Calculer une enveloppe convexe

Préparation à l'agrégation — option Calcul formel

Antoine Chambert-Loir (version revue par Michel Coste)

1. Introduction

Soit A une partie du plan ; de nombreux problèmes géométriques requièrent de déterminer l'enveloppe convexe de A, de manière aussi efficace que possible. Ce texte se veut une introduction au sujet ; il est pour l'essentiel issu du livre de Preparata et Shamos, *Computational geometry, an introduction* (Springer-Verlag, 1985).

Quelques définitions pour commencer.

L'enveloppe convexe d'une partie A de $\mathbf{R}^n$ sera notée $\mathrm{conv}(A)$; c'est la plus petite partie convexe de $\mathbf{R}^n$ qui contient A. C'est aussi l'intersection des demi-espaces affines de $\mathbf{R}^n$ qui contiennent A (Hahn-Banach).

Soit C une partie convexe de $\mathbf{R}^n$; la dimension de C est par définition la dimension du plus petit sous-espace affine E de $\mathbf{R}^n$ qui contient C. De plus, C est d'intérieur non vide dans E.

Soit C une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. Un point $x \in C$ est dit extrémal s'il n'existe pas de couple (y, z) de points de C tel que $x \in]y, z[$. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ qui est positive ou nulle sur C. L'intersection de C avec l'hyperplan d'équation $\varphi = 0$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ dont les points extrémaux sont des points extrémaux de C. Cela permet de démontrer un théorème de Choquet qui affirme qu'*une partie convexe compacte de* $\mathbf{R}^n$ *est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Un polytope P est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini A de points de $\mathbf{R}^n$; c'est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$. Ses points extrémaux sont appelés *sommets* ; ils appartiennent à A. Une face F de P est une partie non vide F de P qui est l'intersection de P avec un demi-espace fermé dont l'intérieur est disjoint de P. C'est une partie convexe. Une face F de P est l'enveloppe convexe d'une partie de l'ensemble des sommets de P.

Un *simplexe* est l'enveloppe convexe de $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ qui ne sont pas situés dans un même hyperplan affine.

Supposons que $\dim(P) = n$. Pour chaque face F de dimension $n-1$ (*facette*), soit φ_F une équation de l'hyperplan $\langle F \rangle$ qui est positive sur P. Alors, P est l'intersection des demi-espaces $\varphi_F \geqslant 0$. Inversement, soit P une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, intersection d'un nombre fini de demi-espaces. On peut démontrer que P est un polytope.

Déterminer l'enveloppe convexe d'un ensemble fini A de points de $\mathbf{R}^n$ signifiera donc en déterminer les sommets et les faces.

2. Déterminer les sommets de l'enveloppe convexe

Soit A une partie finie de $\mathbf{R}^n$ et soit C son enveloppe convexe. On supposera à l'occasion que C est de dimension n.

Voici un moyen simple, mais pas très efficace, de déterminer les sommets de A.

En effet, un point $x \in A$ est un sommet de $\operatorname{conv}(A)$ s'il n'existe pas $n+1$ points $a_0, \dots, a_n \in A \setminus \{x\}$ tels que x appartienne au simplexe $\operatorname{conv}(a_0, \dots, a_n)$. (Démontrer ceci en utilisant le théorème de Carathéodory.)

De plus, cette condition est assez facile à tester, par exemple en résolvant le système linéaire $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, en $n+1$ variables $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Dans le cas où les a_i sont affinement indépendants, le point x appartient à leur enveloppe convexe si et seulement si tous les λ_i sont positifs.

Quelle est la complexité de cet algorithme ? Supposons que A ait N éléments. Il faut parcourir, pour chaque élément x de A, les $\binom{N-1}{n+1}$ parties de $A \setminus \{x\}$, résoudre le système linéaire et éliminer le point x si ce n'est pas un sommet. C'est donc en gros un algorithme en $\mathrm{O}(N^{n+2})$.

3. Enveloppe convexe d'une étoile (*Graham scan*)

Une étoile (centrée en l'origine O) est un polygone $a_1 \dots a_N$ du plan $\mathbf{R}^2$ tels que les angles $(\widehat{Ox, Oa_i})$ pris dans $[0, 2\pi[$ forment une suite croissante (à permutation circulaire des a_i près). Dans la suite de ce paragraphe, on définira a_m pour $m \in \mathbf{Z}$ comme a_r, où r est l'unique entier de $\{1, \dots, N\}$ tel que $m \equiv r \pmod N$. Un polygone convexe $a_1 \dots a_N$ est une étoile centrée en chacun de ses points intérieurs.

Soit A un ensemble fini du plan ; soit O un point de l'intérieur de l'enveloppe convexe de A, par exemple l'isobarycentre des points de A. Quitte à trier les angles $(\widehat{Ox, Oa})$, pour $a \in A$, (voire leurs tangentes y_a/x_a), on peut supposer que $A = \{a_1, \dots, a_N\}$, où $a_1 \dots a_N$ est une étoile centrée en O.

Notons que l'enveloppe convexe de A est celle de la réunion des triangles $Oa_i a_{i+1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant N$. Alors, l'enveloppe convexe de A peut être déterminée grâce au résultat suivant : *si l'angle $a_{i-1} a_i a_{i+1}$ est saillant, a_i appartient au triangle $Oa_{i-1} a_{i+1}$, donc a_i n'est pas un sommet* et l'enveloppe convexe de A est celle de $A \setminus \{a_i\}$. La méthode consiste à parcourir la liste $a_1, \dots, a_N$ en partant de $i = 1$. Ensuite, on tente d'enlever a_i : si l'angle $a_{i-1} a_i a_{i+1}$ est rentrant, on passe au point suivant ; sinon, on enlève a_i de la liste et on fait un pas en arrière en revenant au point a_{i-1}. Pour programmer convenablement l'algorithme, il convient de supposer que a_1 est un sommet ; on peut par exemple prendre le point le plus à gauche.

La complexité de cet algorithme est linéaire en le nombre N de points, une fois qu'il est ordonné de sorte à former une étoile. Le tri des angles a quant à lui une complexité en $\mathrm{O}(N^2)$ avec un algorithme idiot, ou en $\mathrm{O}(N \log N)$ avec un algorithme optimal.

Variante. Soit A un ensemble fini du plan ; soit C son enveloppe convexe. Soit a un point d'abscisse minimale et b un point d'abscisse maximale, choisis d'ordonnée maximale si nécessaire. Ce sont des sommets de C. On trie les points au-dessous de

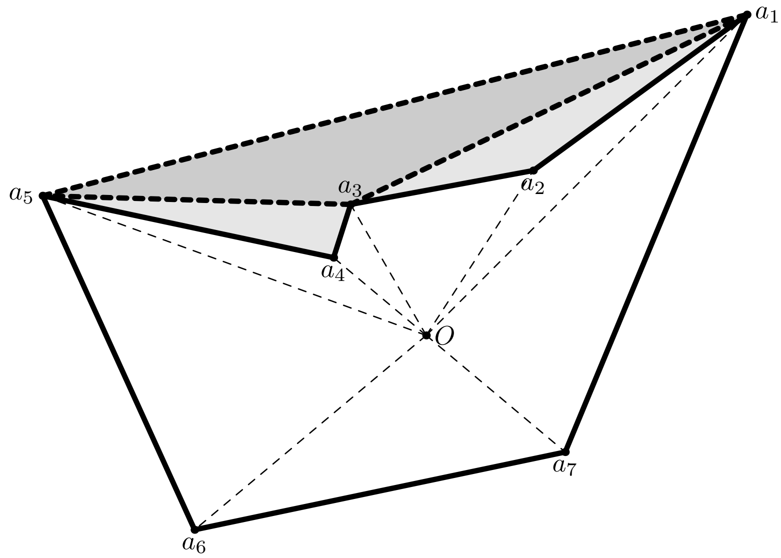

FIGURE 1. Détermination de l'enveloppe convexe d'une étoile

(ab) par abscisses croissantes (en gardant le point d'ordonnée maximale si plusieurs points ont même abscisse). On obtient ainsi une suite $a_1, \dots, a_n$. Dire l'angle $a_{i-1}a_ia_{i+1}$ est saillant (ou encore que a_i n'est pas au-dessous de la droite $(a_{i-1}a_{i+1})$) signifie exactement que la pente de (a_ia_{i+1}) n'est pas supérieure à celle de $(a_{i-1}a_i)$. On détermine ainsi aisément les sommets de C au-dessous de (ab), ordonnés de sorte à former un polygone convexe $aa_{i_1}\dots a_{i_k}b$. On fait de même avec la partie supérieure.

Remarque. Le lien entre le problème de l'enveloppe convexe et celui du tri est bien mis en évidence par cet algorithme, au moins dans un sens : trier permet de calculer l'enveloppe convexe. Inversement, soit $x_1, \dots, x_n$ une suite de nombres réels. Soit A l'ensemble des points de coordonnées (x_i, x_i^2). Quelle est l'enveloppe convexe de A ? En déduire que si l'on sait calculer efficacement une enveloppe convexe, on sait trier tout aussi efficacement une suite de nombres réels.

4. Diviser pour régner

Soit encore A une partie finie du plan et soit C son enveloppe convexe. Un algorithme de calcul de C de type « diviser pour régner » se décrirait de la façon suivante :

– On décompose A en deux sous-ensembles A_1 et A_2 qui en forment une partition et on en calcule les enveloppes convexes, C_1 et C_2, de manière récursive ;
– On calcule l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$.

Les subtilités de l'algorithme proviennent ainsi de deux points :

– Trouver une partition efficace. En pratique on choisit les deux parties A_1 et A_2 approximativement de même cardinal ;
– Calculer de manière efficace l'enveloppe convexe de la réunion de deux convexes.

Concentrons-nous sur ce dernier aspect. En pratique, déterminer une enveloppe convexe C signifie avoir calculé un *polygone convexe* P dont l'intérieur est C. En particulier, les sommets de P (donc de C) sont ordonnés de sorte à former une étoile. L'algorithme récursif fournit ainsi des polygones P_1 et P_2 dont les intérieurs sont les enveloppes convexes C_1 et C_2 de A_1 et A_2.

Soit O un point intérieur à P_1 ; par exemple son centre de gravité. Le point O sera intérieur à C, mais on doit distinguer deux cas, suivant que O appartient à C_2 ou pas. Pour décider dans quel cas on se trouve, il faut regarder les angles $(\widehat{Ox, Oa})$, pour a parcourant les sommets de P_2 dans le sens trigonométrique.

(1) S'ils forment une suite croissante (modulo 2π), *le point O appartient à C_2*. On peut alors ordonner la réunion des sommets de P_1 et de P_2 de sorte à obtenir une étoile E centrée en O. Ceci se fait avec une complexité linéaire en le nombre de points (fusion de deux listes triées). L'enveloppe convexe de l'étoile E est égale à C.

(2) Sinon, ces angles sont compris entre deux valeurs différant d'au plus π et *le polygone P_2 est contenu dans un secteur angulaire aigu de sommet O*. Notons a et b les deux sommets de P_2 tels que P_2 soit contenu dans le secteur angulaire $\widehat{aOb}$. Soit alors E l'étoile obtenue en parcourant, dans le sens trigonométrique, les sommets de P_2 entre a et b puis ceux de P_1 dans le secteur complémentaire. Son enveloppe convexe est C.

Une fois obtenue une étoile, on calcule son enveloppe convexe par la méthode du paragraphe précédent.

Analysons la complexité $T(N)$ de l'algorithme obtenu, où N est le nombre de points. Une fois obtenus P_1 et P_2, le polygone P est obtenu avec une complexité $\mathrm{O}(N)$ pour la fusion des listes et $\mathrm{O}(N)$ pour le calcul de l'enveloppe convexe d'une étoile. La complexité $T(N)$ vérifie ainsi l'inégalité

$$T(N) \leqslant 2T(N/2) + \mathrm{O}(N),$$

dont la solution est $T(N) \leqslant \mathrm{O}(N \log N)$.

5. Deux applications

Calcul du diamètre d'une partie du plan. — Soit A une partie finie du plan. Supposons qu'on doive déterminer le *diamètre* de A et, plus précisément, deux points a et b de A dont la distance est maximale. L'approche naïve consiste à parcourir toutes les paires de points et à en sélectionner la plus grande distance. Cela fournit un algorithme en $\mathrm{O}(N^2)$, si N est le nombre de points.

Toutefois, la partie A a même diamètre que son enveloppe convexe (*le démontrer...*). Supposons cette dernière calculée, ce qu'on peut faire en $\mathrm{O}(N \log N)$. Le nombre n de sommets de l'enveloppe convexe de A est bien sûr majoré par N, et en général beaucoup plus petit.

Si $a_1 \dots a_n$ est un polygone convexe, on dira que deux points a_i et a_j sont *antipodaux* s'il y a deux droites d'appui parallèles du polygone passant respectivement par a_i et a_j. Alors le diamètre du polygone convexe est égal à la distance maximale entre sommets antipodaux. Le nombre total de paires de sommets antipodaux ne peut pas excéder

$3n/2$. On peut décrire de manière imagée comment énumérer toutes ces paires : on trouve une première paire de points antipodaux en « posant le polygone sur une droite horizontale » et en cherchant le sommet le plus haut. Ensuite on trouve les autres paires (en tournant toujours dans le même sens) en « faisant rouler le polygone » sur la droite horizontale. On peut obtenir de la sorte un algorithme déterminant le diamètre du polygone convexe en $O(n)$.

De la sorte, on obtient un algorithme en $O(N \log N)$ qui calcule le diamètre d'une partie finie du plan.

Régression monotone. — On dispose d'une suite de données (expérimentales) $x_i \in \mathbf{R}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. L'objectif est de déterminer une nouvelle suite (x_i^*) croissante (au sens large) pour laquelle l'expression $\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2$ soit minimale (moindres carrés). Dans certains cas, on peut avoir des poids $w_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et chercher à minimiser $\sum_{i=1}^n w_i (x_i - x_i^*)^2$, toujours avec la condition de croissance sur les x_i^*.

Ce problème équivaut à la recherche d'une « enveloppe convexe inférieure » telle qu'on l'a expliquée dans la variante du *Graham scan*. Posons $s_0 = 0$ et $s_i = \sum_{j \leqslant i} x_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit alors C^* l'« enveloppe convexe inférieure » de l'ensemble A des points de coordonnées (i, s_i), pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Soit $A^* \subset A$ l'ensemble des sommets de C. La fonction continue affine par morceaux s^* qui vaut s_i en i si (i, s_i) appartient à A^* est convexe ; Si s est la fonction continue affine par morceaux qui vaut s_i en i pour tout i, s^* est la plus petite fonction convexe, affine par morceaux et continue qui soit inférieure ou égale à s. Pour $i = 1, \dots, n$, soit $x_i^* = s^*(i) - s^*(i-1)$ (c'est la pente du graphe de s^* sur l'intervalle numéro i de l'axe des abscisses). On peut démontrer que la suite (x_i^*) est solution du problème posé (avec poids tous égaux à 1 ; dans le cas de poids w_i quelconques, il faut remplacer les n intervalles de longueur 1 sur l'axe des abscisses par des intervalles de longueurs w_i, et les x_i^* sont les pentes au-dessus de chacun des intervalles de la fonction convexe affine par morceaux s^*).

Du point de vue pratique, on peut résoudre le problème de régression monotone avec poids 1 en bouclant la transformation suivante sur les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$: on regroupe les coordonnées successives en un paquet si elles sont égales. Si le premier endroit où la condition de croissance est violée se situe entre les paquets $x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+p-1}$ et $x_{i+p} = x_{i+p+1} = \dots = x_{i+p+q-1}$, on remplace les deux paquets par un seul où toutes les coordonnées valent $\dfrac{px_i + qx_{i+p}}{p+q}$ (cet algorithme est connu sous le nom de PAVA, pour Pool Adjacent Violators Algorithm).