

L3 Calcul Formel

Université de Lorraine

TP 1 : Algorithmes d'Euclide étendu et de Garner

Clément Dell'Aiera

Quelques adresses utiles :

- le site de l'agrégation de mathématiques <http://agreg.org>, vous y trouverez des textes pour vous entraîner, et surtout les comptes rendus du jury. Aussi, la liste des logiciels acceptés à l'agreg : **Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R**. Tous sont libres et gratuits.
- Nous allons travailler avec Sage, que vous pouvez télécharger sur la page <http://www.sagemath.org/fr/>. Vous pouvez aussi travailler directement dans une page ouverte dans le navigateur.

1 Prise en main de SAGE

1. Ouvrir la page <https://cloud.sagemath.com/> dans votre navigateur, créer un compte gratuit et un nouveau fichier (*New sageworksheet*) que vous nommerez TP1 par exemple.
2. Trouver et télécharger le tutoriel SAGE : vous pouvez le faire chez vous pour vous entraîner.
3. Pour évaluer les instructions contenues dans une cellule, vous pouvez soit cliquer sur le lien *evaluate* ou *Run* en haut à gauche, soit utiliser le raccourci clavier MAJ+ENTREE. Saisir les expressions suivantes et les évaluer :

$9 + 3$, $6 * 5$, $63 // 9$, $17 // 5$, $17 \% 5$.

4. Que donne l'évaluation des instructions suivantes ?

cos?, *RationalField?*, *PolynomialRing?* .

5. Pour affecter une valeur à une variable, on utilise le signe $=$. Affecter la valeur $\cos(\frac{\pi}{2})$ à une variable x , puis évaluer x , $print(x)$. Pour un affichage graphique, utilisez $x.show()$. Que renvoie l'évaluation de $x.n(digits = 10)$?

6. SAGE permet de faire du calcul symbolique. Pour déclarer des variables x et y , on utilise la commande `var('x,y')`. Evaluer

```
var ('x,y')
z = cos(x)^2 + sin(y)^2
print z. subs_expr (x == pi/2)
print z(y = pi/2)
```

Si SAGE indique une erreur (*deprecation*), c'est seulement que vous avez déjà utilisé un des noms de variables auparavant. Pour corriger ce problème, il suffit de réinitialiser les variables en évaluant `reset()` au début de votre code.

7. Définir une fonction de la façon suivante :

```
reset()
var ('x,y')
f(x,y) = x/sin(x) + sqrt(y)
f
```

La fonction f est désormais un objet, évaluer `f.parent()` pour savoir lequel. Evaluer

```
f.show(), f.limit(x = 0).show(), f.diff(x).show().
```

8. On peut aussi utiliser la commande `def` pour définir une fonction :

```
def FONCTION(entree) :
    instructions
    return(sortie)
```

Définir une fonction qui prend en entrée un nombre réel x et renvoie son carré x^2 .

2 Arithmétique

9. Créer une fonction qui prend en entrée deux entiers positifs, et renvoie leur *pgcd*, grâce à l'algorithme d'Euclide.
10. Créer une fonction qui prend en entrée deux entiers positifs x et y , et renvoie leur *pgcd* d ainsi que deux entiers u et v qui vérifient $ux + vy = d$. Vous utiliserez par exemple l'algorithme d'Euclide étendu.
11. Créer une fonction qui prend en entrée deux listes d'entiers $[a_1, \dots, a_k]$ et $[n_1, \dots, n_k]$ et renvoie une solution du système de congruences

$$\begin{cases} x &= a_1 \bmod n_1 \\ &\dots \\ x &= a_k \bmod n_k \end{cases}$$

12. SAGE permet de faire de l'arithmétique avec des polynômes. Construire l'anneau des polynômes à coefficients rationnels à une indéterminée en évaluant $R = QQ[x']$.
13. Spécifier le nom de la variable grâce à $T = R.gen()$.
14. Créer une fonction qui effectue l'algorithme d'Euclide étendu sur deux polynômes, et la tester sur $P = T^2 + 1$ et $Q = T^3 + 2T^2 + 1$.