

# Morphologie mathématique des images binaires

C. Burnier

Module "traitement et synthèse d'image" 4ETI-S7

2015-2016

## 1 Erosion, dilatation

- Définitions et propriétés
- Dilatation/Erosion et carte des distances
- Applications

## 2 Ouverture, fermeture

- Définitions et propriétés
- Applications

## 3 Transformations géodésiques

- Dilatation et érosion géodésique
- Reconstructions géodésiques
- Applications

# Plan

- 1 Erosion, dilatation
  - Définitions et propriétés
  - Dilatation/Erosion et carte des distances
  - Applications
- 2 Ouverture, fermeture
- 3 Transformations géodésiques

# Opérations de base

Soit  $I$  une image binaire, on note  $X$  les ensembles connexes de l'image càd les objets de  $I$ .

# Opérations de base

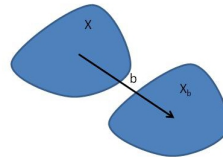
Soit  $I$  une image binaire, on note  $X$  les ensembles connexes de l'image c-à-d les objets de  $I$ .

- translaté :

$$X_b = \{x + b \mid x \in X\}$$

# Opérations de base

Soit  $I$  une image binaire, on note  $X$  les ensembles connexes de l'image càd les objets de  $I$ .



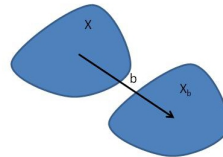
- translaté :

$$X_b = \{x + b \mid x \in X\}$$

Figure 1: Translaté d'un ensemble

# Opérations de base

Soit  $I$  une image binaire, on note  $X$  les ensembles connexes de l'image càd les objets de  $I$ .



- traduit :  
$$X_b = \{x + b | x \in X\}$$
- transposé :  
$$X^t = \{-x | x \in X\}$$

Figure 1: Translaté d'un ensemble

# Opérations de base

Soit  $I$  une image binaire, on note  $X$  les ensembles connexes de l'image càd les objets de  $I$ .

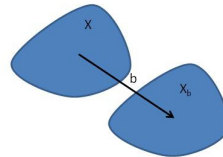


Figure 1: Translaté d'un ensemble

- translaté :  
$$X_b = \{x + b | x \in X\}$$
- transposé :  
$$X^t = \{-x | x \in X\}$$

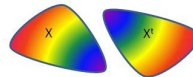
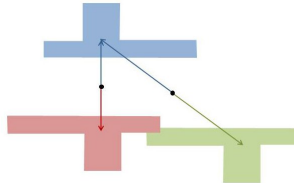


Figure 2: Transposé d'un ensemble



## Opérations de base

Remarque : les deux opérateurs, translaté et transposé, nécessitent que soit définie une origine. Le résultat ne dépend cependant de cette origine qu'à une translation près.



**Figure 3:** Le choix de l'origine modifie le résultat de l'opérateur translaté, que d'une translation.

# Addition de Minkowski et dilatation

## Addition de Minkowski

Soient  $X$  et  $B$  deux ensembles, on définit l'opérateur **d'addition de Minkowski** par :

$$X \oplus B = \{x + b | x \in X, b \in B\} = \cup \{X_b | b \in B\}$$

# Addition de Minkowski et dilatation

## Addition de Minkowski

Soient  $X$  et  $B$  deux ensembles, on définit l'opérateur **d'addition de Minkowski** par :

$$X \oplus B = \{x + b | x \in X, b \in B\} = \cup \{X_b | b \in B\}$$

## Dilatation

De même on définit l'opérateur **de dilatation** par :

$$D_B(X) = \{x + b | x \in X, b \in B^t\} = \cup \{X_{-b} | b \in B\}$$

# Dilatation

Remarques :

- Le dilaté  $D(X, B)$  est l'ensemble des pixels  $z$  tels que  $B$  translaté en  $z$  rencontre  $X$ .

$$D_B(X) = \{z | B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

# Dilatation

Remarques :

- Le dilaté  $D(X, B)$  est l'ensemble des pixels  $z$  tels que  $B$  translaté en  $z$  rencontre  $X$ .

$$D_B(X) = \{z | B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

- Le dilaté ne dépend de l'origine choisie qu'à une translation près.

# Dilatation

Remarques :

- Le dilaté  $D(X, B)$  est l'ensemble des pixels  $z$  tels que  $B$  translaté en  $z$  rencontre  $X$ .

$$D_B(X) = \{z | B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

- Le dilaté ne dépend de l'origine choisie qu'à une translation près.
- En pratique, les ensembles  $X$  et  $B$  ne jouent pas le même rôle : l'ensemble  $B$  est l'élément structurant qui va permettre de traiter l'image qui est formée des objets  $X$ .

# Dilatation : exercice

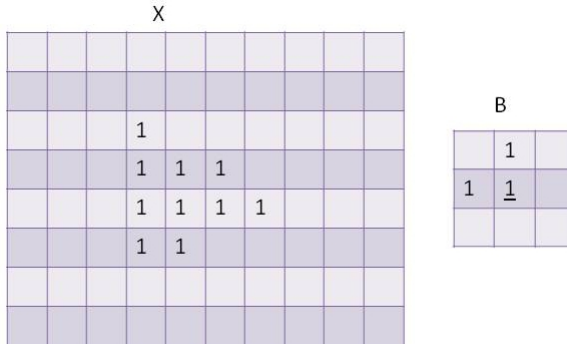


Figure 4: Tracer le dilaté de X par B.

# Dilatation : exercice

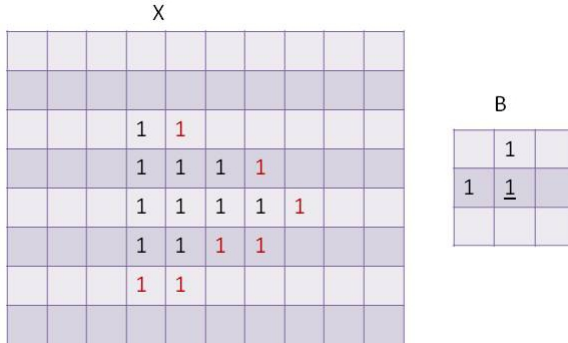


Figure 4: Dilatation de X par B.



## Dilatation : exemple



Figure 5:  
Dilatation  
par un disque  
de rayon 4.

# Soustraction de Minkowski et érosion

## Soustraction de Minkowski

Soient  $X$  et  $B$  deux ensembles, on définit l'opérateur **de soustraction de Minkowski** par :

$$X \ominus B = \{x | B_{-x} \subseteq X\} = \cap \{X_b | b \in B\}$$

# Soustraction de Minkowski et érosion

## Soustraction de Minkowski

Soient  $X$  et  $B$  deux ensembles, on définit l'opérateur **de soustraction de Minkowski** par :

$$X \ominus B = \{x | B_{-x} \subseteq X\} = \cap \{X_b | b \in B\}$$

## Erosion

De même on définit l'opérateur **d'érosion** par :

$$E_B(X) = \{x | B_x \subseteq X\} = \cap \{X_{-b} | b \in B\}$$

# Erosion

Remarques :

- L'érodé  $E(X, B)$  est l'ensemble des pixels  $z$  tels que  $B$  translaté en  $z$  soit inclus dans  $X$ .

$$E_B(X) = \{z | B_z \subseteq X\}$$

# Erosion

Remarques :

- L'érodé  $E(X, B)$  est l'ensemble des pixels  $z$  tels que  $B$  translaté en  $z$  soit inclus dans  $X$ .

$$E_B(X) = \{z | B_z \subseteq X\}$$

- L'érodé ne dépend de l'origine choisie qu'à une translation près.

# Erosion : exercice

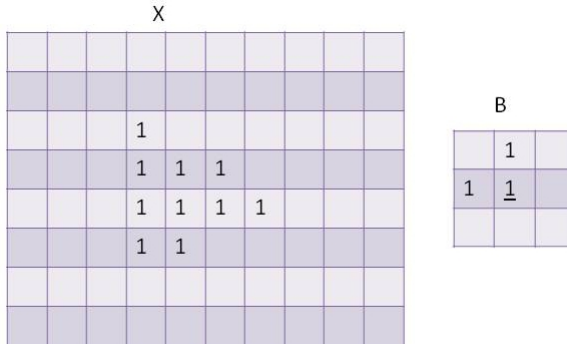


Figure 6: Tracer l'érodé de X par B.

# Erosion : exercice

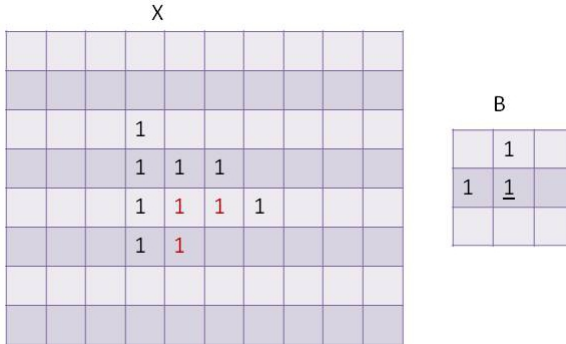


Figure 6: Erosion de X par B.

# Erosion

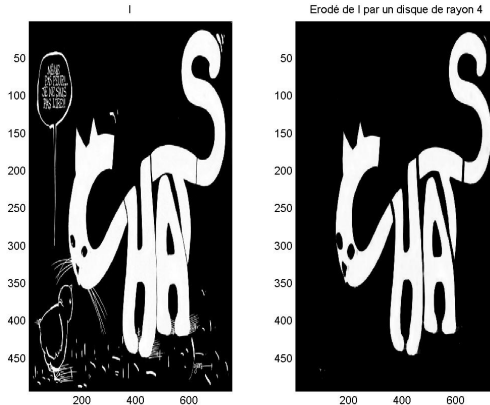


Figure 7:  
Erosion par  
un disque.



## Quelques propriétés

- Extensivité : (anti-extsive)  $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$  (extsive)

## Quelques propriétés

- Extensivité : (anti-extsive)  $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$  (extsive)
- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$  et  $D_B(X) \subset D_B(Y)$

## Quelques propriétés

- Extensivité : (anti-extsive)  $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$  (extsive)
- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$  et  $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- Distributivité :  $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$  et  $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$

## Quelques propriétés

- Extensivité : (anti-extsive)  $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$  (extsive)
- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$  et  $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- Distributivité :  $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$  et  $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$
- Connexité : les opérateurs de dilatation et d'érosion ne préservent pas le nombre de connexité.

## Quelques propriétés

- Extensivité : (anti-extsive)  $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$  (extsive)
- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$  et  $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- Distributivité :  $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$  et  $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$
- Connexité : les opérateurs de dilatation et d'érosion ne préservent pas le nombre de connexité.
- Composition :  $D_{B_2}(D_{B_1}(X)) = D_{D_{B_2^t}(B_1)}(X)$  et  $E_{B_2}(E_{B_1}(X)) = E_{D_{B_2^t}(B_1)}(X)$

## Quelques propriétés

- Extensivité : (anti-extsive)  $E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$  (extsive)
- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow E_B(X) \subset E_B(Y)$  et  $D_B(X) \subset D_B(Y)$
- Distributivité :  $E_B(X \cap Y) = E_B(X) \cap E_B(Y)$  et  $D_B(X \cup Y) = D_B(X) \cup D_B(Y)$
- Connexité : les opérateurs de dilatation et d'érosion ne préservent pas le nombre de connexité.
- Composition :  $D_{B_2}(D_{B_1}(X)) = D_{D_{B_2^t}(B_1)}(X)$  et  $E_{B_2}(E_{B_1}(X)) = E_{D_{B_2^t}(B_1)}(X)$
- Dualité :  $E_B(X) = (D_B(X^c))^c$  avec  $X^c$  complémentaire de  $X$ .

# Composition

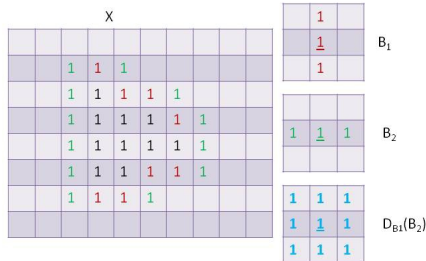


Figure 8: Composition :  $D_{B_2}(D_{B_1}(X)) = D_{D_{B_2}(B_1)}(X)$ . Le nombre d'opérations élémentaires pour la dilatation est de  $N_x N_y (h_x + h_y)$  si on utilise la séparabilité de l'élément structurant  $B$ , et de  $N_x N_y (h_x h_y)$  sinon. On a désigné par  $N_x N_y$  la taille de l'image et par  $h_x h_y$  celle de  $B$ .

# La fonction distance

Soit  $I$  une image binaire où l'on note  $X$  l'objet (par exemple les pixels à 256) et  $X^c$  son complémentaire dans  $I$ . Soit  $F$  la carte des distances c'est à dire "l'image" qui, pour tous les points de  $I$  donne la distance au pixel le plus proche de  $X$ . Alors si  $B$  désigne un disque de rayon  $r$ ,  $D_B(X) = \text{Seuillage}(F, r)$ .

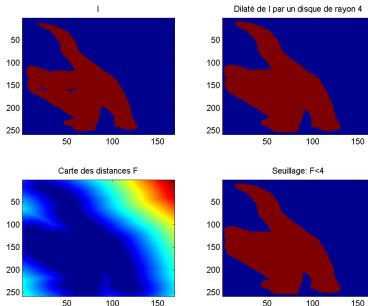


Figure 9: Dilatation et carte des distances.  
Comment obtenir l'érodé de  $X$  à partir de  $F$ ?



## Différents éléments structurants

Le choix d'un élément structurant dépend de l'application visée. Parmi les éléments les plus courants on trouve : les éléments isotropes, les lignes, les paires de points.

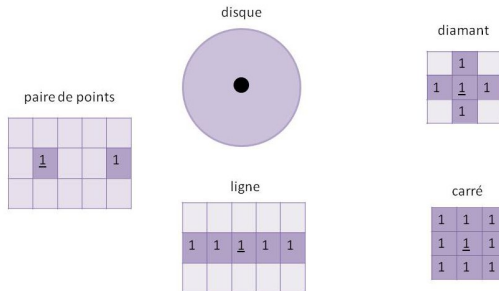


Figure 10: Exemples d'éléments structurants isotropes et non-isotropes.

## Extraction de lignes verticales

On cherche à extraire les lignes verticales épaisses de l'image I suivante. On procède à une érosion par une ligne verticale.

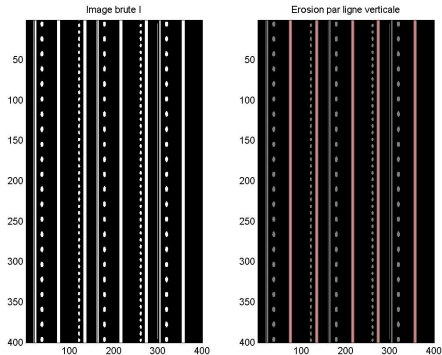


Figure 11: Gauche : l'image I; Droite, en rouge : érosion par une ligne de longueur 10 d'épaisseur 5, superposée à I.

## Covariance et recherche de périodicité

L'érosion par un élément structurant  $P_v$  formé de deux paires de points séparés par un vecteur  $v$ , est utile dans la recherche de périodicités : **l'aire de l'image érodée donne la probabilité que deux pixels séparés de  $v$  appartiennent à l'objet. On appelle covariance cette mesure lorsqu'on fait varier la distance  $\|v\|$  entre les deux pixels.**

Covariance :

$$K(P_v, I) = \frac{1}{\sum_{i,j}(I)} \sum_{i,j} E_{P_v}(I)$$

## Covariance et recherche de périodicité

On cherche la périodicité des lignes verticales de I. Pour cela, on érode I par une paire de pixels séparés de  $v = (t, 0)$ ,  $t$  variant de 0 à 200. La période qui est de 80 pixels correspond bien aux pics de la covariance de l'image.

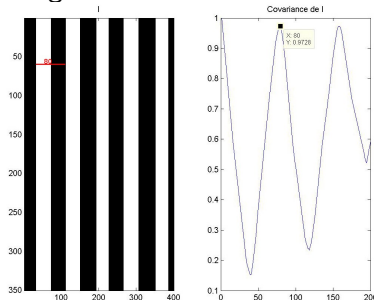


Figure 12: Gauche : image I; Droite : covariance de I. L'abscisse correspond à la distance  $t$  séparant les deux pixels.

# La transformée Tout-ou-Rien

La transformée Tout-ou-Rien (Hit-or-Miss en anglais) consiste à extraire tous les pixels d'une image dont le voisinage reproduit un motif donné. Ce motif est décrit par deux éléments structurants  $B = (B^{FG}, B^{BG})$ , partageant une même origine. Un pixel  $x$  sera extrait si en  $x$ ,  $B^{FG}$  est inclus dans l'objet tandis que  $B^{BG}$  doit être inclus dans le fond (c'est à dire le complémentaire de l'objet).

Transformée Tout-ou-Rien :

$$\begin{aligned} HMT_B(X) &= \left\{ x \mid B_x^{FG} \subseteq X, B_x^{BG} \subseteq X^c \right\} \\ &= E_{B^{FG}}(X) \cap E_{B^{BG}}(X^c) \end{aligned}$$

## La transformée Tout-ou-Rien

Par exemple, si on cherche les pixels isolés d'une image, on choisira comme éléments structurants :

	$B^{FG}$	$B^{BG}$																		
$V_4$	<table> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td><u>0</u></td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	0	1	<u>0</u>	1	0	1	0
0	0	0																		
0	<u>1</u>	0																		
0	0	0																		
0	1	0																		
1	<u>0</u>	1																		
0	1	0																		
$V_8$	<table> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td><u>0</u></td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	1	<u>0</u>	1	1	1	1
0	0	0																		
0	<u>1</u>	0																		
0	0	0																		
1	1	1																		
1	<u>0</u>	1																		
1	1	1																		

**Figure 13:** Deux exemples de paires d'éléments structurants pour la recherche de points isolés, pour un voisinage  $V_4$  (ligne du haut) ou  $V_8$  (ligne du bas). L'origine est désignée par le pixel chiffre souligné.

# La transformée Tout-ou-Rien : recherche des extrémités

On cherche maintenant à extraire les pixels qui appartiennent aux extrémités des objets. Ces points ont pour caractéristique d'être en contact avec au plus un seul autre pixel de l'objet. Il suffit de prendre l'union des quatre  $HMT_B$  où  $B$  désigne tour à tour l'une des paires  $(B^{FG}, B^{BG})$  suivantes :

$B^{FG}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0
	0	0	0																																					
	0	<u>1</u>	0																																					
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>1</u>	0																																						
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>1</u>	0																																						
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>1</u>	0																																						
0	0	0																																						
$B^{BG}$	<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td><u>0</u></td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	1	<u>0</u>	1	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td><u>0</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	1	<u>0</u>	0	0	1	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td><u>0</u></td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	1	<u>0</u>	1	0	1	0	<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>0</u></td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	0	<u>0</u>	1	0	1	0
	0	1	0																																					
	1	<u>0</u>	1																																					
0	0	0																																						
0	1	0																																						
1	<u>0</u>	0																																						
0	1	0																																						
0	0	0																																						
1	<u>0</u>	1																																						
0	1	0																																						
0	1	0																																						
0	<u>0</u>	1																																						
0	1	0																																						

Figure 14: Les quatre paires d'éléments structurants pour la recherche d'extrémités par la transformée Tout-ou-Rien.

## La transformée Tout-ou-Rien : recherche des extrémités

On réalise la transformée Tout-ou-Rien pour les quatre paires d'éléments de la figure 14 et on prend l'union des ces transformées.

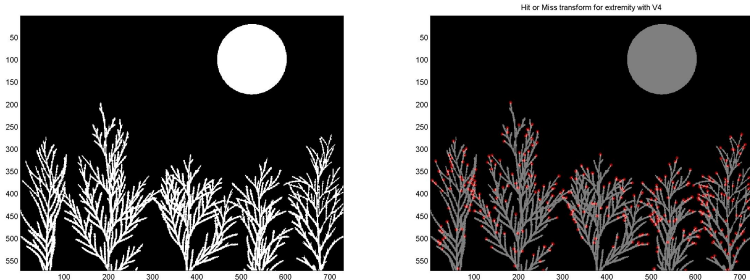


Figure 15: Gauche : l'image binaire; Droite : en rouge, extraction des extrémités par la transformée Tout-ou-Rien.



# La transformée Tout-ou-Rien : détection des points de contour

En remarquant qu'un pixel d'un objet appartient au contour de celui-ci s'il a au moins, dans son voisinage, un pixel appartenant au fond, il devient facile de caractériser un pixel de contour par la transformée Tout-ou-Rien. En considérant le voisinage V4, on procède aux quatre HMT par les éléments ci-dessous, et on prend l'union des transformées.

$\mathbf{B}^{\text{FG}}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>1</u>	0	0	0	0
	0	0	0																																					
	0	<u>1</u>	0																																					
	0	0	0																																					
0	0	0																																						
0	<u>1</u>	0																																						
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>1</u>	0																																						
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>1</u>	0																																						
0	0	0																																						
$\mathbf{B}^{\text{BG}}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td><u>1</u></td><td><u>0</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	<u>1</u>	<u>0</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td><u>1</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>0</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	<u>1</u>	0	0	<u>0</u>	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>0</u></td><td><u>1</u></td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>0</u>	<u>1</u>	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td><u>0</u></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	<u>0</u>	0	0	1	0
	0	0	0																																					
	<u>1</u>	<u>0</u>	0																																					
	0	0	0																																					
0	<u>1</u>	0																																						
0	<u>0</u>	0																																						
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>0</u>	<u>1</u>																																						
0	0	0																																						
0	0	0																																						
0	<u>0</u>	0																																						
0	1	0																																						

Figure 16: Les quatre paires d'éléments structurants pour la recherche des pixels appartenant au contour, par la transformée Tout-ou-Rien.

## La transformée Tout-ou-Rien : détection des points de contour

On réalise la transformée Tout-ou-Rien pour les 4 paires d'éléments de la figure 16, et on prend l'union des ces transformées.

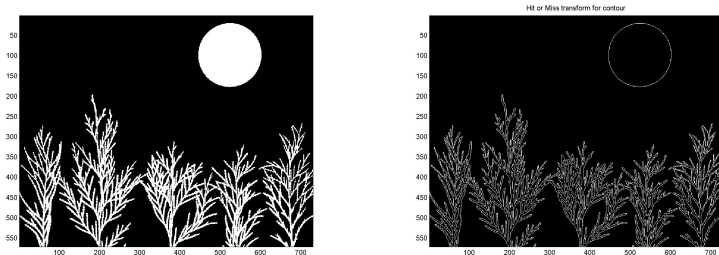


Figure 17: Gauche : l'image binaire; Droite : extraction des pixels du contour par la transformée Tout-ou-Rien.

## La transformée Tout-ou-Rien : nombre de connexité

Le nombre de connexité  $N_c$  est le nombre de composantes connexes moins le nombre de trous. Euler a montré qu'il pouvait se déduire de l'expression suivante:

$$N_c = s - a + f \quad (1)$$

où  $s, a, f$  désignent respectivement les nombres de sommets, arrêtes et faces. Si, en "reliant" les pixels, on se représente une image binaire comme un graphe, on peut calculer  $N_c$  selon l'équation (1). Par exemple, le nombre de sommets sera le nombre de configurations "1" c'est à dire le nombre de pixels.

## La transformée Tout-ou-Rien : nombre de connexité

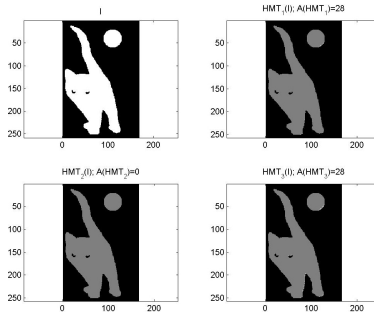
On montre que, pour une grille cartésienne (en considérant le voisinage V4),  $N_c$  peut être obtenu suite aux transformées Tout-ou-Rien par les trois éléments suivants (où l'on a noté  $\mathcal{A}$  le nombre de pixels) :

$$\begin{array}{c}
 B^{FG} \\
 \mathcal{A} \\
 B^{BG}
 \end{array}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 + \mathcal{A}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
 - \mathcal{A}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Figure 18:** Pour obtenir le nombre de connexité, on procède aux trois HMT ci-dessus et pour chacune, on compte le nombre de pixels résultants. La somme signée des trois nombres donne  $N_c$ .

# La transformée Tout-ou-Rien : nombre de connexité

Calcul du nombre de connexité :



**Figure 19:** L'image  $I$  est constituée de deux composantes connexes et deux trous. Le nombre de connexité est donc 0. Sur les images suivantes, en blanc les HMT superposées à  $I$ . L'aire des trois HMT est respectivement 28, 0 et 28 donnant  $N_c = 0$ .

# Plan

- 1 Erosion, dilatation
- 2 Ouverture, fermeture
  - Définitions et propriétés
  - Applications
- 3 Transformations géodésiques

# Ouverture

## Ouverture

On appelle ouverture de  $X$  par  $B$  l'opérateur :

$$O_B(X) = D_{B^t}(E_B(X))$$

On montre que cela est équivalent à

$$O_B(X) = \bigcup_x \{B_x | B_x \subseteq X\}$$

c'est à dire que  $O_B(X)$  est la réunion des ensembles  $B$  contenu dans  $X$ .

# Ouverture

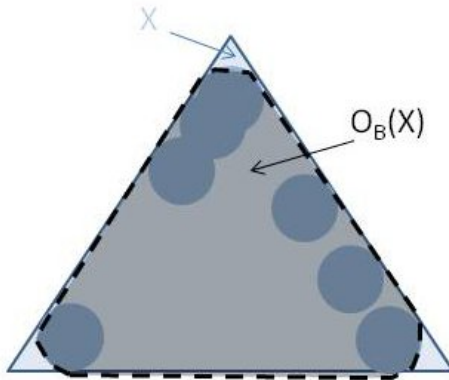


Figure 20: Ouverture par un disque : la forme  $X$  de départ (en bleu) et son ouverture (en gris, traits pointillés).



# Ouverture : exercice

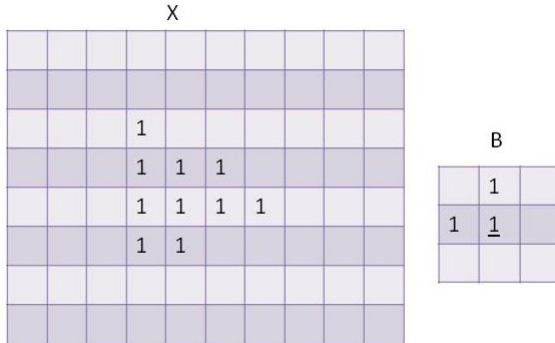


Figure 21: Tracer l'ouverture de X par B.

# Ouverture : exercice

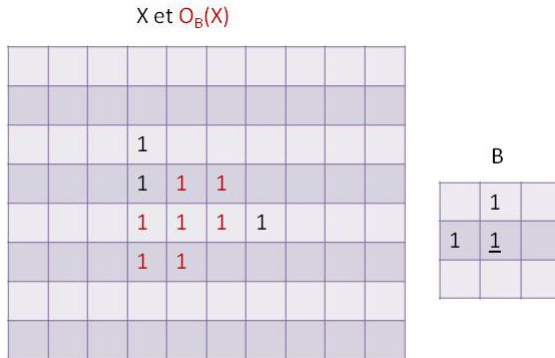


Figure 21: Ouverture de X par B.

# Ouverture

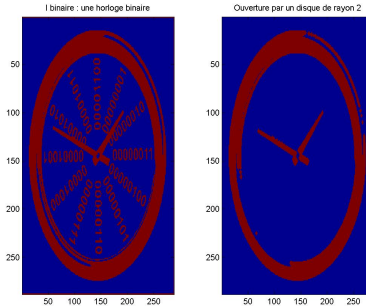


Figure 22: Ouverture de l'image binaire d'une horloge binaire... par un disque.

# Fermeture

## Fermeture

On appelle fermeture de  $X$  par  $B$  l'opérateur :

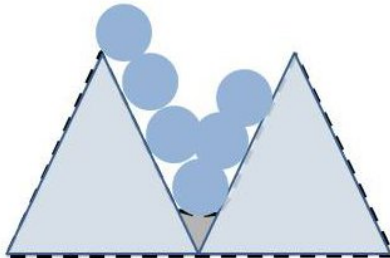
$$F_B(X) = E_{B^t}(D_B(X))$$

On montre que cela est équivalent à

$$F_B(X) = [\bigcup_x \{B_x | B_x \subseteq X^c\}]^c$$

c'est à dire que  $F_B(X)$  est le complémentaire de la réunion des ensembles  $B$  contenu dans  $X^c$ .

# Fermeture



**Figure 23:** Fermeture par un disque : la forme X de départ (en bleu) et sa fermeture (parties bleues et grises, traits pointillés). On a travaillé sur le complémentaire de la forme.

# Fermeture : exercice

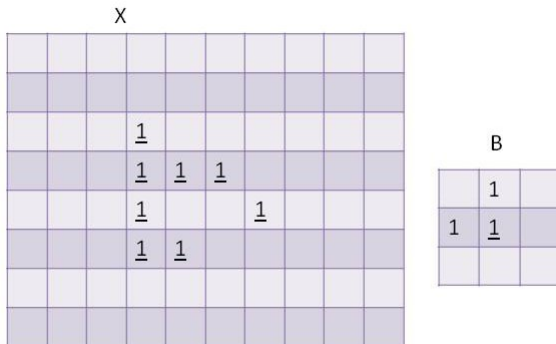


Figure 24: Tracer la fermeture de X par B.

# Fermeture : exercice

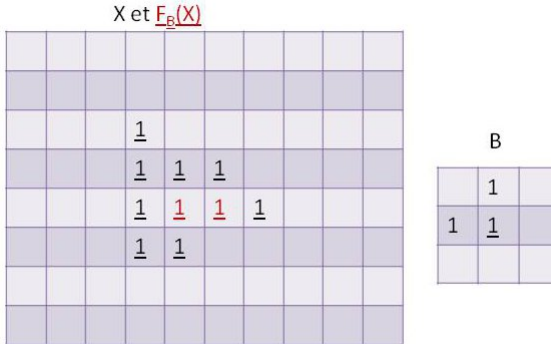


Figure 24: Fermeture de X par B.

# Fermeture

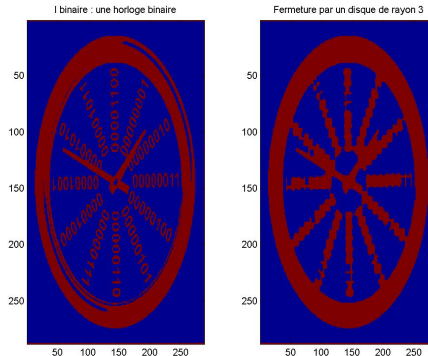


Figure 25: Fermeture de l'image binaire d'une horloge binaire... par un disque.



## Quelques propriétés

- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow O_B(X) \subset O_B(Y)$  et  $F_B(X) \subset F_B(Y)$

## Quelques propriétés

- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow O_B(X) \subset O_B(Y)$  et  $F_B(X) \subset F_B(Y)$
- Idempotence:  $O_B \circ O_B = O_B$ ,  $F_B \circ F_B = F_B$

## Quelques propriétés

- Croissance :  $X \subset Y \Rightarrow O_B(X) \subset O_B(Y)$  et  $F_B(X) \subset F_B(Y)$
- Idempotence:  $O_B \circ O_B = O_B$ ,  $F_B \circ F_B = F_B$
- Dualité :  $F_B(X) = (O_B(X^c))^c$ ,  $O_B(X) = (F_B(X^c))^c$

## Squelette d'une forme

Un pixel  $x$  appartient au squelette d'une forme  $I$  si,  $B_k$  étant le plus grand disque centré en  $x$  contenu dans  $I$ , il n'existe pas de disque plus grand contenant  $B_k$ . De manière équivalente, cela signifie que  $B_k$  est en contact avec la frontière de  $I$  en au moins deux points.

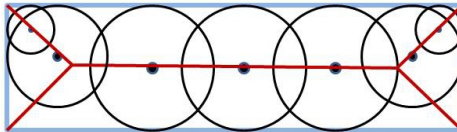


Figure 26: En bleu, la forme  $I$ , en noire, les boules  $B_k$  (dites boules maximales), en rouge, le squelette de la forme.

## Squelette d'une forme

On montre que le squelette  $S(I)$  de la forme  $I$  peut être obtenu par érosions et ouvertures d'après l'expression :

$$S(I) = \bigcup_{k=0}^K S_k(I) \text{ avec } S_k(I) = E_{B_k}(I) - O_B(E_{B_k}(I))$$

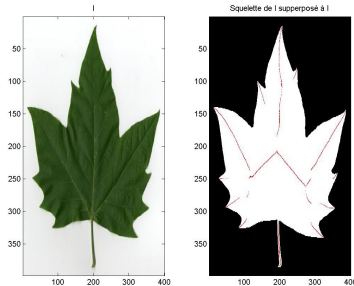


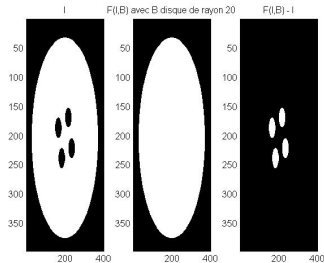
Figure 27: Gauche : la forme  $I$  ; Droite : en rouge le squelette superposé à  $I$ .

# Comptage du nombre de trous

Proposer un algorithme permettant de compter automatiquement le nombre de trous d'un objet.

# Comptage du nombre de trous

Proposer un algorithme permettant de compter automatiquement le nombre de trous d'un objet.



**Figure 28:** Gauche : image  $I$ ; Milieu : fermeture  $F$  de  $I$  par un disque de rayon 20; Droite :  $I - F(I,B)$

# Granulométrie

Proposer un algorithme permettant d'obtenir la courbe de granulométrie d'un matériau càd le nombre de particules de taille inférieure à une valeur donnée.

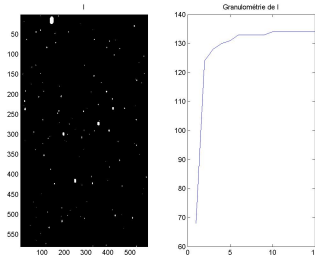


Figure 29: Image I du ciel (gauche) ; Granulométrie : distribution en nombre, des étoiles (Droite).



# Plan

- 1 Erosion, dilatation
- 2 Ouverture, fermeture
- 3 Transformations géodésiques
  - Dilatation et érosion géodésique
  - Reconstructions géodésiques
  - Applications

# Dilatation géodésique

## Dilatation géodésique de taille 1

On appelle dilatation géodésique de taille 1 du marqueur  $M$  relativement au masque  $I$  l'opérateur  $D_I^1(M) = D_B(M) \cap I$

# Dilatation géodésique

## Dilatation géodésique de taille 1

On appelle dilatation géodésique de taille 1 du marqueur  $M$  relativement au masque  $I$  l'opérateur  $D_I^1(M) = D_B(M) \cap I$

## Dilatation géodésique de taille $n$

On appelle dilatation géodésique de taille  $n$  du marqueur  $M$  relativement au masque  $I$  l'opérateur  $D_I^n(M) = D_I^1(D_I^{n-1}(M))$

# Erosion géodésique

## Erosion géodésique de taille 1

On appelle érosion géodésique de taille 1 du marqueur  $M$  relativement au masque  $I$  l'opérateur  $E_I^1(M) = E_B(M) \cup I$

# Erosion géodésique

## Erosion géodésique de taille 1

On appelle érosion géodésique de taille 1 du marqueur  $M$  relativement au masque  $I$  l'opérateur  $E_I^1(M) = E_B(M) \cup I$

## Erosion géodésique de taille $n$

On appelle érosion géodésique de taille  $n$  du marqueur  $M$  relativement au masque  $I$  l'opérateur  $E_I^n(M) = E_I^1(E_I^{n-1}(M))$

# Reconstruction par dilatation

## Définition

On appelle reconstruction par dilatation du masque  $I$  par le marqueur  $M$  l'opérateur  $R_I(M) = D_I^n(M)$  tel que  $D_I^n(M) = D_I^{n+1}(M)$

On obtient donc la reconstruction par des dilatations géodésiques successives jusqu'à stabilité.

# Reconstruction par marqueur : exercice

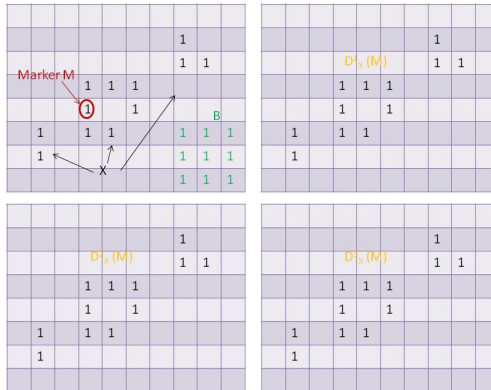


Figure 30: Tracer la reconstruction par dilatation de X par le marqueur M.

# Reconstruction par marqueur : exercice

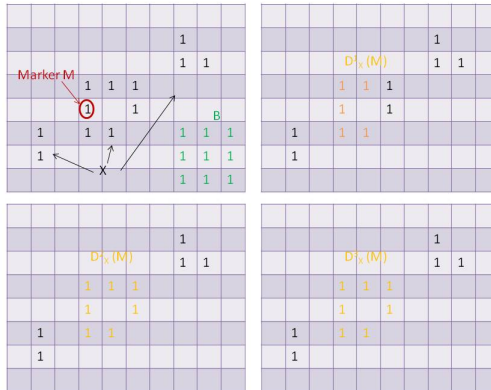


Figure 30: Reconstruction par dilatation de  $X$  par  $M$ .



# Erodé ultime

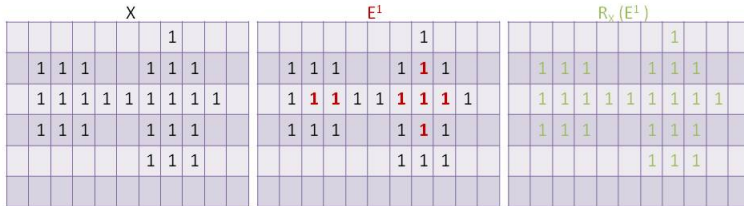
## Erodé ultime

On appelle érodé ultime l'union des résidus entre l'érodé  $i$  ème de  $X$ ,  $E^i$ , et la reconstruction par marqueur de  $E^i$  à partir de l'érodé  $i + 1$  ème de  $X$ ,  $E^{i+1}$  :

$$\text{Erodé ultime} = \bigcup_i E^i - R_{E^i}(E^{i+1})$$

où  $E^i$  désigne l'érodé  $i$  ème de  $X$ .

# Erodé ultime : exemple



Itération 1

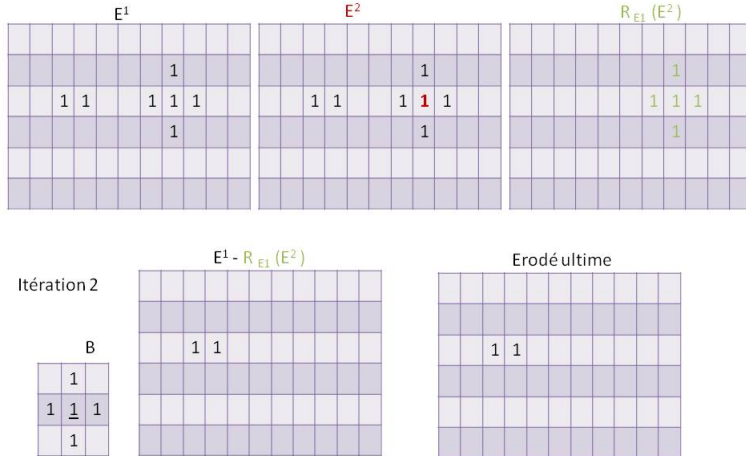
**B**

	1	
1	<u>1</u>	1
	1	

**$X - R_X(E^1)$**


**Erodé ultime**


# Erodé ultime : exemple



# Erodé ultime : exemple

