8/20

Parties I à IV

Année universitaire 2016/2017

NOM : Elkain PRENOM : Manon

Consignes relatives au déroulement de l'épreuve

Date : 15 novembre 2016

Contrôle de : Traitement des Signaux Aléatoires

Durée: 2 h

Professeurs responsables : P. Pittet – N. Gache – P. Gonçalves

Documents : ☐ **autorisés** ☒ **non autorisés**

Calculatrices : ☐ **autorisées** ☒ **non autorisées**

I = 1/5
II = 2,25/3
III = 1,5/4
IV = 2/4

LES TELEPHONES PORTABLES ET AUTRES APPAREILS DE STOCKAGE DE DONNEES NUMERIQUES NE SONT PAS AUTORISES.

Les téléphones portables doivent être éteints pendant toute la durée de l'épreuve et rangés dans les cartables.

S'agissant de contrôle sans document, les trousses doivent être rangées dans les cartables.

Les cartables doivent être fermés et posés au sol.

Les oreilles des candidats doivent être dégagées.

Rappels importants sur la discipline lors des examens

La présence à tous les examens est strictement obligatoire ; tout élève présent à une épreuve doit rendre une copie, même blanche, portant son nom, son prénom et la nature de l'épreuve.
Une absence non justifiée à un examen invalide automatiquement le module concerné.
Toute suspicion sur la régularité et le caractère équitable d'une épreuve est signalée à la direction des études qui pourra décider l'annulation de l'épreuve; tous les élèves concernés par l'épreuve sont alors convoqués à une épreuve de remplacement à une date fixée par le responsable d'année.
Toute fraude ou tentative de fraude est portée à la connaissance de la direction des études qui pourra réunir le Conseil de Discipline. Les sanctions prises peuvent aller jusqu'à l'exclusion définitive du (des) élève(s) mis en cause.

Consignes générales
L'examen comporte cinq parties. Les quatre premières parties sont dans une première liasse et la cinquième dans une autre. Les deux liasses doivent être rendues au surveillant. Les réponses doivent être portées directement sur les énoncés. <u>Les réponses ne doivent pas être rédigées au crayon à papier ni au stylo rouge.</u> Lire attentivement la totalité de l'énoncé de chaque partie avant de commencer. Certaines questions des exercices peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie I : QUESTIONS DE COURS

A) Soit un signal aléatoire $X(t)$ stationnaire au 2ième ordre.

1) On calcule les moyennes statistiques du signal $X(t)$ aux dates t_0, t_1 et t_2 avec $t_0 < t_1 < t_2$. Quelle relation existe-t-il entre $E\{X(t_0)\}$, $E\{X(t_1)\}$ et $E\{X(t_2)\}$?

Le signal X(t) est stationnaire d'ordre 2, la moyenne statistique est donc indépendante du temps :

$E\{X(t_0)\} = E\{X(t_1)\} = E\{X(t_2)\} = \bar{m}_x$.

2) Exprimer $E\left\{X\left(t_0 + t_1 - \frac{T}{2}\right)X^*\left(t_0 + t_2 + \frac{T}{2}\right)\right\}$ en fonction de $\gamma_X(\tau)$, la fonction d'autocorrélation statistique du signal $X(t)$.

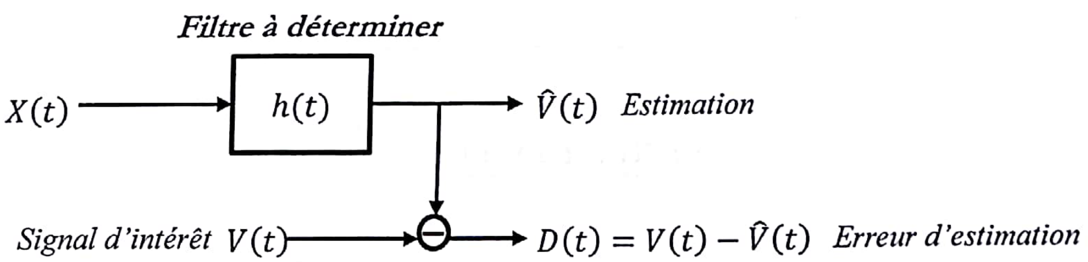
La fonction d'autocorrélation est invariante par translation temporelle :

$E\{X(t_0+t_1-\frac{T}{2})X^*(t_0+t_2+\frac{T}{2})\} = \gamma_x(\tau)$, $\tau = t_1 - t_2 - T$

$t = t_0 + t_1 - \frac{T}{2}$

$t - \tau = t_0 + t_2 + \frac{T}{2} \Rightarrow \tau = t_1 - t_2 - T$

B) On cherche à estimer un signal d'intérêt $V(t)$ par filtrage linéaire d'un signal aléatoire $X(t)$. On souhaite déterminer un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$, qui fournit en sortie un signal $\hat{V}(t)$, qualifié de « bonne estimation » du signal d'intérêt $V(t)$, c'est-à-dire qui minimise l'erreur d'estimation $D(t)$ au sens d'un critère donné.



On propose d'utiliser le filtre de gain complexe :

$$H_{opt}(\nu) = \frac{\Gamma_{VX}(\nu)}{\Gamma_X(\nu)}$$

Et de réponse impulsionnelle :

$$h_{opt}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_{VX}(\nu)}{\Gamma_X(\nu)} e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

3) Comment appelle-t-on ce filtre ?

Le filtre est appellé filtre ~~adapté~~.

4) Selon quel critère peut-on dire que $\hat{V}(t)$ est la meilleure estimation possible du signal d'intérêt $V(t)$ que l'on puisse obtenir par filtrage linéaire du signal $X(t)$?

On peut dire que $\hat{V}(t)$ est la meilleur estimation possible du signal d'interêt $V(t)$ selon la ~~biais~~ : $\dot{S}_v = E\{\hat{V} - V\}$, si $S = 0$ (estimateur non-biaisé) on a une bonne estimation.

l'Err. minimum d'erreur quadratique moyenne..

5) Quel principe doit-on appliquer pour que ce critère soit satisfait ?

On applique le principe d'intégration forte pour que ce dernier soit satisfait. X

Partie II : BRUIT

On s'intéresse au bruit $B(t)$ qui résulte de la superposition d'un très grand nombre de sources de bruit élémentaires $N_i(t)$.

$$B(t) = \sum_{i=1}^{M} N_i(t) \quad avec\ M \to +\infty$$

E
Y

Les sources élémentaires de bruit $N_i(t)$ ont la même distribution statistique et sont indépendantes entre elles. Les sources de bruit $N_i(t)$ sont stationnaires à l'ordre 2, centrées et de variance σ^2.

$E[N_i] = 0$

6) Quelle loi statistique suit le bruit $B(t)$ (on utilisera le fait que les sources $N_i(t)$ sont indépendantes et identiquement distribuées) ? Qu'est-ce qui permet de justifier cette réponse ?

Le bruit $B(t)$ suit une loi gaussienne.

Théorème Central Limite

7) Le bruit $B(t)$, qui est stationnaire à l'ordre 2, est-il centré ?

On a $B(t) = \sum_{i=1}^{M} N_i(t)$, $M \to \infty$

$E[B(t)] = E[\sum_{i=1}^{m} N_i(t)] = \sum_{i=1}^{m} E[N_i(t)] = 0$

car les N_i sont centrés.

La moyenne statistique du bruit $B(t)$ est constante, elle ne dépend pas du temps donc $B(t)$ est stationnaire à l'ordre 2

de plus elle est nulle donc $B(t)$ est centré.

8) Déterminer la variance σ_B^2 de $B(t)$. Sachant que le bruit $B(t)$ est blanc, en déduire l'expression de sa fonction d'autocorrélation $\gamma_B(\tau)$.

$\sigma_B^2 = E[|B(t)|^2] - |\underbrace{E[B(t)]}_{=0}|^2 = E[|B(t)|^2]$.

$\sigma_B^2 = E[|\sum_{i=1}^{m} N_i(t)|^2] = M\sigma^2$

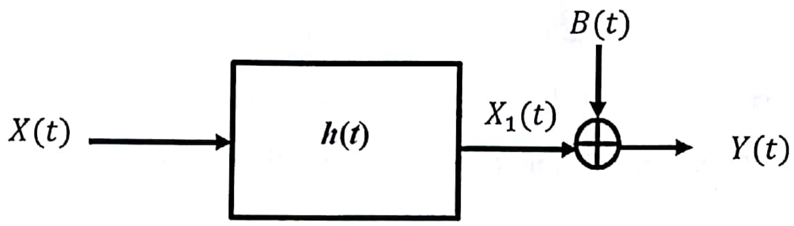
Si le bruit est blanc : $\Gamma_B(\nu) = \Gamma_0 \Rightarrow \gamma_B(\tau) = \Gamma_0 \delta(\tau)$.

Partie III : CANAL DE TRANSMISSION MULTITRAJETS

Soit $X(t)$ un signal aléatoire réel stationnaire à l'ordre 2, centré dont la fonction d'autocorrélation vaut :

$$\gamma_X(\tau) = \frac{\cos(2\pi\nu_0\tau)}{2}$$

On transmet le signal $X(t)$ sur un canal de transmission invariant dans le temps qui comporte 2 trajets. On reçoit le signal aléatoire $Y(t) = X_1(t) + B(t) = (h * X)(t) + B(t)$ où $B(t)$ est un bruit additif indépendant du signal $X(t)$.



$h(t)$, la réponse impulsionnelle du canal de transmission, est définie par :

$$h(t) = \alpha\delta(t-\tau_1) + \alpha\delta(t-\tau_2)$$

avec α une constante réelle et $\delta(t)$ la fonction de Dirac. On désigne par $H(\nu)$ le gain complexe du canal de transmission. (On rappelle que $\delta(u-u_0) * x(u) = x(u-u_0)$)

$B(t)$ est un bruit gaussien, réel, centré, stationnaire d'ordre 2, de densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_B(\nu) = \Gamma_0\left(\Pi_{\Delta\nu}(\nu+\nu_0) + \Pi_{\Delta\nu}(\nu-\nu_0)\right)$ avec $\nu_0 > \frac{\Delta\nu}{2}$

9) Calculer la valeur de $\bar{P}_B$ la puissance moyenne du bruit $B(t)$

$\bar{P}_B = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_B(\nu)\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0\left(\Pi_{\Delta\nu}(\nu+\nu_0) + \Pi_{\Delta\nu}(\nu-\nu_0)\right)d\nu = 2\Gamma_0\Delta\nu$

10) Donner la valeur de la moyenne statistique du signal $X(t)$ et rappeler la relation qui existe entre $E\{Y(t)\}$, $E\{X(t)\}$ et $H(\nu)$. En déduire, la valeur de la moyenne statistique du signal $Y(t)$.

$X(t)$ est centré donc $E\{X(t)\} = 0$.

$E\{Y(t)\} = E\{X_1(t) + B(t)\} = E\{X_1(t)\} + \underbrace{E\{B(t)\}}_{=0}$ ($B(t)$ centré)

$E\{Y(t)\} = E\{X(t)\}\, H(0)$

$E\{Y(t)\} = 0$ ($X(t)$ centré $\Rightarrow E\{X(t)\} = 0$).

11) Calculer $\gamma_{X_1}(\tau)$, la fonction d'autocorrélation du signal $X_1(t)$, en fonction de $\gamma_X(\tau)$. En déduire, la valeur de $\bar{P}_{X_1}$, puissance moyenne du signal $X_1(t)$, en fonction de $\gamma_X(\tau)$, α et $\Delta\tau = (\tau_1 - \tau_2)$.

$\gamma_{X_1}(\tau) = E\{X_1(t) X_1^*(t-\tau)\} = E\{X * h(t) \cdot X * h(t-\tau)\}$

$\gamma_{X_1}(\tau) = E\{(\alpha X(t-\tau_1) + \alpha X(t-\tau_2)) . (\alpha X(t-\tau-\tau_1) + \alpha X(t-\tau-\tau_2))\}$

$\gamma_{X_1}(\tau) = E\{\alpha^2 X(t-\tau_1) X(t-\tau-\tau_1) + \alpha^2 X(t-\tau_1) X(t-\tau-\tau_2)$
$+ \alpha^2 X(t-\tau_2) X(t-\tau-\tau_1) + \alpha^2 X(t-\tau_2) X(t-\tau-\tau_2)\}$

$\gamma_{X_1}(\tau) = \alpha^2 (2\gamma_X(\tau) + \gamma_X(\tau - \tau_1)^{+\tau_2} + \gamma_X(\tau-\tau_2)^{-\tau_1})$

$\bar{P}_{X_1} = \gamma_{X_1}(0) = \alpha^2 (2\gamma_X(0) + \gamma_X(-\tau_1) + \gamma_X(-\tau_1))$

$\bar{P}_{X_1} = \alpha^2 \left(2 \cdot \frac{\cos(2\pi\nu_0 \cdot 0)}{2} + \frac{\cos(2\pi\nu_0 \tau_1)}{2} + \frac{\cos(2\pi\nu_0 \tau_2)}{2}\right)$

$\bar{P}_{X_1} = \alpha^2 (1 +$

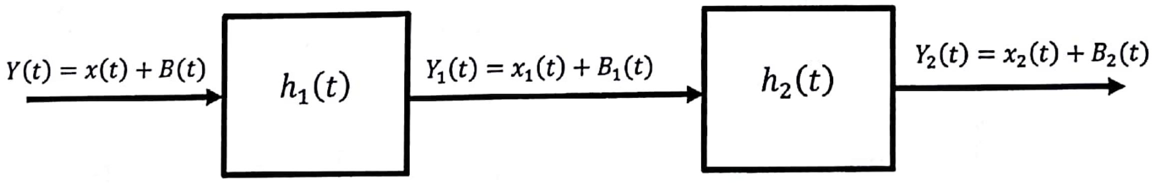
12) Calculer la valeur du rapport signal à bruit $\left[\frac{\bar{P}_{X_1}}{\bar{P}_B}\right]$en fonction de Γ_0, $\Delta\nu$, $\gamma_X(\tau)$, α et $\Delta\tau$.

$$\left[\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_B}\right] = \frac{\quad}{2\Gamma_0}$$

Partie IV : FILTRAGE

Soit $x(t)$ un signal réel certain d'énergie finie et dont le support spectral est $[-\nu_0; +\nu_0]$. On désigne par $X(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$. Le support spectral de $x(t)$ est $[-\nu_0; +\nu_0]$, c'est-à-dire que $X(\nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_0$.

Soit $B(t)$ un bruit aléatoire réel stationnaire à l'ordre 2, centré dont la densité spectrale de puissance moyenne est $\Gamma_B(\nu)$. Le signal $Y(t) = x(t) + B(t)$ est filtré successivement par deux filtres linéaires $h_1(t)$ et $h_2(t)$.



Le gain complexe du filtre $h_1(t)$ est $H_1(\nu)$ défini par :

$$\begin{cases} H_1(\nu) = \sqrt{\dfrac{\Gamma_0}{\Gamma_B(\nu)}} \text{ pour } |\nu| \leq \nu_0 \\ H_1(\nu) = 0 \text{ pour } |\nu| > \nu_0 \end{cases}$$

Le gain complexe du filtre $h_2(t)$ est $H_2(\nu) = H_1^*(\nu)X^*(\nu)$.

NB : A part pour la 2ème partie de la question 15, on traitera l'ensemble des questions de cet exercice dans le domaine spectral.

13) Calculer $\Gamma_{B_1}(\nu)$ la densité spectrale de puissance moyenne du bruit $B_1(t)$. Que peut-on dire de ce bruit sur le support spectral $[-\nu_0; +\nu_0]$.

$\Gamma_{B_1}(\nu) = |H_1(\nu)|^2 \, \Gamma_B(\nu)$.

$\Gamma_{B_1}(\nu) = \left(\sqrt{\dfrac{\Gamma_0}{\Gamma_B(\nu)}}\right)^2 \Gamma_B(\nu)$ pr $|\nu| \leq \nu_0$ $\quad (\Gamma_{B_1}(\nu) = 0$ ailleurs$)$

$\Gamma_{B_1}(\nu) = \Gamma_0$ pr $|\nu| \leq \nu_0$: sur le support spectral $[-\nu_0 ; \nu_0]$ ce bruit est blanc.

14) Calculer, en fonction de $\Gamma_B(\nu)$, Γ_0 et $X(\nu)$:

- $\Gamma_{B_2}(\nu)$, la densité spectrale de puissance moyenne du bruit $B_2(t)$
- et $\overline{P}_{B_2}$, la puissance moyenne du bruit.

. $\Gamma_{B_2}(\nu) = |H_2(\nu)|^2 \, \Gamma_{B_1}(\nu) = |H_1^*(\nu) \, X^*(\nu)|^2 \, \Gamma_0$

$\Gamma_{B_2}(\nu) = \dfrac{\Gamma_0}{\Gamma_B(\nu)} X^2(\nu) \, \Gamma_0$

$\Gamma_{B_2}(\nu) = \Gamma_0^2 \cdot \dfrac{X^2(\nu)}{\Gamma_B(\nu)}$

$$\bar{P}_{S_2} = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \Gamma_{S_2}(\nu)\, d\nu \quad = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \Gamma_0 \frac{X^2(\nu)}{\Gamma_B(\nu)}\, d\nu$$

15) Calculer $X_2(\nu)$. En déduire que $x_2(0) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \frac{\Gamma_0 |X(\nu)|^2}{\Gamma_B(\nu)} d\nu$.

$X_2 = h_2 \underset{t}{*} X_1$ et $X_1 = h_1 \underset{t}{*} X$

- $X_1 =$

Scanned by CamScanner

16) On définit la valeur du rapport signal à bruit en sortie du filtre $h_2(t)$ à l'instant t par

$$\left[\frac{S}{B}\right](t) = \frac{|x_2(t)|^2}{\bar{P}_{B_2}}$$

Calculer $\left[\frac{S}{B}\right](0)$ en fonction de $\Gamma_B(\nu)$ et $X(\nu)$.

CPE LYON

5,5 / 18

Partie V

Année universitaire 2016/2017

NOM :...ELKAÏM.......................PRENOM :...Manon.................

Consignes relatives au déroulement de l'épreuve

Date : 15 novembre 2016

Contrôle de : Traitement des Signaux Aléatoires

Durée: 2 h

Professeurs responsables : P. Pittet – N. Gache – P. Gonçalves

Documents : ☐ **autorisés** ☒ **non autorisés**

Calculatrices : ☐ **autorisées** ☒ **non autorisées**

LES TELEPHONES PORTABLES ET AUTRES APPAREILS DE STOCKAGE DE DONNEES NUMERIQUES NE SONT PAS AUTORISES.

Les téléphones portables doivent être éteints pendant toute la durée de l'épreuve et rangés dans les cartables.

S'agissant de contrôle sans document, les trousses doivent être rangées dans les cartables.

Les cartables doivent être fermés et posés au sol.

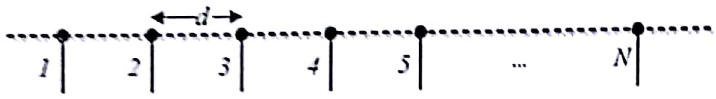
Les oreilles des candidats doivent être dégagées.

Rappels importants sur la discipline lors des examens

La présence à tous les examens est strictement obligatoire ; tout élève présent à une épreuve doit rendre une copie, même blanche, portant son nom, son prénom et la nature de l'épreuve.
Une absence non justifiée à un examen invalide automatiquement le module concerné.
Toute suspicion sur la régularité et le caractère équitable d'une épreuve est signalée à la direction des études qui pourra décider l'annulation de l'épreuve; tous les élèves concernés par l'épreuve sont alors convoqués à une épreuve de remplacement à une date fixée par le responsable d'année.
Toute fraude ou tentative de fraude est portée à la connaissance de la direction des études qui pourra réunir le Conseil de Discipline. Les sanctions prises peuvent aller jusqu'à l'exclusion définitive du (des) élève(s) mis en cause.

Partie V – ESTIMATION

On considère un réseau de N capteurs numérotés de 1 à N régulièrement espacés d'une distance d.



On cherche à estimer le pas d. Pour cela, on émet une impulsion suivant l'axe des capteurs. On mesure alors le temps de propagation de l'onde entre le capteur i et le capteur 1 pris comme référence.

La mesure de chaque retard τ_i $(i = 2, \ldots, N)$ est affectée d'un bruit ε_i de sorte que les observations dont on dispose s'écrivent :

$$\tau_i = (i-1)\frac{d}{c} + \varepsilon_i \quad i = 2, \ldots\ldots, N$$

$\frac{\tau_i}{i-1} c - \varepsilon_i = d$

avec ε_i variables aléatoires gaussiennes $\mathcal{N}(0,\sigma)$ indépendantes $(E\{\varepsilon_i \varepsilon_j\} = \sigma^2 \delta_{ij})$

c = constante (célérité des ondes dans le milieu)

On propose pour estimer d :

$$\hat{d} = cK \sum_{i=2}^{N} (i-1)\tau_i \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{\sum_{i=2}^{N} (i-1)^2}$$

Question 1 . Cet estimateur est-il biaisé ?

$E[\hat{d}] = E\left[ck \sum_{i=2}^{N} (i-1)\tau_i\right] = E\left[ck \sum_{i=2}^{N} (i-1) \left((i-1)\frac{d}{c} + \varepsilon_i\right)\right]$

Pourquoi calculer ceci ?

$E[\hat{d}] = E\left[c \cdot \frac{1}{\sum_{i=2}^{N} (i-1)^2} \cdot \cancel{\sum_{i=2}^{N} (i-1)^2 \cdot \frac{d}{c} + \varepsilon_i}\right]$

$E[\hat{d}] = E[d + \varepsilon_i] = E[d] = d$ Pourquoi ? Pourquoi ?

$E[\hat{d}] = d$: Estimateur non biaisé $(b = E[\hat{d}] - d = 0)$.

4,5

Question 2 . On sait que, à N donné, la variance minimale que peuvent atteindre les estimateurs de la famille de $\hat{d}$, appelée borne de Cramer-Rao, vaut $C.R. = Kc^2\sigma^2$.

Les estimateurs dont la variance atteint cette borne minimale sont dits « efficaces ».

$\hat{d}$ est-il efficace ?

$\hat{\sigma}^2 = E[\hat{d}^2] - E[\hat{d}]^2$

$\hat{\sigma}^2 = E\left[c^2K^2\left(\sum_{i=2}^{N}(i-1)\right)^2 z_i^2\right] - d^2 = \cancel{E\left[c^2K^2\left(\sum_{i=2}^{N}(i-1)\right)^2\left((i-1)\frac{d}{c}+\varepsilon_i\right)^2\right] - d^2}$

$\hat{\sigma}^2 = E\left[\cancel{c^2\frac{1}{\left(\sum_{i=2}^{N}(i-1)^2\right)^2}\left(\sum_{i=2}^{N}(i-1)\right)^2\left[\left((i-1)\frac{d}{c}\right)^2\right.}+2(i-1)\frac{d}{c}\varepsilon_i+\varepsilon_i^2\right]\right] - d^2$

1

$\hat{d}^2 =$