

Introduction à la K-théorie des C^* -algèbres

Clément Dell'Aiera

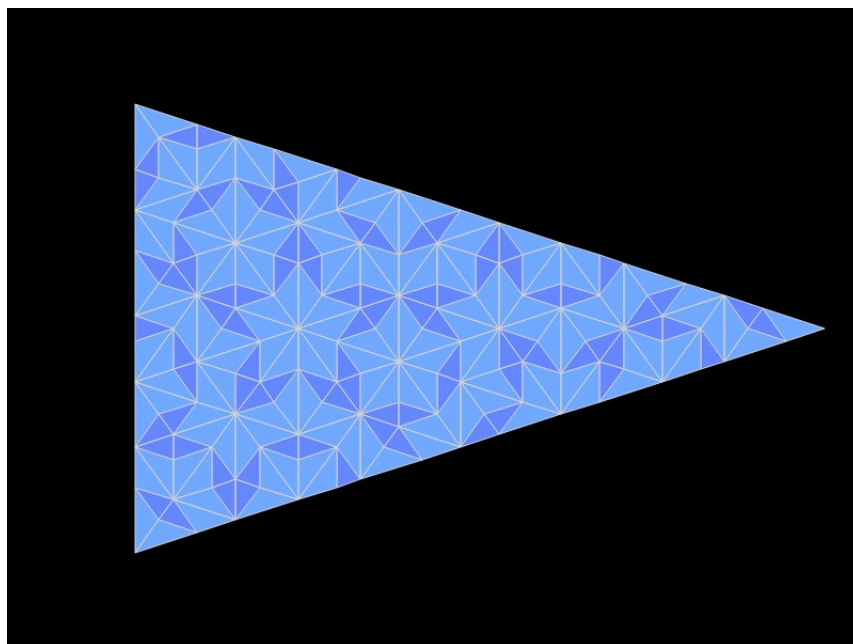


FIGURE 1 – Pavage de Penrose généré avec <http://www.spacegoo.com/penrose/>

Table des matières

1	K-théorie des C^*-algèbres	3
1.1	La suite exacte à six termes	3
1.2	Produits croisés de C^* -algèbres	5
1.2.1	Théorèmes généraux	5
1.2.2	Extension de Toeplitz	7
1.3	Suite exacte de Pimsner-Voiculescu	9
1.3.1	La preuve originale	9
1.3.2	Un exemple : le tore non-commutatif	13
2	Annexes	15
2.1	Produits tensoriels de C^* -algèbres	15

Notations

Pour une C^* -algèbre A non nécessairement unitale, on note A^+ la C^* -algèbre unitale qui la contient en tant qu'idéal bilatère, définie par :

$$A = \{(a, \lambda) \in A \times \mathbb{C}\}$$
$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

1 K-théorie des C^* -algèbres

Différentes définitions du foncteur K_0 :

- groupe de Grothendieck associé au semi-groupe des classes d'équivalences de projections dans $M_\infty(A)$ muni de la somme directe.
- groupe de Grothendieck associé par les sous-modules projectifs fermés de type fini de \mathcal{H}_A

Définition 1. Soit p et q deux projections dans une C^* -algèbre A .

$p \sim q$ s'il existe une isométrie partielle u de A telle que $p = u^*u$ et $q = uu^*$. (équivalence de Murray-Von Neumann)

$p \sim_u q$ s'il existe un unitaire u de A^+ tel que $p = uqu^*$. (Similitude)

$p \sim_h q$ s'il existe un chemin continu en norme de projections de p à q . (Homotopie)

En général, on a : $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$. Pour avoir les implications inverses, on peut se placer dans $M_\infty(A)$. (Doublé la dimension à chaque fois suffit) On peut alors considérer l'ensemble des projections de $M_\infty(A)$ et quotienter par l'unique relation d'équivalence définie ci-dessus. L'ensemble obtenu est un semi-groupe pour l'opération de somme directe de projecteur, nommé $V(A)$.

Définition 2. Le premier groupe de K -théorie de A est :

le groupe de Grothendieck de $V(A)$ si A est unitale.

le noyau de $K_0(A^+) \rightarrow K_0(\mathbb{C})$ sinon.

Pour passer aux groupes de K -théorie d'indices supérieurs de A , on se servira du foncteur de suspension $S(A) = A \times C_0(\mathbb{R})$.

Définition 3. Les groupes de K -théorie d'ordre supérieurs de A sont définis par suspension :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad K_i(A) = K_0(S(A)).$$

Ces foncteurs de la catégorie des C^* -algèbres dans celle des groupes abéliens sont semi-exacts, i.e. ils transforment toute suite exacte courte en suite exacte très courte.

1.1 La suite exacte à six termes

Théorème 1. Soit $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* -algèbres.

Alors la suite à six termes suivantes est exacte :

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(B) \\
\uparrow \partial & & & & \downarrow \delta \\
K_1(B) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(J)
\end{array}$$

C'est l'un des résultats fondamentaux en K -théorie, il permet des calculs effectifs. Le premier pas à faire est de construire l'indice associé à toute suite exacte $\partial : K_1(B) \rightarrow K_0(J)$, qui transforme toute suite exacte courte en suite exacte longue. On peut trouver 2 isomorphismes naturels qui donnent la périodicité de Bott :

$$K_{i+1}(A) \simeq K_i(A), i = 0, 1.$$

Ces isomorphismes sont donnés par l'application de Bott $\beta : K_0 \rightarrow K_1 S$ et $\theta : K_1 \rightarrow K_0 S$. La périodicité permet de conclure en enroulant la suite exacte longue grâce à l'application exponentielle $\delta : K_0(B) \rightarrow K_1(J)$ qui est la composition $\theta_J^{-1} \circ \partial \circ \beta_B$.

Remarque sur le nom d'application exponentielle. Soit J un idéal bilatère de la C^* -algèbre A . Si $p - p_n \in M_\infty(A/J)$ et $x \in M_\infty(A^+)$ est un relevé auto-adjoint de p , alors :

$$\delta([p] - [p_n]) = [\exp(-2i\pi x)].$$

De plus, si toutes les projections de $M_\infty(A/J^+)$ peuvent se relever en des projections de $M_\infty(A^+)$, alors l'application exponentielle est triviale :

$$\exp(-2i\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x)^n}{n!} = 1 + (e^{-2i\pi} - 1)x = 1$$

car $x = x^2$.

Preuve 1. Rappelons que δ est la composée donnée par :

$$\begin{array}{ccc}
K_0(A/J) & \xrightarrow{\delta} & K_1(J) \\
\downarrow \beta_{A/J} & & \downarrow \theta_J \\
K_1(SA/J) & \xrightarrow{\partial} & K_0(SJ)
\end{array}$$

Soient $p \in A/J$ et $x \in A$ un élément auto-adjoint tel que $\pi(x) = p$. Comme $e^{2i\pi tp} = 1 + (e^{2i\pi t} - 1)p$, $f_x(t) := 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x$ relève $f_p(t) = e^{2i\pi tp}$.

Notons, dans un premier temps, que tout élément y d'une C^* -algèbre tel que le spectre de y^*y soit inclus dans $[0; 1]$ produit un unitaire $\begin{pmatrix} y & \sqrt{1 - yy^*} \\ -\sqrt{1 - y^*y} & y^* \end{pmatrix}$.

On peut alors affirmer que

$$w_{f_x} := \begin{pmatrix} \frac{f_x}{-\sqrt{1-f_x^*f_x}} & \sqrt{1-f_xf_x^*} \\ 0 & f_x^* \end{pmatrix}$$

est un relevé unitaire de $\begin{pmatrix} f_p & 0 \\ 0 & f_p^* \end{pmatrix}$, relevé qui nous donne l'indice de $[f_p]_1 = \beta_{A/J}[p]_0$:

$$\partial[f_p]_1 = [w_{f_x} p_n w_{f_x}^*] - [p_n].$$

Soit $g_x(t) := (1-t)1_{A^+} + te^{2i\pi x}$ un chemin continu entre l'identité et $e^{2i\pi x}$. L'image de $e^{2i\pi x}$ par θ_J se calcule comme l'indice $[w_{g_x} p_n w_{g_x}^*] - [p_n]$. Montrer que f_x et g_x sont homotopes suffit donc à conclure.

Pour cela, remarquons que, t variant de 0 à 1 et le spectre de x étant inclus dans $\{0, 1\}$, les éléments f_x et g_x ne dépendent que des valeurs des fonctions réelles

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 1 + (e^{2i\pi t} - 1)x \\ g(t, x) &= 1 - t + te^{2i\pi x} = f(x, t) \end{aligned}$$

au voisinage du bord du carré $\partial[0; 1] \times [0; 1]$, homéomorphe au cercle \mathbb{S}^1 . Les classes d'homotopie de fonctions continues sur le cercle sont classifiées par leur nombre de tours, voir le livre d'Hatcher par exemple [1], et on vérifie que f et g sont ainsi homotopes, et donc que :

$$[w_{f_x} p_n w_{f_x}^*] = [w_{g_x} p_n w_{g_x}^*].$$

L'identité $\partial \circ \beta_B = \theta_J \circ \delta$ est démontrée, ce qui conclut. \square

1.2 Produits croisés de C^* -algèbres

1.2.1 Théorèmes généraux

Soit A une C^* -algèbre et Γ un groupe discret. On se donne de plus une action par automorphisme $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(A)$. On peut alors munir l'espace $C_c(\Gamma, A)$ des fonctions à support fini d'un produit de convolution tordu par α :

$$f *_{\alpha} g = \sum_{s, t \in \Gamma} f(s) \alpha_s(g(t)) st.$$

Soit $\lambda_{\Gamma, A}$ la représentation régulière gauche de $C_c(\Gamma, A)$ sur $l^2(\Gamma, A) = \{\eta : \Gamma \rightarrow A : \sum_s \eta^*(s) \eta(s) < \infty\}$:

$$(\lambda_{\Gamma, A}(f) \eta)(\gamma) = \sum_{s \in \Gamma} \alpha_{\gamma^{-1}}(f(s)) \eta(\gamma^{-1}s)$$

pour tous $f \in C_c(\Gamma, A)$, $\eta \in l^2(\Gamma, A)$ et $\gamma \in \Gamma$.

Le produit croisé réduit de A par Γ , noté $A \times_\alpha \Gamma$, est défini comme la fermeture pour la norme d'opérateur de $\lambda_{\Gamma,A}(C_c(\Gamma, A))$ dans $B(l^2(\Gamma, A))$.

Les actions habituelles de A et de Γ sur $l^2(\Gamma, A)$ sont combinées.

$$(\pi(a)\eta)(s) = \alpha_{s^{-1}}(a)\eta(s)$$

$$(\lambda(\gamma)\eta)(s) = \eta(\gamma^{-1}s)$$

On parle pour la paire (λ, π) de représentation covariante du système $\{A, \Gamma, \alpha\}$, car la relation :

$$\lambda(\gamma)\pi(a)\lambda(\gamma^{-1}) = \pi(\alpha_\gamma(a))$$

est vérifiée.

Théorème 2 (Pimsner-Voiculescu). Soit A une C^* -algèbre et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Il existe alors une suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{1-\alpha_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xleftarrow{1-\alpha_*} & K_1(A) \end{array} .$$

Théorème 3 (Connes-Thom). Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(A)$ un morphisme, alors :

$$K_i(A \times_\alpha \mathbb{R}) \cong K_{1-i}(A) \quad , i = 0, 1.$$

La première chose que l'on peut, et que l'on va, dire à propos des produits croisés est que les générateurs de leurs groupes de K -théorie prennent une forme sympathique, qui va nous permettre de faire des calculs explicites dans la preuve de la suite de Pimsner-Voiculescu.

Lemme 1. Soit B une C^* -algèbre unitale, $1_B \in A$ une sous- C^* -algèbre de B , et u un unitaire de B tels que A et u engendrent B et $uAu^* = A$. Alors $K_1(B)$ est engendré par les inversibles de la forme :

$$1_B \otimes 1_n + x(u^* \otimes 1_n) \quad , x \in A \otimes \mathfrak{M}_n.$$

De plus, si $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, alors on peut se limiter aux classes d'unitaires de la forme :

$$1_B \otimes 1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F \quad F, x \in A \otimes \mathfrak{M}_n$$

où F désigne une projection auto-adjointe.

La remarque suivante est importante pour la preuve du lemme 5 : dans le cas $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, les classes concernées sont stables par somme, donc tout élément de $K_1(B)$ est la différence de deux générateurs.

1.2.2 Extension de Toeplitz

Soient A et C deux C^* -algèbres.

Par extension de A par C , on entend un triplet (B, α, β) d'une C^* -algèbre et de deux morphismes telle que la suite :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Cette section présente la construction d'une extension de $A \otimes \mathbb{K}$ par $A \times_{\alpha} \mathbb{Z}$ qui sera utile dans la preuve de l'exactitude de la suite de PV : l'extension de Toeplitz. Dans tout le document \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert, l_2 par exemple, dont on fixe une base hilbertienne (e_n) , et \mathbb{B} et \mathbb{K} sont respectivement l'algèbre des opérateurs bornés et compacts sur \mathcal{H} . \mathbb{K} est un idéal bilatère et :

$$\pi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/\mathbb{K}$$

est la projection naturelle sur l'algèbre de Calkin.

$H^2(\mathbb{S}^1)$ désigne le sous-espace hilbertien de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$ pour $n \geq 0$. Lorsque l'on prendra $H^2(\mathbb{S}^1)$ pour \mathcal{H} , e_n dénotera ces fonctions. Pour $f \in C(\mathbb{S}^1)$, on désigne par T_f l'opérateur de $H^2(\mathbb{S}^1)$, appelé opérateur de Toeplitz associé à f , défini par $T_f(g) = \mathcal{P}(fg)$, où \mathcal{P} est le projecteur orthogonal sur $H^2(\mathbb{S}^1)$. On appelle f le symbole de T_f .

Soit $S \in \mathbb{B}$ l'opérateur de shift unilatéral, qui envoie e_n sur e_{n+1} . On note $C^*(S)$ la C^* -algèbre unitale engendrée par S . On voit que S^* envoie e_1 sur 0 et e_n sur e_{n-1} lorsque $n \geq 2$. Si on note $E_{ij}(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$, on a :

$$E_{ij} = S^{i-1} S^{*j-1} - S^i S^{*j} \in C^*(S)$$

\mathbb{K} est donc un idéal bilatère de $C^*(S)$ et $P = 1 - SS^* = E_{11}$ est de rang 1 donc compact.

Lemme 2. L'application

$$\tau \begin{cases} C(\mathbb{S}^1) & \rightarrow B(H^2(\mathbb{S}^1))/K(H^2(\mathbb{S}^1)) \\ f & \mapsto \pi(T_f) \end{cases}$$

est un $*$ -homomorphisme injectif.

Preuve 2. Si l'on confond $f \in C(\mathbb{S}^1)$ avec l'opérateur de multiplication associé dans $L^2(\mathbb{S}^1)$, alors $f\mathcal{P} - \mathcal{P}f$ est un opérateur compact. En effet, si $f(z) = z$, on a un opérateur de rang 1, et cette fonction génère $C(\mathbb{S}^1)$ par théorème de Stone-Weierstrass.

Ceci permet d'écrire la relation suivante :

$$T_f T_g = \mathcal{P} f \mathcal{P} g = \mathcal{P}(\mathcal{P} f + \text{compact})g = \mathcal{P} f g + \text{compact}$$

Donc $T_f T_g = T_{fg} \bmod \mathbb{K}$, et comme $T_f^* = T_{\bar{f}}$, τ est bien un $*$ -homomorphisme.

Pour l'injectivité, observons le noyau de τ . C'est un idéal bilatère de $C(\mathbb{S}^1)$, il existe donc un ouvert $X \subset \mathbb{S}^1$ tel que :

$$\ker \tau = \{f \in C(\mathbb{S}^1) : f(z) = 0, \forall z \in X\}$$

Mais si $f \in \ker \tau$, alors $z \mapsto f(e^{i\theta} z)$ est aussi dans le noyau pour tout θ , ce qui assure que $X = \mathbb{S}^1$ ou \emptyset . Mais comme T_z n'est pas compact, $X = \mathbb{S}^1$ et l'injectivité est démontrée. \square

Comme $C(\mathbb{S}^1)$ est généré par z , qui s'envoie sur S par T , l'image de T est $C^*(S)$. La remarque précédente permet d'affirmer que $C^*(S)/\mathbb{K}$ est $*$ -isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur le tore $C(\mathbb{S}^1)$, et l'image de S est la fonction identité sur \mathbb{S}^1 , noté z . On a donc une extension, écrite sous la forme d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow C^*(S) \longrightarrow C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

On définit l'algèbre de Toeplitz \mathcal{T} associée à la paire (A, α) comme la C^* -sous-algèbre de $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ engendré par $A \otimes I$ et $u \otimes S$. Rappelons que l'on voit A comme une sous- $*$ -algèbre de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, et que l'on note u l'unitaire qui rend intérieure l'action de α :

$$\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(n)a = u^{*n} a u^n$$

Observons maintenant $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, dont on va montrer qu'elle se réalise comme un quotient de \mathcal{T} par un idéal bilatère fermé. Soit donc J l'idéal bilatère fermé engendré par la projection $1 \otimes P$. La première chose à remarquer, c'est que l'on a un $*$ -morphisme :

$$\phi \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathcal{T} \\ e_{ij} & \rightarrow S^i P S^{*j} \end{cases} .$$

Il est ici défini sur le système d'unités de \mathbb{K} ,

$$e_{ij}(x) = \langle x, e_i \rangle e_j$$

ce qui permet facilement de l'étendre à \mathbb{K} entier.

L'identité suivante permet d'étendre ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$:

$$(u \otimes S)^i (a \otimes P) (u \otimes S)^{*j} = (u^i a u^{*j}) \otimes \phi(e_{ij})$$

définit l'extension de ϕ à $A \otimes \mathbb{K}$. Alors $\phi(A \otimes \mathbb{K}) = J \subset \mathcal{T}$.

1.3 Suite exacte de Pimsner-Voiculescu

1.3.1 La preuve originale

Maintenant que le décor est planté, nous pouvons passer à la K -théorie. Nous allons d'abord démontré le :

Lemme 3. Les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_i(A \otimes K) & \xrightarrow{\psi_*} & K_i(\mathcal{T}) \\ \simeq \uparrow & & \uparrow d_* \\ K_i(A) & \xrightarrow{(id_A)_* - \alpha(-1)_*} & K_i(A) \end{array}$$

sont commutatifs pour $i \in \{0, 1\}$, et $d_* : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{T})$ est injectif.

L'isomorphisme $K_1(A) \rightarrow K_1(A \otimes \mathbb{K})$ associe à une classe $[v] \in K_1(A)$ l'élément $[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})]$, dont l'image par ψ_* est :

$$\psi_*[v \otimes e_{00} + (I - 1 \otimes e_{00})] = [v \otimes P] + [1 \otimes I - 1 \otimes P] = [v \otimes P] + [1 \otimes SS^*] \quad (1)$$

Maintenant :

$$d_* \circ (id_A - \alpha(-1))_* [v] = [v \otimes I] - [u^*vu \otimes I] \quad (2)$$

Soit l'unitaire :

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \otimes M_2$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & Q(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)Q^* & 1 \otimes I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v \otimes SS^* + QQ^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mais la classe dans K_1 est invariante par augmentation, i.e. $[x] = \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, et par conjugaison par un unitaire, donc :

$$\left[\Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* \right] = [u^*vu \otimes I]$$

En remplaçant dans (2), on obtient :

$$\begin{aligned} [v \otimes I] - [v \otimes SS^* + Q] &= [(v \otimes I)(v \otimes SS^* + Q)^{-1}] \\ &= [v^* \otimes SS^* + Q] \\ &= [1 \otimes SS^* + v \otimes P] \end{aligned}$$

qui est l'expression que l'on avait trouvé pour l'image de $[v]$ par ψ_* dans (1). La commutativité du diagramme $i = 0$ suit la même preuve : il suffit de remarquer que si l'on prend une projection auto-adjointe $q \in A$, alors dans $K_0(\mathcal{T})$:

$$\begin{aligned} [(\alpha(-1)q) \otimes I] &= \left[\Omega \begin{pmatrix} (\alpha(-1)q) \otimes I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Omega^* \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} q \otimes SS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= [q \otimes SS^*]. \end{aligned}$$

Ceci assure que :

$$d_* \circ ((id_A)_* - \alpha(-1)_*) [q \otimes e_{00}] = [q \otimes I] - [(\alpha(-1)q) \otimes I] = [q \otimes P] = \psi_* [q \otimes e_{00}].$$

Les diagrammes commutent bien, il reste à montrer l'injectivité de d_* .

Pour cela, montrons que si v_0 et v_1 sont des unitaires de A , et $t \mapsto w_t$ un chemin continu dans les unitaires de \mathcal{T} d'origine $v_0 \otimes I$ et d'arrivée $v_1 \otimes I$, alors $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$.

Calculons :

$$\begin{pmatrix} w_t & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(-1)w_t^* & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* = \begin{pmatrix} w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}.$$

Le chemin unitaire $y_t = w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q \in \mathcal{T}$ vérifie :

$$\forall t, \quad y_t \in 1 \otimes I + J.$$

En effet :

$$y_t - 1 \otimes I = (w_t - 1 \otimes I)Q + w_t((1 \otimes S)w_t^* - w_t^*(1 \otimes S))(1 \otimes S^*),$$

mais un élément de la forme $(1 \otimes S)w - w(1 \otimes S)$ est toujours dans $B \otimes \phi(\mathbb{K})$, si $w \in \mathcal{T}$. Si w est dans $A \otimes I$ ou vaut $u \otimes S$, on obtient 0, et si $w = u^* \otimes S^*$, le commutateur vaut $u^* \otimes P \in B \otimes \phi(\mathbb{K})$. Ces éléments génèrent un algèbre dense dans \mathcal{T} : l'assertion en découle.

On a donc un chemin continu d'unitaires de $1 \otimes SS^* + v_0 \otimes P$ à $1 \otimes SS^* + v_1 \otimes P$, qui reste dans $1 \otimes I + J$. Comme ψ établit un isomorphisme de $\mathbb{C}1 \otimes I + J$ sur $A \tilde{\otimes} \mathbb{K}$, on a donc, dans $K_1(A \tilde{\otimes} \mathbb{K})$:

$$[\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_0 \otimes e_{00}] = [\tilde{I} - 1 \otimes e_{00} + v_1 \otimes e_{00}]$$

donc : $[v_0] = [v_1]$ dans $K_1(A)$, et l'injectivité de d_* est démontrée. \square

En passant l'extension de Toeplitz en K -théorie, et en combinant avec le lemme 3, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
K_1(A \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{\psi_*} & K_1(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & K_0(A \otimes \mathbb{K}) \\
\uparrow \simeq & & \uparrow d_* & & \nearrow \iota_* & & \\
K_1(A) & \xrightarrow{(id_A - \alpha(-1))_*} & K_1(A) & & & &
\end{array}$$

dont la première ligne est exacte, et le carré commute.

Lemme 4. $d_* : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

Montrons que $\text{Ker } \delta \subset \text{Im } \iota_*$. Cela suffit puisque si d_* n'est pas surjectif, il existe un élément $x \in K_1(\mathcal{T}) \setminus \text{Im } d_*$, dont l'image par π_* n'est pas dans l'image de ι_* . Pourtant : $\delta \circ \pi_*(z) = 0$.

Nous allons montrer que tout élément de $\text{Ker } \delta$ s'écrit :

$$w = [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(u^* \otimes 1_n) F_1]_1 - [1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2(u^* \otimes 1_n) F_2]_1$$

pour certains x_1, x_2, F_1 et F_2 dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$ tels que F_i soient des projections auto-adjointes unitairement équivalentes : il existe un unitaire $v \in A \otimes \mathfrak{M}_n$ les entrelaçant $F_1 = v F_2 v^*$.

Montrons que cela conclut. Dans $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
[1 \otimes 1_n - F_2 + F_2 x_2(u^* \otimes 1_n) F_2]_1 &= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 v x_2(u^* \otimes 1_n) v^* F_1]_1 \\
&= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 y(u^* \otimes 1_n) F_1]_1
\end{aligned}$$

où $y = v x_2(\alpha(-1) \otimes id_n) v^* \in A \otimes \mathfrak{M}_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
w &= [(1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(u^* \otimes 1_n) F_1) (1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 y(u^* \otimes 1_n) F_1)^*]_1 \\
&= [1 \otimes 1_n - F_1 + F_1 x_1(\alpha(-1) \otimes id_n) F_1 y^* F_1]_1
\end{aligned}$$

L'élément entre crochets est dans $A \otimes \mathfrak{M}_n$, ce qui veut dire que sa classe w est dans l'image de $\iota_* : \text{Ker } \delta \subset \text{Im } \iota_*$ est démontré.

Montrons maintenant la remarque. Le lemme 1 nous permet d'affirmer que tout élément de $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$ s'écrit comme une différence de générateurs unitaires de la forme $[1_n - F + F x(u^* \otimes 1_n) F]_1$. Si $n = 1$, un tel élément a un relevé

$w = (1 - F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^* \in \mathcal{T}$. Mais alors :

$$\begin{aligned} ww^* &= (1 - F) \otimes I + Fxu^*Fux^*F \otimes S^*S \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes I \\ &= 1 \otimes I \\ w^*w &= (1 - F) \otimes I + Fux^*Fu^*xF \otimes SS^* \\ &= (1 - F) \otimes I + F \otimes (I - P) \\ &= 1 \otimes I - F \otimes P \end{aligned}$$

L'index est donc facilement calculable :

$$\begin{aligned} \delta[1_n - F + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1 &= [1 \otimes I - w^*w]_0 - [1 \otimes I - ww^*]_0 \\ &= [F \otimes P]_0 \\ &= [F \otimes e_{00}]_0 \end{aligned}$$

Ce calcul assure que

$$\begin{aligned} [1_n - F_1 + F_1x_1(u^* \otimes 1_n)F_1]_1 - [1_m - F_2 + F_2x_2(u^* \otimes 1_m)F_2]_1 &\in \text{Ker } \delta \\ \text{ssi } [F_1]_0 &= [F_2]_0 \text{ dans } K_0(A). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer F_i et x_i par $0_p \oplus F_i$ et $I_p \oplus x_i$, on peut supposer $m = n$. De même, quitte à remplacer F_i et x_i par $F_i \oplus 1 \otimes 1_p$ et $x_i \oplus 1 \otimes 1_{n+p}$, on peut supposer que F_1 et F_2 sont unitairement équivalentes. \square

On a donc montré que d_* induisait un isomorphisme en K_1 -théorie. On obtient donc une suite exacte à 6 termes à partir de l'extension de Toeplitz, dont on voudrait déduire le théorème, ce que l'on peut faire à condition de montrer que d_* induit un isomorphisme au niveau des K_0 -groupes.

Lemme 5. $d_* : K_0(A) \rightarrow K_0(\mathcal{T})$ est un isomorphisme.

La suite exacte $0 \rightarrow SA \rightarrow C(A \otimes \mathbb{S}^1) \rightarrow A \rightarrow 0$ est scindée, et induit, modulo la périodicité de Bott, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \rightarrow & K_0(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) & \rightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(A) & \leftarrow & K_1(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) & \leftarrow & K_1(A) \end{array} .$$

Mais, la suite étant scindée, tout élément de $K_i(A)$ se relève, et les flèches connectantes, qui mesurent l'obstruction à être relevé, sont donc nulles : on obtient deux suites exactes scindées :

$$0 \rightarrow K_{1-i}(A) \rightarrow K_i(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) \rightarrow K_i(A) \rightarrow 0$$

et donc $K_i(C(A \otimes \mathbb{S}^1)) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A)$.

Si on note $\phi^A : SA \oplus A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{S}^1)$ l'isomorphisme obtenu à partir des suites exactes scindées, alors :

$$(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_* \circ \phi_*^A = \phi_*^{\mathcal{T}} \circ d_*. \quad (3)$$

Le lemme 5 appliqué à $id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d : A \otimes C(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$, et le fait que $\mathcal{T}(A \otimes C(\mathbb{S}^1)) = \mathcal{T}(A) \otimes C(\mathbb{S}^1)$, assurent que $(id_{C(\mathbb{S}^1)} \otimes d)_*$ établit un isomorphisme de $K_1(A \otimes C(\mathbb{S}^1))$ sur $K_1(\mathcal{T} \otimes C(\mathbb{S}^1))$, ce qui, avec la remarque (3) conclut. \square

Le théorème 2 découle directement des lemmes précédents : on passe l'extension de Toeplitz en K -théorie et on se sert de la stabilité $K_i(A \otimes \mathbb{K}) \simeq K_i(A)$ et de l'isomorphisme $K_i(A) \simeq K_i(\mathcal{T})$.

1.3.2 Un exemple : le tore non-commutatif

Si on se fixe un automorphisme $\alpha \in \text{Aut}(A)$, on peut construire le produit croisé $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ comme la C^* -algèbre universelle engendrée par A et un unitaire u vérifiant :

$$\forall a \in A, uau^* = \alpha(a).$$

Pour la construire effectivement, considérons $A[u]$. La relation de commutation nous donne le produit suivant :

$$au^n bu^m = a\alpha^n(b)u^{n+m} \quad \forall a, b \in A, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

Avec $A = C(\mathbb{S}^1)$ et α l'automorphisme induit par $z \mapsto e^{2i\pi\theta z}$, on obtient le tore non-commutatif A_θ . Le chemin $\phi_t : z \mapsto e^{2it\pi\theta z}$ montre que α est homotope à l'identité et la suite exacte de Pimsner-Voiculescu se transforme alors en :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{0} & K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A_\theta) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A_\theta) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{0} & K_1(C(\mathbb{S}^1)). \end{array}$$

Mais $K_i(C(\mathbb{S}^1)) = K_i(S\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = K_{1-i}(\mathbb{C}) \oplus K_i(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, d'où : $K_i(A_\theta) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, i = 0, 1$. Nous avons donc calculé les groupes de K -théorie du tore non-commutatif, mais nous allons dire plus. On peut en effet calculer les générateurs de ces groupes.

Définition 4. Une projection de Rieffel de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ est un idempotent autoadjoint de la forme $x_0 + x_1 u + u^* x_1^*$, où $x_0, x_1 \in A$.

Proposition 1. Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel et Δ le support à gauche de x_1 . Alors l'unitaire $\exp(2i\pi x_0 \Delta)$ est dans A et :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

Soit $p = x_0 + x_1 u + u^* x_1^* \in A \times_\alpha \mathbb{Z}$ une projection de Rieffel. Montrons par récurrence que le relevé autoadjoint $a = u^* x_1 \otimes S^* + x_0 \otimes I + x_1 u \otimes S \in \mathcal{T}$ de p vérifie :

$$\forall n \geq 1, \quad a^n = a + (x_0^n - x_0) \Delta \otimes P.$$

Si c'est vrai au rang n ,

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^2 + a(x_0^n - x_0) \Delta \otimes P \\ &= a + a(x_0^2 - x_0) \Delta \otimes P + x_0(x_0^n - x_0) \Delta \otimes P + x_1 u(x_0^n - x_0) \Delta \otimes SP \\ &= a + (x_0^{n+1} - x_0) \Delta \otimes P + u(\alpha(-1)x_1)(x_0^n - x_0) \Delta \otimes SP \end{aligned}$$

Le dernier terme étant nul, le principe de récurrence conclut.

Ayant exhibé un relevé autoadjoint de p , on est en mesure de calculer son indice. Mais :

$$\begin{aligned} \exp(2i\pi a) &= 1 \otimes I + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (a + (x_0^n - x_0) \Delta \otimes P) \\ &= (e^{2i\pi} - 1)(a - x_0 \Delta \otimes P) + \exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes P + 1 \otimes (I - P) \\ &= \psi(\exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})). \end{aligned}$$

Il vient :

$$\partial[p]_0 = [\exp(2i\pi a)]_1 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta) \otimes e_{00} + 1 \otimes (I - e_{00})]_1$$

Le $*$ -homomorphisme δ étant la composition du connectant $\partial : K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A \times \mathbb{K})$ avec l'isomorphisme $K_1(A \times \mathbb{K}) \simeq K_1(A)$, on en déduit :

$$\delta[p]_0 = [\exp(2i\pi x_0 \Delta)]_1.$$

□

Nous avons vu que la suite exacte à 6 termes donnait deux suites exactes courtes, dont :

$$0 \longrightarrow K_0(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow K_0(A_\theta) \xrightarrow{\delta} K_1(C(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow 0 \quad \text{On sait que les}$$

groupes à gauche et à droite sont tous les deux \mathbb{Z} , l'un étant généré par la classe de la projection $1 \in C(\mathbb{S}^1)$, l'autre par la classe de l'unitaire $v = id_{\mathbb{S}^1} \in C(\mathbb{S}^1)$. Si l'on trouve un projecteur p tel que $\delta[p]_0 = [v]_1$, on peut dire que $K_0(A_\theta)$ est engendré par $[1]_0$ et $[p]_0$.

2 Annexes

2.1 Produits tensoriels de C^* -algèbres

Lemme 6. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K . S'il existe deux K -espaces vectoriels V_1 et V_2 munis d'applications bilinéaires $\pi_j : E \times F \rightarrow V_j$ telles que, pour tout espace vectoriel W , toute application bilinéaire $E \times F \rightarrow W$, se factorise uniquement via π_1 et π_2 , alors V_1 et V_2 sont isomorphes en tant que K -espaces vectoriels.

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xleftarrow{\pi_1} & E \times F & \xrightarrow{\pi_2} & V_2 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & W & & \end{array}$$

Preuve 3. En factorisant π_j via π_j , il existe deux uniques applications linéaires $\phi_1 : V_2 \rightarrow V_1$ et $\phi_2 : V_1 \rightarrow V_2$ telles que :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \phi_1 \circ \pi_2 \\ \pi_2 &= \phi_2 \circ \pi_1. \end{aligned}$$

Montrons que ces deux applications sont inverses. Comme :

$$\phi_1 \circ \phi_2 \circ \pi_1 = \phi_1 \circ \pi_2 = \pi_1,$$

$\phi_1 \circ \phi_2 = id_{V_1}$ par unicité de la factorisation de π_1 via π_1 . Symétriquement, on démontre que : $\phi_2 \circ \phi_1 = id_{V_2}$, et le résultat est démontré.

□

Références

- [1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [2] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for k -groups and ext-groups of certain cross-products of c^* -algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.
- [3] Alain Connes Paul Baum. Geometric k -theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.
- [4] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and k -theory of group c^* -algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.
- [5] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^* -algebras, a friendly approach*. Oxford University Press, 1993.