TP Calcul formel - 2014-2015 - I. DUBOIS

Evaluation des TP

Pour chaque exercice : écrivez les réponses aux questions dans le fichier texte à disposition sur l'ENT, et déposez les fichiers de session.

Réinvestissement

Exercice 1. (5 points) *Fonctions arithmétiques de base*

Il s'agit d'utiliser les fonctions arithmétiques de Xcas déjà vues pour répondre aux questions. Pour certaines questions, l'élaboration d'une fonction, d'un petit programme, peut être utile, mais n'est pas obligatoire. Votre fichier de session Xcas doit clairement faire apparaître la façon dont vous avez utilisé le logiciel pour répondre aux questions. Les réponses aux questions doivent figurer sur le fichier texte à rendre.

1) (2 points) Le code barre EAN 13 (European Article Numbering) d'un article vendu dans le commerce est composé de 13 chiffres. Le dernier chiffre du code barre est une clé de contrôle K, permettant de détecter des erreurs éventuelles.
Voici la façon de calculer la clé. La clé de contrôle K est elle égale à $10-r$, ou bien 0 si $r=0$, où r est le reste de la division euclidienne de S par 10, le nombre S étant calculé à partir des 12 premiers chiffres. Pour trouver S il faut additionner la somme des chiffres de rang impair (en partant du premier de gauche à droite), à trois fois la somme des chiffres de rang pair (en partant du second, de gauche à droite).

a) Vérifiez que le code 9782278073160 possède une clé correcte.
b) En utilisant Xcas (de façon expérimentale, ou de façon plus systématique), tentez de répondre aux questions suivantes.
Est-il possible que la clé de contrôle d'un code EAN 13 soit la bonne sachant que :
- le premier et le troisième chiffre du code ont été inversés ?
- l'un des douze premiers chiffres du code (un seulement) est faux ?
- deux des douze premiers chiffres du code sont faux ?

2) (1,5 points) Un nombre abondant est un entier naturel non nul tel que la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même est strictement supérieure à lui-même. Trouvez tous les nombres abondants impairs inférieurs à 5000.

3) (1,5 points) a) Décomposez 243000 en facteurs premiers ; en déduire les entiers naturels dont le cube divise 243000.
b) Soit (E) l'équation : $x^3(x^2+y^2)=243000$. Trouvez tous les couples $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ solutions de (E).

Théorème chinois

Exercice 2. (5 points)

On rappelle le théorème des restes chinois :
Soient m_1,..., m_n n entiers naturels premiers entre eux deux à deux et a_1,..., a_n n entiers relatifs.
Alors, le système de congruences (S) $\begin{cases} x \equiv a_1 \mod m_1 \\ \ldots \\ x \equiv a_n \mod m_n \end{cases}$ admet une infinité de solutions entières, de la forme : $x = x_0 + k\prod_{j=1}^{n} m_j$, où $k\in\mathbb{Z}$, et x_0 est une solution particulière de (S).
La fonction `ichinrem([`a_1`,`m_1`],...,[`a_r`,`m_n`])`, ou `ichinrem([`$a_1\%m_1$`,...,`$a_n\%m_n$`])` fournit une solution particulière à ce système de congruences dans l'intervalle $[-(\prod_j m_j)/2; (\prod_j m_j)/2[$.

1) Implémentez un analogue de la fonction `ichinrem`, basé sur l'algorithme de Garner, décrit ci-dessous (employez des listes !).

Entrée : les m_j (premiers entre eux deux à deux) et les a_j ($1 \leqslant j \leqslant n$ avec $n \geqslant 2$)
Sortie : x unique solution de (S) dans l'intervalle $[0; \prod_j m_j[$.

Etape 1 : Calcul des $C_j = (\prod_{k=1}^{j-1} m_k)^{-1} \mod m_j$

Pour j de 2 à n Faire
$C_j := 1$
Pour k de 1 à $j-1$ Faire $C_j := C_j \cdot (m_k)^{-1} \mod m_j$ Finpour
$C_j :=$ relèvement de C_j dans $\mathbb{Z}$
Finpour

Etape 2 : Calcul de x
$u := a_1$, $x := a_1$
Pour j de 2 à n Faire
$u :=$ reste de la division euclidienne de $(a_j - x) \cdot C_j$ par m_j
$x := x + u \cdot \prod_{k=1}^{j-1} m_k$
Finpour
Retourner x

2) Application : calcul d'un déterminant par une méthode modulaire.

Soit $R := \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(R)$ en utilisant des réductions des coefficients de R modulo des nombres premiers, puis en utilisant le théorème des restes chinois. Vous utiliserez votre programme réalisé en 1), ou bien, s'il ne fonctionne pas, la commande `ichinrem`.

On utilisera la borne de Hadamard donnée par : $\mid \det(R) \mid \leqslant B = (\max_{(i,j)} \mid R_{i,j} \mid)^n n^{n/2}$, où R est de taille n, pour trouver des nombres premiers p_i dont le produit $P = \prod p_i$ vérifie $P > 2B$.

Attention, après utilisation de l'algorithme de Garner, si on trouve un entier $\frac{P}{2} < \Delta < P$, alors $\det(R) = \Delta - P$. Ce n'est pas le cas avec la fonction `ichinrem` qui renvoie un solution de (S) dans l'intervalle $[-P/2, P/2[$.

Refaites la même chose avec une matrice dont les coefficients sont des nombres entiers s'écrivant avec 3 ou 4 chiffres. Il faudra trouver de grands nombres premiers, grâce à des commandes adéquates de Xcas.

Utilisation de Xcas : Une matrice est une liste de liste et se rentre donc sous la forme `[[R11,...,R1n],...,[Rn1,...,Rnn]]`. Le déterminant modulo p pourra se calculer par la commande `det(R mod p)`, et la norme max de R par `maxnorm(R)`.

Partie personnalisée

Pour ces deux exercices, il vous est demandé de faire des choix personnels. L'évaluation tiendra compte des motivations des choix réalisés et de leur pertinence.
Il sera bien sûr très mal vu de rencontrer des copies conformes de sessions Xcas entre deux étudiants.

Exercice 3. (2 points) *Reprise d'un exercice des TP 1 à 5*

Parmi les exercices qui devaient être rendus lors des cinq TP, choisissez-en un que vous pourriez améliorer ou compléter. Déposez la nouvelle version de votre session et de vos programmes éventuels, et dans la page de texte, expliquez pourquoi vous l'avez choisi, en expliquant les améliorations apportées.

Les améliorations peuvent être de nature diverse : achèvement d'un exercice non réalisé jusqu'à terme ou non fait, simplification d'un programme ou d'une méthode utilisée, rajout de commentaires dans un programme, exemples d'application plus variés, amélioration suggérée par la rubrique "Pour aller plus loin"...

Si vous estimez que vous aviez bien fait le travail demandé lors des séances de TP (et entre les séances), et que vous ne pensez pas pouvoir améliorer un des exercices, redéposez-en un de votre choix. Dans la page de texte vous expliquerez votre choix, et vous valoriserez votre travail en mettant en évidence ses qualités.

Exercice 4. (3 points) *Initiative personnelle*

Vous avez libre choix de présenter un exercice, un exemple, utilisant le logiciel Xcas, et en relation avec tout ce qui a été fait dans l'UE Calcul formel.
Par exemple, vous pouvez reprendre des exercices faits en TD, des exemples vus en cours, des exercices de TP facultatifs ou supplémentaires...

Les contraintes : l'utilisation de Xcas est bien sûr obligatoire, et vous devrez déposer le fichier de la session (et éventuellement les programmes créés) ; vous devrez également fournir le texte de l'exercice ou exemple concerné dans le fichier texte, pour que la correctrice puisse savoir de quoi il est question (ce n'est pas grave si les formules ou objets mathématiques ne sont pas bien écrits, mais sachez qu'il y a un éditeur d'équations dans le menu).

Attention : ne citez pas un exercice de TD par sa référence (du type exercice n°2 de la feuille TD 3) : la correctrice ne dispose pas des feuilles de TD. Par contre, si c'est un exercice d'une feuille de TP, vous pouvez citer sa référence.