Propagation en K-théorie

Clément Dell'Aiera

Université de Lorraine

19 octobre 2015

On rappelle qu'un opérateur compact est un opérateur limite d'opérateurs de rang fini.
Un opérateur T est dit de Fredholm s'il est inversible modulo les opérateurs compacts. Son noyau et son conoyau sont alors fini-dimentsionnels et on peut définir son indice :

$$Ind\ \ T = \dim KerT - \dim KerT^*$$

Soit M une variété différentielle, et d la différentielle extérieure définie sur le complexe de De Rham des formes extérieures

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} .. \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

Une métrique riemannienne g sur M induit une mesure μ sur M et un produit scalaire $(,)$ sur le cotangent T^*M que l'on peut étendre aux formes :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha(x), \beta(x))\mu(dx)$$

On complète $\Omega_c^j(M)$par rapport à $\langle\rangle$ pour obtenir un complexe d'espaces de Hilbert $\Omega_{L^2}^*(M)$

$$\Omega_{L^2}^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_{L^2}^1(M) \xrightarrow{d} .. \xrightarrow{d} \Omega_{L^2}^n(M)$$

C'est le complexe des formes de carré intégrable. L'opérateur d est cette fois un **opérateur non borné**, soit d^* son adjoint.

$D = d + d^*$ est ce que l'on appelle un opérateur de Dirac généralisé. C'est un opérateur non-borné auto-adjoint, on peut donc donner un sens à une expression $f(D)$ par calcul fonctionnel, pour toute f borélienne bornée.

Théorème (Régularité elliptique)

Si $\phi \in C_0(\mathbb{R})$, alors $\phi(D)$ est un opérateur compact.

Si $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, bornée et impaire telle que $\chi(t) \to_{+\infty} 1$, alors

- $\chi(D)$ est un opérateur de Fredholm,
- $\chi_1(D) - \chi_2(D)$ est compact.

On peut donc calculer l'indice de $\chi(D)$!

Il vaut 0 !

$\chi(D)$ est autoadjoint... Mais on peut séparer les formes de degré pair et impair pour obtenir une graduation

$$\Omega_{L^2}(M) = \Omega^{even}(M) \bigoplus \Omega^{odd}(M),$$

et D est un opérateur impair par rapport à cette décomposition :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi(D_+)$ est de Fredholm, et on définit

$$Ind(D, \epsilon) = Ind\chi(D_+)$$

Cet indice est non nul en général, et ne dépend pas de χ.

($\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est l'opérateur de graduation.)

Les théorèmes de l'indice donnent une formule pour l'indice d'un opérateur de Dirac généralisé en fonction de données topologiques.
Indice $=$ évaluation d'une classe caractéristique contre la classe fondamentale de la variété

$$\mathit{Ind}\ (D, \epsilon) = \langle \mathcal{I}_D, [M] \rangle$$

On suppose que la dimension n de M est paire, et comme auparavant

$$\Omega_{L^2}(M) = \Omega^{even}(M) \oplus \Omega^{odd}(M), \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = d + d^*$$

Théorème (Gauss-Bonnet)

$$Ind\ (D, \epsilon) = \begin{cases} \chi(M) & \text{caractéristique d'Euler} \\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M Pf(R) & \end{cases}$$

L'opérateur de Hodge $\star : \Omega^k_{L^2}(M) \to \Omega^{n-k}_{L^2}(M)$ implémente une autre graduation, et

$$Ind\ (D, \star) = \begin{cases} sg(M) & \text{signature de la variété} \\ \langle \mathcal{L}_M, [M] \rangle \end{cases}$$

Si M admet une structure Spin,

$$\not{D} = \sum c(X_j)\nabla_{X_j}$$

alors

$$Ind\ \not{D} = \langle \mathcal{A}, [M] \rangle$$

BUT : Etendre ces techniques au cas non-compact.
Problème : $\phi(D)$ n'est plus un opérateur compact.
Piste : Utiliser la preuve des théorèmes de l'indices utilisant le noyau de la chaleur.

Proposition (Formule de Lin ? ?)

$$\not{D}^2 = \nabla\nabla^* + \frac{1}{4}Sc$$

$$Ind\ \not{D} = Tr(\epsilon e^{-t\not{D}^2})$$

Lorsque $t \to 0$, cette formule devient locale en t et le terme dominant est l'inégrale sur M d'une forme $\mathcal{I}(x)dx$ que l'on peut determiner explicitement, sa classe de cohomolgie donne $\mathcal{I}_D$.
Idée : Le semi-groupe de la chaleur construit une homotopie entre l'invariant local $\mathcal{I}_D$ et l'invariant global $Ind\ \not{D}$.

Definition

Une C^*-algèbre est une sous-algèbre $A \subset \mathcal{L}(H)$ fermée pour la norme d'opérateur et stable par adjonction.

Exemples :

- $C_0(X)$ pour un espace localement compact X.
- l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{L}(H)$, des opérateurs compacts $\mathfrak{K}(H)$.