L3 Calcul Formel
Université de Lorraine

TP 5 : Pivot de Gauss-Jordan

Clément Dell'Aiera

On travaillera pour ce TP dans l'anneau des entiers $A = \mathbb{Z}$, mais l'algorithme présenté fonctionne correctement dans tout anneau euclidien A. La base canonique de $\mathfrak{M}_{n,m}(A)$ est notée $E_{ij} = (\delta_{l=i,l'=j})_{1\leq l\leq n, 1\leq j\leq m}$. Soit $\mathcal{P}$ un système complet d'éléments irréductibles de A, pour les entiers on peut prendre $\mathcal{P} = \mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Tout élément $n \in A$ s'écrit

$$n = u \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

où u est une unité de A. On définit le poids d'un élément n comme

$$\delta(n) = \sum_{p\in\mathcal{P}} v_p(n) \in \mathbb{N}.$$

- Si $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,m}(A)$, $M^{(k)}$ désigne la sous matrice de taille $(n-k+1)\times(m-k+1)$ obtenue en ne gardant que le "coin en bas à gauche" :

$$M^{(k)} = (m_{ij})_{k\leq i\leq n, k\leq j\leq m}.$$

- Si $x \in A$, $i \neq j$, et $l > 0$, on appelle matrices de transvection les matrices

$$T^l_{ij}(x) = I_l + xE_{ij} \in GL(l, A)$$

Lorsqu'une matrice M est fixée, on note L_i sa $i^{\text{ème}}$ ligne et C_j sa $j^{\text{ème}}$ colonne. L'algortihme du pivot de Gauss ramène un système linéaire quelqconque à une forme que l'on appelle échelonnée au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. On se servira tout au long du TP des faits suivants :

- l'opération $L_i \leftarrow L_i + xL_j$ est donnée par l'opération matricielle

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{n,m}(A) & \rightarrow & \mathfrak{M}_{n,m}(A) \\ M & \mapsto & T^n_{ij}(x)M \end{cases}$$

- l'opération $C_j \leftarrow C_j + xC_i$ est donnée par l'opération matricielle

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{n,m}(A) & \rightarrow & \mathfrak{M}_{n,m}(A) \\ M & \mapsto & MT^m_{ij}(x) \end{cases}$$

- l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ est donnée par l'opération matricielle

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{n,m}(A) & \to & \mathfrak{M}_{n,m}(A) \\ M & \mapsto & T_{ij}^n(1)T_{ji}^n(-1)T_{ij}^n(1)M \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{n,m}(A) & \to & \mathfrak{M}_{n,m}(A) \\ M & \mapsto & MT_{ij}^m(-1)T_{ji}^m(1)T_{ij}^m(-1) \end{cases}$$

Si $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,m}(A)$, on définit $p_M(i) = \inf\{k : m_{ik} \neq 0\}$. On dit que M est sous **forme échelonnée** si la suite $p_M(i)$ est strictement croissante. Le but du pivot de Gauss est, étant donnée une matrice $M \in \mathfrak{M}_{n,m}(A)$, de trouver une suite de transvections telle que, en faisant successivement les multiplications par ces transvections, la matrice obtenue soit échelonnée.

L'algorithme est basé sur le lemme suivant :

Lemme 1. Soit $x \in A^n$ un vecteur, et d les pgcd des composantes de x, alors il existe $L \in GL(n, A)$ telle que

$$Lx = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on en déduit que pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_{n,m}(A)$, il existe une matrice inversible $L \in GL(n, A)$ telle que LM soit échelonnée.

Pivot de Gauss
Entrée : $M \in \mathfrak{M}_{n,m}(A)$ non nulle.
Sortie : $D \in \mathfrak{M}_{n,m}(A)$ matrice échelonnée équivalente à M.
1.

1. Implémenter une fonction T qui prend entrée deux indices i et j, un entier l, et un élément $x \in A$, et renvoie la matrice de transvection $T_{ij}^l(x)$.
2. Implémenter une fonction *echange* qui prend en entrée une matrice M et quatres indices i_0, i_1, j_0 et j_1, et renvoie la matrice M ayant subie les permutations $L_{i_0} \leftrightarrow L_{i_1}$ et $C_{j_0} \leftrightarrow C_{j_1}$.
3. Implémenter une fonction *poids* qui calcule le poids d'un entier.
4. Implémenter une fonction *MinimalWeight* qui prend en entrée une matrice M et un entier k, et renvoie la position de l'élément de poids minimal de la première colonne de la sous-matrice $M^{(k,k)}$.
5. Implémenter une fonction *echelon* qui prend une matrice M et un entier k, et vérifie que la ligne k est bien sous forme échelonnée, i.e. renvoie $True$ si $\forall i > k, m_{ik} = 0$, $False$ sinon.