

# L3 Calcul Formel

## Université de Lorraine

### TP 1 : Algorithmes d'Euclide étendu et de Garner

Clément Dell'Aiera

Quelques adresses utiles :

- le site de l'agrégation de mathématiques <http://agreg.org>, vous y trouverez des textes pour vous entraîner, et surtout les comptes rendus du jury. Aussi, la liste des logiciels acceptés à l'agreg : **Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R**. Tous sont libres et gratuits.
- Nous allons travailler avec Sage, que vous pouvez télécharger sur la page <http://www.sagemath.org/fr/>. Vous pouvez aussi travailler directement dans une page ouverte dans le navigateur.

## 1 Prise en main de SAGE

1. Ouvrir la page <https://cloud.sagemath.com/> dans votre navigateur, créer un compte gratuit et un nouveau fichier (*New sagemath worksheet*) que vous nommerez TP1 par exemple.
2. Trouver et télécharger le tutoriel SAGE : vous pouvez le faire chez vous pour vous entraîner.
3. Pour évaluer les instructions contenues dans une cellule, vous pouvez soit cliquer sur le lien *evaluate* ou *Run* en haut à gauche, soit utiliser le raccourci clavier MAJ+ENTREE. Saisir les expressions suivantes et les évaluer :

$9 + 3$ ,  $6 * 5$ ,  $63 // 9$ ,  $17 // 5$ ,  $17 \% 5$ .

4. Que donne l'évaluation des instructions suivantes ?

$\cos?$ , *RationalField?*, *PolynomialRing?* .

5. Pour affecter une valeur à une variable, on utilise le signe  $=$ . Affecter la valeur  $\cos(\frac{\pi}{12})$  à une variable  $x$ , puis évaluer  $x$ ,  $\text{print}(x)$ . Pour un affichage graphique, utilisez  $x.\text{show}()$ . Que renvoie l'évaluation de  $x.n(\text{digits} = 10)$  ?
6. SAGE permet de faire du calcul symbolique. Pour déclarer des variables  $x$  et  $y$ , on utilise la commande  $\text{var}(x, y)$ . Evaluer

```
var ('x, y')
z = cos(x)^2 + sin(y)^2
print z. subs_expr (x == pi/2)
print z(y = pi/2)
```

Si SAGE indique une erreur (*deprecation*), c'est seulement que vous avez déjà utilisé un des noms de variables auparavant. Pour corriger ce problème, il suffit de réinitialiser les variables en évaluant  $\text{reset}()$  au début de votre code.

7. Définir une fonction de la façon suivante :

```
reset()
var ('x, y')
f(x, y) = x/sin(x) + sqrt(y)
f
```

La fonction  $f$  est désormais un objet, évaluer  $f.\text{parent}()$  pour savoir lequel. Evaluer

$f.\text{show}()$ ,  $f.\text{limit}(x = 0).\text{show}()$ ,  $f.\text{diff}(x).\text{show}()$ .

8. On peut aussi utiliser la commande  $\text{def}$  pour définir une fonction :

```
def FONCTION(entree):
    instructions
    return(sortie)
```

Définir une fonction qui prend en entrée un nombre réel  $x$  et renvoie son carré  $x^2$ .

## 2 Arithmétique

9. Créer une fonction qui prend en entrée deux entiers positifs, et renvoie leur *pgcd*, grâce à l'algorithme d'Euclide.
10. Créer une fonction qui prend en entrée deux entiers positifs  $x$  et  $y$ , et renvoie leur *pgcd*  $d$  ainsi que deux entiers  $u$  et  $v$  qui vérifient  $ux + vy = d$ . Vous utiliserez par exemple l'algorithme d'Euclide étendu.
11. Créer une fonction qui prend en entrée deux listes d'entiers  $[a_1, \dots, a_k]$  et  $[n_1, \dots, n_k]$  et renvoie une solution du système de congruences

$$\begin{cases} x &= a_1 \bmod n_1 \\ &\dots \\ x &= a_k \bmod n_k \end{cases}$$

12. SAGE permet de faire de l'arithmétique avec des polynômes. Construire l'anneau des polynômes à coefficients rationnels à une indéterminée en évaluant  $R = \mathbb{Q}\mathbb{Q}[x']$ .
13. Spécifier le nom de la variable grâce à  $T = R.gen()$ .
14. Créer une fonction qui effectue l'algorithme d'Euclide étendu sur deux polynômes, et la tester sur  $P = T^2 + 1$  et  $Q = T^3 + 2T^2 + 1$ .