Université de Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2014-2015.

L3 Calcul formel

Feuille de TD n° 2

Exercice 1

1) Soient K un corps, A et B deux polynômes de K[X].

Montrer que si P $\in$ K[X] est tel que pgcd(A,P)=1 et P divise AB alors P divise B.

2) Soit $F \in \mathbb{Q}[X]$.

Démontrer que F admet un facteur multiple si et seulement si $\mathrm{PGCD}(F, F') \neq 1$.

Exercice 2

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et P' son polynôme dérivé ; démontrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) P admet un facteur multiple
(ii) le résultant de P et P' est nul.

2) On appelle *discriminant* de P le résultant de P et P'. Calculer le discriminant des polynômes suivants :

$$aX^2 + bX + c \qquad\qquad X^3 + aX + b$$

Exercice 3

1) Si A est un corps commutatif, combien $P \in A[X]$ a-t-il au plus de racines distinctes dans A ?

2) Déterminer les racines de

- $X^3 - X$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,
- $X^2 - 4$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 4

Soit $P = \sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme primitif, $p \in \mathbb{N}$ premier tel que

$$\begin{cases} p \text{ divise } a_i \text{ pour tout } i,\ 0 \leq i \leq n-1 \\ p \text{ ne divise pas } a_n \\ p^2 \text{ ne divise pas } a_0 \end{cases}$$

Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Ce résultat est connu sous le nom de *critère d'Eisenstein*.

Applications :

1) Démontrer que $\sum_{i=0}^{i=p-1} X^i$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ pour tout nombre premier p.

2) Montrer que $P = X^4 - 8X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 5

En utilisant les techniques du pgcd modulaire, calculer le pgcd, dans $\mathbb{Z}[X]$, des polynômes suivants :

$$\begin{cases} A = X^5 - 30X^4 + 36X^3 + 19X^2 + 50X - 16 & (Juin\ 2009) \\ B = X^5 - 28X^4 - 23X^3 + 67X^2 - 45X + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 6X^4 - 21X^3 + 19X^2 + 29X - 17 & (Mars\ 2011) \\ B = 3X^4 - 12X^3 + 23X^2 - 24X + 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = X^6 - 4X^5 + 12X^4 - 13X^3 + 8X^2 + 18X - 42 & (Juin\ 2008) \\ B = X^5 - 3X^4 + 22X^2 - 52X + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 26X^5 + 290X^4 + 93X^3 + 2X^2 + 16X + 63 & (Novembre\ 2013) \\ B = 13X^4 - 128X^3 + 193X^2 + 328X + 189 \end{cases}$$

Exercice 6 (Partiel Novembre 2008)

Dans $\mathbb{Z}[X]$, on considère les deux polynômes :

$$\begin{aligned} A &= 6X^5 - 75X^4 + 230X^3 - 39X^2 - 230X + 120 \\ B &= 8X^4 - 40X^3 - 174X^2 + 32X + 96 \end{aligned}$$

1) En utilisant la méthode du pgcd modulaire, calculer le pgcd de A et B dans $\mathbb{Z}[X]$.

2) Si $A = D.A_1$ et $B = D.B_1$, on pose $r = res(A_1, B_1)$.
Montrer que : $r \equiv 0 \mod 16$.

3) Donner les valeurs exceptionnelles pour A et B.