant de contrôle sans document, les trousses doivent être rangées dans les cartables.

Les cartables doivent être fermés et posés au sol.

Les oreilles des candidats doivent être dégagées.

Rappels importants sur la discipline lors des examens

La présence à tous les examens est strictement obligatoire ; tout élève présent à une épreuve doit rendre une copie, même blanche, portant son nom, son prénom et la nature de l'épreuve.
Une absence non justifiée à un examen invalide automatiquement le module concerné.
Toute suspicion sur la régularité et le caractère équitable d'une épreuve est signalée à la direction des études qui pourra décider l'annulation de l'épreuve; tous les élèves concernés par l'épreuve sont alors convoqués à une épreuve de remplacement à une date fixée par le responsable d'année.
Toute fraude ou tentative de fraude est portée à la connaissance de la direction des études qui pourra réunir le Conseil de Discipline. Les sanctions prises peuvent aller jusqu'à l'exclusion définitive du (des) élève(s) mis en cause.

Consignes générales

L'examen comporte quatre parties.

Les trois premières parties sont dans une première liasse et la quatrième dans une autre.

Les deux liasses doivent être rendues au surveillant.

Les réponses doivent être portées directement sur les énoncés.

<u>Les réponses ne doivent pas être rédigées au crayon à papier ni au stylo rouge.</u>

Lire attentivement la totalité de l'énoncé de chaque partie avant de commencer.

Certaines questions des exercices peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie I : QUESTIONS DE COURS

Soit un signal aléatoire $X(t)$ à valeurs réelles, stationnaire du 2$^{\text{ième}}$ ordre.

1) Exprimer

- la valeur moyenne de $X(t)$
- sa puissance moyenne
- et sa fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

Donner la relation qui existe entre la puissance moyenne du signal et la fonction d'autocorrélation.

Comment calculer la puissance moyenne du signal à partir de sa densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_X(\nu)$?

Valeur moyenne :

$E\{X(t)\} = \int_{\mathbb{R}} b\, p_b\, db$

avec p_b la probabilité que le signal $X(t)$ prenne la valeur b

puissance moyenne :

$E\{X^2(t)\} = \int_{\mathbb{R}} b^2 p_b\, db$

Si possible utiliser les notations du cours !

fonction d'auto-corrélation :

$\gamma_i(t) = E\{X(t)X(t-i)\}$

Puissance moyenne : $\overline{P_x} = \gamma_0 = E\{X^2(t)\}$

$\overline{P_x} = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(\nu)\, d\nu$

2) Quelle propriété supplémentaire du signal $X(t)$ est nécessaire pour que les moyennes statistiques du signal soient égales aux moyennes temporelles évaluées sur une réalisation du signal à condition que la durée de cette observation tende vers l'infini ?

Il faut que le signal respecte la condition d'ergodisme : pour t_1 et t_2 differents

$$\left(E\{X(t_1)^* X(t_2)\} = E\{X^*(t_1 - T) X(t_2 - T)\} = \gamma(\tau) \text{ avec } \tau = t_1 - t_2 \right)$$

cette propriété ne definit pas l'ergodisme

3) Soient deux signaux aléatoires, stationnaires, centrés, $X(t)$ et $Y(t)$. Quelle propriété doivent vérifier $X(t)$ et $Y(t)$ pour que la puissance de $Z(t) = X(t) + Y(t)$ soit égale à la somme des puissances de $X(t)$ et $Y(t)$?

On a : Puissance de $Z(t) = E\{|X(t) Y(t)|^2\}$

$$= E\{|X(t)|^2\} + 2E\{X(t)Y(t)\} + E\{|Y(t)|^2\}$$

Si les deux signaux sont independants, on a $E\{(X(t) Y(t))\} = E\{X(t)\} E\{Y(t)\}$

ainsi, vu qu'ils sont centrés, $E\{X(t)\} = E\{Y(t)\} = 0$

et $E\{|Z(t)|^2\} = E\{|X(t)|^2\} + E\{|Y(t)|^2\}$

4) On cherche à détecter la présence d'un signal certain réel $s(t)$ de durée finie noyé dans un bruit.

Comment appelle-t-on le filtre optimal qui permet en sortie de maximiser le contraste (en termes de rapport signal à bruit) entre la situation où le bruit est présent par rapport à la situation où il est absent ?

Définir la réponse impulsionnelle de ce filtre optimal $h(t)$ lorsque le bruit est blanc dans la bande du signal.

Il faut un filtre RC

Partie II : FILTRAGE

Soit un signal aléatoire $X(t)$ gaussien, à valeurs réelles, stationnaire du 2ième ordre.

Soit $\widetilde{X}(t) = X(t) - \mathrm{E}\{X(t)\}$ le signal centré (on utilisera dans la suite la notation $m_X = \mathrm{E}\{X(t)\}$).

5) Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation $\gamma_X(\tau)$ de $X(t)$ en fonction de celle du signal centré, $\gamma_{\widetilde{X}}(\tau)$, et de m_X.

En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_X(\nu)$ en fonction de $\Gamma_{\widetilde{X}}(\nu)$ et de m_X.

$\gamma_X(\tau) =$

$\Gamma_X(\nu) = TF(\gamma_X(\tau))$

$E\{X(t_0)^2\} - m_X^2(t_0) + 2X(t_0)m_X(t_0)$

On s'intéresse maintenant au signal aléatoire $\tilde{X}(t)$ gaussien, **centré**, à valeurs réelles, stationnaire du 2ième ordre, dont la densité spectrale de puissance moyenne est donnée par :

$$\Gamma_{\tilde{X}}(\nu) = \Gamma_0 \Pi_{2B}(\nu).$$

On rappelle que $\dfrac{\sin(\pi 2Bt)}{\pi t} \rightleftharpoons \Pi_{2B}(\nu)$.

On met en œuvre la chaîne de traitement suivante :

$$\tilde{X}(t) \rightarrow \boxed{(\ )^2} \xrightarrow{Y(t)} \boxed{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} Y(u)du} \longrightarrow Z(t)$$

Le bloc fonctionnel $\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} Y(u)du$ correspond au filtrage de $Y(t)$ par un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T(t - T/2) \rightleftharpoons H(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} e^{-i\pi\nu T}$

6) Exprimer la valeur moyenne statistique du signal de sortie $Z(t)$ en fonction de la valeur moyenne du signal $Y(t)$, puis en fonction des caractéristiques de $\tilde{X}(t)$.

$E\{Z(t)\} = H(\nu=0)\, E\{Y(t)\}$
$= E\{Y(t)\}$

car $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$

$= E\{(X(t))^2\}$

7) Exprimer la puissance moyenne de $Z(t)$ en fonction de $H(\nu)$ et des caractéristiques de $Y(t)$.

$\Gamma_Z(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma_Y(\nu) = \cancel{\mathrm{sinc}(\pi\nu T) \times E\{(Y(t))^2\}}$
$\cancel{= H(\nu)\, E\{(Y(t))^2}$

8) Exprimer la densité spectrale de puissance moyenne de $Y(t)$ en fonction de la puissance moyenne de $\widetilde{X}(t)$, de Γ_0 et de B.

On utilisera les résultats suivants :

- $\gamma_Y(\tau) = \gamma^2_{\widetilde{X}}(0) + 2\gamma^2_{\widetilde{X}}(\tau)$ pour $Y(t) = \widetilde{X}^2(t)$ avec $\widetilde{X}(t)$ gaussien et centré
- $\Pi_{2B}(u) \underset{(\nu)}{*} \Pi_{2B}(u) = \Lambda_{2B}(\nu) = 2B\left(1 - \dfrac{|\nu|}{2B}\right)$ pour $|\nu| \leq 2B$ et nulle ailleurs

9) Donner l'expression de la variance de $Z(t)$ en fonction Γ_0, de B et de T.

On introduira ensuite la puissance moyenne de $\widetilde{X}(t)$, $P_{\widetilde{X}}$, dans cette expression.

On fera l'hypothèse que $T >> \dfrac{1}{B}$ pour simplifier les calculs et on utilisera le résultat suivant :

$\int_R |H(\nu)|^2 d\nu = \dfrac{1}{T}$.

$\sqrt{X} = A$

$X = A^2$

10) Si $B = 500$ Hz, quelle durée d'intégration T minimale faut-il pour obtenir une précision de 1% sur l'estimation de la valeur de la puissance moyenne de $\widetilde{X}(t)$, c'est-à-dire pour que $\dfrac{\sigma_Z}{\mathrm{E}\{Z(t)\}} \leq 1\%$?

$X^{1} < 1 \times 10^{-2} \iff X^2 < 1 \times 10^{-4}$

Partie III : FILTRAGE A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE

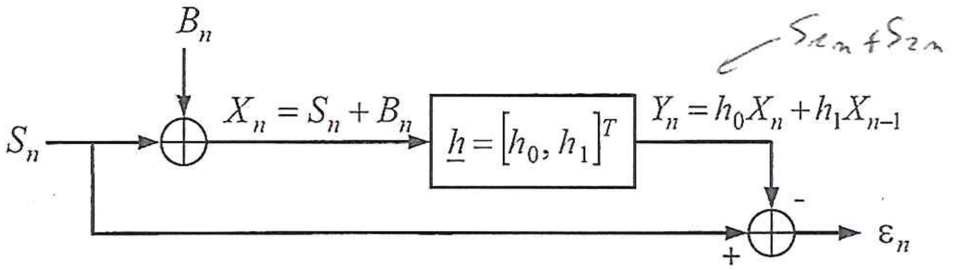
Nous nous intéressons à un signal aléatoire échantillonné $\{S_n\}$ stationnaire à valeurs réelles dont la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$\gamma_S(k) = \mathrm{E}\{S_n S_{n-k}\} = a^{|k|} \qquad \text{avec } 0 < a < 1$$

Nous avons accès au signal aléatoire échantillonné $\{X_n\}$ correspondant à la superposition du signal aléatoire $\{S_n\}$ stationnaire et d'un bruit blanc $\{B_n\}$ centré, stationnaire à l'ordre 2, de variance σ_B^2. $\{S_n\}$ et $\{B_n\}$ ne sont pas corrélés.

$$X_n = S_n + B_n$$

On souhaite estimer le signal d'intérêt $\{S_n\}$ à partir de l'observation $\{X_n\}$ en utilisant un filtre FIR (ou R.I.F.) à deux coefficients $\underline{h} = [h_0, h_1]^T$.



11) On note S_{1n} et B_{1n} les composantes signal et bruit de Y_n.

Calculer les rapport signaux à bruit en entrée $\left[\frac{S}{B}\right]_0 = \frac{\mathrm{E}\{S_n^2\}}{\mathrm{E}\{B_n^2\}}$ et en sortie $\left[\frac{S}{B}\right]_1 = \frac{\mathrm{E}\{S_{1n}^2\}}{\mathrm{E}\{B_{1n}^2\}}$ du filtre FIR en fonction de a, σ_B^2, h_0 et h_1.

$E\{S_{1n}^2\} = H_0\, E\{S_n^2\}$ avec $H_0 =$

On propose de déterminer le filtre FIR qui minimise la puissance de l'erreur $\{\varepsilon_n\}$ (Filtre de Wiener)

12) Calculer $\mathrm{E}\{\varepsilon_n X_n\}$ et $\mathrm{E}\{\varepsilon_n X_{n-1}\}$ en fonction de a, σ_B^2, h_0 et h_1.

13) A partir des résultats obtenus à la question 12 et en utilisant le principe d'orthogonalité entre l'erreur d'estimation $\{\varepsilon_n\}$ et le signal $\{X_n\}$, proposer un système linéaire de deux équations qui permettront de calculer les valeurs des 2 coefficients du filtre de Wiener h_0 et h_1.

En résolvant ce système linéaire, on obtient $h_0 = \dfrac{1+\sigma_B^2 - a^2}{(1+\sigma_B^2)^2 - a^2}$ et $h_1 = \dfrac{a^2\sigma_B^2}{(1+\sigma_B^2)^2 - a^2}$

14) On s'intéresse aux filtres FIR de Wiener d'ordre 2 pour des processus AR $\{S_n\}$ très faiblement et très fortement corrélés.

Vers quels filtres tendent ces filtres lorsque la corrélation entre 2 échantillons successifs du processus AR tend vers 0 ou vers 1 ?

Expliquer les propriétés des filtres FIR de Wiener obtenus pour ces deux cas limites.

En vous appuyant sur les résultats obtenus à la question 11), évaluer le gain en rapport signal à bruit pour chacun des 2 cas limites précédents.

CPE LYON

$\frac{2,5}{35} = \frac{0,5}{5}$

Partie IV

Année universitaire 2015/2016

NOM : Delamea	**PRENOM :** Romain

Consignes relatives au déroulement de l'épreuve

Date : 19 novembre 2015

Contrôle de : Traitement des Signaux Aléatoires

Durée: 2 h

Professeurs responsables : P. Pittet – N. Gache – P. Gonçalves

Documents : ☐ **autorisés** ☒ **non autorisés**

Calculatrices : ☐ **autorisées** ☒ **non autorisées**

LES TELEPHONES PORTABLES ET AUTRES APPAREILS DE STOCKAGE DE DONNEES NUMERIQUES NE SONT PAS AUTORISES.

Les téléphones portables doivent être éteints pendant toute la durée de l'épreuve et rangés dans les cartables.

S'agissant de contrôle sans document, les trousses doivent être rangées dans les cartables.

Les cartables doivent être fermés et posés au sol.

Les oreilles des candidats doivent être dégagées.

Rappels importants sur la discipline lors des examens

La présence à tous les examens est strictement obligatoire ; tout élève présent à une épreuve doit rendre une copie, même blanche, portant son nom, son prénom et la nature de l'épreuve.
Une absence non justifiée à un examen invalide automatiquement le module concerné.
Toute suspicion sur la régularité et le caractère équitable d'une épreuve est signalée à la direction des études qui pourra décider l'annulation de l'épreuve; tous les élèves concernés par l'épreuve sont alors convoqués à une épreuve de remplacement à une date fixée par le responsable d'année.
Toute fraude ou tentative de fraude est portée à la connaissance de la direction des études qui pourra réunir le Conseil de Discipline. Les sanctions prises peuvent aller jusqu'à l'exclusion définitive du (des) élève(s) mis en cause.

Consignes générales

L'examen comporte quatre parties.

Les trois premières parties sont dans une première liasse et la quatrième dans une autre.

Les deux liasses doivent être rendues au surveillant.

Les réponses doivent être portées directement sur les énoncés.

Les réponses ne doivent pas être rédigées au crayon à papier ni au stylo rouge.

Lire attentivement la totalité de l'énoncé de chaque partie avant de commencer.

Certaines questions des exercices peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie IV : Estimation

On veut évaluer la surface d'une pièce circulaire à partir de la mesure de son rayon. On rappelle que $S = \pi r^2$ où r est le rayon de la pièce.

On sera capable d'opérer deux mesures indépendantes de ce rayon, mesures que l'on notera r_1 et r_2.

Ces mesures sont non-biaisées mais leur dispersion est chiffrée par un écart-type σ.

On propose trois méthodes de calcul de la surface :

$$S_1 = \pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 \qquad S_2 = \pi\frac{\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{2} \qquad S_3 = \pi r_1 r_2$$

1. Exprimer $\mathrm{E}\{r_k\}$ et $\mathrm{E}\{r_k^2\}$ pour $k = 1,2$ en fonction de r et σ.

$E\{r_k\} = ?$

$\sigma^2 = ?$

0

2. Calculer le biais associé à chacune des trois méthodes de calcul de S.

$b_1 = \underbrace{E\{S(r)\}}_{=?} - E\{S_1(r)\}$

$S(r) = \pi r^2$

$E\{S(r)\} = \pi r^2 = S$

0,5

3. Parmi les trois estimateurs proposés, on ne s'intéresse plus qu'aux estimateurs non-biaisés de S. Calculer leur variance en fonction de r et σ.

4. Pour les estimateurs non-biaisés, chiffrer la précision d'estimation associée, dans le cas où $r = 1$ cm et $\sigma = 0{,}1$ cm.