CPE LYON

TSA – Parties I et II

6,8 + 6,5 = 13,3 / 15

Année universitaire 2013/2014

NOM : TATA	**PRENOM :** Raphaël

Consignes relatives au déroulement de l'épreuve

Date : 24 janvier 2014

Contrôle de : Traitement des Signaux Aléatoires

Durée: 2 h

Professeurs responsables : P. Pittet – N. Gache – P. Gonçalvès

Documents : ☐ **autorisés** ☒ **non autorisés**

Calculatrices : ☐ **autorisées** ☒ **non autorisées**

LES TELEPHONES PORTABLES ET AUTRES APPAREILS DE STOCKAGE DE DONNEES NUMERIQUES NE SONT PAS AUTORISES.

Les téléphones portables doivent être éteints pendant toute la durée de l'épreuve et rangés dans les cartables.

S'agissant de contrôle sans document, les trousses doivent être rangées dans les cartables.

Les cartables doivent être fermés et posés au sol.

Les oreilles des candidats doivent être dégagées.

Rappels importants sur la discipline lors des examens

La présence à tous les examens est strictement obligatoire ; tout élève présent à une épreuve doit rendre une copie, même blanche, portant son nom, son prénom et la nature de l'épreuve.
Une absence non justifiée à un examen invalide automatiquement le module concerné.
Toute suspicion sur la régularité et le caractère équitable d'une épreuve est signalée à la direction des études qui pourra décider l'annulation de l'épreuve; tous les élèves concernés par l'épreuve sont alors convoqués à une épreuve de remplacement à une date fixée par le responsable d'année.
Toute fraude ou tentative de fraude est portée à la connaissance de la direction des études qui pourra réunir le Conseil de Discipline. Les sanctions prises peuvent aller jusqu'à l'exclusion définitive du (des) élève(s) mis en cause.

Consignes générales

L'examen comporte quatre parties.

Les deux premières parties sont dans une première liasse et les parties 3 et 4 correspondent à des documents séparés.

Les trois liasses doivent être rendues au surveillant.

Les réponses doivent être portées directement sur les énoncés.

Les réponses ne doivent pas être rédigées au crayon à papier ni au stylo rouge.

Lire attentivement la totalité de l'énoncé de chaque partie avant de commencer.

Certaines questions des exercices peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie I : QUESTIONS DE COURS

1. Soit un signal aléatoire $X(t)$ à valeurs réelles, stationnaire à l'ordre 2. La densité de probabilité de X est $p_X(x)$.

- Exprimer $E\left\{X\left(t_1+\frac{T}{2}\right)X\left(t_2+\frac{T}{2}\right)\right\}$ en fonction de $\gamma_X(\tau)$, la fonction d'autocorrélation de X

$E(X(t_1+\frac{T}{2})X(t_2+\frac{T}{2})) = E(X(t_1+\frac{T}{2})X(t_1+\frac{T}{2}-(t_1-t_2)))$

$= \gamma_X(t_1-\tau_2) = \gamma_X(\tau)$ avec $\tau = t_1-t_2$

- Si a est une constante réelle, calculer la moyenne statistique de $aX(t)$ en fonction de a et de $p_X(x)$.

E

$E(aX(t)) = a\,E(X(t)) = a\int x\,p_X(x)\,dx$

- Calculer $\gamma'_{aX}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation et $\overline{P}_{aX}$ la puissance moyenne de $aX(t)$ en fonction de a et de $\gamma_X(\tau)$

$\propto$ $\gamma_{ax}(\tau) = E(aX(t)\, ax(t-\tau)) = \underline{a^2 \gamma_x(\tau)}$

$\propto$ $\overline{P}_{ax} = \gamma_{ax}(0) = \underline{a^2 \gamma_x(0)}$

- $aX(t)$ est-il un signal aléatoire stationnaire à l'ordre 2 ?

D'après la question précédente, $\gamma_{aX}(\tau) = a^2 \gamma_x(\tau)$

On peut donc en conclure que ~~$aX(t)$ n'est pas stationnaire à l'ordre 2 car $\gamma_{ax}(t)$ dépend du temps.~~

2. Soit un signal aléatoire $X(t)$ à valeurs réelles, stationnaire à l'ordre 2, centré, de densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_X(\nu)$. Ce signal est filtré par un filtre **H** de gain complexe $H(\nu)$. En sortie du filtre, on obtient un signal aléatoire $Y(t)$.

- Calculer $E\{Y(t)\}$

$x(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y(t)$

× $E\{y(t)\} = H(0) \cdot E\{x(t)\}$ $= 0$ car $x(t)$ centré

- Exprimer $\overline{P}_Y$ la puissance moyenne de $Y(t)$ en fonction de $\Gamma_X(\nu)$ et de $H(\nu)$

× $\overline{P}_y = \int \Gamma_y(\nu) d\nu = \int |H(\nu)|^2 \Gamma_X(\nu)\, d\nu$

- Le signal $X(t)$ est à corrélation microscopique, c'est-à-dire que $E\{X(t)X(t-\tau)\} = K\delta(\tau)$ où K est une constante réelle. Calculer $\Gamma_X(\nu)$ et $\Gamma_Y(\nu)$ en fonction de K et de $H(\nu)$.

× $\boxed{\Gamma_X(\nu) \overset{TF}{\rightleftarrows} \gamma_X(\tau)}$ .. Il vient : $\Gamma_X(\nu) = K$

× $\Gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2\, \Gamma_x(\nu) = |H(\nu)|^2 \cdot K$

3. Soit $s(t)$, un signal réel certain d'énergie finie et de durée T noyé dans un bruit additif blanc.

- Donner l'expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre adapté au signal $s(t)$.

$h(t) = k . \frac{s(t)}{b(t)}$ avec $b(t)$: bruit additif blanc

- Quel critère de contraste est optimisé en sortie de ce filtre pour améliorer la détection de la présence du signal $s(t)$?

Pour améliorer la détection de la présence du signal $s(t)$, il faut <u>augmenter le rapport signal sur bruit</u>.

Partie II : FILTRAGE

On s'intéresse au filtrage d'un signal bruité $X(t)$: $\boxed{X(t) = S(t) + B(t)}$

$S(t)$ et $B(t)$ sont deux signaux aléatoires réels stationnaires d'ordre 2 et indépendants l'un de l'autre.

La moyenne statistique du signal $S(t)$ vaut a_0. $E(S(t)) = a_0$

Le bruit $B(t)$ est un signal aléatoire gaussien, réel, centré. $E\{b(t)\} = 0$

Soit $\boldsymbol{H}$ le filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t) = \dfrac{\delta(t) + \delta(t+T)}{2}$ avec T un retard constant.

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{H}} \longrightarrow Y(t) = S'(t) + B'(t)$$

Rappel : Si $F(t)$ et $G(t)$ sont deux processus aléatoires indépendants alors :

$$E\{F(t_1)G(t_2)\} = E\{F(t_1)\}E\{G(t_2)\}$$

1. Calculer $Y(t)$ en fonction de $S(t)$ et de $B(t)$ (on donnera également les expressions de $S'(t)$ et $B'(t)$)

on a : $y(t) = h(u) \underset{(t)}{*} x(u) = \dfrac{\delta(u) + \delta(u+T)}{2} \underset{(t)}{*} (S(u) + B(u))$

$= \dfrac{S(t)}{2} + \dfrac{S(t+T)}{2} + \dfrac{1}{2}\left(B(t) + B(t+T)\right)$

Il vient : $S'(t) = \dfrac{1}{2}\left(S(t) + S(t+T)\right)$

et $B'(t) = \dfrac{1}{2}\left(B(t) + B(t+T)\right)$

2. Calculer la moyenne statistique de $Y(t)$ signal filtré de $X(t)$.

$$E(y(t)) = E\left(\frac{S(t)+S(t+T)}{2}\right) + \underbrace{E\left(\frac{B(t)+B(t+T)}{2}\right)}_{=0}$$ car $B(t)$ est centré

$$= 2\alpha\,\frac{E(S(t))}{2}$$

$$= \alpha_0$$

3. Calculer $\gamma_{S'}(t,t-\tau)=E\{S'(t)S'(t-\tau)\}$ la fonction d'autocorrélation statistique du signal en sortie du filtre en fonction de $\gamma_S(\tau)$ l'autocorrélation du signal entrée. Le signal filtré est-il stationnaire à l'ordre 2 ?

$$\gamma_{S'}(t,t-\tau) = E\{S'(t)S'(t-\tau)\} = E\{(S'(t)+B'(t))(S'(t-\tau)+B'(t-\tau))\}$$

$$= E\{S'(t)S'(t-\tau)\} + \underbrace{E\{S'(t)B'(t-\tau)\}}_{=0} + \underbrace{E\{B'(t)S'(t-\tau)\}}_{=0}$$ car S et B deux processus aléatoires indépendants et B [illegible]

$$+ E\{B'(t)B'(t-\tau)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{(S(t)+S(t+T))(S(t-\tau)+S(t+T-\tau))\}$$

$$\gamma_{S'}(t,t-\tau) = E\{S'(t)S'(t-\tau)\} = \frac{1}{4}E\{(S(t)+S(t+T))(S(t-\tau)+S(t+T-\tau))\}$$

$$= \frac{1}{4}\Big[E(S(t)S(t-\tau)) + E(S(t)S(t+T-\tau)) + E\{S(t+T)S(t-\tau)\} + E\{S(t+T)S(t+T-\tau)\}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\gamma_S(\tau) + \gamma_S(T+\tau) + \gamma_S(\tau-T)\right]$$

$\gamma_{S'}(t,t-\tau)$ n'est pas ~~stationnaire d'ordre 2~~.

4. En déduire l'expression de $\overline{P}_S'$, la puissance moyenne du signal $S'(t)$ en fonction $\overline{P}_S$ et de $\gamma_S(\tau)$ (on utilisera les propriétés de la fonction d'autocorrélation pour simplifier cette expression). De même, exprimer $\overline{P}_B'$ en fonction de $\overline{P}_B$ et de $\gamma_B(\tau)$.

$$\overline{P}_S' = \gamma_{S'}(t,t)$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\gamma_S(0) + \gamma_S(T) + \gamma_S(-T)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\overline{P}_S + \gamma_S(T) + \gamma_S(-T)\right] = \frac{1}{2}\left[\overline{P}_S + \gamma_S(T)\right]$$

$$\overline{P}_B' = \frac{1}{4}\left[2\overline{P}_B + \gamma_B(T) + \gamma_B(-T)\right]$$ de même

$$= \frac{1}{2}\left[\overline{P}_B + \gamma_B(T)\right]$$

5. On suppose que :

- le signal est très fortement corrélé sur la durée T et $\gamma_S(T) \approx 0.99\gamma_S(0)$
- le bruit peut être considéré comme blanc sur la bande passante du signal et $\gamma_B(T) << \gamma_B(0)$.

Calculer le gain en rapport signal à bruit apporté par le filtrage.

$$g = \frac{\overline{P_S'}}{\overline{P_b'}} = \frac{\overline{P_S} + \gamma_S(T)}{\overline{P_b} + \gamma_b(T)}$$

or $\gamma_b(T) << \gamma_b(0)$

$\Rightarrow \gamma_b(T) << \overline{P_b}$

et $\gamma_S(T) = 0{,}99\,\gamma_S(0)$

$= 0{,}99\,\overline{P_S}$

$$= 1{,}99 \times \frac{\overline{P_S}}{\overline{P_B}}$$

L'examen comporte quatre parties.

Les deux premières parties sont dans une première liasse et les parties 3 et 4 correspondent à des documents séparés.

Les trois liasses doivent être rendues au surveillant.

Les réponses doivent être portées directement sur les énoncés.

Les réponses ne doivent pas être rédigées au crayon à papier ni au stylo rouge.

Lire attentivement la totalité de l'énoncé de chaque partie avant de commencer.

Certaines questions des exercices peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie III : ESTIMATION

θ est un paramètre certain inconnu. On dispose de N observations y_k, $k = 1, \ldots, N$ telles que

$$y_k = \sqrt{\theta}\, b_k$$

où les b_k sont des échantillons d'un bruit blanc, gaussien, centré de variance σ^2.

Un estimateur possible de θ, basé sur les N observations y_k, est dit estimateur au sens du maximum de vraisemblance. On montre qu'il consiste à élever au carré les N observations, à sommer les résultats, puis à diviser le tout par $N\sigma^2$, soit

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{N\sigma^2}\sum_{k=1}^{N} y_k^2$$

Question 1

Cet estimateur est-il biaisé ? Justifier la réponse.

$$E(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{N\sigma^2} E\left(\sum_{k=1}^{N} y_k^2\right) = \frac{1}{N\sigma^2} \sum E(y_k^2) = \frac{1}{N\sigma^2} \sum E(\theta b_k^2)$$

$$= \frac{\theta}{N\sigma^2} \sum E(b_k^2)$$

(1) or $\sigma^2 = E(b_k^2) - E^2(b_k)$ $\Leftrightarrow$ $E(b_k^2) = \sigma^2 + E(b_k)^2$

et b_k centré

donc $E(b_k^2) = \sigma^2$

(1) $= \frac{\theta}{N\sigma^2} \sigma^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} 1$

$\boxed{E(\hat{\theta}_{MV}) = \theta}$ $\Rightarrow$ estimateur non biaisé.

13

Question 2

Calculer la variance de $\hat{\theta}_{MV}$.

Rappel : Si $X(t)$ est un processus gaussien centré
$E\{X(t_1)X(t_2)\,X(t_3)\,X(t_4)\} = E\{X(t_1)\,X(t_2)\}\ E\{X(t_3)\,X(t_4)\} + \ldots$
$\ldots + E\{X(t_1)\,X(t_3)\}\ E\{X(t_2)\,X(t_4)\} + E\{X(t_1)\,X(t_4)\}\ E\{X(t_2)\,X(t_3)\}$

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_{MV}} = E(\hat{\theta}_{MV}^2) - E(\hat{\theta}_{MV})^2$$

$$= E\left\{\left(\frac{1}{N\sigma^2}\sum y_k^2\right)^2\right\} - E\left\{\frac{1}{N\sigma^2}\sum y_k^2\right\}^2 = \theta^2$$

$$= E\left\{\frac{1}{N^2\sigma^4}\left(\sum y_k^2\right)^2\right\} - \theta^2$$

$$= \frac{\theta^2}{N^2\sigma^4} E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} y_k^2\right)^2\right\} - \theta^2$$

$$= \theta^2\left(\frac{1}{N^2\sigma^4} E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right)\right\} - 1\right)$$

or $E\{(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)\}$

$$= E\{(b_1^2 \cdot b_1^2)\} + E\{b_1^2 b_2^2\} + \cdots + E\{b_n^2 b_{n-1}^2\} + E\{b_n^2 b_n^2\}$$

et $E(b_i^2 b_j^2) = \bar{E}_{b_i} \bar{E}_{b_j}$ et $E(b_i^2 b_i^2) = \hat{E}_{b_i}^2 = ?$

$\forall i,j$ si $i \neq j$?

Votre notation n'est pas très heureuse

Il vient : hypothèses ?

$$\forall i,j \quad E\{(\sum_{i=1}^N b_i^2)(\sum_{j=1}^N b_j^2)\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\underbrace{\bar{E}_{b_i}^2}_{=0} + \hat{E}_{b_i}\hat{E}_{b_j} + \underbrace{\bar{E}_{b_j}^2}_{=0}) ?$$

5

Au final, on obtient pour la Variance.

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{\sigma}_{MV}} = \sigma^2\left(\frac{1}{N^2 \sigma^4} \times \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\underbrace{\hat{E}_{b_i}^2}_{=?} + \hat{E}_{b_i}\hat{E}_{b_j} + \underbrace{\hat{E}_{b_j}^2}_{=?}) - 1\right)}$$

$$\sum_i \sum_j E\{b_i^2 b_j^2\} = \sigma^4 + 2\underbrace{E^2\{b_i b_j\}}_{=0 \text{ si } i \neq j}$$

$E^2 b_i =$