

Préparation à l'Agrégation Externe
Université de Lorraine

Poly d'agreg

Clément Dell'Aiera

Table des matières

1	Théorèmes limites dans le cas IID	2
2	Chaînes de Markov	3
3	Séries de Fourier	6
3.1	Séries de Fourier et convolution	6
3.2	Oscillations de Gibbs	6
4	Réduction des endomorphismes	7
5	Leçons d'Analyse et Probabilités	8
5.1	232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$. Exemples.	8
5.2	247 Exemples de problèmes d'interversion de limites	8
5.3	253 Utilisation de la notion de convexité en analyse	8
5.3.1	Projection sur un convexe fermé	8
5.3.2	Applications aux EDP	9

Quelques adresses utiles :

- le site de l'agrégation de mathématiques <http://agreg.org>, vous y trouverez des textes pour vous entraîner, et surtout les comptes rendus du jury. Aussi, la liste des logiciels acceptés à l'agreg : **Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R**. Tous sont libres et gratuits.
- la page de la préparation de Rennes <https://perso.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/agreg-probas.html>

1 Théorèmes limites dans le cas IID

Les deux théorèmes suivant sont à maîtriser impérativement.

Théorème 1 (LGN et TCL). Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées et réduites, on note $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum X_j$. Alors

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &\rightarrow_{ps} 0, \\ \sqrt{n}\hat{\theta}_n &\rightarrow_{\mathcal{L}} 0.\end{aligned}$$

Pour l'illustrer avec Scilab, on peut :

- tirer aléatoirement des variables aléatoires iid
- calculer la moyenne empirique et montrer qu'elle converge vers l'espérance
- répéter l'opération pour obtenir un échantillon de moyennes empiriques
- tracer la fonction de répartition empirique, et montrer qu'elle converge en norme sup vers la fonction de répartition d'une normale.
- montrer que cela n'arrive pas avec certaines lois bien choisies. Par exemple la loi de Cauchy.

Un bon contre-exemple est la loi de Cauchy, de densité

$$P(dx) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

On voit qu'elle ne satisfait pas les hypothèses : elle n'a pas de moment d'ordre 1, puisqu'équivalente à $\frac{1}{\pi x^2}$ en $+\infty$.

Pour la simuler, on peut utiliser le lemme suivant.

Lemme 1. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et U suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors $F^{-1}(U)$ et X ont mêmes lois.

Preuve 1. On rappelle que les fonctions de répartition sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- F est càd-làg (continue à droite limite à gauche),
- F est croissante,
- $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{\infty} F = 1$.

F n'admet pas forcément d'inverse, mais une inverse généralisée définie par

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \leq y\}.$$

Alors :

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

□

Pour, la loi de Cauchy, un simple calcul donne $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$, et $F^{-1}(u) = \tan(\pi(u - \frac{1}{2}))$. Le code suivant illustre cela, avec une fonction courte pour afficher des fonctions de répartition empiriques.

```
N=500
m=10

Loi normale, exponentielle, et de Cauchy
```

```
Z=grand(1,N,'nor',0,1)
W= grand(1,N,'exp',2)
U=rand(1,N)
Cauchy=30*tan(% pi*(U-0.5))
```

Loi des grands nombres

```
function esperance=esperance(X)
p,q
=size(X)
scf()
plot2d([1 :q],cumsum(X)./[1 :q],2)
xlabel("Loi des grands nombres" )
endfunction
```

```
esperance(Z)
plot2d([0 :N],0*[0 :N])
```

FDR empirique

```
// Theoreme Central Limite
function plotFDR=plotFDR(X)
[p,q]=size(X) ;
scf()
plot2d2(-sort(-X),(1/q)*[1 :q],2)
xlabel("Fonction de repartition empirique")
endfunction
```

```
h=0.1 ;
t=[-5 :h :5] ;
```

```
plotFDR(Z)
ynor=cdfnor("PQ",t,0*t,0*t+1)
plot2d(t,ynor)
```

```
plotFDR(W)
t=[0 :h :5] ;
ypoi=cdfpoi("PQ",t,0*t+2)
plot2d(t,ypoi)
```

```
plotFDR(Cauchy)
```

2 Chaînes de Markov

On rappelle qu'une chaîne de Markov est l'analogue probabiliste d'une suite récurrente d'ordre 1. C'est la donnée d'un couple (E, P) où E est un espace d'état, et $P : E \times E \rightarrow [0, 1]$ un noyau de transition.

Vous devez connaître ces définitions, ainsi que

- la définition de la propriété de Markov
- l'équation de Chapman-Kolmogorov
- la définition de mesure invariante $\nu P = \nu$, de mesure réversible $\nu(x)P(x, y) = \nu(y)P(y, x)$, et savoir montrer que réversible entraîne invariante.

Supposons que l'espace d'états E est fini. Alors l'espace des probabilités invariantes est un compact convexe non-vide du simplexe des probabilités sur E , vue comme un sous-espace de $\mathbb{R}^{|E|}$. En particulier, il existe une mesure invariante. Pour l'unicité, il suffit que la chaîne soit irréductible, i.e. que le graphe

de transition soit connexe.

Théorème 2 (Théorème ergodique). Si (X_n) une trajectoire d'une chaîne de Markov irréductible, d'unique probabilité invariante ν . Alors pour toute fonction $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(X_k) \rightarrow \int_E \phi(x) \nu(dx).$$

Alors

$$\nu(x) = \frac{1}{E[T_x]},$$

où $T_x = \inf\{n > 1 : X_n = x\}$ est le temps de retour en x .

De plus, si la chaîne est fortement apériodique, alors on a, pour toute mesure de probabilité initiale μ_0 , la convergence en loi suivante :

$$\mu_0 P^n \rightarrow \nu,$$

i.e. $(X_n)_n$ converge en loi vers ν quelle que soit sa distribution initiale.

Vous devez penser à la mesure invariante comme la mesure que le système atteint à l'équilibre. Par exemple, dans le modèle de l'urne d'Ehrenfest, on avait $E = \{0, 1, 2, \dots, m\}$,

$$P(k, k-1) = 1 - P(k, k+1) = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad P(0, 1) = P(m, m-1) = 1.$$

Ce modèle est sensé représenter m particules indistingables dans une pièce, que l'on sépare en deux zones distinctes A et B . L'état du système est entièrement déterminé par le nombre X_T de particules qui se trouvent à l'instant T dans la zone A par exemple.

La chaîne est irréductible, mais admet une période : la parité des états vus alterne en fonction du temps. On ne peut donc qu'appliquer la convergence presque-sûre, et pas la convergence en loi, dans le théorème ergodique.

Un simple calcul montre que $\nu(x) = \frac{1}{2^m} \binom{m}{x}$ est une mesure réversible, donc invariante, qui est unique par irréductibilité. Cela signifie que si l'expérimentateur lance son expérience, quitte la pièce assez longtemps pour que le système atteigne l'équilibre, et qu'il fait une mesure du nombre de particules dans la zone A lors de son retour, il trouvera x avec une probabilité proche de $\nu(x)$ (d'autant plus proche que le temps passe).

Un point inquiétant du modèle est qu'il autorise un retour à l'état 0 ou m , ce qui signifie que toutes les particules de la pièce sont concentrées dans une partie de la pièce, laissant l'autre vide. Si le jury soulève cette question, vous pouvez alors utiliser le théorème ergodique pour arguer que le temps de retour :

- en m est de l'ordre de

$$E[T_m] = \frac{1}{\nu(m)} = \frac{1}{2^m}$$

- en $\frac{m}{2}$ est de l'ordre de

$$E[T_{m/2}] = \frac{1}{\nu(m/2)} \sim \sqrt{\frac{\pi m}{2}}$$

en utilisant la formule de Stirling.

Le nombre m étant supposé très grand, il faudrait à l'expérimentateur attendre très longtemps pour voir se réaliser une situation pareille. Enfin, si on note Z une normale centrée réduite :

$$\nu\left(\left[\frac{m}{2} \pm 2\epsilon\sqrt{m}\right]\right) \simeq P(|Z| > \epsilon) = 1 - 2P(Z > \epsilon)$$

et

$$P(Z > \epsilon) = P(e^{tZ} > e^{t\epsilon}) \leq \frac{E[e^{tZ}]}{(t\epsilon)^2}.$$

Ce calcul montre que toute la masse de la mesure invariante est concentrée autour de l'état $m/2$, i.e. qu'à l'équilibre, un expérimentateur ne peut mesurer qu'un nombre de particules pratiquement égal dans les deux zones (avec une très forte probabilité).

Le calcul utilise successivement :

- l'approximation gaussienne de la binomiale,

- la symétrie de la loi normale,
- l'inégalité de Markov.

Voici pour la simulation. Essentiellement, on entre la matrice de transition, et on utilise l'option *markov* de *grand*.

```
//Entree de la matrice de transition de la chaine de Markov associee au modele d Ehrenfest

function P=ehrenfest(N)
d1=(N-(0 :N-1))/N ;
d2=(1 :N)/N ;
P=diag(d1,1)+diag(d2,-1) ;
endfunction ;

// Simulation
m=1000
T=100000
x0=m
X=grand(T,'markov',ehrenfest(m),x0)
plot([1 :T],X)
```

On peut facilement voir que le système atteint rapidement l'état d'équilibre sur la figure ???. C'est un fait général : la vitesse de convergence est dominée par le plus grand module < 1 des valeurs propres de la matrice de transition P . Cela est donné par le théorème de Perron-Frobenius.

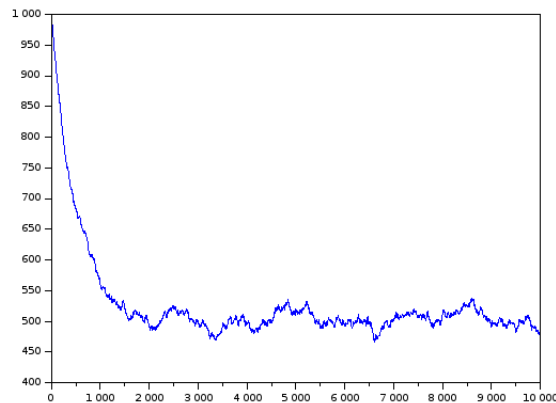


FIGURE 1 – Une trajectoire partant de l'état $m = 1000$ particules dans la zone A

3 Séries de Fourier

Une très bonne référence pour tout ce qui s'apparente à de l'analyse de Fourier est le très bon livre de Kahane [3].

3.1 Séries de Fourier et convolution

Soit f une fonction continue 2π -périodique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, sa série partielle de Fourier est donnée par

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t)dt.$$

avec $D_N(x) = \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$. L'intérêt du membre de droite est de remarquer que la série partielle de Fourier peut s'exprimer comme la convolution de f avec le noyau D_N , appelée noyau de Dirichlet.

Le noyau de Féjer est

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N})e^{inx}.$$

3.2 Oscillations de Gibbs

Pour une fonction différentiable $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on définit sa variation totale par

$$\|f\|_V = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\| dx.$$

Remarque 1. Pour $n = 1$,

- si f n'est pas différentiable, on peut tout de même définir sa variation totale en passant par la dérivée au sens des distributions

$$\|f\|_V = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} dx.$$

- Montrer que si f est différentiable avec des extrema locaux en $(x_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, alors $\|f\|_V = \sum |f(x_{p+1}) - f(x_p)|$.

Soit ϕ_ε un fonction dont la transformée de Fourier vérifie $\hat{\phi}_\varepsilon = 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$. On note $f_\varepsilon = \phi_\varepsilon * f$, alors $\|f - f_\varepsilon\|_2 = \|\hat{f} - 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}\hat{f}\|_2 = \int_{|\xi| > \varepsilon} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$, qui tend vers 0 lorsque ε tend vers $+\infty$.

On a donc convergence dans L^2 de f_ε vers f . Peut-on avoir convergence uniforme, i.e. $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \|f - f_\varepsilon\|_\infty = 0$?

On va voir que lorsque f possède une discontinuité isolée, la réponse est négative.

Soit $H(x) = 1_{x \geq 0}(x)$ la fonction de Heavyside. Un simple calcul montre que

$$\phi_\varepsilon * H = \int_{-\infty}^{\varepsilon x} \frac{\sin(t)}{\pi t} dt, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Une évaluation en $x = \varepsilon^{-1}$ donne $\|H - H_\varepsilon\|_\infty \geq |1 - \int_{-\infty}^1 \frac{\sin(t)}{\pi t} dt| > 0$. Si f possède une singularité isolée en x_0 , alors f peut s'écrire comme $C.H + g$ où $C = f(x_0^+) - f(x_0^-) > 0$ et g est une fonction continue sur un voisinage V de x_0 . On prendra V relativement compact.

Montrons qu'une fonction à variation totale finie et uniformément continue vérifie $\lim \|g - g_\varepsilon\|_\infty = 0$.

4 Réduction des endomorphismes

Ce numéro présente la réduction des endomorphisme vue sous l'angle des $k[X]$ -modules. Pour cela, nous nous inspirons fortement du livre de R. Mneimé, *Réduction des endomorphismes*[4]. On rappelle que $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont équivalents ssi il existe $T \in GL(E)$ tel que $Tf = gT$.

Soit k un corps, E un k -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . La loi

$$\forall P \in k[X], \forall v \in E, P.v := P(f)v$$

définit une structure de $k[X]$ -module sur E . On notera E_f le $k[X]$ -module obtenu. Une remarque importante : soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ induit un morphisme de $k[X]$ -module $\tilde{T} \in Hom_{k[X]}(E_f, E_g)$ ssi $Tf = gT$. On a alors facilement la proposition suivante :

Proposition 1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors E_f et E_g sont isomorphes ssi f et g sont équivalents.

Rappelons que $k[X]$ est un anneau euclidien. L'algorithme du pivot de Gauss assure donc que pour toute matrice $A \in M_n(k[X])$, il existe $Q_0, Q_1 \in GL_n(R)$ et des polynômes $P_1, \dots, P_r \in k[X]$ vérifiant $P_j | P_{j+1}$ tels que

$$Q_0 A Q_1 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \\ & 0 & P_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec Q_j qui sont produit de transvections. Lorsque $A = \text{mat}(f) - X.id_E$ la famille de polynômes P_1, \dots, P_r sont appelés les facteurs invariants de f .

Dans un tel anneau, l'identité $A.Com(A)^T = Com(A)^T.A = \det(A)I_n$ a toujours un sens, et fournit une preuve simple du théorème de Cayley-Hamilton. En effet, appliquée à la matrice $A - XI_n \in M_n(k[X])$, on obtient

$$\chi_A(X)I_n = Com(A - XI_n)^T.(A - XI_n)$$

mais dans E_A , on a par définition $X.e_i = Ae_i = \sum a_{ij}e_j$ donc $\chi_A(X).e_i = 0$ pour tout i , i.e. $\chi_A(A) = 0$.

5 Leçons d'Analyse et Probabilités

5.1 232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$. Exemples.

5.2 247 Exemples de problèmes d'interversion de limites

5.3 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse

Développements possibles :

- théorème de Stampacchia, et applications. (Version plus faible : Lax-Milgram),
- sous-différentielle de fonctions convexes,
- théorème de Hahn-Banach,
- problèmes d'optimisation.

Questions :

- Montrer que la fonction Γ est log-convexe, où :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- Rappeler l'inégalité de Jensen.
- Montrer que toute fonction strictement convexe admet un unique minimum.

Voici quelques idées pour le plan.

5.3.1 Projection sur un convexe fermé

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Théorème 3 (Projection sur un convexe fermé). Soit C un convexe fermé non-vide de H et $x \in H$. Alors il existe un unique $y \in C$ tel que :

- $\|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$.

Cet élément, noté $p_C(x)$, est nommé le projeté de x sur C . Attention, on perd l'unicité si la norme n'est pas euclidienne. Un contre-exemple simple est donné par la boule unité sur $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. L'existence reste vraie pour les espaces de Banach réflexifs (les boules sont compactes pour la topologie faible-*).

Théorème 4 (Stampacchia). Soit H un espace de Hilbert, et C un convexe non-vide fermé de H . Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive, i.e. il existe des constantes $C, \alpha > 0$ telles que :

$$\forall x, y \in H, |a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \text{ et } |a(x, x)| \geq \alpha \|x\|^2.$$

Alors pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ vérifiant

$$\forall x \in C, a(u, x - u) \geq \phi(x - u).$$

Si de plus a est symétrique, u est caractérisé comme l'unique minimum du problème d'optimisation suivant

$$\min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \phi, v \rangle_{H' \times H} \right\}.$$

Pour une preuve, on peut se référer au livre de Brézis [2] [1].

Corollaire 1 (Lax-Milgram). Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur H . Alors, pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ vérifiant $a(u, v) = \langle \phi, v \rangle_{H' \times H}$ pour tout $v \in H$.

Si de plus a est symétrique, u est caractérisé comme l'unique minimum du problème d'optimisation suivant

$$\min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \phi, v \rangle_{H' \times H} \right\}.$$

5.3.2 Applications aux EDP

Ces théorèmes sont des résultats efficaces pour prouver des théorèmes d'existence et d'unicité pour des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques [1]. De plus, le lien avec un problème d'optimisation donne une interprétation naturelle des solutions comme satisfaisant au principe de la moindre action. Les physiciens aiment à faire des modèles munis d'une fonctionnelle appelé le lagrangien du système. Les équations du mouvement sont alors donnés par les équations d'Euler-Lagrange associées. Ici, $\frac{1}{2}a(v, v)$ représenterait l'énergie et $\langle \phi, v \rangle$ le potentiel.

EDP non homogène. On s'intéresse au problème suivant sur $U = (0, 1)$:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases}$$

avec $f \in L^2(U)$.

Si $\alpha = \beta = 0$, l'existence et l'unicité de la solution dans $H_0^1(U)$ découle du théorème de Lax-Milgram. Sinon, l'espace des fonctions

$$H_{\alpha, \beta}^1 = \{f \in H^1(U) : f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

n'est pas un espace de Hilbert. C'est par contre un convexe fermé de $H^1(U)$, on peut donc appliquer le théorème de Stampacchia.

Problème de l'obstacle. On se donne $h \in C([0, 1])$ telle que $h(0)$ et $h(1) < 0$. On observe $C = \{\eta \in H_0^1(U) \text{ tel que } : \eta \geq h, \text{ et on définit la fonction énergie } J(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \text{ sur } H_0^1(U). \text{ Le problème de l'obstacle est}$

$$\min_{u \in C} J(u).$$

Références

- [1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] Haïm Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [3] Jean-Pierre Kahane. *Séries de fourier et ondelettes*. 1998.
- [4] Rached Mneimné. *Réduction des endomorphismes*. Calvage et Mounet, 2006.