Propagation en K-théorie

Clément Dell'Aiera

Université de Lorraine

20 octobre 2015

On rappelle qu'un opérateur compact est un opérateur limite d'opérateurs de rang fini.
Un opérateur T est dit de Fredholm s'il est inversible modulo les opérateurs compacts. Son noyau et son conoyau sont alors fini-dimentsionnels et on peut définir son indice :

$$Ind \;\; T = \dim KerT - \dim KerT^*$$

Soit M une variété différentielle, et d la différentielle extérieure définie sur le complexe de De Rham des formes extérieures

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} .. \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

Une métrique riemannienne g sur M induit une mesure μ sur M et un produit scalaire $(,)$ sur le cotangent T^*M que l'on peut étendre aux formes :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha(x), \beta(x))\mu(dx)$$

On complète $\Omega^j_c(M)$par rapport à $\langle , \rangle$ pour obtenir un complexe d'espaces de Hilbert $\Omega^*_{L^2}(M)$

$$\Omega^0_{L^2}(M) \xrightarrow{d} \Omega^1_{L^2}(M) \xrightarrow{d} .. \xrightarrow{d} \Omega^n_{L^2}(M)$$

C'est le complexe des formes de carré intégrable. L'opérateur d est cette fois un **opérateur non borné**, soit d^* son adjoint.

$D = d + d^*$ est ce que l'on appelle un opérateur de Dirac généralisé.
C'est un opérateur non-borné auto-adjoint, on peut donc donner un sens à une expression $f(D)$ par calcul fonctionnel, pour toute f borélienne bornée.

Théorème (Régularité elliptique)

Si $\phi \in C_0(\mathbb{R})$, alors $\phi(D)$ est un opérateur compact.

Si $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, bornée et impaire telle que $\chi(t) \to_{+\infty} 1$, alors

- $\chi(D)$ est un opérateur de Fredholm,
- $\chi_1(D) - \chi_2(D)$ est compact.

On peut donc calculer l'indice de $\chi(D)$!

Il vaut 0 !
$\chi(D)$ est autoadjoint... Mais on peut séparer les formes de degré pair et impair pour obtenir une graduation

$$\Omega_{L^2}(M) = \Omega^{even}(M) \bigoplus \Omega^{odd}(M),$$

et D est un opérateur impair par rapport à cette décomposition :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi(D_+)$ est de Fredholm, et on définit

$$Ind(D, \epsilon) = Ind\chi(D_+)$$

Cet indice est non nul en général, et ne dépend pas de χ.
($\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est l'opérateur de graduation.)

Les théorèmes de l'indice donnent une formule pour l'indice d'un opérateur de Dirac généralisé en fonction de données topologiques.
Indice = évaluation d'une classe caractéristique contre la classe fondamentale de la variété

$$Ind\ (D, \epsilon) = \langle \mathcal{I}_D, [M] \rangle$$

On suppose que la dimension n de M est paire, et comme auparavant

$$\Omega_{L^2}(M) = \Omega^{even}(M) \oplus \Omega^{odd}(M), \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = d + d^*$$

Théorème (Gauss-Bonnet)

$$Ind\ (D, \epsilon) = \begin{cases} \chi(M) & \text{caractéristique d'Euler} \\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M Pf(R) & \end{cases}$$

L'opérateur de Hodge $\star : \Omega^k_{L^2}(M) \to \Omega^{n-k}_{L^2}(M)$ implémente une autre graduation, et

$$Ind\ (D, \star) = \begin{cases} sg(M) & \text{signature de la variété} \\ \langle \mathcal{L}_M, [M] \rangle \end{cases}$$

Si M admet une structure Spin,

$$\not{D} = \sum c(X_j)\nabla_{X_j}$$

alors

$$Ind\ \not{D} = \langle \mathcal{A}, [M] \rangle$$

But : Etendre ces techniques au cas non-compact.
Problème : $\phi(D)$ n'est plus un opérateur compact.
Piste : Utiliser la preuve des théorèmes de l'indices utilisant le noyau de la chaleur.

Proposition (Formule de Lin ? ?)

$$\not{D}^2 = \nabla\nabla^* + \frac{1}{4}Sc$$

$$Ind\ \not{D} = Tr(\epsilon e^{-t\not{D}^2})$$

Lorsque $t \to 0$, cette formule devient locale en t et le terme dominant est l'inégrale sur M d'une forme $\mathcal{I}(x)dx$ que l'on peut determiner explicitement, sa classe de cohomolgie donne $\mathcal{I}_D$.
Idée : Le semi-groupe de la chaleur construit une homotopie entre l'invariant local $\mathcal{I}_D$ et l'invariant global $Ind\ \not{D}$.

Definition

Une C^*-algèbre est une sous-algèbre $A \subset \mathcal{L}(H)$ fermée pour la norme d'opérateur et stable par adjonction.

Exemples :

- $C_0(X)$ pour un espace localement compact X.
- l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{L}(H)$, des opérateurs compacts $\mathfrak{K}(H)$.

Remarque : le théorème de Gelfand Naimark assure que toute C^*-algèbre commutative est isomorphe à une C^*-algèbre du type $C_0(X)$: les C^*-algèbres doivent être pensée comme des espaces localment compacts "non-commutatifs".

Pourquoi ? Pour étudier les mauvais quotients. Soit X un espace topologique localement compact et R une relation d'équivalence.
$C^*R :=$ la C^*-algèbre engendrée par les opérateurs $(T_{xy})_{(x,y)\in R}$ de $l^2(X) \otimes H$.

Exemples :

- $X = \{p, q\}$, $R = X \times X$, $C^*R = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Le quotient classique est la sous-algèbre diagonale $\mathbb{C}I_2$.
- Feuilletage de Kronecker d'angle $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sur le tore $\mathbb{T}_2$
- Si Γ est un groupe discret, $\hat{\Gamma}$ l'espace des classes d'équivalences unitaires de représentations irréductibles muni de la topologie de Fell peut être non séparé. On peut même avoir $C_0(\hat{\Gamma}) \simeq \mathbb{C}$.

- Soit X un espace métrique propre.
- Pour notre problème, on voudrait identifier les points qui sont à distance plus petite que $R > 0$ et ensuite faire $R \to \infty$. On va construire un C^*-algèbre qui encode cela : l'algèbre de Roe C^*X.

Definition

Un espace de Hilbert H est un X-module s'il existe un $*$-morphisme $\phi : C_0(X) \to \mathcal{L}(H)$. On le dira standard si aucune fonction non nulle agit comme un opérateur compact, et non dégénéré si $\overline{C_0(X)H} = H$.

On notera $f\xi = \phi(f)\xi$.

Definition

Soit H un X-module.

- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit de propagation $\leq R$ si, pour toute fonctions $f, g \in C_0(X)$ telle que $d(supp\ f, supp\ g) > R$, on a $fTg = 0$.
- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit localement compact si pour toute $f \in C_0(X)$, fT et Tf sont des opérateurs compacts.
- on note $C_R[X] := \{T \in \mathcal{L}(H) : prop(T) \leq R, T \text{ loc. compact}\}$ et l'algèbre de Roe est

$$C^*X := \overline{\cup_{R>0} C_R[X]}^{||\cdot||_{op}}$$

Si (M, g) est une variété reimannienne complète, et D un opérateur de Dirac généralisé sur M, alors pour toute $\phi \in C_0(M)$,

$$\phi(D) \in C^*M.$$

On a un foncteur de cohomologie sur les C^*-algèbre : la K-théorie.

- A une C^*-algèbre A on associe une suite de groupes abéliens $K_n(A)$.
- Tout $*$-morphisme $\varphi : A \to B$ entre 2 C^*-algèbres induit un homomorphisme
$$\varphi_* : K_*(A) \to K_*(B)$$
- Ces règles respectent la somme directe, la composition des morphismes, l'homotopie,...

Remarques :
$K_*(C_0(X)) \simeq K^*(X)$: K-théorie topologique d'Atiyah-Hirzebruch, i.e. le groupe généré par les classes d'équivalences de fibrés vectoriels.
Une description de ces groupes.
$K_0(A) = \{[p] - [q] : p, q \in \mathfrak{M}_n(A)$ projecteurs, n assez grand$\}$
$K_1(A) = \{[u] : u \in \mathfrak{M}_n(A)$ unitaire, n assez grand$\}$
Ces foncteurs sont les seuls : $K_{n+2}(A) \simeq K_n(A)$.

Théorème

Si $0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{p} A/J \longrightarrow 0$ est une suite exacte de C^*-algèbre, alors il existe des applications bords ∂ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} K_1(J) \arrow[r, "\iota_*"] & K_1(A) \arrow[r, "p_*"] & K_1(A/J) \arrow[d, "\partial"] \\ K_0(A/J) \arrow[u, "\partial"] & K_0(A) \arrow[l, "p_*"] & K_0(J) \arrow[l, "\iota_*"] \end{tikzcd}$$

On va appliquer cela à l'extension

$$0 \longrightarrow C^*X \xrightarrow{\iota} D^*X \xrightarrow{p} D^*X/C^*X \longrightarrow 0$$

Soit (M, g) une variété riemannienne complète et D un opérateur de Dirac généralisé sur M. Si χ est une fonction de troncature, alors $\chi(D) \in D^*M$, et $\chi(D)^2 - 1 \in C^*M$, $\chi_1(D) - \chi_2(D) \in C^*M$: $\chi(D)$ est un unitaire de A/J dont la classe ne dépend pas de χ. On définit alors

$$Ind\ D = \partial[\chi(D)] \in K_0(C^*X)$$

Exemple :
Si M est compacte, $C^*M = \mathfrak{K}(H)$ et $D^*X = \mathcal{L}(H)$. Alors on retrouve la définition usuelle de l'indice.