

Introduction à la K-théorie des C^* -algèbres

Clément Dell'Aiera

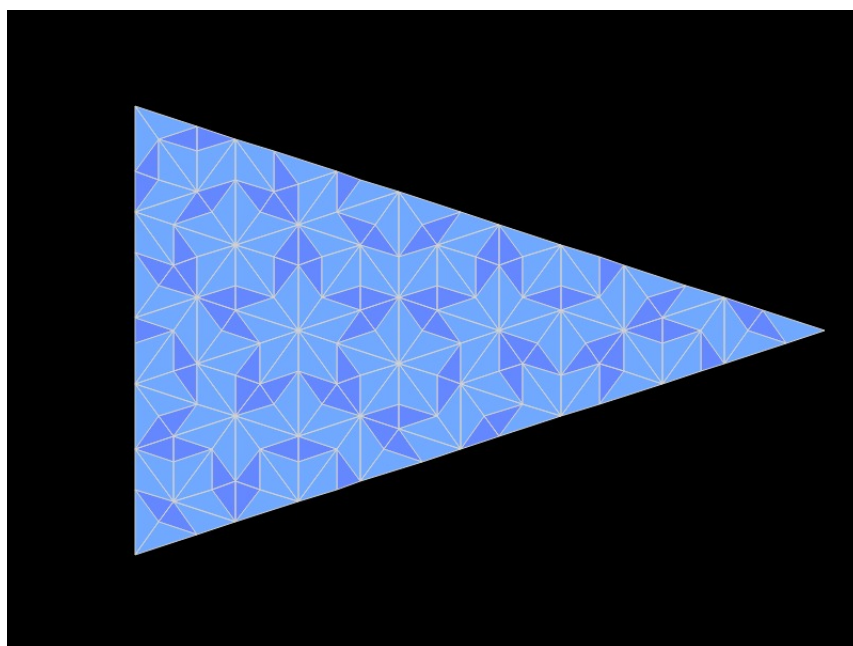


FIGURE 1 – Pavage de Penrose généré avec <http://www.spacegoo.com/penrose/>

Table des matières

1	K-théorie des C^*-algèbres	4
1.1	La suite exacte à six termes	6
1.2	Produits croisés de C^* -algèbres	7
1.2.1	Suite exacte de Pimsner-Voiculescu	7
1.2.2	Extension de Toeplitz	10
1.3	Suite exacte de Pimsner-Voiculescu	13
1.3.1	La preuve originale	13
1.3.2	Un exemple : le tore non-commutatif	17

Notations

Pour une C^* -algèbre A non nécessairement unitale, on note A^+ la C^* -algèbre unitale qui la contient en tant qu'idéal bilatère, définie par :

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(a, \lambda) \in A \times \mathbb{C}\} \\ (a, \lambda)(b, \mu) &= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \end{aligned}$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^+ \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0 .$$

On rappelle que pour tout semi-groupe abélien S , il existe un groupe G_S , appelé groupe de Grothendieck de S , et un morphisme de semi-groupe $\mu : S \rightarrow G_S$ tels que, pour tout groupe G et tout morphisme de semi-groupe $\alpha : S \rightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupe $\tilde{\alpha} : G_S \rightarrow G$ vérifiant $\alpha = \mu \circ \tilde{\alpha}$.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow \exists! \tilde{\alpha} & \nearrow \mu & \\ G_S & & \end{array}$$

Une application bornée $\sigma : A \rightarrow B$ entre deux C^* -algèbres uniales est dite complètement positive si $\sigma(1) = 1$ et :

$$\sum_{i,j} b_i \sigma(a_i a_j^*) b_j^* \geq 0$$

pour tout entier n , tout a_1, \dots, a_n dans A et b_1, \dots, b_n dans B .

Le résultat suivant caractérise les applications complètement positives.

Théorème 1 (Stinespring). Soit A une C^* -algèbre unitale. Une application unitale $\sigma : A \rightarrow B(H)$ est complètement positive ssi il existe :

- une isométrie $V : H \rightarrow H_1$
- une représentation non-dégénérée $\rho : A \rightarrow B(H_1)$

telles que $\sigma(a) = V^* \rho(a) V$ pour tout $a \in A$.

Ce résultat permet de montrer que si $\sigma : A \rightarrow A'$ est une application complètement positive, alors l'application $\sigma \otimes 1$, définie sur le produit tensoriel algébrique de manière évidente, s'étend en une application complètement positive $\sigma \otimes 1 : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B$.

En effet, σ étant complètement positive, elle est, en gardant les même notation, de la forme $\sigma(a) = V^* \rho(a) V$. Mais alors :

$$(\sigma \otimes 1)(a \otimes b) = (V^* \rho(a) V) \otimes b = (V \otimes 1)^*(a \otimes b)(V \otimes 1).$$

Les éléments $a \otimes b$ générant le produit tensoriel $A \otimes B$, l'extension par continuité de $\sigma \otimes 1$ est bien complètement positive.

Cette remarque nous permettra plus loin de construire l'extension de Toeplitz

sans passer par la nucléarité. Il suffira alors de remarquer que lorsque l'on a une suite exacte courte scindée de C^* -algèbres, si la section est complètement positive, alors elle s'étend en une section complètement positive de la suite obtenue en tensorisant par une C^* -algèbre quelconque.

Proposition 1. Soit $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* -

algèbres. Si la surjection ψ a une section complètement positive, alors, pour toute C^* -algèbre B , la suite

$$0 \rightarrow A' \otimes B \xrightarrow{\tilde{\varphi}} A \otimes B \xrightarrow{\tilde{\psi}} A'' \otimes B \rightarrow 0$$

reste exacte.

Preuve 1. Soit $a'' \otimes b \in A'' \otimes B$. Par surjectivité, il existe $a \in A$ tel que $\psi(a) = a''$, et donc $\tilde{\psi}(a \otimes b) = a'' \otimes b$. Les éléments $a'' \otimes b$ générant $A'' \otimes B$, $\tilde{\psi}$ est surjective.

On va définir l'application $r : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B$ sur les tenseurs élémentaires. A $a \otimes b = \varphi(a') \otimes b$ on associe $a' \otimes b$, qui est bien défini par injectivité de φ . Si a n'est pas dans l'image de φ , on associe 0. On étend ensuite par continuité cette application qui vérifie $r \circ \tilde{\varphi} = id_{A'}$ par construction, ce qui prouve l'injectivité de $\tilde{\varphi}$.

On vérifie facilement que $\text{Im } \tilde{\varphi} \subset \ker \tilde{\psi}$. Soit donc $R = \text{Im } \tilde{\varphi}$ et f l'application canonique $(A \otimes B)/R \rightarrow A'' \otimes B$ obtenue en factorisant $\tilde{\psi}$. Nous allons construire une application $g : A'' \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/R$ qui vérifie $g \circ f = id$. Cela montrera que f est injective et donc que $\text{Im } \tilde{\varphi} = \ker \tilde{\psi}$.

Soit $a'' \in A''$. On choisit $a \in A$ tels que $\psi(a) = a''$ et on définit :

$$\begin{aligned} A'' \times B &\rightarrow (A \otimes B)/R \\ a'', b &\mapsto a \otimes b \pmod{R} \end{aligned}$$

Cette application ne dépend pas de la préimage de a'' choisie : si $\psi(a_1) = \psi(a_2) = a''$, alors $\psi(a_1 - a_2) = 0$ donc $a_1 - a_2 = \varphi(a')$ pour un certain $a' \in A'$, d'où $a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = \varphi(a') \otimes b$ et donc $a_1 \otimes b = a_2 \otimes b \pmod{R}$.

Etant bilinéaire, cette application se factorise en l'application $g : A'' \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/R$ recherchée.

□

1 K-théorie des C^* -algèbres

Définition 1. Soit p et q deux projecteurs dans une C^* -algèbre A . On définit trois relations d'équivalences :

$p \sim q$ s'il existe une isométrie partielle u de A telle que $p = u^*u$ et $q = uu^*$. (équivalence de Murray-Von Neumann)
 $p \sim_u q$ s'il existe un unitaire u de A^+ tel que $p = uqu^*$. (Similitude)
 $p \sim_h q$ s'il existe un chemin continu en norme de projections de p à q . (Homotopie)

En général, on a : $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$. Pour avoir les implications inverses, on peut se placer dans $M_\infty(A)$. (Doublant la dimension à chaque fois suffit) On peut alors considérer l'ensemble des projections de $M_\infty(A)$ et quotienter par l'unique relation d'équivalence définie ci-dessus. L'ensemble obtenu est un semi-groupe pour l'opération de somme directe de projecteur, nommé $V(A)$.

Définition 2. Le premier groupe de K -théorie de A est :
le groupe de Grothendieck de $V(A)$ si A est unitale.
le noyau de $K_0(A^+) \rightarrow K_0(\mathbb{C})$ sinon.

Pour passer aux groupes de K -théorie d'indices supérieurs de A , on se servira du foncteur de suspension $S(A) = A \times C_0(\mathbb{R})$.

Définition 3. Pour toute algèbre de Banach unitale, on pose

$$GL_\infty(A) = \varinjlim GL_n(A) \quad (\text{limite inductive})$$

munie de la topologie de la limite inductive.

Pour $n \geq 1$, on définit :

$$K_n(A) = \pi_{n-1}(GL_\infty(A))$$

où $\pi_n, n \geq 1$ désigne le n^{ie} -groupe d'homotopie, et π_0 le groupe des composantes connexes.

Quelques remarques :

1. Le groupe $K_1(A)$ est donc généré par les classes $[u]$ où u est un unitaire ou un inversible de $GL_n(A)$, avec la présentation $[1] = 0$, $[u] + [v] = [u \oplus v]$ et $[u] = [v]$ si u et v sont reliés par un chemin continu d'unitaires ou d'inversibles.
2. On a en fait la relation suivante

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad K_{i+1}(A) = K_i(S(A)).$$

3. Dans le cas des C^* -algèbres comme en K -théorie topologique, on a périodicité de Bott : $K_{i+2}(A) \simeq K_i(A)$.

Ces foncteurs de la catégorie des C^* -algèbres dans celle des groupes abéliens sont semi-exacts, i.e. ils transforment toute suite exacte courte en suite exacte très courte.

1.1 La suite exacte à six termes

Théorème 2. Soit $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* -algèbres. Alors la suite à six termes suivantes est exacte :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(B) \\ \uparrow \partial & & & & \downarrow \delta \\ K_1(B) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(J) \end{array}$$

C'est l'un des résultats fondamentaux en K -théorie, il permet des calculs effectifs. Le premier pas à faire est de construire l'indice associé à toute suite exacte $\partial : K_1(B) \rightarrow K_0(J)$, qui transforme toute suite exacte courte en suite exacte longue. On peut trouver 2 isomorphismes naturels qui donnent la périodicité de Bott :

$$K_{i+1}(A) \simeq K_i(A), i = 0, 1.$$

Ces isomorphismes sont donnés par l'application de Bott $\beta : K_0 \rightarrow K_1 S$ et $\theta : K_1 \rightarrow K_0 S$. La périodicité permet de conclure en enroulant la suite exacte longue grâce à l'application exponentielle $\delta : K_0(B) \rightarrow K_1(J)$ qui est la composition $\theta_J^{-1} \circ \partial \circ \beta_B$.

Proposition 2 (Remarque sur le nom d'application exponentielle). Soit J un idéal bilatère de la C^* -algèbre A . Si $p - p_n \in M_\infty(A/J)$ et $x \in M_\infty(A^+)$ est un relevé auto-adjoint de p , alors :

$$\delta([p] - [p_n]) = [\exp(-2i\pi x)].$$

De plus, si toutes les projections de $M_\infty(A/J^+)$ peuvent se relever en des projections de $M_\infty(A^+)$, alors l'application exponentielle est triviale :

$$\exp(-2i\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n!} = 1 + (e^{-2i\pi} - 1)x = 1$$

car $x = x^2$.

Preuve 2. Rappelons que δ est la composée donnée par :

$$\begin{array}{ccc} K_0(A/J) & \xrightarrow{\delta} & K_1(J) \\ \downarrow \beta_{A/J} & & \downarrow \theta_J \\ K_1(SA/J) & \xrightarrow{\partial} & K_0(SJ) \end{array}$$

Soient $p \in A/J$ et $x \in A$ un élément auto-adjoint tel que $\pi(x) = p$. Comme $e^{2i\pi tp} = 1 + (e^{2i\pi t} - 1)p$, $f_x(t) := 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x$ relève $f_p(t) = e^{2i\pi tp}$.

Notons, dans un premier temps, que tout élément y d'une C^* -algèbre tel que le spectre de y^*y soit inclus dans $[0; 1]$ produit un unitaire $\begin{pmatrix} y & \sqrt{1 - yy^*} \\ -\sqrt{1 - y^*y} & y^* \end{pmatrix}$.

On peut alors affirmer que

$$w_{f_x} := \begin{pmatrix} f_x & \sqrt{1 - f_x f_x^*} \\ -\sqrt{1 - f_x^* f_x} & f_x^* \end{pmatrix}$$

est un relevé unitaire de $\begin{pmatrix} f_p & 0 \\ 0 & f_p^* \end{pmatrix}$, relevé qui nous donne l'indice de $[f_p]_1 = \beta_{A/J}[p]_0$:

$$\partial[f_p]_1 = [w_{f_x} p_n w_{f_x}^*] - [p_n].$$

Soit $g_x(t) := (1 - t)1_{A^+} + te^{2i\pi x}$ un chemin continu entre l'identité et $e^{2i\pi x}$. L'image de $e^{2i\pi x}$ par θ_J se calcule comme l'indice $[w_{g_x} p_n w_{g_x}^*] - [p_n]$. Montrer que f_x et g_x sont homotopes suffit donc à conclure.

Pour cela, remarquons que, t variant de 0 à 1 et le spectre de x étant inclus dans $\{0, 1\}$, les éléments f_x et g_x ne dépendent que des valeurs des fonctions réelles

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x \\ g(t, x) &= 1 - t + te^{2i\pi x} = f(x, t) \end{aligned}$$

au voisinage du bord du carré $\partial[0; 1] \times [0; 1]$, homéomorphe au cercle \mathbb{S}^1 . Les classes d'homotopie de fonctions continues sur le cercle sont classifiées par leur nombre de tours, voir le livre d'Hatcher par exemple [1], et on vérifie que f et g sont ainsi homotopes, et donc que :

$$[w_{f_x} p_n w_{f_x}^*] = [w_{g_x} p_n w_{g_x}^*].$$

L'identité $\partial \circ \beta_B = \theta_J \circ \delta$ est démontrée, ce qui conclut. \square

1.2 Produits croisés de C^* -algèbres

1.2.1 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

Soit A une C^* -algèbre et Γ un groupe discret. On se donne de plus une action par automorphisme $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(A)$. On peut alors munir l'espace $C_c(\Gamma, A)$ des fonctions à support fini d'un produit de convolution tordu par α :

$$f *_{\alpha} g = \sum_{s, t \in \Gamma} f(s) \alpha_s(g(t)) st.$$

Soit $\lambda_{\Gamma, A}$ la représentation régulière gauche de $C_c(\Gamma, A)$ sur $l^2(\Gamma, A) = \{\eta : \Gamma \rightarrow A : \sum_s \eta^*(s) \eta(s) < \infty\}$:

$$(\lambda_{\Gamma, A}(f) \eta)(\gamma) = \sum_{s \in \Gamma} \alpha_{\gamma^{-1}}(f(s)) \eta(\gamma^{-1} s)$$

pour tous $f \in C_c(\Gamma, A), \eta \in l^2(\Gamma, A)$ et $\gamma \in \Gamma$.

Le produit croisé réduit de A par Γ , noté $A \times_\alpha \Gamma$, est défini comme la fermeture pour la norme d'opérateur de $\lambda_{\Gamma, A}(C_c(\Gamma, A))$ dans $B(l^2(\Gamma, A))$.

Les actions habituelles de A et de Γ sur $l^2(\Gamma, A)$ sont combinées.

$$(\pi(a)\eta)(s) = \alpha_{s^{-1}}(a)\eta(s)$$

$$(\lambda(\gamma)\eta)(s) = \eta(\gamma^{-1}s)$$

On parle pour la paire (λ, π) de représentation covariante du système $\{A, \Gamma, \alpha\}$, car la relation :

$$\lambda(\gamma)\pi(a)\lambda(\gamma^{-1}) = \pi(\alpha_\gamma(a))$$

est vérifiée.

Voici le résultat central de ce rapport. Il a été démontré par Pimsner et Voiculescu en 1980. [2]

Théorème 3 (Pimsner-Voiculescu). Soit A une C^* -algèbre et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Il existe alors une suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{1-\alpha_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xleftarrow{1-\alpha_*} & K_1(A) \end{array}$$

La première chose que l'on peut, et que l'on va, dire à propos des produits croisés est que les générateurs de leurs groupes de K -théorie prennent une forme sympathique, qui va nous permettre de faire des calculs explicites dans la preuve de la suite de Pimsner-Voiculescu.

Lemme 1. Soit B une C^* -algèbre unitale, $1_B \in A$ une sous- C^* -algèbre de B , et u un unitaire de B tels que A et u engendrent B et $uAu^* = A$. Alors $K_1(B)$ est engendré par les inversibles de la forme :

$$1_B \otimes 1_n + x(u^* \otimes 1_n) \quad , n \in \mathbb{N}, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n.$$

De plus, si $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, alors on peut se limiter aux classes d'unitaires de la forme :

$$1_B \otimes 1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F \quad F, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n$$

où F désigne une projection auto-adjointe.

La remarque suivante est importante pour la preuve du lemme 5 : dans le cas $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, les classes concernées sont stables par somme, donc tout élément de $K_1(B)$ est la différence de deux générateurs.

Preuve 3. On note Γ le sous-groupe de $K_1(B)$ engendré par les éléments de la forme $1_B \otimes 1_n + x(u \otimes 1_n)$.

Comme u est unitaire, le spectre de $t(1_B + 2u^*) + (1-t)u^* = t1_B + (1+t)u^*$ ne contient pas 0, et on a donc un chemin continu d'inversibles entre $1_B + 2u^*$ et u^* , d'où :

$$[1_B + 2u^*]_1 = [u^*]_1. \quad (1)$$

Les éléments $\sum_{s \leq j \leq t} a_j(u^j \otimes 1_p)$, $a_j \in A \otimes \mathfrak{M}_p$, $s, t \in \mathbb{Z}$ sont denses dans $B \otimes \mathfrak{M}_p$. Il suffit donc de prouver notre assertion pour ce type d'éléments. Mais, d'après l'équation 1, $[u]_1 \in \Gamma$, donc $s = 0$ suffit.

Soit donc $y = \sum_{0 \leq j \leq t} a_j(u^j \otimes 1_p)$ un inversible. On pose :

$$S_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon I \\ -I & 0 & & 0 & & \\ & -I & & & & \\ & 0 & \dots & & & \\ & & & -I & 0 & \end{pmatrix}, \forall \epsilon > 0$$

la matrice avec des $-I := -1_B \otimes 1_p$ sur la sous-diagonale et un ϵI dans le coin haut-droit, et :

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_t \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & & I & \end{pmatrix}.$$

Si l'on note $u_p = u \otimes 1_p$ et $y_k = \sum_{j=0}^{t-k} a_{j+k}(u^j \otimes 1_p) = y_{k+1}(u \otimes 1_p) + a_k$, on obtient l'identité :

$$\begin{aligned} S_0(u \otimes 1_n) + T &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_t \\ -u_p & I & & 0 & & \\ & -u_p & I & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & -u_p & I & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_t \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & & I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & & I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ -u_p & I & 0 & & & \\ & -u_p & & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & -u_p & I & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices de droite et de gauche de la dernière ligne sont unipotentes, leur classe dans $K_1(B)$ est donc nulle. Mais la classe de l'élément central est celle de y . Ajoutons à cela l'invariance de K_1 par homotopie, nous pouvons alors écrire,

pour ϵ assez petit :

$$\begin{aligned}
[y]_1 &= [S_\epsilon(u \otimes 1_n) + T]_1 \\
&= [u \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1}T]_1 \quad \text{car } [S_\epsilon]_1 = 0 \\
&= [u \otimes 1_n]_1 + [1_B \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1}T(u^* \otimes 1_n)]_1 \\
&= n[u]_1 + [1_B \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1}T(u^* \otimes 1_n)]_1
\end{aligned}$$

et la première partie du lemme est démontrée.

1.2.2 Extension de Toeplitz

Soient A et C deux C^* -algèbres.

Par extension de A par C , on entend un triplet (B, α, β) d'une C^* -algèbre et de deux morphismes telle que la suite :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Cette section présente la construction d'une extension de $A \otimes \mathbb{K}$ par $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ qui sera utile dans la preuve de l'exactitude de la suite de PV : l'extension de Toeplitz. Dans tout le document \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert, l_2 par exemple, dont on fixe une base hilbertienne (e_n) , et \mathbb{B} et \mathbb{K} sont respectivement l'algèbre des opérateurs bornés et compacts sur \mathcal{H} . \mathbb{K} est un idéal bilatère et :

$$\pi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/\mathbb{K}$$

est la projection naturelle sur l'algèbre de Calkin.

$H^2(\mathbb{S}^1)$ désigne le sous-espace hilbertien de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$ pour $n \geq 0$. Lorsque l'on prendra $H^2(\mathbb{S}^1)$ pour \mathcal{H} , e_n dénotera ces fonctions. Pour $f \in C(\mathbb{S}^1)$, on désigne par T_f l'opérateur de $H^2(\mathbb{S}^1)$, appelé opérateur de Toeplitz associé à f , défini par $T_f(g) = \mathcal{P}(fg)$, où \mathcal{P} est le projecteur orthogonal sur $H^2(\mathbb{S}^1)$. On appelle f le symbole de T_f .

Soit $S \in \mathbb{B}$ l'opérateur de shift unilatéral, qui envoie e_n sur e_{n+1} . On note $C^*(S)$ la C^* -algèbre uniale engendrée par S . On voit que S^* envoie e_1 sur 0 et e_n sur e_{n-1} lorsque $n \geq 2$. Si on note $E_{ij}(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$, on a :

$$E_{ij} = S^{i-1} S^{*j-1} - S^i S^{*j} \in C^*(S)$$

\mathbb{K} est donc un idéal bilatère de $C^*(S)$ et $P = 1 - SS^* = E_{11}$ est de rang 1 donc compact.

Lemme 2. L'application

$$\tau \begin{cases} C(\mathbb{S}^1) & \rightarrow B(H^2(\mathbb{S}^1))/K(H^2(\mathbb{S}^1)) \\ f & \mapsto \pi(T_f) \end{cases}$$

est un $*$ -homomorphisme injectif.

Preuve 4. Si l'on confond $f \in C(\mathbb{S}^1)$ avec l'opérateur de multiplication associé dans $L^2(\mathbb{S}^1)$, alors $f\mathcal{P} - \mathcal{P}f$ est un opérateur compact. En effet, si $f(z) = z$, on a un opérateur de rang 1, et cette fonction génère $C(\mathbb{S}^1)$ par théorème de Stone-Weierstrass.

Ceci permet d'écrire la relation suivante :

$$T_f T_g = \mathcal{P} f \mathcal{P} g = \mathcal{P}(\mathcal{P} f + \text{compact})g = \mathcal{P} f g + \text{compact}$$

Donc $T_f T_g = T_{fg} \bmod \mathbb{K}$, et comme $T_f^* = T_{\bar{f}}$, τ est bien un $*$ -homomorphisme.

Pour l'injectivité, observons le noyau de τ . C'est un idéal bilatère de $C(\mathbb{S}^1)$, il existe donc un ouvert $X \subset \mathbb{S}^1$ tel que :

$$\ker \tau = \{f \in C(\mathbb{S}^1) : f(z) = 0, \forall z \in X\}$$

Mais si $f \in \ker \tau$, alors $z \mapsto f(e^{i\theta}z)$ est aussi dans le noyau pour tout θ , ce qui assure que $X = \mathbb{S}^1$ ou \emptyset . Mais comme T_z n'est pas compact, $X = \mathbb{S}^1$ et l'injectivité est démontrée. □

Comme $C(\mathbb{S}^1)$ est généré par z , qui s'envoie sur S par T , l'image de T est $C^*(S)$. La remarque précédente permet d'affirmer que $C^*(S)/\mathbb{K}$ est $*$ -isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur le tore $C(\mathbb{S}^1)$, et l'image de S est la fonction identité sur \mathbb{S}^1 , noté z . On a donc une extension, écrite sous la forme d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow C^*(S) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Définition 4. On définit l'algèbre de Toeplitz \mathcal{T} associée à la paire (A, α) comme la C^* -sous-algèbre de $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ engendré par $A \otimes I$ et $u \otimes S$.

Rappelons que l'on voit A comme une sous- $*$ -algèbre de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, et que l'on note u l'unitaire qui rend intérieure l'action de α :

$$\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(n)a = u^{*n} a u^n$$

Observons maintenant $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, dont on va montrer qu'elle se réalise comme un quotient de \mathcal{T} par un idéal bilatère fermé. Soit donc J l'idéal bilatère fermé engendré par la projection $1 \otimes P$. La première chose à remarquer, c'est que l'on a un $*$ -morphisme :

$$\phi \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathcal{T} \\ e_{ij} & \rightarrow S^i P S^{*j} \end{cases} .$$

Il est ici défini sur le système d'unités de \mathbb{K} ,

$$e_{ij}(x) = \langle x, e_i \rangle e_j$$

ce qui permet facilement de l'étendre à \mathbb{K} entier.

L'identité suivante permet d'étendre ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$:

$$(u \otimes S)^i (a \otimes P) (u \otimes S)^{*j} = (u^i a u^{*j}) \otimes \phi(e_{ij})$$

définit l'extension ψ de ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$. Alors $\psi(A \otimes \mathbb{K}) = J \subset \mathcal{T}$.

Pimsner et Voiculescu montrent [2] que :

$$\text{im } \psi = (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T} \quad (2)$$

En effet, soit $y \in (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}$. Comme y est dans $(A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K})$,

$$J \ni (1 \otimes E_n) y (1 \otimes E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$$

où $E_n = 1 \otimes \phi(e_{00} + e_{11} + \dots + e_{nn}) = \psi(1 \otimes (e_{00} + e_{11} + \dots + e_{nn})) \in J$ (on utilise une unité approchée de \mathbb{K}). J étant un idéal fermé, on en déduit que $y \in J$. L'inclusion inverse est directe.

Les C^* -algèbres \mathbb{K} , $C^*(S)$ et $C(\mathbb{S}^1)$ sont nucléaires car commutative pour $C(\mathbb{S}^1)$ ou limite inductive de C^* -algèbres finie-dimensionnelles pour \mathbb{K} . Ceci assure qu'il n'y a qu'une seule norme de C^* -algèbre sur leur produit tensoriel avec $A \times_{\alpha} \mathbb{Z}$. De plus, avec le théorème T.2.6.26 de l'appendice T du livre de Wegge-Olsen [5], on a, sans ambiguïté, une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K} \longrightarrow (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C^*(S) \longrightarrow (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Une autre méthode pour l'obtenir est d'utiliser la proposition 1. En effet, $f \mapsto T_f$ est une section complètement positive de la première suite exacte :

$$\sum_{i,j} b_i T_{f_i f_j^*} b_j^* = \left(\sum_i b_i T_{f_i} \right) \left(\sum_i b_i T_{f_i} \right)^*.$$

Cette suite exacte et l'identité 2 permet d'identifier \mathcal{T}/J à la C^* -algèbre engendrée par $A \otimes 1$ et $u \otimes z$ où z est l'inclusion $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Cette dernière étant $*$ -isomorphe à $A \times_{\alpha} \mathbb{Z}$, on en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

C'est l'extension de Toeplitz associée à (A, α) .

1.3 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

1.3.1 La preuve originale

Maintenant que le décor est planté, nous pouvons passer à la K -théorie. On pose :

$$d : \begin{cases} A & \rightarrow \mathcal{T} \\ a & \mapsto a \otimes I \end{cases}$$

Nous allons d'abord démontré le :

Lemme 3. Les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_i(A \otimes K) & \xrightarrow{\psi_*} & K_i(\mathcal{T}) \\ \simeq \uparrow & & \uparrow d_* \\ K_i(A) & \xrightarrow{(id_A)_* - \alpha(-1)_*} & K_i(A) \end{array}$$

sont commutatifs pour $i \in \{0, 1\}$, et $d_* : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{T})$ est injectif.

Preuve 5. L'isomorphisme $K_1(A) \rightarrow K_1(A \otimes \mathbb{K})$ associe à une classe $[v] \in K_1(A)$ l'élément $[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})]$, dont l'image par ψ_* est :

$$\psi_*[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})] = [v \otimes P] + [1 \otimes I - 1 \otimes P] = [v \otimes P] + [1 \otimes SS^*] \quad (3)$$

Maintenant :

$$d_* \circ (id_A - \alpha(-1))_*[v] = [v \otimes I] - [u^*vu \otimes I] \quad (4)$$

Soit l'unitaire :

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \otimes M_2$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & Q(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)Q^* & 1 \otimes I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mais la classe dans K_1 est invariante par augmentation, i.e. $[x] = \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, et par conjugaison par un unitaire, donc :

$$\left[\Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* \right] = [u^*vu \otimes I]$$

En remplaçant dans (4), on obtient :

$$\begin{aligned} [v \otimes I] - [v \otimes SS^* + Q] &= [(v \otimes I)(v \otimes SS^* + Q)^{-1}] \\ &= [v^* \otimes SS^* + Q] \\ &= [1 \otimes SS^* + v \otimes P] \end{aligned}$$

qui est l'expression que l'on avait trouvé pour l'image de $[v]$ par ψ_* dans (3). La commutativité du diagramme $i = 0$ suit la même preuve : il suffit de remarquer que si l'on prend une projection auto-adjointe $q \in A$, alors dans $K_0(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned} [(\alpha(-1)q) \otimes I] &= \left[\Omega \begin{pmatrix} (\alpha(-1)q) \otimes I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega^* \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} q \otimes SS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= [q \otimes SS^*]. \end{aligned}$$

Ceci assure que :

$$d_* \circ ((id_A)_* - \alpha(-1)_*) [q \otimes e_{00}] = [q \otimes I] - [(\alpha(-1)q) \otimes I] = [q \otimes P] = \psi_* [q \otimes e_{00}].$$

Les diagrammes commutent bien, il reste à montrer l'injectivité de d_* .

Pour cela, montrons que si v_0 et v_1 sont des unitaires de A , et $t \mapsto w_t$ un chemin continu dans les unitaires de \mathcal{T} d'origine $v_0 \otimes I$ et d'arrivée $v_1 \otimes I$, alors $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$.

Calculons :

$$\begin{pmatrix} w_t & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(-1)w_t^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* = \begin{pmatrix} w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}.$$

Le chemin unitaire $y_t = w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q \in \mathcal{T}$ vérifie :

$$\forall t, \quad y_t \in 1 \otimes I + J.$$

En effet :

$$y_t - 1 \otimes I = (w_t - 1 \otimes I)Q + w_t((1 \otimes S)w_t^* - w_t^*(1 \otimes S))(1 \otimes S^*),$$

mais un élément de la forme $(1 \otimes S)w - w(1 \otimes S)$ est toujours dans $B \otimes \phi(\mathbb{K})$, si $w \in \mathcal{T}$. Si w est dans $A \otimes I$ ou vaut $u \otimes S$, on obtient 0, et si $w = u^* \otimes S^*$, le commutateur vaut $u^* \otimes P \in B \otimes \phi(\mathbb{K})$. Ces éléments génèrent un algèbre dense dans \mathcal{T} : l'assertion en découle.

On a donc un chemin continu d'unitaires de $1 \otimes SS^* + v_0 \otimes P$ à $1 \otimes SS^* + v_1 \otimes P$, qui reste dans $1 \otimes I + J$. Comme ψ établit un isomorphisme de $\mathbb{C}1 \otimes I + J$ sur $A \tilde{\otimes} \mathbb{K}$, on a donc, dans $K_1(A \tilde{\otimes} \mathbb{K})$:

$$[\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_0 \otimes e_{00}] = [\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_1 \otimes e_{00}]$$

donc : $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$, et l'injectivité de d_* est démontrée. \square

En passant l'extension de Toeplitz en K -théorie, et en combinant avec le lemme 3, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
K_1(A \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{\psi_*} & K_1(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & K_0(A \otimes \mathbb{K}) \\
\uparrow \simeq & & \uparrow d_* & \nearrow \iota_* & & & \\
K_1(A) & \xrightarrow{(id_A - \alpha(-1))_*} & K_1(A) & & & &
\end{array}$$

dont la première ligne est exacte, et le carré commute.

Lemme 4. $d_* : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Preuve 6. Montrons que $\text{Ker } \delta \subset \text{Im } \iota_*$. Cela suffit puisque si d_* n'est pas surjectif, il existe un élément $x \in K_1(\mathcal{T}) \setminus \text{Im } d_*$, dont l'image par π_* n'est pas dans l'image de ι_* . Pourtant : $\delta \circ \pi_*(z) = 0$.

Nous allons montrer que tout élément de $\text{Ker } \delta$ s'écrit :

$$w = [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(u^* \otimes 1_n) F_1]_1 - [1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2(u^* \otimes 1_n) F_2]_1$$

pour certains x_1, x_2, F_1 et F_2 dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$ tels que F_i soient des projections auto-adjointes unitairement équivalentes : il existe un unitaire $v \in A \otimes \mathfrak{M}_n$ les entrelaçant $F_1 = v F_2 v^*$.

Montrons que cela conclut. Dans $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
[1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2(u^* \otimes 1_n) F_2]_1 &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 v x_2(u^* \otimes 1_n) v^* F_1]_1 \\
&= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 y(u^* \otimes 1_n) F_1]_1
\end{aligned}$$

où $y = v x_2(\alpha(-1) \otimes id_n) v^* \in A \otimes \mathfrak{M}_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
w &= [(1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(u^* \otimes 1_n) F_1) (1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 y(u^* \otimes 1_n) F_1)^*]_1 \\
&= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(\alpha(-1) \otimes id_n) F_1 y^* F_1]_1
\end{aligned}$$

L'élément entre crochets est dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$, ce qui veut dire que sa classe w est dans l'image de $\iota_* : \text{Ker } \delta \subset \text{Im } \iota_*$ est démontré.

Montrons maintenant la remarque. Le lemme 1 nous permet d'affirmer que tout élément de $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$ s'écrit comme une différence de générateurs unitaires de la forme $[1_n - F + F x(u^* \otimes 1_n) F]_1$. Si $n = 1$, un tel élément a un relevé

$w = (1 - F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^* \in \mathcal{T}$. Mais alors :

$$\begin{aligned} ww^* &= (1 - F) \otimes I + Fxu^*Fu^*x^*F \otimes S^*S \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes I \\ &= 1 \otimes I \\ w^*w &= (1 - F) \otimes I + Fu^*x^*Fu^*x^*F \otimes SS^* \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes (I - P) \\ &= 1 \otimes I - F \otimes P \end{aligned}$$

L'index est donc facilement calculable :

$$\begin{aligned} \delta[1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1 &= [1 \otimes I - w^*w]_0 - [1 \otimes I - ww^*]_0 \\ &= [F \otimes P]_0 \\ &= [F \otimes e_{00}]_0 \end{aligned}$$

Ce calcul assure que

$$\begin{aligned} [1_n - F_1 + F_1x_1(u^* \otimes 1_n)F_1]_1 - [1_m - F_2 + F_2x_2(u^* \otimes 1_m)F_2]_1 &\in \text{Ker } \delta \\ \text{ssi } [F_1]_0 &= [F_2]_0 \quad \text{dans } K_0(A). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer F_i et x_i par $0_p \oplus F_i$ et $I_p \oplus x_i$, on peut supposer $m = n$. De même, quitte à remplacer F_i et x_i par $F_i \oplus 1 \otimes 1_p$ et $x_i \oplus 1 \otimes 1_{n+p}$, on peut supposer que F_1 et F_2 sont unitairement équivalentes. \square

On a donc montré que d_* induisait un isomorphisme en K_1 -théorie. On obtient donc une suite exacte à 6 termes à partir de l'extension de Toeplitz, dont on voudrait déduire le théorème, ce que l'on peut faire à condition de montrer que d_* induit un isomorphisme au niveau des K_0 -groupes.

Lemme 5. $d_* : K_0(A) \rightarrow K_0(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Preuve 7. La suite exacte $0 \rightarrow SA \rightarrow C(A \otimes \mathbb{S}^1) \rightarrow A \rightarrow 0$ est scindée, et induit, modulo la périodicité de Bott, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \rightarrow & K_0(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) & \rightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(A) & \leftarrow & K_1(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) & \leftarrow & K_1(A) \end{array} .$$

Mais, la suite étant scindée, tout élément de $K_i(A)$ se relève, et les flèches connectantes, qui mesurent l'obstruction à être relevé, sont donc nulles : on obtient deux suites exactes scindées :

$$0 \rightarrow K_{1-i}(A) \rightarrow K_i(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) \rightarrow K_i(A) \rightarrow 0$$

et donc $K_i(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A)$.

Si on note $\phi^A : SA \oplus A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{S}^1)$ l'isomorphisme obtenu à partir des suites exactes scindées, alors :

$$(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_* \circ \phi_*^A = \phi_*^{\mathcal{T}} \circ d_*. \quad (5)$$

Le lemme 5 appliqué à $id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d : A \otimes C(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$, et le fait que $\mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1)) = \mathcal{T}(A) \otimes C(\mathbb{S}^1)$, assurent que $(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_*$ établit un isomorphisme de $K_1(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$ sur $K_1(\mathcal{T} \otimes C(\mathbb{S}^1))$, ce qui, avec la remarque (5) conclut. \square

Le théorème 3 découle directement des lemmes précédents : on passe l'extension de Toeplitz en K -théorie et on se sert de la stabilité $K_i(A \otimes \mathbb{K}) \simeq K_i(A)$ et de l'isomorphisme $K_i(A) \simeq K_i(\mathcal{T})$.

1.3.2 Un exemple : le tore non-commutatif

Si on se fixe un automorphisme $\alpha \in Aut(A)$, on peut construire le produit croisé $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ comme la C^* -algèbre universelle engendrée par A et un unitaire u vérifiant :

$$\forall a \in A, uau^* = \alpha(a).$$

Pour la construire effectivement, considérons $A[u]$. La relation de commutation nous donne le produit suivant :

$$au^n bu^m = a\alpha^n(b)u^{n+m} \quad \forall a, b \in A, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

Avec $A = C(\mathbb{S}^1)$ et α l'automorphisme induit par $z \mapsto e^{2i\pi\theta z}$, on obtient le tore non-commutatif A_{θ} . Le chemin $\phi_t : z \mapsto e^{2it\pi\theta z}$ montre que α est homotope à l'identité et la suite exacte de Pimsner-Voiculescu se transforme alors en :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{0} & K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A_{\theta}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A_{\theta}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{0} & K_1(C(\mathbb{S}^1)). \end{array}$$

Mais $K_i(C(\mathbb{S}^1)) = K_i(SC \oplus \mathbb{C}) = K_{1-i}(\mathbb{C}) \oplus K_i(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, d'où : $K_i(A_{\theta}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, i = 0, 1$. Nous avons donc calculé les groupes de K -théorie du tore non-commutatif, mais nous allons dire plus. On peut en effet calculer les générateurs de ces groupes.

Définition 5. Un projecteur de Rieffel de $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ est un idempotent autoad-joint de la forme $x_0 + x_1 u + u^* x_1^*$, où $x_0, x_1 \in A$.

Un projecteur de Rieffel étant autoadjoint, nous pouvons immédiatement en déduire que x_0 aussi. L'idempotence conduit elle au trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} - x_0 &= x_0^2 + \alpha^{-1}(x_1^*x_1) + x_1x_1^* \\ - x_1 &= x_0x_1 + x_1\alpha(x_0) \\ - 0 &= \alpha^{-1}(x_1)x_1. \end{aligned}$$

Rappelons que l'algèbre de Von Neumann enveloppante d'une C^* -algèbre A est définie par le bicommutant dans $\mathcal{L}(H_u)$ de $\pi_u(A)$, où $\pi_u : A \rightarrow \mathcal{L}(H_u)$ est la représentation universelle de A , c'est-à-dire la somme hilbertienne de toutes les représentations irréductibles de A .

Définition 6. Soit $x \in A$ un élément d'une C^* -algèbre.

Le support à gauche de x est défini comme le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}(H_u)$ sur la fermeture de l'image de $\pi_u(x)$. On le note l_x .

Le support à droite de x est défini comme le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}(H_u)$ sur l'orthogonal du noyau de $\pi_u(x)$. On le note r_x .

Ces deux projecteurs vérifient : $l_x x = x = x r_x, \forall x \in A$ et si x est autoadjoint, alors ils sont égaux.

Proposition 3. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel et $\Delta := l_{x_1}$ le support à gauche de x_1 . Alors l'unitaire $\exp(2i\pi x_0 \Delta)$ est dans A et :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

Preuve 8. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel. Montrons par récurrence que le relevé autoadjoint $a = u^* x_1 \otimes S^* + x_0 \otimes I + x_1 u \otimes S \in \mathcal{T}$ de p vérifie :

$$\forall n \geq 1, \quad a^n = a + (x_0^n - x_0) \Delta \otimes P.$$

Si c'est vrai au rang n ,

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^2 + a(x_0^n - x_0) \Delta \otimes P \\ &= a + a(x_0^2 - x_0) \Delta \otimes P + x_0(x_0^n - x_0) \Delta \otimes P + x_1 u(x_0^n - x_0) \Delta \otimes SP \\ &= a + (x_0^{n+1} - x_0) \Delta \otimes P + u(\alpha(-1)x_1)(x_0^n - x_0) \Delta \otimes SP \end{aligned}$$

Le dernier terme étant nul ($SP = 0$), le principe de récurrence conclut.

Ayant exhibé un relevé autoadjoint de p , on est en mesure de calculer son indice. Mais :

$$\begin{aligned} \exp(2i\pi a) &= 1 \otimes I + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (a + (x_0^n - x_0) \Delta \otimes P) \\ &= (e^{2i\pi} - 1)(a - x_0 \Delta \otimes P) + \exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes P + 1 \otimes (I - P) \\ &= \psi(\exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})). \end{aligned}$$

Il vient :

$$\partial[p]_0 = [\exp(2i\pi a)]_1 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})]_1$$

Le $*$ -homomorphisme δ étant la composition du connectant $\partial : K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A \times \mathbb{K})$ avec l'isomorphisme $K_1(A \times \mathbb{K}) \simeq K_1(A)$, on en déduit :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

□

Ce résultat met à notre disposition une autre méthode de calcul de l'image par l'application exponentielle d'un projecteur dans le cas des projecteur de Rieffel. Il est à rapprocher de la proposition 2 : Pimsner et Voiculescu [2] décrivent de manière effective l'application exponentielle dans le cas d'un produit croisé $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Nous avons vu que la suite exacte à 6 termes donnait deux suites exactes courtes, dont :

$$0 \longrightarrow K_0(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow K_0(A_\theta) \xrightarrow{\delta} K_1(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow 0 \quad \text{On sait que les}$$

groupes à gauche et à droite sont tous les deux \mathbb{Z} , l'un étant généré par la classe de la projection $1 \in C(\mathbb{S}^1)$, l'autre par la classe de l'unitaire $v = id_{\mathbb{S}^1} \in C(\mathbb{S}^1)$. Si l'on trouve un projecteur p tel que $\delta[p]_0 = [v]_1$, on peut dire que $K_0(A_\theta)$ est engendré par $[1]_0$ et $[p]_0$.

On note φ la fonction définie par $\alpha(f)(z) = f(e^{2i\pi\theta}z) = f \circ \varphi(z)$. Soit $0 < \delta < \theta$. Soit f la fonction de \mathbb{R} , affine par morceaux et 1 périodique, qui vaut 1 si t est dans $[\delta, \theta]$, 0 si $t \in [\theta + \delta, 1]$ et est nulle en 0. On pose :

$$\begin{cases} x_0 &= e^{2i\pi f} \\ x_1 &= \sqrt{x_0(1-x_0)} \end{cases}$$

On vérifie par un simple calcul que $p_\theta = x_0 + x_1 u + u^* x_1^*$ définit un projecteur de Rieffel.

Références

- [1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [2] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for k -groups and ext-groups of certain cross-products of c^* -algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.
- [3] Alain Connes Paul Baum. Geometric k -theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.
- [4] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and k -theory of group c^* -algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.
- [5] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^* -algebras, a friendly approach*. Oxford University Press, 1993.