

Préparation à l'Agrégation Externe  
Université de Lorraine

**Poly d'agreg**

Clément Dell'Aiera

**Table des matières**

<b>1</b>	<b>Leçons d'Analyse et Probabilités</b>	<b>2</b>
1.1	232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$ . Exemples. . . . .	2
1.2	247 Exemples de problèmes d'interversion de limites . . . . .	2
1.3	253 Utilisation de la notion de convexité en analyse . . . . .	2
1.3.1	Projection sur un convexe fermé . . . . .	3
1.3.2	Applications aux EDP . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Théorèmes limites dans le cas IID</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Chaînes de Markov</b>	<b>6</b>
3.1	Circulation des pièces de monnaie dans la zone euro . . . . .	8
3.2	Marche aléatoire simple sur un graphe . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>10</b>
4.1	Séries de Fourier et convolution . . . . .	10
4.2	Oscillations de Gibbs . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Algèbre linéaire</b>	<b>11</b>
5.1	Réduction des endomorphismes . . . . .	11
5.2	Un rappel sur le déterminant . . . . .	11

# 1 Leçons d'Analyse et Probabilités

## 1.1 232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$ . Exemples.

## 1.2 247 Exemples de problèmes d'interversion de limites

## 1.3 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse

Développements possibles :

- théorème de Stampacchia, et applications. (Version plus faible : Lax-Milgram),
- théorème de Hahn-Banach,
- méthode du gradient,
- problèmes d'optimisation, équilibre de Nash [?],
- sous-différentielle de fonctions convexes.

Questions :

- Montrer que la fonction  $\Gamma$  est log-convexe, où :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- Rappeler l'inégalité de Jensen.
- Montrer que toute fonction strictement convexe admet un unique minimum.

Voici quelques idées pour le plan.

On peut séparer le plan en 2 parties, une sur l'utilisation de la notion d'ensemble convexe, l'autre sur celle de fonction convexe. Dans celle sur les ensembles convexes, je choisirais de traiter :

1. Définition et exemples
2. Enveloppe convexe : théorème de Carathéodory
3. Jauge d'un convexe :

$$\rho_C(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}$$

Corollaire : Tout convexe borné d'intérieur non vide est homéomorphe à une boule unité. ( via  $x \mapsto \rho_C(x) \frac{x}{\|x\|}$  )

4. Projection sur un convexe fermé (dans un Hilbert)  
Donner un exemple de non-unicité du projeté quand la norme n'est pas euclidienne. ( $\mathbb{R}^2$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $C$  est une droite affine).
5. Théorème de séparation : Hahn-Banach.

Pour la partie sur les fonctions, je choisirais d'insister sur les problèmes d'optimisation.

1. Définition et exemples
2. Régularité des fonctions convexes : continuité automatique, dérivabilité partout sauf un nombre dénombrable de points, condition  $H_f(x) > 0$  lorsque l'on est deux fois différentiable,... Une application linéaire non continue en dimension infinie, pour donner un contre exemple à la continuité. Par exemple  $C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(0)$  pour  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ .
3. Recherche d'extrema : méthode du gradient à pas optimal.

Quelques applications :

- $(\sum_i \frac{x_i}{n})^2 \leq \sum_i \frac{x_i^2}{n}$ . Plus généralement, si on définit  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum x_i$ , alors

$$|\phi(x)| \leq n^{1-\frac{1}{p}} \|x\|_p.$$

- Si on se donne un échantillon statistique  $X_1, \dots, X_n$ , alors on définit la moyenne empirique comme  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_j X_j$  et la médiane empirique comme  $m_n = X_{(E(\frac{n}{2}))}$ , où  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots X_{(n)}$  est l'échantillon ordonné, et  $E$  est la partie entière. Alors  $\bar{X}_n$  et  $m_n$  sont solutions des problèmes d'optimisation convexe suivant :

$$\bar{X}_n = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_i (x - X_i)^2 \right\} \quad m_n = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_i |x - X_i| \right\}.$$

- L'estimateur des moindres carrés ordinaire est la solution du problème convexe suivant  $\operatorname{argmin} \|Y - X^T \beta\|^2$ . Pour rappel,  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ , et si le modèle est  $Y = X\beta + \varepsilon$  avec  $E[\varepsilon] = 0$ ,  $E[\varepsilon \varepsilon^T] = \sigma^2 Id$ , alors l'estimateur est BLUE (Best Linear Unbiased Estimator), i.e. il est de variance minimale parmi les estimateurs sans biais.

### 1.3.1 Projection sur un convexe fermé

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert.

**Théorème 1** (Projection sur un convexe fermé). Soit  $C$  un convexe fermé non-vidé de  $H$  et  $x \in H$ . Alors il existe un unique  $y \in C$  tel que :

- $\|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|$ ,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$  pour tout  $z \in C$ .

Cet élément, noté  $p_C(x)$ , est nommé le projeté de  $x$  sur  $C$ . Attention, on perd l'unicité si la norme n'est pas euclidienne. Un contre-exemple simple est donné par la boule unité sur  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ . L'existence reste vraie pour les espaces de Banach réflexifs (les boules sont compactes pour la topologie faible-\*).

Pour une preuve, voir Brézis [2]. L'idée est assez simple : on se donne une suite minimisante, et on prouve qu'elle est de Cauchy avec l'identité du parallélogramme, ce qui assure sa convergence vers un élément dont on prouve qu'il satisfait les hypothèses du théorème.

Quelques applications :

- si  $F \subset H$  est un sous-espace vectoriel, alors  $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ , et donc  $F$  est dense ssi  $F^\perp = 0$ ,
- Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $\mathcal{B}$  une sous-tribu. Dans  $H = L^2(\Omega, \mathbb{P})$ , notons  $C$  les sous-espace des fonctions de  $H$   $\mathcal{B}$ -mesurables, qui est un sous-espace vectoriel, donc convexe, fermé de  $H$ . Alors  $p_C(X) = E[X|\mathcal{B}]$ .
- théorème de Schauder : le théorème de Brouwer affirme que, en dimension finie, toute application continue de la boule unité dans elle-même admet un point fixe. Ce théorème peut s'adapter à la dimension infinie, ce qui donne le théorème de Schauder.

**Théorème 2.** Soit  $C$  un convexe fermé non-vidé d'un espace vectoriel normé  $E$ . Alors, toute application continue  $f : C \rightarrow C$  d'image relativement compacte admet un point fixe.

Remarquons que l'on n'impose pas la compacité de  $C$ , qui serait alors nécessairement d'intérieur vide en dimension infinie (car contiendrait une boule).

**Théorème 3** (Stampacchia). Soit  $H$  un espace de Hilbert, et  $C$  un convexe non-vidé fermé de  $H$ . Soit  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue et coercive, i.e. il existe des constantes  $C, \alpha > 0$  telles que :

$$\forall x, y \in H, |a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \text{ et } |a(x, x)| \geq \alpha \|x\|^2.$$

Alors pour toute forme linéaire continue  $\phi \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  vérifiant

$$\forall x \in C, a(u, x - u) \geq \phi(x - u).$$

Si de plus  $a$  est symétrique,  $u$  est caractérisé comme l'unique minimum du problème d'optimisation suivant

$$\min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \phi, v \rangle_{H' \times H} \right\}.$$

Pour une preuve, on peut se référer au livre de Brézis [2] [1]. Celle-ci se base complètement sur la caractérisation du projeté, et a donc toute sa place dans cette leçon.

**Corollaire 1** (Lax-Milgram). Soit  $a$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ . Alors, pour toute forme linéaire continue  $\phi \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  vérifiant  $a(u, v) = \langle \phi, v \rangle_{H' \times H}$  pour tout  $v \in H$ .

Si de plus  $a$  est symétrique,  $u$  est caractérisé comme l'unique minimum du problème d'optimisation suivant

$$\min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \phi, v \rangle_{H' \times H} \right\}.$$

### 1.3.2 Applications aux EDP

Ces théorèmes sont des résultats efficaces pour prouver des théorèmes d'existence et d'unicité pour des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques [1]. De plus, le lien avec un problème d'optimisation donne une interprétation naturelle des solutions comme satisfaisant au principe de la moindre action.

Les physiciens aiment à faire des modèles munis d'une fonctionnelle appelé le lagrangien du système. Les équations du mouvement sont alors données par les équations d'Euler-Lagrange associées. Ici,  $\frac{1}{2}a(v, v)$  représenterait l'énergie et  $\langle \phi, v \rangle$  le potentiel.

On rappelle que  $H^1(U)$  est l'espace de Hilbert obtenu comme complétion de  $C^\infty(U)$  par rapport au produit scalaire  $\langle u, v \rangle = \int_U uv + u'v'$ . Tout élément de  $H^1$  admet une dérivée (au sens des distributions) qui est dans  $L^2(U)$ .

**EDP non homogène.** On s'intéresse au problème suivant sur  $U = (0, 1)$  :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases}$$

avec  $f \in L^2(U)$ .

Si  $\alpha = \beta = 0$ , l'existence et l'unicité de la solution dans  $H_0^1(U)$  découle du théorème de Lax-Milgram. Sinon, l'espace des fonctions

$$H_{\alpha, \beta}^1 = \{f \in H^1(U) : f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

n'est pas un espace de Hilbert. C'est par contre un convexe fermé de  $H^1(U)$ , on peut donc appliquer le théorème de Stampacchia.

**Problème de l'obstacle.** On se donne  $h \in C([0, 1])$  telle que  $h(0)$  et  $h(1) < 0$ . On observe  $C = \{\eta \in H_0^1(U) \text{ tel que } : \eta \geq h, \text{ et on définit la fonction énergie } J(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \text{ sur } H_0^1(U). \text{ Le problème de l'obstacle est}$

$$\min_{u \in C} J(u).$$

Quelques adresses utiles :

- le site de l'agrégation de mathématiques <http://agreg.org>, vous y trouverez des textes pour vous entraîner, et surtout les comptes rendus du jury. Aussi, la liste des logiciels acceptés à l'agreg : **Python, Scilab, Octave, Sage, Maxima, Xcas, R**. Tous sont libres et gratuits.
- la page de la préparation de Rennes <https://perso.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/agreg-probas.html>

## 2 Théorèmes limites dans le cas IID

Les deux théorèmes suivant sont à maîtriser impérativement.

**Théorème 4** (LGN et TCL). Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées et réduites, on note  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum X_j$ . Alors

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &\rightarrow_{ps} 0, \\ \sqrt{n}\hat{\theta}_n &\rightarrow_{\mathcal{L}} 0.\end{aligned}$$

Pour l'illustrer avec Scilab, on peut :

- tirer aléatoirement des variables aléatoires iid
- calculer la moyenne empirique et montrer qu'elle converge vers l'espérance
- répéter l'opération pour obtenir un échantillon de moyennes empiriques
- tracer la fonction de répartition empirique, et montrer qu'elle converge en norme sup vers la fonction de répartition d'une normale.
- montrer que cela n'arrive pas avec certaines lois bien choisies. Par exemple la loi de Cauchy.

Un bon contre-exemple est la loi de Cauchy, de densité

$$P(dx) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

On voit qu'elle ne satisfait pas les hypothèses : elle n'a pas de moment d'ordre 1, puisqu'équivalente à  $\frac{1}{\pi x^2}$  en  $+\infty$ .

Pour la simuler, on peut utiliser le lemme suivant.

**Lemme 1.** Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  et  $U$  suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Alors  $F^{-1}(U)$  et  $X$  ont mêmes lois.

**Preuve.** On rappelle que les fonctions de répartition sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- $F$  est càd-làg (continue à droite limite à gauche),
- $F$  est croissante,
- $\lim_{-\infty} F = 0$  et  $\lim_{\infty} F = 1$ .

$F$  n'admet pas forcément d'inverse, mais une inverse généralisée définie par

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \leq y\}.$$

Alors :

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

□

Pour, la loi de Cauchy, un simple calcul donne  $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$ , et  $F^{-1}(u) = \tan(\pi(u - \frac{1}{2}))$ .

Le code suivant illustre cela, avec une fonction courte pour afficher des fonctions de répartition empiriques.

```
N=500
m=10

// Loi normale, exponentielle, et de Cauchy

Z=grand(1,N,'nor',0,1)
W= grand(1,N,'exp',2)
U=rand(1,N)
Cauchy=30*tan($\%$ pi*(U-0.5))

// Loi des grands nombres
```

```

function esperance=esperance(X)
    [p,q]=size(X)
    scf()
    plot2d([1:q],cumsum(X)./[1:q],2)
    xtitle("Loi des grands nombres")
endfunction

esperance(Z)
plot2d([0:N],0*[0:N])

\textbf{FDR empirique}

// Theoreme Central Limite
function plotFDR=plotFDR(X)
    [p,q]=size(X);
    scf()
    plot2d2(-sort(-X),(1/q)*[1:q],2)
    xtitle("Fonction de repartition empirique")
endfunction

h=0.1;
t=[-5:h:5];

plotFDR(Z)
ynor=cdfnor("PQ",t,0*t,0*t+1)
plot2d(t,ynor)

plotFDR(W)
t=[0:h:5];
ypoi=cdfpoi("PQ",t,0*t+2)
plot2d(t,ypoi)

plotFDR(Cauchy)

```

### 3 Chaînes de Markov

On rappelle qu'une chaîne de Markov est l'analogie probabiliste d'une suite récurrente d'ordre 1. C'est la donnée d'un couple  $(E, P)$  où  $E$  est un espace d'état, et  $P : E \times E \rightarrow [0, 1]$  un noyau de transition.

Vous devez connaître ces définitions, ainsi que

- la définition de la propriété de Markov
- l'équation de Chapman-Kolmogorov
- la définition de mesure invariante  $\nu P = \nu$ , de mesure réversible  $\nu(x)P(x, y) = \nu(y)P(y, x)$ , et savoir montrer que réversible entraîne invariante.

Supposons que l'espace d'états  $E$  est fini. Alors l'espace des probabilités invariantes est un compact convexe non-vide du simplexe des probabilités sur  $E$ , vue comme un sous-espace de  $\mathbb{R}^{|E|}$ . En particulier, il existe une mesure invariante. Pour l'unicité, il suffit que la chaîne soit irréductible, i.e. que le graphe de transition soit connexe.

**Théorème 5** (Théorème ergodique). Si  $(X_n)$  une trajectoire d'une chaîne de Markov irréductible, d'unique probabilité invariante  $\nu$ . Alors pour toute fonction  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(X_k) \rightarrow \int_E \phi(x) \nu(dx).$$

Alors

$$\nu(x) = \frac{1}{E[T_x]},$$

où  $T_x = \inf\{n > 1 : X_n = x\}$  est le temps de retour en  $x$ .

De plus, si la chaîne est fortement apériodique, alors on a, pour toute mesure de probabilité initiale  $\mu_0$ , la convergence en loi suivante :

$$\mu_0 P^n \rightarrow \nu,$$

i.e.  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $\nu$  quelle que soit sa distribution initiale.

Vous devez penser à la mesure invariante comme la mesure que le système atteint à l'équilibre. Par exemple, dans le modèle de l'urne d'Ehrenfest, on avait  $E = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ,

$$P(k, k-1) = 1 - P(k, k+1) = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad P(0, 1) = P(m, m-1) = 1.$$

Ce modèle est sensé représenter  $m$  particules indistingables dans une pièce, que l'on sépare en deux zones distinctes  $A$  et  $B$ . L'état du système est entièrement déterminé par le nombre  $X_T$  de particules qui se trouvent à l'instant  $T$  dans la zone  $A$  par exemple.

La chaîne est irréductible, mais admet une période : la parité des états visités alterne en fonction du temps. On ne peut donc qu'appliquer la convergence presque-sûre, et pas la convergence en loi, dans le théorème ergodique.

Un simple calcul montre que  $\nu(x) = \frac{1}{2^m} \binom{m}{x}$  est une mesure réversible, donc invariante, qui est unique par irréductibilité. Cela signifie que si l'expérimentateur lance son expérience, quitte la pièce assez longtemps pour que le système atteigne l'équilibre, et qu'il fait une mesure du nombre de particules dans la zone  $A$  lors de son retour, il trouvera  $x$  avec une probabilité proche de  $\nu(x)$  (d'autant plus proche que le temps passe).

Un point inquiétant du modèle est qu'il autorise un retour à l'état 0 ou  $m$ , ce qui signifie que toute les particules de la pièce sont concentrées dans une partie de la pièce, laissant l'autre vide. Si le jury soulève cette question, vous pouvez alors utiliser le théorème ergodique pour arguer que le temps de retour :

- en  $m$  est de l'ordre de

$$E[T_m] = \frac{1}{\nu(m)} = \frac{1}{2^m}$$

- en  $\frac{m}{2}$  est de l'ordre de

$$E[T_{m/2}] = \frac{1}{\nu(m/2)} \sim \sqrt{\frac{\pi m}{2}}$$

en utilisant la formule de Stirling.

Le nombre  $m$  étant supposé très grand, il faudrait à l'expérimentateur attendre très longtemps pour voir se réaliser une situation pareille. Enfin, si on note  $Z$  une normale centrée réduite :

$$\nu\left(\left[\frac{m}{2} \pm 2\epsilon\sqrt{m}\right]\right) \simeq P(|Z| > \epsilon) = 1 - 2P(Z > \epsilon)$$

et

$$P(Z > \epsilon) = P(e^{tZ} > e^{t\epsilon}) \leq \frac{E[e^{tZ}]}{(t\epsilon)^2}.$$

Ce calcul montre que toute la masse de la mesure invariante est concentrée autour de l'état  $m/2$ , i.e. qu'à l'équilibre, un expérimentateur ne peut mesurer qu'un nombre de particules pratiquement égal dans les deux zones (avec une très forte probabilité).

Le calcul utilise successivement :

- l'approximation gaussienne de la binomiale,
- la symétrie de la loi normale,
- l'inégalité de Markov.

Voici pour la simulation. Essentiellement, on entre la matrice de transition, et on utilise l'option *markov* de *grand*.

```
//Entree de la matrice de transition de la chaine de Markov associee au modele d
//Ehrenfest

function P=ehrenfest(N)
d1=(N-(0:N-1))/N;
d2=(1:N)/N;
P=diag(d1,1)+diag(d2,-1);
endfunction;

// Simulation

m=1000
T=100000
```

```
x0=m
X=grand(T,'markov',ehrenfest(m),x0)
plot([1:T],X)
```

On peut facilement voir que le système atteint rapidement l'état d'équilibre sur la figure ???. C'est un fait général : la vitesse de convergence est dominée par le plus grand module  $< 1$  des valeurs propres de la matrice de transition  $P$ . Cela est donné par le théorème de Perron-Frobenius.

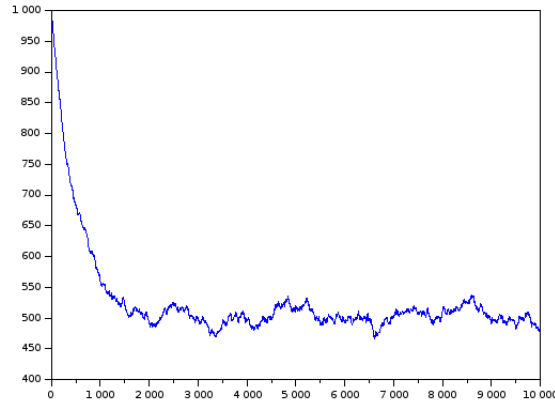


FIGURE 1 – Une trajectoire partant de l'état  $m = 1000$  particules dans la zone  $A$

### 3.1 Circulation des pièces de monnaie dans la zone euro

Voici un code basé sur le texte de modélisation "L'euro voyage" publié par le jury. Le modèle est une variation du modèle d'Erhenfest. On suppose désormais qu'il y a 2 types de particules. A chaque instant, on choisit deux particules, une dans chaque compartiment, et on les échange. Le code contient une fonction qui permet de simuler des trajectoires de cette chaîne de Markov, et affiche ensuite l'histogramme empirique superposé à la densité de la probabilité invariante, ce qui permet d'illustre le théorème ergodique.

```
////////////////////////////////////
//                               Modele d'Erhenfest modifie                               //
// pour la circulation des pieces de monnaie dans Euroland //
////////////////////////////////////

// Parametres
Na=80;
Nb=80;

// Matrice de transition
function P=Euroland(na,nb)
    r=na/nb;
    u=r*(1-[0:(na-1)]./na).^2; // de i a i+1
    v=(1-[0:na]./na).*(1-r+2*r*[0:na]./na) // de i a i
    w= ([1:na]./na).*(1-r+r*[1:na]./na) // de i a i-1
    P=diag(u,1)+diag(v)+diag(w,-1)
endfunction

// Simulation
T=100000;
P=Euroland(Na,Nb)
X = grand(T, 'markov',P,1)
plot2d(1:T,X,2)

// k parmi n
function C = C(n)
    v = cumprod(1:n);
    C= prod(1:n) ./ (v .* gsort(v))
endfunction

// Probabilite invariante et
```



```
// Histogramme empirique
h=tabul(X)
pi= C(Na).^2
scf()
plot2d2(h(:,1),(1/T)*h(:,2),2)
plot2d([1:Na],(1/sum(pi))*pi)
```

### 3.2 Marche aléatoire simple sur un graphe

**Définition 1.** Un graphe fini  $G = (V, E)$  est la donnée d'un ensemble fini  $V$  dont les éléments sont appelés les sommets, et d'un sous-ensemble  $E \subset V \times V$  dont les éléments sont appelés les arêtes. La marche aléatoire sur le graphe fini  $G$  est la chaîne de Markov donnée par le noyau de transition

$$\forall x, y \in V, \quad P(x, y) = \frac{1}{|\{y \in V \text{ t.q. } (x, y) \in E\}|}.$$

**Proposition 1.** La mesure donnée par  $\nu(x) = |\{y \in V \text{ t.q. } (x, y) \in E\}|$  est réversible pour la marche aléatoire simple sur  $G$ .

**Preuve.** En effet, si on note  $\deg(x) = |\{y \in V \text{ t.q. } (x, y) \in E\}|$ , alors

$$\nu(x)P(x, y) = 1 = P(y, x)\nu(y)$$

ce qui montre que la marche aléatoire simple sur  $G$  converge vers le tirage aléatoire sur le graphe, i.e. si l'on part de  $v \in V$  en effectuant des pas selon le noyau de transition  $P$ , le régime stationnaire se comporte comme le tirage uniforme sur la composante connexe de  $v$ . □

Pour rappel, une mesure réversible est toujours invariante : soit  $\nu$  telle que  $\nu(x)P(x, y) = P(y, x)\nu(y)$ , alors :

$$(\nu P)(x) = \sum_y \nu(y)P(y, x) = \sum_y \nu(x)P(x, y) = \nu(x).$$

Une application rigolote de ce genre de marche aléatoire est le mélange de carte.

**Définition 2.** Soit  $G$  un groupe finiment engendré et  $S$  une partie finie génératrice ne contenant pas le neutre de  $G$  et telle que  $g \in S \Rightarrow g^{-1} \in S$ . On définit le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  comme le graphe

- de sommets  $V = G$ ,
- d'arêtes  $E = \{(g, gs) : g \in G, s \in S\}$ .

Si l'on prend  $G = \mathfrak{S}_n$ , le groupe des permutations d'un ensemble fini que l'on identifie à notre jeu de carte, et pour  $S$  une partie génératrice représentant les mouvements de mélange possibles, alors l'analyse qui précède assure que si l'on mélange les cartes assez longtemps, on s'approchera de la mesure stationnaire proportionnelle à  $\deg(x)$ . Mais un graphe de Cayley est régulier, en effet, pour tout  $g \in G$ ,  $\deg(g) = |S|$ , donc la mesure stationnaire est la mesure uniforme sur  $G$ .

## 4 Séries de Fourier

Une très bonne référence pour tout ce qui s'apparente à de l'analyse de Fourier est le très bon livre de Kahane [4].

### 4.1 Séries de Fourier et convolution

Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$ , sa série partielle de Fourier est donnée par

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t)dt.$$

avec  $D_N(x) = \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ . L'intérêt du membre de droite est de remarquer que la série partielle de Fourier peut s'exprimer comme la convolution de  $f$  avec le noyau  $D_N$ , appelée noyau de Dirichlet.

Le noyau de Féjer est

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N})e^{inx}.$$

### 4.2 Oscillations de Gibbs

Pour une fonction différentiable  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , on définit sa variation totale par

$$\|f\|_V = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\| dx.$$

**Remarque 1.** Pour  $n = 1$ ,

- si  $f$  n'est pas différentiable, on peut tout de même définir sa variation totale en passant par la dérivée au sens des distributions

$$\|f\|_V = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} dx.$$

- Montrer que si  $f$  est différentiable avec des extrema locaux en  $(x_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ , alors  $\|f\|_V = \sum |f(x_{p+1}) - f(x_p)|$ .

Soit  $\phi_\varepsilon$  une fonction dont la transformée de Fourier vérifie  $\hat{\phi}_\varepsilon = 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ . On note  $f_\varepsilon = \phi_\varepsilon * f$ , alors  $\|f - f_\varepsilon\|_2 = \|\hat{f} - 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}\hat{f}\|_2 = \int_{|\xi| > \varepsilon} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ , qui tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $+\infty$ .

On a donc convergence dans  $L^2$  de  $f_\varepsilon$  vers  $f$ . Peut-on avoir convergence uniforme, i.e.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \|f - f_\varepsilon\|_\infty = 0$ ?

On va voir que lorsque  $f$  possède une discontinuité isolée, la réponse est négative.

Soit  $H(x) = 1_{x \geq 0}(x)$  la fonction de Heavyside. Un simple calcul montre que

$$\phi_\varepsilon * H = \int_{-\infty}^{\varepsilon x} \frac{\sin(t)}{\pi t} dt, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Une évaluation en  $x = \varepsilon^{-1}$  donne  $\|H - H_\varepsilon\|_\infty \geq |1 - \int_{-\infty}^1 \frac{\sin(t)}{\pi t} dt| > 0$ . Si  $f$  possède une singularité isolée en  $x_0$ , alors  $f$  peut s'écrire comme  $C.H + g$  où  $C = f(x_0^+) - f(x_0^-) > 0$  et  $g$  est une fonction continue sur un voisinage  $V$  de  $x_0$ . On prendra  $V$  relativement compact.

Montrons qu'une fonction à variation totale finie et uniformément continue vérifie  $\lim \|g - g_\varepsilon\|_\infty = 0$ .

## 5 Algèbre linéaire

### 5.1 Réduction des endomorphismes

Ce numéro présente la réduction des endomorphisme vue sous l'angle des  $k[X]$ -modules. Pour cela, nous nous inspirons fortement du livre de R. Mneimé, *Réduction des endomorphismes*[5]. On rappelle que  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  sont équivalents ssi il existe  $T \in GL(E)$  tel que  $Tf = gT$ .

Soit  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . La loi

$$\forall P \in k[X], \forall v \in E, P.v := P(f)v$$

définit une structure de  $k[X]$ -module sur  $E$ . On notera  $E_f$  le  $k[X]$ -module obtenu. Une remarque importante : soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ , alors un endomorphisme  $T \in \mathcal{L}(E)$  induit un morphisme de  $k[X]$ -module  $\tilde{T} \in \text{Hom}_{k[X]}(E_f, E_g)$  ssi  $Tf = gT$ . On a alors facilement la proposition suivante :

**Proposition 2.** Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $E_f$  et  $E_g$  sont isomorphes ssi  $f$  et  $g$  sont équivalents.

Rappelons que  $k[X]$  est un anneau euclidien. L'algorithme du pivot de Gauss assure donc que pour toute matrice  $A \in M_n(k[X])$ , il existe  $Q_0, Q_1 \in GL_n(R)$  et des polynômes  $P_1, \dots, P_r \in k[X]$  vérifiant  $P_j | P_{j+1}$  tels que

$$Q_0 A Q_1 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \\ & 0 & P_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $Q_j$  qui sont produit de transvections. Lorsque  $A = \text{mat}(f) - X \cdot \text{id}_E$  la famille de polynômes  $P_1, \dots, P_r$  sont appelés les facteurs invariants de  $f$ .

Dans un tel anneau, l'identité  $A \cdot \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T \cdot A = \det(A) I_n$  a toujours un sens, et fournit une preuve simple du théorème de Cayley-Hamilton. En effet, appliquée à la matrice  $A - X I_n \in M_n(k[X])$ , on obtient

$$\chi_A(X) I_n = \text{Com}(A - X I_n)^T \cdot (A - X I_n)$$

mais dans  $E_A$ , on a par définition  $X.e_i = A e_i = \sum a_{ij} e_j$  donc  $\chi_A(X).e_i = 0$  pour tout  $i$ , i.e.  $\chi_A(A) = 0$ .

### 5.2 Un rappel sur le déterminant

On notera  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de  $\{1, n\}$  et pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $(-1)^\sigma$  sa signature.

Le déterminant d'une matrice  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(k)$  est souvent défini comme

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1, n} a_{i, \sigma(i)},$$

ce qui rend difficile de montrer (autrement que par calcul) la multiplicativité. Le but de ce numéro est de donner une définition plus conceptuelle qui rend la démonstration presque automatique.

**Définition 3.** Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $p$  un entier. On définit le  $k$ -espace vectoriel des formes  $p$ -linéaires alternées comme :

$$\Lambda_p V = \{ \phi : V^{\times p} \rightarrow \text{t.q. } \phi(\sigma.x) = (-1)^\sigma x, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \phi \text{ est linéaire en chaque variable} \}$$

où :

- $V^{\times p} = V \times \dots \times V$  est le produit ( $p$  fois) de  $V$ ,
- $\sigma.(x_1, \dots, x_p) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$  est l'action canonique de  $\mathfrak{S}_p$  sur  $V^{\times p}$ ,

On remarque facilement que  $\dim_k(\Lambda_p V) = \binom{n}{p}$ , en particulier les formes  $n$ -linéaire alternées sont toutes proportionnelles.

**Définition 4.** Si  $V = k^n$  et  $\{e_j\}_{j=1, n}$  est la base canonique. Le déterminant est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\det$  qui satisfait  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Le déterminant d'une application linéaire est défini comme

$$\det(f) = \det(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

**Proposition 3.** Soient  $f, g \in \mathcal{L}(V)$ , alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g).$$

**Preuve.** L'application  $\phi : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est  $n$ -linéaire alternée, elle est donc proportionnelle au déterminant. Elle vaut  $\det(f)$  sur  $(e_1, \dots, e_n)$  donc  $\phi(v_1, \dots, v_n) = \det(f)\det(v_1, \dots, v_n)$ . On a donc :

$$\phi(g(e_1), \dots, g(e_n)) = \begin{cases} \det(f)\det(g) \\ \det(f \circ g) \end{cases}$$

□

## Références

- [1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] Haïm Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [3] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP sciences, 2012.
- [4] Jean-Pierre Kahane. *Séries de fourier et ondelettes*. 1998.
- [5] Rached Mneimné. Réduction des endomorphismes. *Calvage et Mounet*, 2006.
- [6] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 2009.
- [7] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [8] Walter Rudin. *Functional analysis*. international series in pure and applied mathematics, 1991.