Introduction à la K-théorie des C^*-algèbres

Clément Dell'Aiera

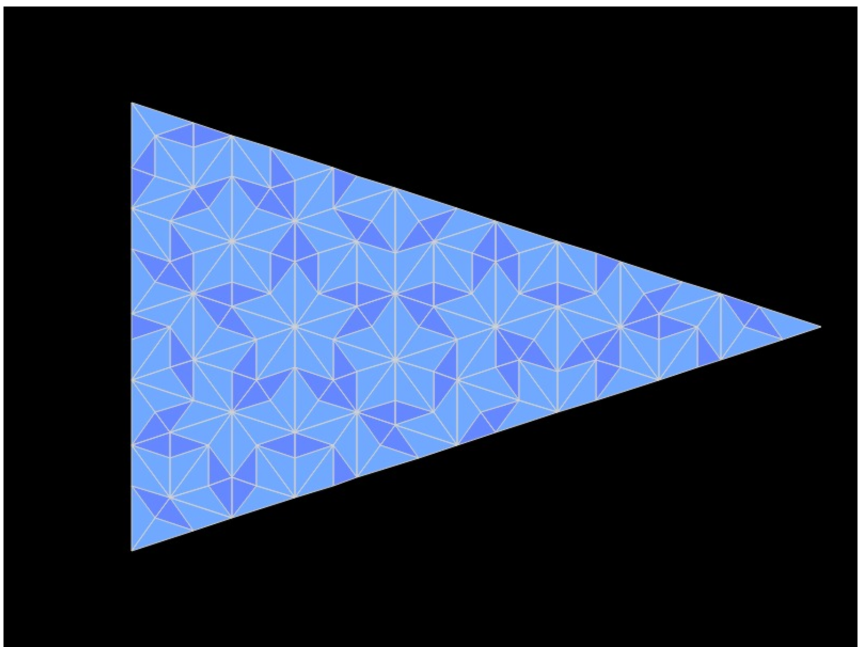

Figure 1 – Pavage de Penrose généré avec http ://www.spacegoo.com/penrose/

Table des matières

Notations
Pour une C^*-algèbre A non nécessairement unitale, on note A^+ la C^*-algèbre unitale qui la contient en tant qu'idéal bilatère, définie par :

$$\begin{gathered} A^+ = \{(a,\lambda) \in A \times \mathbb{C}\} \\ (a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \end{gathered}$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^+ \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0 \quad .$$

On rappelle que pour tout semi-groupe abélien S, il existe un groupe G_S, appelé groupe de Grothendieck de S, et un morphisme de semi-groupe $\mu : S \to G_S$ tels que, pour tout groupe G et tout morphisme de semi-groupe $\alpha : S \to G$, il existe un unique morphisme de groupe $\tilde{\alpha} : G_S \to G$ vérifiant $\alpha = \mu \circ \tilde{\alpha}$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dotted, "\exists!\tilde{\alpha}"] & G \\ G_S \arrow[ur, "\mu"] & \end{tikzcd}$$

1 K-théorie des C^*-algèbres

Définition 1. Soit p et q deux projecteurs dans une C^*-algèbre A. On définit trois relations d'équivalences :
$p \sim q$ s'il existe une isométrie partielle u de A telle que $p = u^*u$ et $q = uu^*$. (équivalence de Murray-Von Neumann)
$p \sim_u q$ s'il existe un unitaire u de A^+ tel que $p = uqu^*$. (Similitude)
$p \sim_h q$ s'il existe un chemin continu en norme de projections de p à q.(Homotopie)

En général, on a : $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$. Pour avoir les implications inverses, on peut se placer dans $M_\infty(A)$. (Doubler la dimension à chaque fois suffit) On peut alors considérer l'ensemble des projections de $M_\infty(A)$ et quotienter par l'unique relation d'équivalence définie ci-dessus. L'ensemble obtenu est un semi-groupe pour l'opération de somme directe de projecteur, nommé $V(A)$.

Définition 2. Le premier groupe de K-théorie de A est :
le groupe de Grothendieck de $V(A)$ si A est unitale.
le noyau de $K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C})$ sinon.

Pour passer aux groupes de K-théorie d'indices supérieurs de A, on se servira du foncteur de suspension $S(A) = A \times C_0(\mathbb{R})$.

Définition 3. Pour toute algèbre de Banach unitale, on pose

$$GL_\infty(A) = \varinjlim GL_n(A) \quad \text{(limite inductive)}$$

munie de la topologie de la limite inductive.
Pour $n \geq 1$, on définit :

$$K_n(A) = \pi_{n-1}\left(GL_\infty(A)\right)$$

où $\pi_n, n \geq 1$ désigne le n^{ie}-groupe d'homotopie, et π_0 le groupe des composantes connexes.

Quelques remarques :

1. Le groupe $K_1(A)$ est donc généré par les classes $[u]$ où est un unitaire ou un inversible de $GL_n(A)$, avec la présentation $[1] = 0$, $[u] + [v] = [u \oplus v]$ et $[u] = [v]$ si u et v sont reliés par un chemin continu d'unitaires ou d'inversibles.
2. On a en fait la relation suivante

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad K_{i+1}(A) = K_i(S(A)).$$

3. Dans le cas des C^*-algèbres comme en K-théorie topologique, on a périodicité de Bott : $K_{i+2}(A) \simeq K_i(A)$.

Ces foncteurs de la catégorie des C^*-algèbres dans celle des groupes abéliens sont semi-exacts, i.e. ils transforment toute suite exacte courte en suite exacte très courte.

1.1 La suite exacte à six termes

Théorème 1. Soit $\quad 0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0 \quad$ une suite exacte de C^*-algèbres. Alors la suite à six termes suivantes est exacte :

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(A) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\partial"] & K_1(A) \arrow[l, "\pi_*"] & K_1(J) \arrow[l, "\iota_*"]
\end{tikzcd}$$

C'est l'un des résultats fondamentaux en K-théorie, il permet des calculs effectifs. Le premier pas à faire est de construire l'indice associé à toute suite exacte $\partial : K_1(B) \to K_0(J)$, qui transforme toute suite exacte courte en suite exacte longue. On peut trouver 2 isomorphismes naturels qui donnent la périodicité de Bott :

$$K_{i+1}(A) \simeq K_i(A), i = 0, 1.$$

Ces isomorphismes sont donnés par l'application de Bott $\beta : K_0 \to K_1 S$ et $\theta : K_1 \to K_0 S$. La périodicité permet de conclure en enroulant la suite exacte longue grâce à l'application exponentielle $\delta : K_0(B) \to K_1(J)$ qui est la composition $\theta_J^{-1} \circ \partial \circ \beta_B$.

Proposition 1 (Remarque sur le nom d'application exponentielle)**.** Soit J un idéal bilatère de la C^*-algèbre A. Si $p - p_n \in M_\infty(A/J)$ et $x \in M_\infty(A^+)$ est un relevé auto-adjoint de p, alors :

$$\delta([p] - [p_n]) = [\exp(-2i\pi x)].$$

De plus, si toutes les projections de $M_\infty(A/J^+)$ peuvent se relever en des projections de $M_\infty(A^+)$, alors l'application exponentielle est triviale :

$$\exp(-2i\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n!} = 1 + (e^{-2i\pi} - 1)x = 1$$

car $x = x^2$.

Preuve 1. Rappelons que δ est la composée donnée par :

$$\begin{array}{ccc} K_0(A/J) & \xrightarrow{\delta} & K_1(J) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_{A/J}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_J} \\ K_1(SA/J) & \xrightarrow{\partial} & K_0(SJ) \end{array}$$

Soient $p \in A/J$ et $x \in A$ un élément auto-adjoint tel que $\pi(x) = p$. Comme $e^{2i\pi tp} = 1 + (e^{2i\pi t} - 1)p$, $f_x(t) := 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x$ relève $f_p(t) = e^{2i\pi tp}$.

Notons, dans un premier temps, que tout élément y d'une C^*-algèbre tel que le spectre de y^*y soit inclus dans $[0;1]$ produit un unitaire $\begin{pmatrix} y & \sqrt{1-yy^*} \\ -\sqrt{1-y^*y} & y^* \end{pmatrix}$.
On peut alors affirmer que

$$w_{f_x} := \begin{pmatrix} f_x & \sqrt{1-f_xf_x^*} \\ -\sqrt{1-f_x^*f_x} & f_x^* \end{pmatrix}$$

est un relevé unitaire de $\begin{pmatrix} f_p & 0 \\ 0 & f_p^* \end{pmatrix}$, relevé qui nous donne l'indice de $[f_p]_1 = \beta_{A/J}[p]_0$:

$$\partial[f_p]_1 = [w_{f_x} p_n w_{f_x^*}] - [p_n].$$

Soit $g_x(t) := (1-t)1_{A^+} + te^{2i\pi x}$ un chemin continu entre l'identité et $e^{2i\pi x}$. L'image de $e^{2i\pi x}$ par θ_J se calcule comme l'indice $[w_{g_x} p_n w_{g_x^*}] - [p_n]$. Montrer que f_x et g_x sont homotopes suffit donc à conclure.

Pour cela, remarquons que, t variant de 0 à 1 et le spectre de x étant inclus dans $\{0,1\}$, les éléments f_x et g_x ne dépendent que des valeurs des fonctions réelles

$$\begin{aligned} f(t,x) &= 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x \\ g(t,x) &= 1 - t + te^{2i\pi x} = f(x,t) \end{aligned}$$

au voisinage du bord du carré $\partial[0;1]\times[0;1]$, homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$. Les classes d'homotopie de fonctions continues sur le cercle sont classifiée par leur nombre de tours, voir le livre d'Hatcher par exemple [1], et on vérifie que f et g sont ainsi homotopes, et donc que :

$$[w_{f_x}p_n w_{f_x^*}] = [w_{g_x}p_n w_{g_x^*}].$$

L'identité $\partial\circ\beta_B = \theta_J\circ\delta$ est démontrée, ce qui conclut. □

1.2 Produits croisés de C^*-algèbres

1.2.1 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

Soit A une C^*-algèbre et Γ un groupe discret. On se donne de plus une action par automorphisme $\alpha:\Gamma\to Aut(A)$. On peut alors munir l'espace $C_c(\Gamma,A)$ des fonctions à support fini d'un produit de convolution tordu par α :

$$f *_\alpha g = \sum_{s,t\in\Gamma} f(s)\alpha_s(g(t))st.$$

Soit $\lambda_{\Gamma,A}$ la représentation régulière gauche de $C_c(\Gamma,A)$ sur $l^2(\Gamma,A)=\{\eta:\Gamma\to A:\sum_s\eta^*(s)\eta(s)<\infty\}$:

$$(\lambda_{\Gamma,A}(f)\eta)(\gamma) = \sum_{s\in\Gamma}\alpha_{\gamma^{-1}}(f(s))\eta(\gamma^{-1}s)$$

pour tous $f\in C_c(\Gamma,A)$,$\eta\in l^2(\Gamma,A)$ et $\gamma\in\Gamma$.

Le produit croisé réduit de A par Γ, noté $A\times_\alpha\Gamma$, est défini comme la fermeture pour la norme d'opérateur de $\lambda_{\Gamma,A}(C_c(\Gamma,A))$ dans $B(l^2(\Gamma,A))$.

Les actions habituelles de A et de Γ sur $l^2(\Gamma,A)$ sont combinées.

$$(\pi(a)\eta)(s) = \alpha_{s^{-1}}(a)\eta(s)$$

$$(\lambda(\gamma)\eta)(s) = \eta(\gamma^{-1}s)$$

On parle pour la paire (λ,π) de représentation covariante du système $\{A,\Gamma,\alpha\}$, car la relation :

$$\lambda(\gamma)\pi(a)\lambda(\gamma^{-1}) = \pi(\alpha_\gamma(a))$$

est vérifiée.

Voici le résultat central de ce rapport. Il a été demontré par Pimsner et Voiculescu en 1980. [2]

Théorème 2 (Pimser-Voiculescu)**.** Soit A une C^*-algèbre et $\alpha \in Aut(A)$. Il existe alors une suite exacte à six termes :

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "1-\alpha_*"] & K_0(A) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l, "\iota_*"] & K_1(A) \arrow[l, "1-\alpha_*"]
\end{tikzcd}$$

.

La première chose que l'on peut, et que l'on va, dire à propos des produits croisés est que les générateurs de leurs groupes de K-théorie prennent une forme sympathique, qui va nous permettre de faire des calculs explicites dans la preuve de la suite de Pimsner-Voiculescu.

Lemme 1. Soit B une C^*-algèbre unitale, $1_B \in A$ une sous-C^*-algèbre de B, et u un unitaire de B tels que A et u engendrent B et $uAu^* = A$.
Alors $K_1(B)$ est engendré par les inversibles de la forme :

$$1_B \otimes 1_n + x(u^* \otimes 1_n) \quad , n \in \mathbb{N}, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n.$$

De plus, si $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, alors on peut se limiter aux classes d'unitaires de la forme :

$$1_B \otimes 1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F \quad F, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n$$

où F désigne une projection auto-adjointe.

La remarque suivante est importante pour la preuve du lemme 5 : dans le cas $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, les classes concernées sont stables par somme, donc tout élément de $K_1(B)$ est la différence de deux générateurs.

Preuve 2. On note Γ le sous-groupe de $K_1(B)$ engendré par les éléments de la forme $1_B \otimes 1_n + x(u \otimes 1_n)$.

Comme u est unitaire, le spectre de $t(1_B + 2u^*) + (1-t)u^* = t1_B + (1+t)u^*$ ne contient pas 0, et on a donc un chemin continu d'inversibles entre $1_B + 2u^*$ et u^*, d'où :

$$[1_B + 2u^*]_1 = [u^*]_1. \tag{1}$$

Les éléments $\sum_{s \leq j \leq t} a_j(u^j \otimes 1_p), a_j \in A \otimes \mathfrak{M}_p, s, t \in \mathbb{Z}$ sont denses dans $B \otimes \mathfrak{M}_p$. Il suffit donc de prouver notre assertion pour ce type d'éléments. Mais, d'après l'équation 1, $[u]_1 \in \Gamma$, donc $s = 0$ suffit.

Soit donc $y = \sum_{0 \leq j \leq t} a_j(u^j \otimes 1_p)$ un inversible. On pose :

$$S_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & \epsilon I \\ -I & 0 & & 0 & & \\ & -I & & & & \\ & 0 & & ... & & \\ & & & & -I & 0 \end{pmatrix} \quad , \forall \epsilon > 0$$

la matrice avec des $-I := -1_B \otimes 1_p$ sur la sous-diagonale et un ϵI dans le coin haut-droit, et :

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_t \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & & ... & \\ & & & & & I \end{pmatrix}.$$

Si l'on note $u_p = u \otimes 1_p$ et $y_k = \sum_{j=0}^{t-k} a_{j+k}(u^j \otimes 1_p) = y_{k+1}(u \otimes 1_p) + a_k$, on obtient l'identité :

$$\begin{aligned} S_0(u \otimes 1_n) + T &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_t \\ -u_p & I & & 0 & & \\ & -u_p & I & & & \\ & 0 & & & ... & \\ & & & & -u_p & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & y_1 & . & . & . & y_t \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & & ... & \\ & & & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & & ... & \\ & & & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & & . & . & \\ -u_p & I & 0 & & & \\ & -u_p & & & & \\ & 0 & & & ... & \\ & & & & -u_p & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices de droite et de gauche de la dernière ligne sont unipotentes, leur classe dans $K_1(B)$ est donc nulle. Mais la classe de l'élément central est celle de y. Ajoutons à cela l'invariance de K_1 par homotopie, nous pouvons alors écrire, pour ϵ assez petit :

$$\begin{aligned} [y]_1 &= [S_\epsilon(u \otimes 1_n) + T]_1 \\ &= [u \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1} T]_1 \quad \text{car} \quad [S_\epsilon]_1 = 0 \\ &= [u \otimes 1_n]_1 + [1_B \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1} T(u^* \otimes 1_n)]_1 \\ &= n[u]_1 + [1_B \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1} T(u^* \otimes 1_n)]_1 \end{aligned}$$

et la première partie du lemme est démontrée.

1.2.2 Extension de Toeplitz

Soient A et C deux C^*-algèbres.
Par extension de A par C, on entend un triplet (B, α, β) d'une C^*-algèbre et de deux morphismes telle que la suite :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Cette section présente la construction d'une extension de $A \otimes \mathbb{K}$ par $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ qui sera utile dans la preuve de l'exactitude de la suite de PV : l'extension de Toeplitz. Dans tout le document $\mathcal{H}$ dénote un espace de Hilbert, l_2 par exemple, dont on fixe une base hilbertienne (e_n), et $\mathbb{B}$ et $\mathbb{K}$ sont respectivement l'algèbre des opérateurs bornés et compacts sur $\mathcal{H}$. $\mathbb{K}$ est un idéal bilatère et :

$$\pi : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/\mathbb{K}$$

est la projection naturelle sur l'algèbre de Calkin.
$H^2(\mathbb{S}^1)$ désigne le sous-espace hilbertien de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$ pour $n \geq 0$. Lorque l'on prendra $H^2(\mathbb{S}^1)$ pour $\mathcal{H}$, e_n dénotera ces fonctions. Pour $f \in C(\mathbb{S}^1)$, on désigne par T_f l'opérateur de $H^2(\mathbb{S}^1)$, appelé opérateur de Toeplitz associé à f, défini par $T_f(g) = \mathcal{P}(fg)$, où $\mathcal{P}$ est le projecteur orthogonal sur $H^2(\mathbb{S}^1)$. On appelle f le symbole de T_f.

Soit $S \in \mathbb{B}$ l'opérateur de shift unilatéral, qui envoie e_n sur e_{n+1}. On note $C^*(S)$ la C^*-algèbre unitale engendrée par S. On voit que S^* envoie e_1 sur 0 et e_n sur e_{n-1} lorsque $n \geq 2$. Si on note $E_{ij}(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$, on a :

$$E_{ij} = S^{i-1} S^{*j-1} - S^i S^{*j} \in C^*(S)$$

$\mathbb{K}$ est donc un idéal bilatère de $C^*(S)$ et $P = 1 - SS^* = E_{11}$ est de rang 1 donc compact.

Lemme 2. L'application

$$\tau \left\{ \begin{array}{rcl} C(\mathbb{S}^1) & \to & B(H^2(\mathbb{S}^1))/K(H^2(\mathbb{S}^1)) \\ f & \mapsto & \pi(T_f) \end{array} \right.$$

est un $*$-homomorphisme injectif.

Preuve 3. Si l'on confond $f \in C(\mathbb{S}^1)$ avec l'opérateur de multiplication associé dans $L^2(\mathbb{S}^1)$, alors $f\mathcal{P} - \mathcal{P}f$ est un opérateur compact. En effet, si $f(z) = z$, on a un opérateur de rang 1, et cette fonction génère $C(\mathbb{S}^1)$ par théorème de Stone-Weiertrass.

Ceci permet d'écrire la relation suivante :

$$T_f T_g = \mathcal{P} f \mathcal{P} g = \mathcal{P}(\mathcal{P} f + \text{compact}) g = \mathcal{P} f g + \text{compact}$$

Donc $T_f T_g = T_{fg}$ mod $\mathbb{K}$, et comme $T_f^* = T_{\overline{f}}$, τ est bien un $*$-homorphisme.

Pour l'injectivité, observons le noyau de τ. C'est un idéal bilatère de $C(\mathbb{S}^1)$, il existe donc un ouvert $X \subset \mathbb{S}^1$ tel que :

$$\ker\, \tau = \{ f \in \mathbb{C}(S^1) : f(z) = 0, \forall z \in X \}$$

Mais si $f \in \ker\, \tau$, alors $z \mapsto f(e^{i\theta} z)$ est aussi dans le noyau pour tout θ, ce qui assure que $X = \mathbb{S}^1$ ou $\emptyset$. Mais comme T_z n'est pas compact, $X = \mathbb{S}^1$ et l'injectivité est démontrée.

□

Comme $C(\mathbb{S}^1)$ est généré par z, qui s'envoit sur S par T, l'image de T est $C^*(S)$. La remarque précédente permet d'affirmer que $C^*(S)/\mathbb{K}$ est $*$-isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur le tore $C(\mathbb{S}^1)$, et l'image de S est la fonction identité sur $\mathbb{S}^1$, noté z. On a donc une extension, écrite sous la forme d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow C^*(S) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Définition 4. On définit l'algèbre de Toeplitz $\mathcal{T}$ associée à la paire (A, α) comme la C^*-sous-algèbre de $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ engendré par $A \otimes I$ et $u \otimes S$.

Rappelons que l'on voit A comme une sous-$*$-algèbre de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, et que l'on note u l'unitaire qui rend intérieure l'action de α :

$$\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(n)a = u^{*n} a u^n$$

Observons maintenant $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, dont on va montrer qu'elle se réalise comme un quotient de $\mathcal{T}$ par un idéal bilatère fermé. Soit donc J l'idéal bilatère fermé engendré par la projection $1 \otimes P$. La première chose à remarquer, c'est que l'on a un $*$-morphisme :

$$\phi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathcal{T} \\ e_{ij} & \to & S^i P S^{*j} \end{array} \right. .$$

Il est ici défini sur le système d'unités de $\mathbb{K}$,

$$e_{ij}(x) = \langle x, e_i \rangle e_j$$

ce qui permet facilement de l'étendre à $\mathbb{K}$ entier.

L'identité suivante permet d'étendre ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$:

$$(u \otimes S)^i (a \otimes P)(u \otimes S)^{*j} = (u^i a u^{*j}) \otimes \phi(e_{ij})$$

définit l'extension ψ de ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$. Alors $\psi(A \otimes \mathbb{K}) = J \subset \mathcal{T}$.

Pimsner et Voiculescu montrent [2] que :

$$\text{im } \psi = (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K}) \ \cap \ \mathcal{T} \tag{2}$$

En effet, soit $y \in (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K}) \ \cap \ \mathcal{T}$. Comme y est dans $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K})$,

$$J \ni (1 \otimes E_n) y (1 \otimes E_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y$$

où $E_n = 1 \otimes \phi(e_{00} + e_{11} + ... + e_{nn}) = \psi(1 \otimes (e_{00} + e_{11} + ... + e_{nn})) \in J$ (on utilise une unité approchée de $\mathbb{K}$). J étant un idéal fermé, on en déduit que $y \in J$. L'inclusion inverse est directe.

Les C^*-algèbres $\mathbb{K}$, $C^*(S)$ et $C(\mathbb{S}^1)$ sont nucléaires car commutative pour $C(\mathbb{S}^1)$ ou limite inductive de C^*-algèbres finie-dimensionnelles pour $\mathbb{K}$. Ceci assure qu'il n'y a qu'une seule norme de C^*-algèbre sur leur produit tensoriel avec $A \times_\alpha \mathbb{Z}$. De plus, avec le théorème T.2.6.26 de l'appendice T du livre de Wegge-Olsen [5], on a, sans ambiguité, une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K} \longrightarrow (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C^*(S) \longrightarrow (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte et l'identité 2 permet d'identifier $\mathcal{T}/J$ à la C^*-algèbre engendrée par $A \otimes 1$ et $u \otimes z$ où z est l'inclusion $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$. Cette dernière étant $*$-isomorphe à $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, on en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

C'est l'extension de Toeplitz associée à (A, α).

1.3 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

1.3.1 La preuve originale

Maintenant que le décor est planté, nous pouvons passer à la K-théorie. On pose :

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathcal{T} \\ a & \mapsto & a \otimes I \end{array} \right.$$

Nous allons d'abord démontré le :

Lemme 3. Les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_i(A \otimes K) & \xrightarrow{\psi_*} & K_i(\mathcal{T}) \\ \simeq \uparrow & & \uparrow d_* \\ K_i(A) & \xrightarrow{(id_A)_* - \alpha(-1)_*} & K_i(A) \end{array}$$

sont commutatifs pour $i \in \{0, 1\}$, et $d_* : K_1(A) \to K_1(\mathcal{T})$ est injectif.

Preuve 4. L'isomorphisme $K_1(A) \to K_1(A \otimes \mathbb{K})$ associe à une classe $[v] \in K_1(A)$ l'élément $[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})]$, dont l'image par ψ_* est :

$$\psi_*[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})] = [v \otimes P] + [1 \otimes I - 1 \otimes P] = [v \otimes P] + [1 \otimes SS^*] \quad (3)$$

Maintenant :

$$d_* \circ (id_A - \alpha(-1))_* [v] = [v \otimes I] - [u^* vu \otimes I] \quad (4)$$

Soit l'unitaire :

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \otimes M_2$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
\Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & Q(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)Q^* & 1 \otimes I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mais la classe dans K_1 est invariante par augmentation, i.e. $[x] = \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$, et par conjugaison par un unitaire, donc :

$$\left[\Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^*\right] = [u^*vu \otimes I]$$

En remplaçant dans (4), on obtient :

$$\begin{aligned}
[v \otimes I] - [v \otimes SS^* + Q] &= [(v \otimes I)(v \otimes SS^* + Q)^{-1}] \\
&= [v^* \otimes SS^* + Q] \\
&= [1 \otimes SS^* + v \otimes P]
\end{aligned}$$

qui est l'expression que l'on avait trouvé pour l'image de $[v]$ par ψ_* dans (3). La commutativité du diagramme $i = 0$ suit la même preuve : il suffit de remarquer que si l'on prend une projection auto-adjointe $q \in A$, alors dans $K_0(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned}
[(\alpha(-1)q) \otimes I] &= \left[\Omega \begin{pmatrix} (\alpha(-1)q) \otimes I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega^*\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} q \otimes SS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= [q \otimes SS^*].
\end{aligned}$$

Ceci assure que :

$$d_* \circ ((id_A)_* - \alpha(-1)_*)\,[q \otimes e_{00}] = [q \otimes I] - [(\alpha(-1)q) \otimes I] = [q \otimes P] = \psi_*[q \otimes e_{00}].$$

Les diagrammes commutent bien, il reste à montrer l'injectivité de d_*.

Pour cela, montrons que si v_0 et v_1 sont des unitaires de A, et $t \mapsto w_t$ un chemin continu dans les unitaires de $\mathcal{T}$ d'origine $v_0 \otimes I$ et d'arrivée $v_1 \otimes I$, alors $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$.

Calculons :

$$\begin{pmatrix} w_t & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(-1)w_t^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* = \begin{pmatrix} w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_tQ & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}.$$

Le chemin unitaire $y_t = w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q \in \mathcal{T}$ vérifie :

$$\forall t, \quad y_t \in 1 \otimes I + J.$$

En effet :

$$y_t - 1 \otimes I = (w_t - 1 \otimes I)Q + w_t\big((1 \otimes S)w_t^* - w_t^*(1 \otimes S)\big)(1 \otimes S^*),$$

mais un élément de la forme $(1 \otimes S)w - w(1 \otimes S)$ est toujours dans $B \otimes \phi(\mathbb{K})$, si $w \in \mathcal{T}$. Si w est dans $A \otimes I$ ou vaut $u \otimes S$, on obtient 0, et si $w = u^* \otimes S^*$, le commutateur vaut $u^* \otimes P \in B \otimes \phi(\mathbb{K})$. Ces éléments génèrent un algèbre dense dans $\mathcal{T}$: l'assertion en découle.

On a donc un chemin continu d'unitaires de $1 \otimes SS^* + v_0 \otimes P$ à $1 \otimes SS^* + v_1 \otimes P$, qui reste dans $1 \otimes I + J$. Comme ψ établit un isomorphisme de $\mathbb{C}1 \otimes I + J$ sur $A \tilde{\otimes} \mathbb{K}$, on a donc, dans $K_1(A \tilde{\otimes} \mathbb{K})$:

$$[\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_0 \otimes e_{00}] = [\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_1 \otimes e_{00}]$$

donc : $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$, et l'injectivité de d_* est démontrée. $\square$

En passant l'extension de Toeplitz en K-théorie, et en combinant avec le lemme 3, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_1(A \otimes \mathbb{K}) \arrow[r, "\psi_*"] & K_1(\mathcal{T}) \arrow[r, "\pi_*"] & K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] & K_0(A \otimes \mathbb{K}) \\
K_1(A) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "(id_A - \alpha(-1))_*"] & K_1(A) \arrow[u, "d_*"] \arrow[ur, "\iota_*"] & &
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne est exacte, et le carré commute.

Lemme 4. $d_* : K_1(A) \to K_1(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Preuve 5. Montrons que Ker $\delta \subset$ Im ι_*. Cela suffit puisque si d_* n'est pas surjectif, il existe un élément $x \in K_1(\mathcal{T}) \setminus \text{Im } d_*$, dont l'image par π_* n'est pas dans l'image de ι_*. Pourtant : $\delta \circ \pi_*(z) = 0$.

Nous allons montrer que tout élément de Ker δ s'écrit :

$$w = [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1 (u^* \otimes 1_n) F_1]_1 - [1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2 (u^* \otimes 1_n) F_2]_1$$

pour certains x_1, x_2, F_1 et F_2 dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$ tels que F_i soient des projections auto-adjointes unitairement équivalentes : il existe un unitaire $v \in A \otimes \mathfrak{M}_n$ les entrelaçant $F_1 = vF_2v^*$.

Montrons que cela conclut. Dans $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}[1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2 (u^* \otimes 1_n) F_2]_1 &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 v x_2 (u^* \otimes 1_n) v^* F_1]_1 \\ &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 y (u^* \otimes 1_n) F_1]_1\end{aligned}$$

où $y = v x_2 (\alpha(-1) \otimes id_n) v^* \in A \otimes \mathfrak{M}_n$. Alors :

$$\begin{aligned}w &= [(1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1 (u^* \otimes 1_n) F_1)\,(1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 y (u^* \otimes 1_n) F_1)^*]_1 \\ &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1 (\alpha(-1) \otimes id_n) F_1 y^* F_1]_1\end{aligned}$$

L'élément entre crochets est dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$, ce qui veut dire que sa classe w est dans l'image de ι_* : Ker $\delta \subset$ Im ι_* est démontré.

Montrons maintenat la remarque. Le lemme 1 nous permet d'affirmer que tout élément de $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$ s'écrit comme une différence de générateurs unitaires de la forme $[1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1$. Si $n = 1$, un tel élément a un relevé $w = (1 - F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^* \in \mathcal{T}$. Mais alors :

$$\begin{aligned}ww^* &= (1 - F) \otimes I + Fxu^*Fux^*F \otimes S^*S \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes I \\ &= 1 \otimes I \\ w^*w &= (1 - F) \otimes I + Fux^*Fu^*xF \otimes SS^* \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes (I - P) \\ &= 1 \otimes I - F \otimes P\end{aligned}$$

L'index est donc facilement calculable :

$$\begin{aligned}\delta[1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1 &= [1 \otimes I - w^*w]_0 - [1 \otimes I - ww^*]_0 \\ &= [F \otimes P]_0 \\ &= [F \otimes e_{00}]_0\end{aligned}$$

Ce calcul assure que

$$[1_n - F_1 + F_1 x_1 (u^* \otimes 1_n) F_1]_1 - [1_m - F_2 + F_2 x_2 (u^* \otimes 1_m) F_2]_1 \in \mathrm{Ker}\ \delta$$

$$\text{ssi} \quad [F_1]_0 = [F_2]_0 \quad \text{dans } K_0(A).$$

Quitte à remplacer F_i et x_i par $0_p \oplus F_i$ et $I_p \oplus x_i$, on peut supposer $m = n$. De même, quitte à remplacer F_i et x_i par $F_i \oplus 1 \otimes 1_p$ et $x_i \oplus 1 \otimes 1_{n+p}$, on peut supposer que F_1 et F_2 sont unitairement équivalentes.

□

On a donc montré que d_* induisait un isomorphisme en K_1-théorie. On obtient donc une suite exacte à 6 termes à partir de l'extension de Toeplitz, dont on voudrait déduire le théorème, ce que l'on peut faire à condition de montrer que d_* induit un isomorphisme au niveau des K_0-groupes.

Lemme 5. $d_* : K_0(A) \to K_0(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Preuve 6. La suite exacte $\quad 0 \longrightarrow SA \longrightarrow C(A \otimes \mathbb{S}^1) \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad$ est scindée, et induit, modulo la périodicité de Bott, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \longrightarrow & K_0\left(C(A\otimes\mathbb{S}^1)\right) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(A) & \longleftarrow & K_1\left(C(A\otimes\mathbb{S}^1)\right) & \longleftarrow & K_1(A) \end{array}.$$

Mais, la suite étant scindée, tout élément de $K_i(A)$ se relève, et les flèches connectantes, qui mesurent l'obstruction à être relevé, sont donc nulles : on obtient deux suites exactes scindées :

$$0 \longrightarrow K_{1-i}(A) \longrightarrow K_i\left(C(A\otimes\mathbb{S}^1)\right) \longrightarrow K_i(A) \longrightarrow 0$$

et donc $K_i\left(C(A\otimes\mathbb{S}^1)\right) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A)$.

Si on note $\phi^A : SA \oplus A \to A \otimes C(\mathbb{S}^1)$ l'isomorphisme obtenu à partir des suites exactes scindées, alors :

$$(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_* \circ \phi^A_* = \phi^{\mathcal{T}}_* \circ d_*. \tag{5}$$

Le lemme 5 appliqué à $id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d : A \otimes C(\mathbb{S}^1) \to \mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$, et le fait que $\mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1)) = \mathcal{T}(A) \otimes C(\mathbb{S}^1)$, assurent que $(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_*$ établit un isomorphisme de $K_1(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$ sur $K_1(\mathcal{T} \otimes C(\mathbb{S}^1))$, ce qui, avec la remarque (5) conclut.

$\square$

Le théorème 2 découle directement des lemmes précédents : on passe l'extension de Toeplitz en K-théorie et on se sert de la stabilité $K_i(A \otimes \mathbb{K}) \simeq K_i(A)$ et de l'isomorphisme $K_i(A) \simeq K_i(\mathcal{T})$.

1.3.2 Un exemple : le tore non-commutatif

Si on se fixe un automorphisme $\alpha \in Aut(A)$, on peut construire le produit croisé $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ comme la C^*-algèbre universelle engendrée par A et un unitaire u vérifiant :

$$\forall a \in A, uau^* = \alpha(a).$$

Pour la construire effectivement, considérons $A[u]$. La relation de commutation nous donne le produit suivant :

$$au^n bu^m = a\alpha^n(b)u^{n+m} \quad \forall a, b \in A, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

Avec $A = C(\mathbb{S}^1)$ et α l'automorphisme induit par $z \mapsto e^{2i\pi\theta z}$, on obtient le tore non-commutatif A_θ. Le chemin $\phi_t : z \mapsto e^{2it\pi\theta z}$ montre que α est homotope à l'identité et la suite exacte de Pimser-Voiculescu se transforme alors en :

$$\begin{tikzcd}
K_0(C(\mathbb{S}^1)) \arrow[r, "0"] & K_0(C(\mathbb{S}^1)) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(A_\theta) \arrow[d] \\
K_1(A_\theta) \arrow[u] & K_1(C(\mathbb{S}^1)) \arrow[l, "\iota_*"'] & K_1(C(\mathbb{S}^1)). \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

Mais $K_i(C(\mathbb{S}^1)) = K_i(S\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = K_{1-i}(\mathbb{C}) \oplus K_i(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, d'où : $K_i(A_\theta) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, i = 0, 1$. Nous avons donc calculé les groupes de K-théorie du tore non-commutatif, mais nous allons dire plus. On peut en effet calculer les générateurs de ces groupes.

Définition 5. Un projecteur de Rieffel de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ est un idemptotent autoadjoint de la forme $x_0 + x_1 u + u^* x_1^*$, où $x_0, x_1 \in A$.

Un projecteur de Rieffel étant autoadjoint, nous pouvons immédiatement en déduire que x_0 aussi. L'idempotence conduit elle au trois relations suivantes :
- $x_0 = x_0^2 + \alpha^{-1}(x_1^* x_1) + x_1 x_1^*$
- $x_1 = x_0 x_1 + x_1 \alpha(x_0)$
- $0 = \alpha^{-1}(x_1) x_1$.

Rappelons que l'algèbre de Von Neumann enveloppante d'une C^*-algèbre A est défnie par le bicommutant dans $\mathcal{L}(H_u)$ de $\pi_u(A)$, où $\pi_u : A \to \mathcal{L}(H_u)$ est la représentation universelle de A, c'est-à-dire la somme hilbertienne de toutes les représentations irréductibles de A.

Définition 6. Soit $x \in A$ un élément d'une C^*-algèbre.
Le support à gauche de x est défini comme le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}(H_u)$ sur la fermeture de l'image de $\pi_u(x)$. On le note l_x.
Le support à droite de x est défini comme le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}(H_u)$ sur l'orthogonal du noyau de $\pi_u(x)$. On le note r_x.

Ces deux projecteurs vérifient : $l_x x = x = x r_x, \forall x \in A$ et si x est autoadjoint, alors ils sont égaux.

Proposition 2. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel et $\Delta := l_{x_1}$ le support à gauche de x_1. Alors l'unitaire $\exp(2i\pi x_0 \Delta)$ est dans A et :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

Preuve 7. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel. Montrons par récurrence que le relevé autoadjoint $a = u^* x_1 \otimes S^* + x_0 \otimes I + x_1 u \otimes S \in \mathcal{T}$ de p vérifie :

$$\forall n \geq 1, \quad a^n = a + (x_0^n - x_0)\Delta \otimes P.$$

Si c'est vrai au rang n,

$$\begin{aligned}
a^{n+1} &= a^2 + a(x_0^n - x_0)\Delta \otimes P \\
&= a + a(x_0^2 - x_0)\Delta \otimes P + x_0(x_0^n - x_0)\Delta \otimes P + x_1 u(x_0^n - x_0)\Delta \otimes SP \\
&= a + (x_0^{n+1} - x_0)\Delta \otimes P + u(\alpha(-1)x_1)(x_0^n - x_0)\Delta \otimes SP
\end{aligned}$$

Le dernier terme étant nul ($SP = 0$), le principe de récurrence conclut.

Ayant exhibé un relevé autoadjoint de p, on est en mesure de calculer son indice. Mais :

$$\begin{aligned}
\exp(2i\pi a) &= 1 \otimes I + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}(a + (x_0^n - x_0)\Delta \otimes P) \\
&= (e^{2i\pi} - 1)(a - x_0\Delta \otimes P) + \exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes P + 1 \otimes (I - P) \\
&= \psi\left(\exp(2i\pi x_0\Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})\right).
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\partial[p]_0 = [\exp(2i\pi a)]_1 = [\exp(2i\pi x_0\Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})]_1$$

Le $*$-homomorphisme δ étant la composition du connectant $\partial : K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \to K_1(A \times \mathbb{K})$ avec l'isomorphisme $K_1(A \times \mathbb{K}) \simeq K_1(A)$, on en déduit :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0\Delta)]_1.$$

$\square$

Ce résultat met à notre disposition une autre méthode de calcul de l'image par l'application exponentielle d'un projecteur dans le cas des projecteur de Rieffel. Il est à rapprocher de la proposition 1 : Pimsner et Voiculescu [2] décrive de manière effective l'application exponentielle dans le cas d'un produit croisé $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Nous avons vu que la suite exacte à 6 termes donnait deux suites exactes courtes, dont :

$0 \longrightarrow K_0(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow K_0(A_\theta) \xrightarrow{\delta} K_1(C(\mathbb{S}^1))) \longrightarrow 0$ On sait que les groupes à gauche et à droite sont tous les deux $\mathbb{Z}$, l'un étant généré par la classe de la projection $1 \in C(\mathbb{S}^1)$, l'autre par la classe de l'unitaire $v = id_{\mathbb{S}^1} \in C(\mathbb{S}^1)$. Si l'on trouve un projecteur p tel que $\delta[p]_0 = [v]_1$, on peut dire que $K_0(A_\theta)$ est engendré par $[1]_0$ et $[p]_0$.

On note φ la fonction définie par $\alpha(f)(z) = f(e^{2i\pi\theta}z) = f \circ \varphi(z)$. Soit $0 < \delta < \theta$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$, affine par morceaux et 1 péridiodique, qui vaut 1 si t est dans $[\delta, \theta]$, 0 si $t \in [\theta + \delta, 1]$ et est nulle en 0. On pose :

$$\begin{cases} x_0 & = e^{2i\pi f} \\ x_1 & = \sqrt{x_0(1-x_0)} \end{cases}$$

On vérifie par un simple calcul que $p_\theta = x_0 + x_1 u + u^* x_1^*$ définit un projecteur de Rieffel.

Références

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* 2001.

[2] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for k-groups and ext-groups of certain cross-products of c^*-algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.

[3] Alain Connes Paul Baum. Geometric k-theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.

[4] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and k-theory of group c^*-algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.

[5] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras, a friendly approach.* Oxford University Press, 1993.