Texte d'entraînement à l'épreuve de modélisation option calcul formel
Un problème de construction à la règle et au compas

Résultants, élimination, algèbre linéaire, rang de matrices.

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

1 Le problème

W. Heymann posa le problème suivant en 1890 : étant données trois valeurs génériques des longueurs parmi les longueurs des six bissectrices internes et externes d'un triangle, peut-on dessiner ce triangle en utilisant uniquement la règle et le compas ?

Le but de ce texte est de donner des indications de réponses à cette question via deux outils : les résultants d'une part et les polynômes de Dixon d'autre part.

Il y a $C_6^3 = 20$ situations à étudier, on peut se restreindre à trois d'entre elles par des raisonnements de symétrie et nous ne considérons ici que l'une de ces trois situations.

Considérons un triangle ABC (dessin page suivante) ; a, b, c les longueurs de BC, AC et AB ; soient a_i, a_e les longueurs des bissectrices interne AD et externe AE d'angle A ; et soit b_e la longueur de la bissectrice extérieure BF d'angle B.

Nous allons établir une relation entre a_e, a_i, b_e et a^2 qui est un polynôme de degré 10 en a^2 avec 331 termes. On conclut que la construction à la règle et au compas n'est pas possible, dans la mesure où le polynôme faisant intervenir a, a_e, a_i et b_e n'est pas de degré 2^m en a pour un entier m et est irréductible dans le cas générique.

Tout d'abord, on peut exprimer a_e, a_i et b_e en fonction de a, b et c à l'aide d'un petit raisonnement de géométrie Euclidienne :

$$a_i^2 = \frac{cb(c+b-a)(c+b+a)}{(b+c)^2}$$

$$a_e^2 = \frac{cb(a+b-c)(c-b+a)}{(c-b)^2}$$

$$b_e^2 = \frac{ac(a+b-c)(c+b-a)}{(c-a)^2}.$$

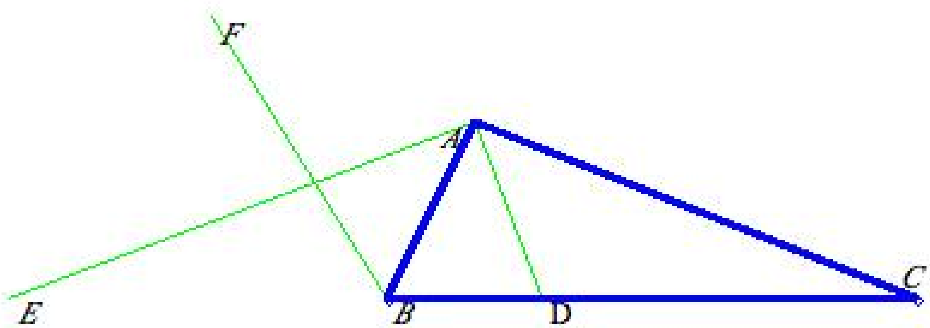
On définit les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}[a, a_e, a_i, b_e]$ en les deux variables b et c :

$$q_1(b,c) = a_i^2\,(b+c)^2 - c\,b\,(c+b-a)\,(c+b+a)$$

$$q_2(b,c) = a_e^2\,(c-b)^2 - c\,b\,(a+b-c)\,(c-b+a)$$

$$q_3(b,c) = b_e^2\,(c-a)^2 - a\,c\,(a+b-c)\,(c+b-a).$$

Il s'agit d'éliminer les variables b et c afin de trouver une relation polynomiale entre a, a_e, a_i et b_e. On se place de plus sous la contrainte $b \neq 0$ et $c \neq 0$.



2 Résolution avec les résultants (de Sylvester)

On cherche une condition nécessaire sur a, a_e, a_i et b_e à l'aide la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit L un corps. Soit A et B dans $L[x_1,\ldots,x_r] = L[x_1,\ldots,x_{r-1}][x_r]$ et soit $R(x_1,\ldots,x_{r-1}) = Res_{x_r}(A,B) \in L[x_1,\ldots,x_{r-1}]$.*
Si $(c_1,\ldots,c_r)$ est un zéro commun à A et B, alors $R(c_1,\ldots,c_{r-1}) = 0$.

On calcule les résultants :

$$r_1 = Res_b(q_1,q_3) \text{ et } r_2 = Res_b(q_2,q_3)$$

puis $Res_c(r_1/c, r_2/c)$ et on obtient, à un coefficient multiplicatif rationnel près,

$$(2\,a+b_e)^2\,(2a-b_e)^2\,(a_i+a_e)^8\,b_e^{28}\,a^{56}\,(a_i-a_e)^8\,p(a_e,a_i,b_e,a)$$

où p est un polynôme ayant 330 termes et de degré 10 en a^2.
En enlevant les termes parasites dus aux contraintes du problème (longueurs, réels positifs non nuls), on ne garde que la condition

$$(2a-b_e)^2\,(a_i-a_e)^8\,p(a_e,a_i,b_e,a) = 0$$

On peut affiner ceci et éliminer les termes $(2a-b_e)$ et (a_i-a_e) en considérant d'autres combinaisons de résultants, mais les calculs s'avèrent très longs. En utilisant le théorème d'extension, on peut s'intéresser à trouver toutes les valeurs possibles pour a, b et c si a_e, a_i et b_e sont fixés. Par exemple, si $a_e = 4, a_i = 2, b_e = 3$, on a trois valeurs possibles pour les triplets (a,b,c).

Dans le paragraphe suivant, nous utilisons une autre méthode pour trouver le polynôme p.

3 Résultant de Cayley-Bezout

Considérons deux polynômes F et G en une variable x à coefficients dans un anneau $\mathcal{R}$ de degrés m et soit α une nouvelle variable. Le déterminant

$$\Delta(x,\alpha) = \begin{vmatrix} F(x) & G(x) \\ F(\alpha) & G(\alpha) \end{vmatrix}$$

est un polynôme en x et α et s'annule quand $x=\alpha$, donc $x-\alpha$ divise Δ. Soit le polynôme

$$\delta(x,\alpha) = \frac{\Delta(x,\alpha)}{x-\alpha}.$$

Remarque 1 *Le polynôme $\delta(x,\alpha)$ est symétrique en x et α.*

On peut écrire

$$\delta(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i(x)\,\alpha^i.$$

Soit c un zéro commun à F et G, alors les coefficients de δ vu comme un polynôme en α s'annulent pour $x=c$ i.e. $C_i(c) = 0$ pour $i = 0\ldots m-1$ et le déterminant R de la

matrice associée à ce système linéaire est nul.
Plus précisément, si B est la matrice définie par :

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_i(x)\,\alpha^i = (1,\ldots,x^{m-1})\,B\,{}^t(1,\ldots,\alpha^{m-1})$$

alors R est le déterminant de B. On dit que R est le *résultant de Cayley-Bezout* pour F et G par rapport à x.

Remarque 2 *La matrice B est symétrique.*

4 Le cas de deux variables : Dixon

Dixon a généralisé l'approche de Bezout-Cayley au cas de polynômes en deux variables. Soit $\mathcal{F} = \{q_1(x_1,x_2), q_2(x_1,x_2), q_3(x_1,x_2)\}$ un ensemble de trois polynômes en deux variables à coefficients dans un anneau $\mathcal{R}$ (dans un premier temps $\mathcal{R} = \mathbb{Q}$).

Soit

$$\Delta(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2) = \begin{vmatrix} q_1(x_1,x_2) & q_2(x_1,x_2) & q_3(x_1,x_2) \\ q_1(\alpha_1,x_2) & q_2(\alpha_1,x_2) & q_3(\alpha_1,x_2) \\ q_1(\alpha_1,\alpha_2) & q_2(\alpha_1,\alpha_2) & q_3(\alpha_1,\alpha_2) \end{vmatrix}$$

où α_1, α_2 sont de nouvelles variables.
Chaque $x_i = \alpha_i$ est zéro de Δ. On définit le polynôme de Dixon δ par

$$\delta(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Delta(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2)}{(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)}.$$

Tout zéro commun de $\mathcal{F}$ annule le polynôme de Dixon, quelles que soient les valeurs de α_1, α_2, ainsi tous les coefficients des différentes puissances de α_1, α_2 dans le polynôme de Dixon s'annulent. Notons $\mathcal{E}'$ l'ensemble des s_1 équations polynomiales en x_1, x_2 ainsi obtenues. Ce système s'écrit sous la forme

$$D\,X = 0$$

où D est une matrice $s_1 \times s_2$, appelée matrice de Dixon, et X est un vecteur représentant les s_2 différents monômes en x_1, x_2 apparaissant dans $\mathcal{E}'$: $X =^t (1, x_1, x_2, \ldots)$.
Notons $\mathcal{E}$ le système linéaire $D\,v = 0$. Si $\mathcal{F}$ a un zéro (c_1, c_2) alors c'est une solution de $\mathcal{E}'$. Ceci conduit à une solution non triviale $v =^t (1, c_1, c_2, \ldots)$ de $\mathcal{E}$. Ainsi, si $\mathcal{F}$ a un zéro commun, alors le système linéaire $\mathcal{E}$ a une solution non triviale. Cependant dans des problèmes de géométrie par exemple, on suppose de plus certaines contraintes sur les variables : elles doivent représentées des quantités non nulles (par exemple ici les longueurs des triangles). Le lemme suivant permet de tenir compte de ces contraintes :

Lemme 1 *Si $\mathcal{F}$ a un zéro (c_1, c_2) dont toutes les coordonnées sont non nulles, alors le rang de toutes les matrices extraites de D en ôtant une colonne à D doit être égal au rang de D.*

Preuve
Soit (c_1, c_2) un zéro commun à $\mathcal{F}$ tel que c_1 et c_2 soient non nuls. Alors $v =^t (1, c_1, c_2, \ldots)$ est une solution de $\mathcal{E}$, dont tous les coefficients sont non nuls. Notons $m_1, \ldots m_{s_2}$ les colonnes de D et notons $v = (C_1, \ldots, C_{s_2})$ alors $C_1\, m_1 + C_2\, m_2 + \cdots + C_{s_2}\, m_{s_2} = 0$.
Soit M une matrice extraite de D en ôtant la $i$ème colonne. On a $m_i = \frac{-C_1}{C_i}\, m_1 - \cdots - \frac{C_{i-1}}{C_i}\, m_{i-1} - \frac{C_{i+1}}{C_i}\, m_{i+1} - \cdots - \frac{C_{s_2}}{C_i}\, m_{s_2}$ donc l'espace engendré par les $s_2 - 1$ colonnes $m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots m_{s_2}$ est égal à l'espace engendré par les $m_1, \ldots, m_{s_2}$. En conséquence $rang(M) = rang(D)$.

□

5 Résolution avec la matrice de Dixon

Supposons maintenant que les trois polynômes q_1, q_2 et q_3 en deux variables x_1, x_2 soient à coefficients dans l'anneau $\mathcal{R} = \mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_m]$ où $a_1, \ldots, a_m$ sont m paramètres (dans notre problème il y en a $m = 4$, ce sont a, a_e, a_i et b_e). On impose de plus que les zéros de $\mathcal{F}$ ont leurs coordonnées non nulles (dans notre problème les longueurs sont non nulles).
Soit D la matrice de Dixon de $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble de toutes les sous-matrices de D obtenues en ôtant une colonne à D et soir r le rang (générique) de D.

Lemme 2 *Supposons qu'il existe M dans $\mathcal{D}_1$ de rang $< r$. Si en donnant des valeurs aux paramètres $a_1, \ldots, a_m$, $\mathcal{F}$ possède un zéro (c_1, c_2) dont toutes les coordonnées sont non nulles, alors tous les sous-déterminants $r \times r$ de D doivent s'annuler en ces valeurs des paramètres.*

Preuve
Notons $\mathcal{G}$ le système obtenu en spécialisant les valeurs des paramètres dans $\mathcal{F}$. Soit N sa matrice de Dixon et soit $\mathcal{N}_\infty$ l'ensemble des sous-matrices de N obtenues en ôtant une colonne à N. Alors $\mathcal{G}$ est un système de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, donc d'après le lemme précédent, toute matrice M de $\mathcal{N}_1$ a un rang égal au rang de N, donc le rang de N est $< r$. Ainsi les déterminants de toutes les sous-matrices $r \times r$ de N sont nuls.

□

Pour terminer, on remarque que si le noyau de D possède un élément non nul avec une coordonnée nulle, alors il existe M dans $\mathcal{D}_1$ de rang $< r$. Ainsi la condition du lemme précédent est vérifiée.

Dans notre problème, génériquement, le rang de D est égal à 13 et son noyau est engendré par $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1)$ donc s'il existe des valeurs des paramètres a, a_e, a_i et b_e pour lesquelles $\mathcal{F}$ a une solution avec b et c non nuls, alors tous les sous-déterminants 13×13 de D s'annulent en ces valeurs des quatre paramètres. On réalise un pivot de Gauss sur D et le produit des pivots est le polynôme en a, a_e, a_i et b_e donnant une condition nécessaire d'existence de b et c non nuls. Ce polynôme est

$$a^9\,(a_e^2 + a_i^2)\, b_e^8\, p(a_e, a_i, b_e, a)$$

où p est un polynôme de degré 10 en a^2. Vues les contraintes du problème, on peut enlever les termes parasites et on obtient comme condition nécessaire

$$p(a_e, a_i, b_e, a) = 0$$

ce qui affine la condition nécessaire trouvée dans la section 2 à l'aide des combinaisons de résultants.

Enfin, pour résoudre complètement le problème, il reste à déterminer si p peut se factoriser.

Suggestions

Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.

1. Montrer une des trois formules de l'introduction.
2. Montrer la proposition 1.
3. Vérifier les calculs annoncés dans le paragraphe 2. Essayer d'autres combinaisons. Si les calculs sont trop longs on pourra fixer des valeurs pour a_e, a_i et b_e (on pourra prendre $a_e = 4, a_i = 2, b_e = 3$).
4. Proposer une preuve des lemmes 1 et 2.
5. Trouver toutes les longueurs possibles pour a, b et c dans le cas où $a_e = 4, a_i = 2, b_e = 3$, on pourra faire des dessins et utiliser par exemple en maple le package `geometry` (avec les commandes `ExternalBisector`,`bisector`,`triangle` ...).
6. Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude des 20 cas à seulement 3 cas. Etudier les deux situations restantes : exprimer les relations algébriques entre a, a_i, b_i, c_i d'une part (cas des bissectrices intérieures) et a, a_e, b_e et c_e d'autre part (cas des bissectrices extérieures). Comparer les deux méthodes du texte sur chacun de ces deux cas.
7. Reprendre le même problème avec les bissectrices intérieures et extérieures issues de A ainsi que le périmètre du triangle (au lieu de la bissectrice extérieure issue de B).