

Introduction à la K-théorie des C^* -algèbres

Clément Dell'Aiera

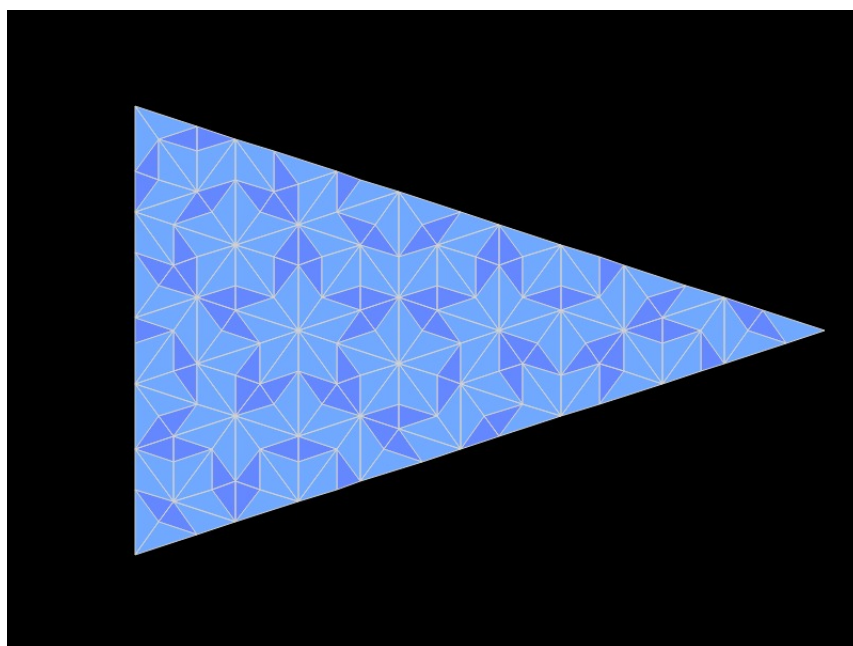


FIGURE 1 – Pavage de Penrose généré avec <http://www.spacegoo.com/penrose/>

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Notations	3
1.2	Rappels sur les produits tensoriels de C^* -algèbres	3
1.3	Applications complètement positives et suites exactes	6
2	K-théorie des C^*-algèbres	9
2.1	La suite exacte à six termes	10
2.2	Produits croisés de C^* -algèbres	12
2.2.1	Suite exacte de Pimsner-Voiculescu	12
2.2.2	Extension de Toeplitz	14
2.3	Suite exacte de Pimsner-Voiculescu	17
2.3.1	La preuve originale	17
2.3.2	Un exemple : le tore non-commutatif	21

1 Introduction

1.1 Notations

Pour une C^* -algèbre A non nécessairement unitale, on note A^+ la C^* -algèbre unitale qui la contient en tant qu'idéal bilatère, définie par :

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(a, \lambda) \in A \times \mathbb{C}\} \\ (a, \lambda)(b, \mu) &= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \end{aligned}$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^+ \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0 \quad .$$

On rappelle que pour tout semi-groupe abélien S , il existe un groupe G_S , appelé groupe de Grothendieck de S , et un morphisme de semi-groupe $\mu : S \rightarrow G_S$ tels que, pour tout groupe G et tout morphisme de semi-groupe $\alpha : S \rightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupe $\tilde{\alpha} : G_S \rightarrow G$ vérifiant $\alpha = \mu \circ \tilde{\alpha}$.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow \exists! \tilde{\alpha} & \nearrow \mu & \\ G_S & & \end{array}$$

1.2 Rappels sur les produits tensoriels de C^* -algèbres

Cette section présente les résultats qui seront utilisés sur les produits tensoriels de C^* -algèbres. Toutes les preuves des affirmations non justifiées peuvent être trouvées dans le livre de Murphy [4] par exemple.

On rappelle que le produit tensoriel de 2 espaces vectoriels E et F est défini comme l'unique (à isomorphisme près) espace vectoriel $E \otimes F$ muni d'une application bilinéaire $\pi : E \times F \rightarrow E \otimes F$ tel que, pour tout espace vectoriel W et toute application bilinéaire $\phi : E \times F \rightarrow W$, il existe une unique application linéaire $\varphi : E \otimes F \rightarrow W$ telle que $\phi = \varphi \circ \pi$. On note $\pi(x, y) = x \otimes y$. Ce sont ces éléments, appelés tenseurs élémentaires, qui engendrent $E \otimes F$ comme espace vectoriel.

Le lemme suivant donne l'unicité à isomorphisme près :

Lemme 1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K . S'il existe deux K -espaces vectoriels V_1 et V_2 munis d'applications bilinéaires $\pi_j : E \times F \rightarrow V_j$ telles que, pour tout espace vectoriel W , toute application bilinéaire $E \times F \rightarrow W$, se factorise uniquement via π_1 et π_2 , alors V_1 et V_2 sont isomorphes en tant que K -espaces vectoriels.

$$\begin{array}{ccccc}
V_1 & \xleftarrow{\pi_1} & E \times F & \xrightarrow{\pi_2} & V_2 \\
& & \downarrow & & \\
& & W & &
\end{array}$$

Preuve 1. En factorisant π_j via π_j , il existe deux uniques applications linéaires $\phi_1 : V_2 \rightarrow V_1$ et $\phi_2 : V_1 \rightarrow V_2$ telles que :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \phi_1 \circ \pi_2 \\
\pi_2 &= \phi_2 \circ \pi_1.
\end{aligned}$$

Montrons que ces deux applications sont inverses. Comme :

$$\phi_1 \circ \phi_2 \circ \pi_1 = \phi_1 \circ \pi_2 = \pi_1,$$

$\phi_1 \circ \phi_2 = id_{V_1}$ par unicité de la factorisation de π_1 via π_1 . Symétriquement, on démontre que : $\phi_2 \circ \phi_1 = id_{V_2}$, et le résultat est démontré. \square

Le problème qui va se poser, si l'on veut définir des produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques par exemple, est celui de la topologie que l'on veut définir sur celui-ci. Alexandre Grothendieck a étudié ces constructions dans sa thèse, voir le séminaire Bourbaki [1] pour une présentation. C'est au cours de sa thèse que A. Grothendieck a d'ailleurs introduit la notion de nucléarité, notion clé pour les C^* -algèbres. On verra en effet que les C^* -algèbres nucléaires sont exactes : le foncteur obtenu en tensorisant par elle-même préserve l'exactitude des complexes de C^* -algèbres.

Sur les espaces de Hilbert, notre travail est simplifié : il existe un unique produit scalaire sur le produit tensoriel algébrique vérifiant : $\langle x \otimes x', y \otimes y' \rangle = \langle x, y \rangle \langle x', y' \rangle$. La complétion du produit tensoriel algébrique de H et K par rapport à ce produit scalaire est noté $H \hat{\otimes} K$. Ce résultat peut alors être transféré aux C^* -algèbres, grâce à leurs représentations sur des espaces de Hilbert.

Proposition 1. Soit A et B deux C^* -algèbres et (H, φ) et (K, ψ) deux représentations associées. Alors, il existe un unique $*$ -homomorphisme $\pi : A \otimes B \rightarrow B(H \hat{\otimes} K)$ tel que $\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b)$. De plus, π est injectif si φ et ψ le sont.

On appelle représentation universelle d'une C^* -algèbre A la somme directe de toutes les représentations (H_τ, ϕ_τ) , τ parcourant l'espace des états de A , la représentation associée dérivant de la construction GNS. On peut alors définir deux normes sur le produit tensoriel algébrique de 2 C^* -algèbres A et B .

Définition 1. Soit A et B deux C^* -algèbres de représentations universelles (H_A, ϕ_A) et (H_B, ϕ_B) . Soit π l'unique $*$ -homomorphisme donné par la proposition précédente : $\pi(a \otimes b) = \phi_A(a) \otimes \phi_B(b)$.

- Le produit tensoriel spatial $A \otimes_{\min} B$ est défini comme la complétion du produit tensoriel algébrique $A \otimes B$ par rapport à la norme

$$\|\cdot\|_{\min} \begin{cases} A \otimes B & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ c & \mapsto \|\pi(c)\| \end{cases}$$

- Le produit tensoriel maximal $A \otimes_{\max} B$ est défini comme la complétion du produit tensoriel algébrique $A \otimes B$ par rapport à la norme

$$\|\cdot\|_{\max} \begin{cases} A \otimes B & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ c & \mapsto \max_p p(c) \end{cases}$$

où p parcourt l'ensemble des semi- C^* -normes sur $A \otimes B$.

On se servira de la propriété suivante : pour tout $*$ -homomorphismes de C^* -algèbres $\varphi : A \rightarrow B$ et $\psi : A' \rightarrow B'$, il existe un unique $*$ -homomorphisme $\pi : A \otimes_{\min} A' \rightarrow B \otimes_{\min} B'$ tel que

$$\pi(a \otimes a') = \varphi(a) \otimes \psi(a') \quad , \forall a \in A, a' \in A'.$$

De plus, π est injective si φ et ψ le sont. On notera $\varphi \otimes_{\min} \psi$ à la place de π .

Définition 2. Une C^* -algèbre est dite nucléaire s'il n'existe qu'une seule C^* -norme sur le produit tensoriel algébrique $A \otimes B$, pour toute C^* -algèbre B .

Théorème 1. Soit B une C^* -algèbre et $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ une

suite exacte de C^* -algèbres. Si le produit tensoriel algébrique $A'' \otimes B$ n'admet qu'une seule C^* -norme, ce qui arrive lorsque A'' ou B est nucléaire, alors la suite

$$0 \rightarrow A' \otimes_{\min} B \xrightarrow{\tilde{\varphi}} A \otimes_{\min} B \xrightarrow{\tilde{\psi}} A'' \otimes_{\min} B \rightarrow 0$$

reste exacte.

On a noté $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes_{\min} id_B$ et $\tilde{\psi} = \psi \otimes_{\min} id_B$.

Preuve 2. Soit $a'' \otimes b \in A'' \otimes B$. Par surjectivité, il existe $a \in A$ tel que $\psi(a) = a''$, et donc $\tilde{\psi}(a \otimes b) = a'' \otimes b$. Les éléments $a'' \otimes b$ générant $A'' \otimes B$, $\tilde{\psi}$ est surjective.

L'identité de B et φ étant des $*$ -homomorphismes injectifs, $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes_{\min} id_B$ est injectif.

Observons que $\text{Im } \tilde{\varphi} = \text{Im } \varphi \otimes_{\min} B \subset A \otimes_{\min} B$ est un idéal. On vérifie facilement que $\text{Im } \tilde{\varphi} \subset \ker \tilde{\psi}$. Soit donc $R = \text{Im } \tilde{\varphi}$ et f l'application canonique $(A \otimes_{\min} B)/R \rightarrow A'' \otimes_{\min} B$ obtenue en factorisant $\tilde{\psi}$. Nous allons construire une application $g : A'' \otimes_{\min} B \rightarrow (A \otimes_{\min} B)/R$ qui vérifie $g \circ f = id$. Cela

montrera que f est injective et donc que $\text{Im } \tilde{\varphi} = \ker \tilde{\psi}$.

Soit $a'' \in A''$. On choisit $a \in A$ tels que $\psi(a) = a''$ et on définit :

$$\begin{aligned} A'' \times B &\rightarrow (A \otimes B)/R \\ a'', b &\mapsto a \otimes b \pmod{R} \end{aligned}$$

Cette application ne dépend pas de la préimage de a'' choisie : si $\psi(a_1) = \psi(a_2) = a''$, alors $\psi(a_1 - a_2) = 0$ donc $a_1 - a_2 = \varphi(a')$ pour un certain $a' \in A'$, d'où $a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = \varphi(a') \otimes b$ et donc $a_1 \otimes b = a_2 \otimes b \pmod{R}$.

De plus, la fonction $A'' \otimes B \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto \max(\|g(x)\|, \|x\|_{\min})$ est une C^* -norme. Par hypothèse, elle est donc égale à $\|\cdot\|_{\min}$, ce qui montre que g est continue. Etant bilinéaire et continue, cette application se factorise en l'application $g : A'' \otimes_{\min} B \rightarrow (A \otimes_{\min} B)/R$ recherchée. En effet :

$$gf(a \otimes b + R) = g\tilde{\psi}(a \otimes b) = g(\psi(a) \otimes b) = a \otimes b + R$$

donc $g \circ f = \text{id}_{(A \otimes_{\min} B)/R}$.

□

Ce théorème sera utile pour la construction de l'extension de Toeplitz. Il sert aussi à la preuve du

Théorème 2. Soit $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* -algèbres.

Si A' et A'' sont nucléaires, alors A l'est aussi.

Les C^* -algèbres finies dimensionnelles ainsi que les C^* -algèbres commutatives sont nucléaires.

1.3 Applications complètement positives et suites exactes

Une application bornée $\sigma : A \rightarrow B$ entre deux C^* -algèbres uniales est dite complètement positive si $\sigma(1) = 1$ et :

$$\sum_{i,j} b_i \sigma(a_i a_j^*) b_j^* \geq 0$$

pour tout entier n , tout a_1, \dots, a_n dans A et b_1, \dots, b_n dans B .

Le résultat suivant caractérise les applications complètement positives.

Théorème 3 (Stinespring). Soit A une C^* -algèbre uniale. Une application uniale $\sigma : A \rightarrow B(H)$ est complètement positive ssi il existe :

- une isométrie $V : H \rightarrow H_1$
 - une représentation non-dégénérée $\rho : A \rightarrow B(H_1)$
- telles que $\sigma(a) = V^* \rho(a) V$ pour tout $a \in A$.

Ce résultat permet de montrer que si $\sigma : A \rightarrow A'$ est une application complètement positive, alors l'application $\sigma \otimes 1$, définie sur le produit tensoriel algébrique de manière évidente, s'étend en une application complètement positive $\sigma \otimes 1 : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B$.

En effet, σ étant complètement positive, elle est, en gardant les même notation, de la forme $\sigma(a) = V^* \rho(a) V$. Mais alors :

$$(\sigma \otimes 1)(a \otimes b) = (V^* \rho(a) V) \otimes b = (V \otimes 1)^*(a \otimes b)(V \otimes 1).$$

Les éléments $a \otimes b$ générant le produit tensoriel $A \otimes B$, l'extension par continuité de $\sigma \otimes 1$ est bien complètement positive.

Cette remarque nous permettra plus loin de construire l'extension de Toeplitz sans passer par la nucléarité. Il suffira alors de remarquer que lorsque l'on a une suite exacte courte scindée de C^* -algèbres, si la section est complètement positive, alors elle s'étend en une section complètement positive de la suite obtenue en tensorisant par une C^* -algèbre quelconque.

Proposition 2. Soit $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* -

algèbres. Si la surjection ψ a une section complètement positive, alors, pour toute C^* -algèbre B , la suite

$$0 \rightarrow A' \otimes B \xrightarrow{\tilde{\varphi}} A \otimes B \xrightarrow{\tilde{\psi}} A'' \otimes B \rightarrow 0$$

reste exacte.

Preuve 3. Soit $a'' \otimes b \in A'' \otimes B$. Par surjectivité, il existe $a \in A$ tel que $\psi(a) = a''$, et donc $\tilde{\psi}(a \otimes b) = a'' \otimes b$. Les éléments $a'' \otimes b$ générant $A'' \otimes B$, $\tilde{\psi}$ est surjective.

On va définir l'application $r : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B$ sur les tenseurs élémentaires. A $a \otimes b = \varphi(a') \otimes b$ on associe $a' \otimes b$, qui est bien défini par injectivité de φ . Si a n'est pas dans l'image de φ , on associe 0. On étend ensuite par continuité cette application qui vérifie $r \circ \tilde{\varphi} = id_{A'}$ par construction, ce qui prouve l'injectivité de $\tilde{\varphi}$.

On vérifie facilement que $\text{Im } \tilde{\varphi} \subset \ker \tilde{\psi}$. Soit donc $R = \text{Im } \tilde{\varphi}$ et f l'application canonique $(A \otimes B)/R \rightarrow A'' \otimes B$ obtenue en factorisant $\tilde{\psi}$. Nous allons construire une application $g : A'' \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/R$ qui vérifie $g \circ f = id$. Cela montrera que f est injective et donc que $\text{Im } \tilde{\varphi} = \ker \tilde{\psi}$.

Soit $a'' \in A''$. On choisit $a \in A$ tels que $\psi(a) = a''$ et on définit :

$$\begin{aligned} A'' \times B &\rightarrow (A \otimes B)/R \\ a'', b &\mapsto a \otimes b \pmod{R} \end{aligned}$$

Cette application ne dépend pas de la préimage de a'' choisie : si $\psi(a_1) = \psi(a_2) = a''$, alors $\psi(a_1 - a_2) = 0$ donc $a_1 - a_2 = \varphi(a')$ pour un certain $a' \in A'$, d'où $a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = \varphi(a') \otimes b$ et donc $a_1 \otimes b = a_2 \otimes b \pmod{R}$.
 Etant bilinéaire, cette application se factorise en l'application $g : A'' \otimes B \rightarrow (A \otimes B)/R$ recherchée.

□

2 K-théorie des C^* -algèbres

Définition 3. Soit p et q deux projecteurs dans une C^* -algèbre A . On définit trois relations d'équivalences :

$p \sim q$ s'il existe une isométrie partielle u de A telle que $p = u^*u$ et $q = uu^*$. (équivalence de Murray-Von Neumann)

$p \sim_u q$ s'il existe un unitaire u de A^+ tel que $p = uqu^*$. (Similitude)

$p \sim_h q$ s'il existe un chemin continu en norme de projections de p à q . (Homotopie)

En général, on a : $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$. Pour avoir les implications inverses, on peut se placer dans $M_\infty(A)$. (Doublant la dimension à chaque fois suffit) On peut alors considérer l'ensemble des projections de $M_\infty(A)$ et quotienter par l'unique relation d'équivalence définie ci-dessus. L'ensemble obtenu est un semi-groupe pour l'opération de somme directe de projecteur, nommé $V(A)$.

Définition 4. Le premier groupe de K -théorie de A est :
le groupe de Grothendieck de $V(A)$ si A est unitale.
le noyau de $K_0(A^+) \rightarrow K_0(\mathbb{C})$ sinon.

Pour passer aux groupes de K -théorie d'indices supérieurs de A , on se servira du foncteur de suspension $S(A) = A \times C_0(\mathbb{R})$.

Définition 5. Pour toute algèbre de Banach unitale, on pose

$$GL_\infty(A) = \varinjlim GL_n(A) \quad (\text{limite inductive})$$

munie de la topologie de la limite inductive.

Pour $n \geq 1$, on définit :

$$K_n(A) = \pi_{n-1}(GL_\infty(A))$$

où $\pi_n, n \geq 1$ désigne le n^{ie} -groupe d'homotopie, et π_0 le groupe des composantes connexes.

Quelques remarques :

1. Le groupe $K_1(A)$ est donc généré par les classes $[u]$ où u est un unitaire ou un inversible de $GL_n(A)$, avec la présentation $[1] = 0$, $[u] + [v] = [u \oplus v]$ et $[u] = [v]$ si u et v sont reliés par un chemin continu d'unitaires ou d'inversibles.
2. On a en fait la relation suivante

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad K_{i+1}(A) = K_i(S(A)).$$

3. Dans le cas des C^* -algèbres comme en K -théorie topologique, on a périodicité de Bott : $K_{i+2}(A) \simeq K_i(A)$.

Ces foncteurs de la catégorie des C^* -algèbres dans celle des groupes abéliens sont semi-exacts, i.e. ils transforment toute suite exacte courte en suite exacte très courte.

Donnons en exemple quelques calculs de groupes de K -théorie.

Deux projections dans $M_n(\mathbb{C})$ sont équivalentes précisément lorsque elles ont même rang. Ceci assure que $K_0(\mathbb{C}) = G_{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}$, un générateur étant n'importe quel projecteur de rang 1. La K -théorie étant stable par augmentation et limite inductive, on a aussi : $\mathbb{Z} = K_0(M_n(\mathbb{C})) = K_0(\mathbb{K})$ avec même générateur.

$K_1(C(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}$ avec pour générateur la classe de l'unitaire $z \mapsto \bar{z}$.

2.1 La suite exacte à six termes

Théorème 4. Soit $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* -algèbres. Alors la suite à six termes suivantes est exacte :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(B) \\ \partial \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ K_1(B) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(J) \end{array}$$

C'est l'un des résultats fondamentaux en K -théorie, il permet des calculs effectifs. Le premier pas à faire est de construire l'indice associé à toute suite exacte $\partial : K_1(B) \rightarrow K_0(J)$, qui transforme toute suite exacte courte en suite exacte longue. On peut trouver 2 isomorphismes naturels qui donnent la périodicité de Bott :

$$K_{i+1}(A) \simeq K_i(A), i = 0, 1.$$

Ces isomorphismes sont donnés par l'application de Bott $\beta : K_0 \rightarrow K_1S$ et $\theta : K_1 \rightarrow K_0S$. La périodicité permet de conclure en enroulant la suite exacte longue grâce à l'application exponentielle $\delta : K_0(B) \rightarrow K_1(J)$ qui est la composition $\theta_J^{-1} \circ \partial \circ \beta_B$.

Proposition 3 (Remarque sur le nom d'application exponentielle). Soit J un idéal bilatère de la C^* -algèbre A . Si $p - p_n \in M_{\infty}(A/J)$ et $x \in M_{\infty}(A^+)$ est un relevé auto-adjoint de p , alors :

$$\delta([p] - [p_n]) = [\exp(-2i\pi x)].$$

De plus, si toutes les projections de $M_{\infty}(A/J^+)$ peuvent se relever en des projections de $M_{\infty}(A^+)$, alors l'application exponentielle est triviale :

$$\exp(-2i\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n!} = 1 + (e^{-2i\pi} - 1)x = 1$$

car $x = x^2$.

Preuve 4. Rappelons que δ est la composée donnée par :

$$\begin{array}{ccc} K_0(A/J) & \xrightarrow{\delta} & K_1(J) \\ \downarrow \beta_{A/J} & & \downarrow \theta_J \\ K_1(SA/J) & \xrightarrow{\partial} & K_0(SJ) \end{array}$$

Soient $p \in A/J$ et $x \in A$ un élément auto-adjoint tel que $\pi(x) = p$. Comme $e^{2i\pi tp} = 1 + (e^{2i\pi t} - 1)p$, $f_x(t) := 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x$ relève $f_p(t) = e^{2i\pi tp}$.

Notons, dans un premier temps, que tout élément y d'une C^* -algèbre tel que le spectre de y^*y soit inclus dans $[0, 1]$ produit un unitaire $\begin{pmatrix} y & \sqrt{1 - yy^*} \\ -\sqrt{1 - y^*y} & y^* \end{pmatrix}$.

On peut alors affirmer que

$$w_{f_x} := \begin{pmatrix} f_x & \sqrt{1 - f_x f_x^*} \\ -\sqrt{1 - f_x^* f_x} & f_x^* \end{pmatrix}$$

est un relevé unitaire de $\begin{pmatrix} f_p & 0 \\ 0 & f_p^* \end{pmatrix}$, relevé qui nous donne l'indice de $[f_p]_1 = \beta_{A/J}[p]_0$:

$$\partial[f_p]_1 = [w_{f_x} p_n w_{f_x}^*] - [p_n].$$

Soit $g_x(t) := (1 - t)1_{A^+} + te^{2i\pi x}$ un chemin continu entre l'identité et $e^{2i\pi x}$. L'image de $e^{2i\pi x}$ par θ_J se calcule comme l'indice $[w_{g_x} p_n w_{g_x}^*] - [p_n]$. Montrer que f_x et g_x sont homotopes suffit donc à conclure.

Pour cela, remarquons que, t variant de 0 à 1 et le spectre de x étant inclus dans $\{0, 1\}$, les éléments f_x et g_x ne dépendent que des valeurs des fonctions réelles

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x \\ g(t, x) &= 1 - t + te^{2i\pi x} = f(x, t) \end{aligned}$$

au voisinage du bord du carré $\partial[0, 1] \times [0, 1]$, homéomorphe au cercle \mathbb{S}^1 . Les classes d'homotopie de fonctions continues sur le cercle sont classifiées par leur nombre de tours, voir le livre d'Hatcher par exemple [2], et on vérifie que f et g sont ainsi homotopes, et donc que :

$$[w_{f_x} p_n w_{f_x}^*] = [w_{g_x} p_n w_{g_x}^*].$$

L'identité $\partial \circ \beta_B = \theta_J \circ \delta$ est démontrée, ce qui conclut. \square

2.2 Produits croisés de C^* -algèbres

2.2.1 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

Soit A une C^* -algèbre et Γ un groupe discret. On se donne de plus une action par automorphisme $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(A)$. On peut alors munir l'espace $C_c(\Gamma, A)$ des fonctions à support fini d'un produit de convolution tordu par α :

$$f *_{\alpha} g = \sum_{s,t \in \Gamma} f(s) \alpha_s(g(t)) st.$$

Soit $\lambda_{\Gamma,A}$ la représentation régulière gauche de $C_c(\Gamma, A)$ sur $l^2(\Gamma, A) = \{\eta : \Gamma \rightarrow A : \sum_s \eta^*(s) \eta(s) < \infty\}$:

$$(\lambda_{\Gamma,A}(f)\eta)(\gamma) = \sum_{s \in \Gamma} \alpha_{\gamma^{-1}}(f(s)) \eta(\gamma^{-1}s)$$

pour tous $f \in C_c(\Gamma, A), \eta \in l^2(\Gamma, A)$ et $\gamma \in \Gamma$.

Le produit croisé réduit de A par Γ , noté $A \rtimes_{\alpha} \Gamma$, est défini comme la fermeture pour la norme d'opérateur de $\lambda_{\Gamma,A}(C_c(\Gamma, A))$ dans $B(l^2(\Gamma, A))$.

Les actions habituelles de A et de Γ sur $l^2(\Gamma, A)$ sont combinées.

$$(\pi(a)\eta)(s) = \alpha_{s^{-1}}(a)\eta(s)$$

$$(\lambda(\gamma)\eta)(s) = \eta(\gamma^{-1}s)$$

On parle pour la paire (λ, π) de représentation covariante du système $\{A, \Gamma, \alpha\}$, car la relation :

$$\lambda(\gamma)\pi(a)\lambda(\gamma^{-1}) = \pi(\alpha_{\gamma}(a))$$

est vérifiée.

Voici le résultat central de ce rapport. Il a été démontré par Pimsner et Voiculescu en 1980. [3]

Théorème 5 (Pimsner-Voiculescu). Soit A une C^* -algèbre et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Il existe alors une suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{1-\alpha_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xleftarrow{1-\alpha_*} & K_1(A) \end{array}$$

La première chose que l'on peut, et que l'on va, dire à propos des produits croisés est que les générateurs de leurs groupes de K -théorie prennent une forme sympathique, qui va nous permettre de faire des calculs explicites dans la preuve de la suite de Pimsner-Voiculescu.

Lemme 2. Soit B une C^* -algèbre unitale, $1_B \in A$ une sous- C^* -algèbre de B , et u un unitaire de B tels que A et u engendrent B et $uAu^* = A$. Alors $K_1(B)$ est engendré par les inversibles de la forme :

$$1_B \otimes 1_n + x(u^* \otimes 1_n) \quad , n \in \mathbb{N}, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n.$$

De plus, si $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, alors on peut se limiter aux classes d'unitaires de la forme :

$$1_B \otimes 1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F \quad F, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n$$

où F désigne une projection auto-adjointe.

La remarque suivante est importante pour la preuve du lemme 6 : dans le cas $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, les classes concernées sont stables par somme, donc tout élément de $K_1(B)$ est la différence de deux générateurs.

Preuve 5. On note Γ le sous-groupe de $K_1(B)$ engendré par les éléments de la forme $1_B \otimes 1_n + x(u \otimes 1_n)$.

Comme u est unitaire, le spectre de $t(1_B + 2u^*) + (1-t)u^* = t1_B + (1+t)u^*$ ne contient pas 0, et on a donc un chemin continu d'inversibles entre $1_B + 2u^*$ et u^* , d'où :

$$[1_B + 2u^*]_1 = [u^*]_1. \quad (1)$$

Les éléments $\sum_{s \leq j \leq t} a_j(u^j \otimes 1_p)$, $a_j \in A \otimes \mathfrak{M}_p$, $s, t \in \mathbb{Z}$ sont denses dans $B \otimes \mathfrak{M}_p$. Il suffit donc de prouver notre assertion pour ce type d'éléments. Mais, d'après l'équation 1, $[u]_1 \in \Gamma$, donc $s = 0$ suffit.

Soit donc $y = \sum_{0 \leq j \leq t} a_j(u^j \otimes 1_p)$ un inversible. On pose :

$$S_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon I \\ -I & 0 & & 0 & & \\ & -I & & & & \\ & 0 & \dots & & & \\ & & & -I & 0 & \end{pmatrix}, \forall \epsilon > 0$$

la matrice avec des $-I := -1_B \otimes 1_p$ sur la sous-diagonale et un ϵI dans le coin haut-droit, et :

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_t \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & & I & \end{pmatrix}.$$

Si l'on note $u_p = u \otimes 1_p$ et $y_k = \sum_{j=0}^{t-k} a_{j+k}(u^j \otimes 1_p) = y_{k+1}(u \otimes 1_p) + a_k$, on

obtient l'identité :

$$\begin{aligned}
S_0(u \otimes 1_n) + T &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_t \\ -u_p & I & & 0 & & \\ & -u_p & I & & & \\ & 0 & & \dots & & \\ & & & -u_p & I & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_t \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ 0 & & & \dots & & \\ & & & & I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & I & & 0 & & \\ & & I & & & \\ 0 & & & \dots & & \\ & & & & I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \cdot & \cdot & & \\ -u_p & I & 0 & & & \\ & -u_p & & & & \\ 0 & & & \dots & & \\ & & & & -u_p & I \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les matrices de droite et de gauche de la dernière ligne sont unipotentes, leur classe dans $K_1(B)$ est donc nulle. Mais la classe de l'élément central est celle de y . Ajoutons à cela l'invariance de K_1 par homotopie, nous pouvons alors écrire, pour ϵ assez petit :

$$\begin{aligned}
[y]_1 &= [S_\epsilon(u \otimes 1_n) + T]_1 \\
&= [u \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1}T]_1 \quad \text{car } [S_\epsilon]_1 = 0 \\
&= [u \otimes 1_n]_1 + [1_B \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1}T(u^* \otimes 1_n)]_1 \\
&= n[u]_1 + [1_B \otimes 1_n + S_\epsilon^{-1}T(u^* \otimes 1_n)]_1
\end{aligned}$$

et la première partie du lemme est démontrée.

2.2.2 Extension de Toeplitz

Soient A et C deux C^* -algèbres.

Par extension de A par C , on entend un triplet (B, α, β) d'une C^* -algèbre et de deux morphismes telle que la suite :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Cette section présente la construction d'une extension de $A \otimes \mathbb{K}$ par $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ qui sera utile dans la preuve de l'exactitude de la suite de PV : l'extension de Toeplitz. Dans tout le document \mathcal{H} dénote un espace de Hilbert, l_2 par exemple, dont on fixe une base hilbertienne (e_n) , et \mathbb{B} et \mathbb{K} sont respectivement l'algèbre des opérateurs bornés et compacts sur \mathcal{H} . \mathbb{K} est un idéal bilatère et :

$$\pi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/\mathbb{K}$$

est la projection naturelle sur l'algèbre de Calkin.

$H^2(\mathbb{S}^1)$ désigne le sous-espace hilbertien de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$ pour $n \geq 0$. Lorsque l'on prendra $H^2(\mathbb{S}^1)$ pour \mathcal{H} , e_n dénotera ces fonctions. Pour $f \in C(\mathbb{S}^1)$, on désigne par T_f l'opérateur de $H^2(\mathbb{S}^1)$, appelé opérateur de Toeplitz associé à f , défini par $T_f(g) = \mathcal{P}(fg)$, où \mathcal{P} est le projecteur orthogonal sur $H^2(\mathbb{S}^1)$. On appelle f le symbole de T_f .

Soit $S \in \mathbb{B}$ l'opérateur de shift unilatéral, qui envoie e_n sur e_{n+1} . On note $C^*(S)$ la C^* -algèbre unitale engendrée par S . On voit que S^* envoie e_1 sur 0 et e_n sur e_{n-1} lorsque $n \geq 2$. Si on note $E_{ij}(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$, on a :

$$E_{ij} = S^{i-1} S^{*j-1} - S^i S^{*j} \in C^*(S)$$

\mathbb{K} est donc un idéal bilatère de $C^*(S)$ et $P = 1 - SS^* = E_{11}$ est de rang 1 donc compact.

Lemme 3. L'application

$$\tau \begin{cases} C(\mathbb{S}^1) & \rightarrow B(H^2(\mathbb{S}^1))/K(H^2(\mathbb{S}^1)) \\ f & \mapsto \pi(T_f) \end{cases}$$

est un $*$ -homomorphisme injectif.

Preuve 6. Si l'on confond $f \in C(\mathbb{S}^1)$ avec l'opérateur de multiplication associé dans $L^2(\mathbb{S}^1)$, alors $f\mathcal{P} - \mathcal{P}f$ est un opérateur compact. En effet, si $f(z) = z$, on a un opérateur de rang 1, et cette fonction génère $C(\mathbb{S}^1)$ par théorème de Stone-Weierstrass.

Ceci permet d'écrire la relation suivante :

$$T_f T_g = \mathcal{P} f \mathcal{P} g = \mathcal{P}(\mathcal{P} f + \text{compact})g = \mathcal{P} f g + \text{compact}$$

Donc $T_f T_g = T_{fg} \bmod \mathbb{K}$, et comme $T_f^* = T_{\bar{f}}$, τ est bien un $*$ -homomorphisme.

Pour l'injectivité, observons le noyau de τ . C'est un idéal bilatère de $C(\mathbb{S}^1)$, il existe donc un ouvert $X \subset \mathbb{S}^1$ tel que :

$$\ker \tau = \{f \in C(\mathbb{S}^1) : f(z) = 0, \forall z \in X\}$$

Mais si $f \in \ker \tau$, alors $z \mapsto f(e^{i\theta} z)$ est aussi dans le noyau pour tout θ , ce qui assure que $X = \mathbb{S}^1$ ou \emptyset . Mais comme T_z n'est pas compact, $X = \mathbb{S}^1$ et l'injectivité est démontrée. \square

Comme $C(\mathbb{S}^1)$ est généré par z , qui s'envoie sur S par T , l'image de T est $C^*(S)$. La remarque précédente permet d'affirmer que $C^*(S)/\mathbb{K}$ est $*$ -isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur le tore $C(\mathbb{S}^1)$, et l'image de S est la

fonction identité sur \mathbb{S}^1 , noté z . On a donc une extension, écrite sous la forme d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow C^*(S) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Définition 6. On définit l'algèbre de Toeplitz \mathcal{T} associée à la paire (A, α) comme la C^* -sous-algèbre de $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ engendré par $A \otimes I$ et $u \otimes S$.

Rappelons que l'on voit A comme une sous- $*$ -algèbre de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, et que l'on note u l'unitaire qui rend intérieure l'action de α :

$$\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(n)a = u^{*n}au^n$$

Observons maintenant $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, dont on va montrer qu'elle se réalise comme un quotient de \mathcal{T} par un idéal bilatère fermé. Soit donc J l'idéal bilatère fermé engendré par la projection $1 \otimes P$. La première chose à remarquer, c'est que l'on a un $*$ -morphisme :

$$\phi \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathcal{T} \\ e_{ij} & \rightarrow S^i P S^{*j} \end{cases} .$$

Il est ici défini sur le système d'unités de \mathbb{K} ,

$$e_{ij}(x) = \langle x, e_i \rangle e_j$$

ce qui permet facilement de l'étendre à \mathbb{K} entier.

L'identité suivante permet d'étendre ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$:

$$(u \otimes S)^i (a \otimes P) (u \otimes S)^{*j} = (u^i a u^{*j}) \otimes \phi(e_{ij})$$

définit l'extension ψ de ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$. Alors $\psi(A \otimes \mathbb{K}) = J \subset \mathcal{T}$.

Pimsner et Voiculescu montrent [3] que :

$$\text{im } \psi = (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T} \quad (2)$$

En effet, soit $y \in (A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}$. Comme y est dans $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes \phi(\mathbb{K})$,

$$J \ni (1 \otimes E_n)y(1 \otimes E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$$

où $E_n = 1 \otimes \phi(e_{00} + e_{11} + \dots + e_{nn}) = \psi(1 \otimes (e_{00} + e_{11} + \dots + e_{nn})) \in J$ (on utilise une unité approchée de \mathbb{K}). J étant un idéal fermé, on en déduit que $y \in J$. L'inclusion inverse est directe.

Les C^* -algèbres \mathbb{K} , $C^*(S)$ et $C(\mathbb{S}^1)$ sont nucléaires car commutative pour $C(\mathbb{S}^1)$ ou limite inductive de C^* -algèbres finie-dimensionnelles pour \mathbb{K} . Ceci assure qu'il n'y a qu'une seule norme de C^* -algèbre sur leur produit tensoriel avec $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

De plus, avec le théorème *T.2.6.26* de l'appendice T du livre de Wegge-Olsen [7], on a, sans ambiguïté, une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K} \longrightarrow (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C^*(S) \longrightarrow (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

Une autre méthode pour l'obtenir est d'utiliser la proposition 2. En effet, $f \mapsto T_f$ est une section complètement positive de la première suite exacte :

$$\sum_{i,j} b_i T_{f_i f_j^*} b_j^* = \left(\sum_i b_i T_{f_i} \right) \left(\sum_i b_i T_{f_i} \right)^*.$$

Cette suite exacte et l'identité 2 permet d'identifier \mathcal{T}/J à la C^* -algèbre engendrée par $A \otimes 1$ et $u \otimes z$ où z est l'inclusion $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Cette dernière étant $*$ -isomorphe à $A \times_{\alpha} \mathbb{Z}$, on en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} (A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

C'est l'extension de Toeplitz associée à (A, α) .

2.3 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

2.3.1 La preuve originale

Maintenant que le décor est planté, nous pouvons passer à la K -théorie. On pose :

$$d : \begin{cases} A & \rightarrow \mathcal{T} \\ a & \mapsto a \otimes I \end{cases}$$

Nous allons d'abord démontré le :

Lemme 4. Les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_i(A \otimes K) & \xrightarrow{\psi_*} & K_i(\mathcal{T}) \\ \simeq \uparrow & & \uparrow d_* \\ K_i(A) & \xrightarrow{(id_A)_* - \alpha(-1)_*} & K_i(A) \end{array}$$

sont commutatifs pour $i \in \{0, 1\}$, et $d_* : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{T})$ est injectif.

Preuve 7. L'isomorphisme $K_1(A) \rightarrow K_1(A \otimes \mathbb{K})$ associe à une classe $[v] \in K_1(A)$ l'élément $[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})]$, dont l'image par ψ_* est :

$$\psi_*[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})] = [v \otimes P] + [1 \otimes I - 1 \otimes P] = [v \otimes P] + [1 \otimes SS^*] \quad (3)$$

Maintenant :

$$d_* \circ (id_A - \alpha(-1))_* [v] = [v \otimes I] - [u^*vu \otimes I] \quad (4)$$

Soit l'unitaire :

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \otimes M_2$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & Q(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)Q^* & 1 \otimes I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mais la classe dans K_1 est invariante par augmentation, i.e. $[x] = \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, et par conjugaison par un unitaire, donc :

$$\left[\Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* \right] = [u^*vu \otimes I]$$

En remplaçant dans (4), on obtient :

$$\begin{aligned} [v \otimes I] - [v \otimes SS^* + Q] &= [(v \otimes I)(v \otimes SS^* + Q)^{-1}] \\ &= [v^* \otimes SS^* + Q] \\ &= [1 \otimes SS^* + v \otimes P] \end{aligned}$$

qui est l'expression que l'on avait trouvé pour l'image de $[v]$ par ψ_* dans (3). La commutativité du diagramme $i = 0$ suit la même preuve : il suffit de remarquer que si l'on prend une projection auto-adjointe $q \in A$, alors dans $K_0(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned} [(\alpha(-1)q) \otimes I] &= \left[\Omega \begin{pmatrix} (\alpha(-1)q) \otimes I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega^* \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} q \otimes SS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= [q \otimes SS^*]. \end{aligned}$$

Ceci assure que :

$$d_* \circ ((id_A)_* - \alpha(-1)_*) [q \otimes e_{00}] = [q \otimes I] - [(\alpha(-1)q) \otimes I] = [q \otimes P] = \psi_* [q \otimes e_{00}].$$

Les diagrammes commutent bien, il reste à montrer l'injectivité de d_* .

Pour cela, montrons que si v_0 et v_1 sont des unitaires de A , et $t \mapsto w_t$ un chemin continu dans les unitaires de \mathcal{T} d'origine $v_0 \otimes I$ et d'arrivée $v_1 \otimes I$, alors $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$.

Calculons :

$$\begin{pmatrix} w_t & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(-1)w_t^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* = \begin{pmatrix} w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}.$$

Le chemin unitaire $y_t = w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q \in \mathcal{T}$ vérifie :

$$\forall t, \quad y_t \in 1 \otimes I + J.$$

En effet :

$$y_t - 1 \otimes I = (w_t - 1 \otimes I)Q + w_t((1 \otimes S)w_t^* - w_t^*(1 \otimes S))(1 \otimes S^*),$$

mais un élément de la forme $(1 \otimes S)w - w(1 \otimes S)$ est toujours dans $B \otimes \phi(\mathbb{K})$, si $w \in \mathcal{T}$. Si w est dans $A \otimes I$ ou vaut $u \otimes S$, on obtient 0, et si $w = u^* \otimes S^*$, le commutateur vaut $u^* \otimes P \in B \otimes \phi(\mathbb{K})$. Ces éléments génèrent un algèbre dense dans \mathcal{T} : l'assertion en découle.

On a donc un chemin continu d'unitaires de $1 \otimes SS^* + v_0 \otimes P$ à $1 \otimes SS^* + v_1 \otimes P$, qui reste dans $1 \otimes I + J$. Comme ψ établit un isomorphisme de $\mathbb{C}1 \otimes I + J$ sur $A \otimes \mathbb{K}$, on a donc, dans $K_1(A \otimes \mathbb{K})$:

$$[\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_0 \otimes e_{00}] = [\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_1 \otimes e_{00}]$$

donc : $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$, et l'injectivité de d_* est démontrée. \square

En passant l'extension de Toeplitz en K -théorie, et en combinant avec le lemme 4, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} K_1(A \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{\psi_*} & K_1(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_1(A \times_{\alpha} \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & K_0(A \otimes \mathbb{K}) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow d_* & \nearrow \iota_* & & & \\ K_1(A) & \xrightarrow{(id_A - \alpha(-1))_*} & K_1(A) & & & & \end{array}$$

dont la première ligne est exacte, et le carré commute.

Lemme 5. $d_* : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Preuve 8. Montrons que $\text{Ker } \delta \subset \text{Im } \iota_*$. Cela suffit puisque si d_* n'est pas surjectif, il existe un élément $x \in K_1(\mathcal{T}) \setminus \text{Im } d_*$, dont l'image par π_* n'est pas dans l'image de ι_* . Pourtant : $\delta \circ \pi_*(z) = 0$.

Nous allons montrer que tout élément de $\text{Ker } \delta$ s'écrit :

$$w = [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(u^* \otimes 1_n) F_1]_1 - [1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2(u^* \otimes 1_n) F_2]_1$$

pour certains x_1, x_2, F_1 et F_2 dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$ tels que F_i soient des projections auto-adjointes unitairement équivalentes : il existe un unitaire $v \in A \otimes \mathfrak{M}_n$ les

entrelaçant $F_1 = vF_2v^*$.

Montrons que cela conclut. Dans $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} [1 \otimes 1_n - F_2 + F_2x_2(u^* \otimes 1_n)F_2]_1 &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1vx_2(u^* \otimes 1_n)v^*F_1]_1 \\ &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1y(u^* \otimes 1_n)F_1]_1 \end{aligned}$$

où $y = vx_2(\alpha(-1) \otimes id_n)v^* \in A \otimes \mathfrak{M}_n$. Alors :

$$\begin{aligned} w &= [(1 \otimes 1_n - F_1 + F_1x_1(u^* \otimes 1_n)F_1)(1 \otimes 1_n - F_1 + F_1y(u^* \otimes 1_n)F_1)^*]_1 \\ &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1x_1(\alpha(-1) \otimes id_n)F_1y^*F_1]_1 \end{aligned}$$

L'élément entre crochets est dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$, ce qui veut dire que sa classe w est dans l'image de $\iota_* : \text{Ker } \delta \subset \text{Im } \iota_*$ est démontré.

Montrons maintenant la remarque. Le lemme 2 nous permet d'affirmer que tout élément de $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$ s'écrit comme une différence de générateurs unitaires de la forme $[1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1$. Si $n = 1$, un tel élément a un relevé $w = (1 - F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^* \in \mathcal{T}$. Mais alors :

$$\begin{aligned} ww^* &= (1 - F) \otimes I + Fxu^*Fu^*x^*F \otimes S^*S \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes I \\ &= 1 \otimes I \\ w^*w &= (1 - F) \otimes I + Fux^*Fu^*x^*F \otimes SS^* \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes (I - P) \\ &= 1 \otimes I - F \otimes P \end{aligned}$$

L'index est donc facilement calculable :

$$\begin{aligned} \delta[1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1 &= [1 \otimes I - w^*w]_0 - [1 \otimes I - ww^*]_0 \\ &= [F \otimes P]_0 \\ &= [F \otimes e_{00}]_0 \end{aligned}$$

Ce calcul assure que

$$\begin{aligned} [1_n - F_1 + F_1x_1(u^* \otimes 1_n)F_1]_1 - [1_m - F_2 + F_2x_2(u^* \otimes 1_m)F_2]_1 &\in \text{Ker } \delta \\ \text{ssi } [F_1]_0 &= [F_2]_0 \quad \text{dans } K_0(A). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer F_i et x_i par $0_p \oplus F_i$ et $I_p \oplus x_i$, on peut supposer $m = n$. De même, quitte à remplacer F_i et x_i par $F_i \oplus 1 \otimes 1_p$ et $x_i \oplus 1 \otimes 1_{n+p}$, on peut supposer que F_1 et F_2 sont unitairement équivalentes. □

On a donc montré que d_* induisait un isomorphisme en K_1 -théorie. On obtient donc une suite exacte à 6 termes à partir de l'extension de Toeplitz, dont on voudrait déduire le théorème, ce que l'on peut faire à condition de montrer que d_* induit un isomorphisme au niveau des K_0 -groupes.

Lemme 6. $d_* : K_0(A) \rightarrow K_0(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Preuve 9. La suite exacte $0 \rightarrow SA \rightarrow C(A \otimes \mathbb{S}^1) \rightarrow A \rightarrow 0$ est scindée, et induit, modulo la périodicité de Bott, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \rightarrow & K_0(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) & \rightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(A) & \leftarrow & K_1(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) & \leftarrow & K_1(A) \end{array} .$$

Mais, la suite étant scindée, tout élément de $K_i(A)$ se relève, et les flèches connectantes, qui mesurent l'obstruction à être relevé, sont donc nulles : on obtient deux suites exactes scindées :

$$0 \rightarrow K_{1-i}(A) \rightarrow K_i(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) \rightarrow K_i(A) \rightarrow 0$$

et donc $K_i(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A)$.

Si on note $\phi^A : SA \oplus A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{S}^1)$ l'isomorphisme obtenu à partir des suites exactes scindées, alors :

$$(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_* \circ \phi_*^A = \phi_*^{\mathcal{T}} \circ d_*. \quad (5)$$

Le lemme 6 appliqué à $id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d : A \otimes C(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$, et le fait que $\mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1)) = \mathcal{T}(A) \otimes C(\mathbb{S}^1)$, assurent que $(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_*$ établit un isomorphisme de $K_1(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$ sur $K_1(\mathcal{T} \otimes C(\mathbb{S}^1))$, ce qui, avec la remarque (5) conclut. □

Le théorème 5 découle directement des lemmes précédents : on passe l'extension de Toeplitz en K -théorie et on se sert de la stabilité $K_i(A \otimes \mathbb{K}) \simeq K_i(A)$ et de l'isomorphisme $K_i(A) \simeq K_i(\mathcal{T})$.

2.3.2 Un exemple : le tore non-commutatif

Si on se fixe un automorphisme $\alpha \in \text{Aut}(A)$, on peut construire le produit croisé $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ comme la C^* -algèbre universelle engendrée par A et un unitaire u vérifiant :

$$\forall a \in A, uau^* = \alpha(a).$$

Pour la construire effectivement, considérons $A[u]$. La relation de commutation nous donne le produit suivant :

$$au^n bu^m = a\alpha^n(b)u^{n+m} \quad \forall a, b \in A, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

Avec $A = C(\mathbb{S}^1)$ et α l'automorphisme induit par $z \mapsto e^{2i\pi\theta z}$, on obtient le tore non-commutatif A_θ . Le chemin $\phi_t : z \mapsto e^{2it\pi\theta z}$ montre que α est homotope à l'identité et la suite exacte de Pimsner-Voiculescu se transforme alors en :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{0} & K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A_\theta) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A_\theta) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{0} & K_1(C(\mathbb{S}^1)). \end{array}$$

Mais $K_i(C(\mathbb{S}^1)) = K_i(SC \oplus \mathbb{C}) = K_{1-i}(\mathbb{C}) \oplus K_i(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, d'où : $K_i(A_\theta) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $i = 0, 1$. Nous avons donc calculé les groupes de K -théorie du tore non-commutatif, mais nous allons dire plus. On peut en effet calculer les générateurs de ces groupes.

Définition 7. Un projecteur de Rieffel de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ est un idempotent autoadjoint de la forme $x_0 + x_1 u + u^* x_1^*$, où $x_0, x_1 \in A$.

Un projecteur de Rieffel étant autoadjoint, nous pouvons immédiatement en déduire que x_0 aussi. L'idempotence conduit elle au trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} - x_0 &= x_0^2 + \alpha^{-1}(x_1^* x_1) + x_1 x_1^* \\ - x_1 &= x_0 x_1 + x_1 \alpha(x_0) \\ - 0 &= \alpha^{-1}(x_1) x_1. \end{aligned}$$

Rappelons que l'algèbre de Von Neumann enveloppante d'une C^* -algèbre A est définie par le bicommutant dans $\mathcal{L}(H_u)$ de $\pi_u(A)$, où $\pi_u : A \rightarrow \mathcal{L}(H_u)$ est la représentation universelle de A , c'est-à-dire la somme hilbertienne de toutes les représentations irréductibles de A .

Définition 8. Soit $x \in A$ un élément d'une C^* -algèbre.

Le support à gauche de x est défini comme le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}(H_u)$ sur la fermeture de l'image de $\pi_u(x)$. On le note l_x .

Le support à droite de x est défini comme le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}(H_u)$ sur l'orthogonal du noyau de $\pi_u(x)$. On le note r_x .

Ces deux projecteurs vérifient : $l_x x = x = x r_x, \forall x \in A$ et si x est autoadjoint, alors ils sont égaux.

Proposition 4. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel et $\Delta := l_{x_1}$ le support à gauche de x_1 . Alors l'unitaire $\exp(2i\pi x_0 \Delta)$ est dans A et :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

Preuve 10. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel. Montrons par récurrence que le relevé autoadjoint $a = u^* x_1 \otimes S^* + x_0 \otimes I + x_1 u \otimes S \in \mathcal{T}$ de p vérifie :

$$\forall n \geq 1, \quad a^n = a + (x_0^n - x_0) \Delta \otimes P.$$

Si c'est vrai au rang n ,

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^2 + a(x_0^n - x_0) \Delta \otimes P \\ &= a + a(x_0^2 - x_0) \Delta \otimes P + x_0(x_0^n - x_0) \Delta \otimes P + x_1 u(x_0^n - x_0) \Delta \otimes SP \\ &= a + (x_0^{n+1} - x_0) \Delta \otimes P + u(\alpha(-1)x_1)(x_0^n - x_0) \Delta \otimes SP \end{aligned}$$

Le dernier terme étant nul ($SP = 0$), le principe de récurrence conclut.

Ayant exhibé un relevé autoadjoint de p , on est en mesure de calculer son indice. Mais :

$$\begin{aligned} \exp(2i\pi a) &= 1 \otimes I + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (a + (x_0^n - x_0) \Delta \otimes P) \\ &= (e^{2i\pi} - 1)(a - x_0 \Delta \otimes P) + \exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes P + 1 \otimes (I - P) \\ &= \psi(\exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})). \end{aligned}$$

Il vient :

$$\partial[p]_0 = [\exp(2i\pi a)]_1 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})]_1$$

Le $*$ -homomorphisme δ étant la composition du connectant $\partial : K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A \times \mathbb{K})$ avec l'isomorphisme $K_1(A \times \mathbb{K}) \simeq K_1(A)$, on en déduit :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

□

Ce résultat met à notre disposition une autre méthode de calcul de l'image par l'application exponentielle d'un projecteur dans le cas des projecteur de Rieffel. Il est à rapprocher de la proposition 3 : Pimsner et Voiculescu [3] décrivent de manière effective l'application exponentielle dans le cas d'un produit croisé $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Nous avons vu que la suite exacte à 6 termes donnait deux suites exactes courtes, dont :

$$0 \longrightarrow K_0(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow K_0(A_\theta) \xrightarrow{\delta} K_1(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow 0 \quad \text{On sait que les groupes à gauche et à droite sont tous les deux } \mathbb{Z}, \text{ l'un étant généré par la classe}$$

de la projection $1 \in C(\mathbb{S}^1)$, l'autre par la classe de l'unitaire $v = id_{\mathbb{S}^1} \in C(\mathbb{S}^1)$. Si l'on trouve un projecteur p tel que $\delta[p]_0 = [v]_1$, on peut dire que $K_0(A_\theta)$ est engendré par $[1]_0$ et $[p]_0$.

On note φ la fonction définie par $\alpha(f)(z) = f(e^{2i\pi\theta}z) = f \circ \varphi(z)$. Soit $0 < \delta < \theta$. Soit f la fonction de \mathbb{R} , affine par morceaux et 1 périodique, qui vaut 1 si t est dans $[\delta, \theta]$, 0 si $t \in [\theta + \delta, 1]$ et est nulle en 0. On pose :

$$\begin{cases} x_0 &= e^{2i\pi f} \\ x_1 &= \sqrt{x_0(1-x_0)} \end{cases}$$

On vérifie par un simple calcul que $p_\theta = x_0 + x_1u + u^*x_1^*$ définit un projecteur de Rieffel.

Références

- [1] Alexandre Grothendieck. Produits tensoriels d'espace topologiques et espaces nucléaires. *Séminaire N. Bourbaki*, 69 :193–200, 1951-1954.
- [2] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [3] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for k -groups and ext-groups of certain cross-products of c^* -algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.
- [4] Gerard J. Murphy. *C^* -algebras and operator theory*. Academic Press Inc., 1990.
- [5] Alain Connes Paul Baum. Geometric k -theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.
- [6] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and k -theory of group c^* -algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.
- [7] N.E. Wegge-Olsen. *K -theory and C^* -algebras, a friendly approach*. Oxford University Press, 1993.