Notes

Clément Dell'Aiera

Table des matières

1 Introduction

La conjecture de Baum-Connes dérive de problèmes posés au départ en théorie des représentations. Les analogies entre la théorie de Fourier et les représentations des groupes finis ont ouvert une voie vers les représentations des groupes localement compacts : faire de l'analyse harmonique sur un groupe revient à décomposer en composantes irréductibles la représentation régulière gauche sur les fonctions de carrés intégrables sur le groupe $L^2(G)$. Ce problème est complètement compris pour les groupes compacts ainsi que pour les groupes abéliens localement compacts. A partir des travaux de Harish-Chandra, le cas des groupes de Lie reductifs commence à être attaquable. Ses travaux ont permis, entre autres, de determiner la mesure de Plancherel du groupe, donc de décomposer la représentation régulière gauche modulo les ensemble de représentations de mesure nulle. A l'époque de ces travaux, envisager l'étude des groupe de Lie réductifs comme une classe n'était pas une démarche évidente : les mathématiciens de l'époque pensaient que les techniques d'algèbre d'opérateurs et d'analyse fonctionnelle permetraient de généraliser les résultats obtenus à tous les groupes localement compacts.

Fixons quelques notations. On note G un groupe localement compact ; si le groupe est discret, on le notera plus volontier Γ. Le but visé est donc l'étude des classes d'équivalence des représentations unitaires du groupe, c'est un ensemble appelé dual unitaire du groupe et noté $\hat{G}$. Les représentations $\pi : G \to U(H)$ ne sont pas nécessairement finies dimensionnelles, H peut être un espace de Hilbert de dimension infinie, mais on demande tout de même à π d'être fortement continue : pour tout $g \in G$, la fonction $v \mapsto \pi(g)v$ est continue.

Le point de vue développé par Alain Connes et appelé par lui *géometrie non-commutative* s'applique lorsque les techniques d'études habituelles sont mises en défaut lors de l'attaque de $\hat{G}$. Par exemple, si le dual unitaire n'est pas séparé, ou pire, si chaque point est dense. Un remarque : cela arrive avec des groupes faciles à construire. Par exemple, le groupe formé du produit croisé de $\mathbb{Z}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}$, donné par l'automorphisme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, voir AC. Dans un tel cas, l'algèbre des fonctions continues sur $\hat{G}$ tendant vers 0 à l'infini ne donnent aucune infomations et identifient le dual unitaire à un point. Le cadre non-commutatif permet de s'extraire de la difficulté en associant à notre espace une C^*-algèbre, non-nécessairement commutative, à la place de $C_0(\hat{G})$. Cette algèbre est construite comme la complétion de $C_c(G)$ pour la norme d'opérateur donnée par représentation réguliaire gauche, et est appelée C^*-algèbre réduite du groupe C_r^*G.

Pour étudier une C^*-algèbre, une bonne idée est de commencer par calculer sa K-théorie. C'est exactement ce que propose la conjecture de Baum-Connes, le calcul de $K_*(C_r^*G)$. Bien que C_r^*G soit un objet plutôt mystérieux, Baum et Connes ont conjecturé en '82 l'existence d'un groupe abélien de nature "géométrique" $K^{top}(G)$ et d'un morphisme

$$\mu_r : K_*^{top}(G) \to K_*(G)$$

censé être un isomorphisme. La point important est que le membre de gauche peut se calculer facilement, et donc donne le membre de droite en cas d'isomorpisme. Pourquoi observer la $K-$-théorie de C_r^*G ? Par exemple, dans le cas abélien, $C_r^*G \simeq C_0(\hat{G}_r)$ et donc $K_*(C_r^*G) \simeq K_*(\hat{G}_r)$, où la K-théorie du membre de droite est la théorie de Atiyah-Hirzebruch, qui est une théorie homologique généralisée (au sens de Steenrod) A VERIFIER. Ici $\hat{G}_r$ est le dual tempréré du groupe, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires du groupe faiblement contenues dans la régulière gauche, muni de la topologie de Fell. Si G n'est pas abélien, cet espace peut ne pas être $T1$! Par contre, chaque point isolé de $\hat{G}_r$ fournit un projecteur de C_r^*G, donc un élément de K-théorie.

En '94, Baum, Connes et Higson construisent effectivement ce groupe $K^{top}(G)$ et l'application d'assemblage μ_r en utilisant la KK-théorie bivariante de Kasparov :

$$K^{top}(G) = \varinjlim_{XG\text{-compact propre}} KK(C_0(X), \mathbb{C}).$$

Une remarque : les travaux de Harish-Chandra permettent le calcul de $K_*(C_r^*G)$ pour G un groupe de Lie réductif connexe, et on sait calculer la K-homologie équivariante $K^{top}(G)$ d'un tel groupe. Wasserman a donné une preuve dans une note de l'Académie des Sciences en '87 de la conjecture de Connes-Kasparov pour ces groupes, et on sait depuis que cette conjecture est équivalente, pour G réductif connexe, à la conjceture de Baum-Connes.

Dans la suite, nous présenterons différentes méthodes qui servent à démontrer la conjecture de Baum-Connes.

2 Méthode Dirac-Dual-Dirac

Cette section se base sur un exposé donné par Maria Paula Gomez Aparicio lors du groupe de travail "KK-théorie et groupes quantiques" à Paris Diderot en janvier 2015.

Définition 1. Un élément $\gamma \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est dit ¡¡de Kasparov¿¿ s'il existe une G-C^*-algèbre A et deux éléments $d \in KK^G(A, \mathbb{C})$ et $\eta \in KK^G(\mathbb{C}, A)$ tels que

$$\gamma = \eta \otimes_A d$$

et pour tout G-espace propre Y,

$$p^*(\gamma) = 1 \in KK^{G \rtimes Y}(C_0(Y), C_0(Y)),$$

où $p : Y \to *$ est la projection sur le point.

Pour rappel, la projection induit un morphisme de groupoïdes $Y \rtimes G \to G$, et la KK-théorie bivariante généralisée par P-Y. Le Gall est contravariante en le groupoïde, donc $p^* : KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \to KK^{G \rtimes Y}(p_*\mathbb{C}, p_*\mathbb{C})$, et bien sûr $p_*\mathbb{C} \simeq C_0(Y)$.

La condition $p^*(\gamma)$ assure que γ agit sur $K^{top}(G)$ par l'identité. En effet...

Cet élément γ a été introduit par Kasparov dans ses travaux sur la conjecture de Novikov. Voici entre autres ce qu'il démontre :
- tout groupe presque connexe (G/G_0 est compact, G_0 étant la composante connexe de l'identité) admet un élément γ.
- un tel élément est unique et c'est un idempotent,
- si un groupe G possède un élément γ, alors

$$\mu_r(K^{top}(G)) = \gamma.K(C_r^*G) := \{x \otimes j_{G,r}(\gamma) : x \in K(C_r^*G)\}.$$

Résultat 1 (Tu)**.** – Si G a un élément γ, alors μ_r est injective.
– Si de plus $\gamma = 1$ dans $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors μ_r est surjective.

Une propriété assure que l'injectivité passe aux sous-groupes fermés :

Proposition 1. Si G a un élément de Kasparov, alors tout sous-groupe fermé de G en a un.

Résultat 2. L'existence d'un élément γ a été démontrée pour tous les groupes localement compacts agissant de façon continue, propre et isométrique sur :
- une variété riemannienne (M, g) complète simplement connexe àcourbure sectionnelle négative ou nulle, (Kasparov '88)
- un immeuble de Bruhat-Ttis affine, (Kasparov Skandalis '91)
- un espace métrique unifomément locallement fini, faiblement géodésique et faiblement "bolique". (Kasparov Skandalis '03)

Vincent Lafforgue note la classe formée de ces groupes $\mathcal{C}$. Elle contient tous les sous-groupes de Lie (et ses sous-groupes fermés), donc leurs réseaux. On sait donc que $SL(3, \mathbb{R})$ et $SL(3, \mathbb{Z})$ ont un élément γ.

On sait que $\gamma = 1 \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ pour tous les groupes a-T-menables, i.e. qui admettent un action propre et isométrique sur un espace de Hilbert affine.

Bien que ces travaux soient encourageants, rien n'était su pour des groupes ayant la propriété (T).

Définition 2. Soit G un groupe localement compact et $\pi : G \to U(H)$ une représentation unitaire.
On dit que π admet des vecteurs presque invariants si, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout compact K de G, il existe un vecteur ξ (K, ϵ)-invariant, i.e. tel que

$$\sup_{h \in K} ||\pi(h)\xi - \xi|| < ||\xi||.$$

Un ensemble Q de G est dit de Kazdhan s'il existe $\epsilon > 0$ tel que toute représentation unitaire admettant des vecteurs (Q, ϵ)-invariants admet aussi un vecteurs non nul et invariant.
Le groupe G a la propriété (T) s'il possède un ensemble de Kazhdan compact.

La propriété (T) est équivalente au fait que la représentation triviale 1_G soit isolée dans le dual unitaire du groupe. Il est alors impossible de construire une homotpie entre n'importe quelle représentation unitaire et 1_G : $\gamma \neq 1$ dans $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. L'existence de l'élément γ et les méthodes utilisées jusque ici ne permettent donc pas de montrer la surjectivité de l'application d'assemblage pour un groupe qui a (T).

Pour un tel groupe, il existe un projecteur p dans la C^*-algèbre maximale C^*G du groupe tel que, pour toute représentation unitaire (π, H), $\pi(p)$ soit le projecteur orthogonal P_π sur le sous-espace des vecteurs invariants H^G. On nomme p le projecteur de Kazhdan. Comme on va le voir, ce projecteur est invisible du point de vue de la C^*-algèbre réduite. La représentation régulière gauche

$$\lambda_G : G \to U(L^2(G))$$

se prolonge en un $*$-homomorphisme $C^*G \to C_r^*G$ toujours noté λ_G. Alors si G est infini, les fonctions constantes ne sont pas dans $L^2(G)$, ce sont pourtant les seules qui pourraient être invariantes sous l'action de λ_G : le sous-espace des vecteurs invariants est nul. Mais $\lambda_G(p)$ est le projecteur orthogonal sur ce sous-espace, donc est nul :

$$\lambda_G(p) = 0.$$

Cela assure que la méthode Dirac-Dual-Dirac ne permet pas de montrer Baum-Connes pour les groupes qui ont (T) : en effet, (qui ?) a montré que si G vérifie Baum-Connes, alors

$$\lambda_G^* : K_*(C^*G) \to K_*(C_r^*G)$$

est un isomorphisme. Mais l'existence d'un projecteur de Kazhdan, équivalente à la propriété (T), en empêche l'injectivité.

2.1 Travaux de Vincent Lafforgue

Si n est un entier supérieur à 3, $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{Z})$ ont la propriété (T). De façon générale, tous les groupes de Lie semi-simples de rang réel supérieur à 2 ont (T). La conjecture de Connes-Kasparov pour $SL(n, \mathbb{R})$ (ou pour tout groupe de Lie réductif connexe) donne l'injectivité de ses réseaux, propriété stable par passage aux sous-groupes fermés. Toutefois, comme expliqué dans la section précédente, on ne peut montrer que $\gamma = 1$, ce qui assurerait la surjectivité. Avant de continuer, mentionnons que même après les travaux de Lafforgue, la conjecture de Baum-Connes est toujours ouverte pour $SL(3, \mathbb{Z})$.

La première idée de Lafforgue est de remplacer KK^G par un bifoncteur KK^G_{ban} définit sur la catégorie des espaces de Banach. Cette généralisation permet de passer des représentations unitaires d'un groupe localement compact à des représentations plus générales $G \to GL(E)$ sur des espaces de Banach E. On peut aussi prendre des représentations sur des espaces de Hilbert, mais non nécessairement isométrique. Lafforgue considère des représentations qu'il appelle "à croissance modérée", qui vérifient

$$||\pi(g)||_E \leq Ce^{l(g)}, \forall g \in G$$

où $l : G \to \mathbb{R}_+$ est une longueur sur le groupe. Il démontre alors que pour tous les groupes de Lie et leurs réseaux,

$$\gamma = 1 \text{ dans } KK^G_{ban}(\mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

Toutefois, le changement de théorie bivariante a un prix, et l'espace d'arrivée de l'application d'assemblage associée n'est plus $K_*(C^*_r G)$ mais $K_*(L^1(G))$. Cela démontre tout de même la conjecture de Bost : pour tout groupe de Lie, $\mu_{L^1(G)} : K^{top}(G) \to K(L^1(G))$ est un isomorphisme. De plus, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} K^{top}(G) \arrow[r, "\mu_{L^1}"] \arrow[dr, "\mu_r"'] & K(L^1(G)) \arrow[d] \\ & K(C^*_r)G) \end{tikzcd} ,$$

le problème étant de déterminer l'isomorphie ou non de la flèche verticale.

De manière plus géérale, Lafforgue définit ce qu'il appelle des complétion inconditionnelle de $C_c(G)$. Munissant l'algèbre $C_c(G)$ d'une norme $||.||_{\mathcal{A}(G)}$ telle que

$$\text{si } |f_1(g)| \leq |f_2(g)| \quad \text{alors } ||f_1||_{\mathcal{A}(G)} \leq ||f_2||_{\mathcal{A}(G)},$$

il la complète en une algèbre de Banach $\mathcal{A}(G)$, et montre qu'elle s'injecte dans $C^*_r G$, ce qui impose une factorisation

$$\begin{tikzcd} K^{top}(G) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}(G)}"] \arrow[dr, "\mu_r"'] & K(\mathcal{A}(G)) \arrow[d] \\ & K(C^*_r)G) \end{tikzcd} .$$

Si l'on trouve une telle complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ qui soit stable par calcul fonctionnel holomorphe, et dense dans $C^*_r G$, alors le diagramme commutatif précédent montre que Baum-Connes est vraie pour G, par principe d'Oka.(a détailler) Lafforque a montrer cela pour les groupes de Lie, et leurs réseaux qui ont la propriété de décroissance rapide (RD).

Voici quelques exemples pour finir cette section. Pour $SL(n, \mathbb{R})$, on retrouve l'algèbre de Scwartz. Pour tous les sous-groupes discrets des groupes de Lie qui ont (RD), c'est l'algèbre de Jolissaint qui apparaît. Tous les réseaux cocompacts de $SL(3, \mathbb{R})$ (pour $n > 3$, c'est ouvert !), ainsi que ceux des groupes hyperboliques ou encore de 2 groupes exceptionnels, ont (RD).

2.2 Construction de la flèche

3 Géométrie à l'infini

Nous l'avons vu, l'application d'assemblage peut se construire comme la composée de l'homomorphisme de descente $j_{G,r}$ avec l'évaluation en un élément de

K-théorie de $C_0(X)$:

$$KK^G(C_0(X), B) \xrightarrow{j_{G,r}} KK(C_0(X) \rtimes_r G, B \rtimes_r G) \xrightarrow{-\otimes_{C_0(X)}[e_G]} K(B \rtimes_r G)$$

puis en passant à la limite inductive sur les G-espaces propres et G-compacts X. Grâce à la théorie bivariante pour les actions de groupoïdes développée par P-Y. LeGall, cette approche fonctionne également pour G une groupoïde localement compact muni d'un système de Haar, et l'on peut parler de conjecture de Baum-Connes pour un tel groupoïde.

Yu a définit une application d'assemblage sur les espaces métriques munis d'une structure "à l'infini" (*coarse* en anglais), ce que j'appellerai espaces asymptotiques. Pour tout espace asymptotique $(X, d, \mathcal{E})$ et toute C^*-algèbre B, il existe une C^*-algèbre $C^*(X, B)$, appelée algèbre de Roe de X à coefficients dans B, construite comme une certaine complétion de l'algèbre des opérateur de propagation finie localement compacts. De plus, pour toutes C^*-algèbres A et B, il existe un homomorphisme

$$\tau_X : KK(A, B) \to KK(C^*(X, A), C^*(X, B))$$

analogue à la transformation de Kasparov j_G. L'application d'assemblage "à l'infini" $A_{X,B}$, à coefficient dans B, est alors définie par la limite inductive sur d des composées

$$KK(C_0(P_d(X)), B) \xrightarrow{\tau_X} KK(C^*(X, C_0(P_d(X))), C^*(X, B)) \xrightarrow{-\otimes[\lambda]} K(C^*(X, B)).$$

Cela définit une application d'assemblage asymptotique $A_{X,B} : KX_*(X, B) \to K(C^*(X, B))$, où $KX_*(X, B) = \varinjlim_{d\to\infty} KK(C_0(P_d(X)), B)$ est une version non équivariante de la K-homologie de X.

Conjecture 1 (Baum-Connes asymptotique)**.** Si X est à géométrie uniformément bornée, alors A_X est un ismorphisme.

Ce point de vue constitue une des stratégies possibles pour démontrer Baum-Connes pour une certaines classe de groupes. Si Γ est un groupe discret finiement engendré, on peut construire, relativement à n'importe quel système de générateurs S, une métrique unique à équivalence asymptotique près. Il existe donc une structure "à l'infini " naturelle sur le groupe Γ, et l'on peut observer l'application d'assemblage asymptotique sur cet espace. Bien qu'a priori la conjecture de Baum-Connes pour Γ soit complètement décorrélée de cette situation, Yu a montré que l'application d'assemblage pour l'espace asymptotique (Γ, d_S) est naturellement équivalente à l'application d'assemblage pour Γ à coefficients dans $l^\infty(\Gamma, H)$, H étant l'espace de Hilbert séparable.

4 Application d'assemblage quantitative

Dans la suite, Γ dénote un groupoïde localement compact de base $\Gamma^{(0)} = X$ et muni d'un système de Haar $(\lambda^x)_{x\in X}$. On rappelle qu'une suite exacte courte est dite semi-scindée si elle admet une section complètement positive. Pour éviter les phrases à rallonge, on parlera de bonne extension de C^*-algèbres pour une suite exacte courte semi-scindée et filtrée. Par équivalence de Morita, on entend les isomorphismes de groupes

$$M_A^{\epsilon,r} : K_*^{\epsilon,r}(A) \to K_*^{\epsilon,r}(A \otimes \mathbb{K}) \quad ,\forall r \geq 0, \forall \epsilon \in (0, \frac{1}{4})$$

induit par $A \to A \otimes \mathbb{K}; x \mapsto x \otimes e$, où e est n'importe quel projecteur de rang 1, A une C^*-algèbre, et $\mathbb{K}$ l'idéal des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert séparable.

Lemme 1. On suppose le groupoïde Γ muni d'une longueur l.

Soit $\quad 0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0 \quad$ une suite exacte semi-scindée et de Γ-C^*-algèbres. Alors la suite $\quad 0 \longrightarrow J \times \Gamma \longrightarrow A \times \Gamma \longrightarrow A/J \times \Gamma \longrightarrow 0 \quad$ est une bonne extension.

Preuve 1. Voir mes notes en anglais. □

Si l'élément $z \in KK^\Gamma(A, B)$ est représenté par un cycle (H, π, T), nous allons définir sa transformée de Kasparov $J_\Gamma(z) \in KK(A \times_r \Gamma, B \times_r \Gamma)$.

Tout d'abord, le cas pair. Notons $P_\Gamma = P \otimes_B id_{B\times_r\Gamma}$ l'opérateur sur $H \otimes B \times_r \Gamma$ induit par $P = \frac{T+id_{H\otimes B}}{2}$. Si l'on pose

$$\mathcal{E} := \{(x, y) \in A \times_r \Gamma \oplus \mathcal{L}(H \otimes B \times_r \Gamma) : P_\Gamma \pi_\Gamma(x) P_\Gamma = y \; mod \; \mathbb{K} \otimes B \times_r \Gamma\},$$

observons l'extension

$$(E) : \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \otimes B \times_r \Gamma \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow A \times_r \Gamma \longrightarrow 0 \quad .$$

Toute extension (Ext) : $\quad 0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 \quad$ induit une application contrôlée

$$D_{\mathrm{Ext}} = D_{A'}^A : \hat{K}(A'') \to \hat{K}(A').$$

Montrons que D_E ne dépend que de la classe de z, et pas de π et T.
A FAIRE

Définition 3. La transformée de Kasparov d'un élément z de $KK^\Gamma(A, B)$ est le morphisme contrôlé

$$J_\Gamma(z) = M_{B\times_r\Gamma}^{-1} \circ D_E : \hat{K}_*(A \times_r \Gamma) \to \hat{K}_*(B \times_r \Gamma),$$

où (E) est l'extension précédemment décrite.

Ce morphisme $J_\Gamma : KK^\Gamma(A,B) \to \mathrm{Hom}_0(\hat{K}(A\times_r\Gamma), \hat{K}(B\times_r\Gamma))$ nous permet de définir l'application d'assemblage associée à n'importe quel élément de $\hat{K}(A\times_r\Gamma)$ par simple évaluation :

$$Ind_x(z) = J_\Gamma(z)(x).$$

La conjecture de Baum-Connes s'intéresse à l'application d'assemblage associé à un certain élément. Dans le cas des groupoïdes, il existe une fonction continue à support compact $h : P_d(\Gamma) \to [0,1]$ telle que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(h^2) = 1.$$

Alors $\gamma \to \sum_{\gamma\in\Gamma} h\gamma(h)$ définit un projecteur de $A = C_0(P_d(\Gamma)) \times_r \Gamma$ de propagation finie, majorée par une certaine constante s. Comme les fonctions h admissibles forment un ensemble convexe, la classe de $[e_h, 0] \in K_0^{\epsilon,r(A)}$ ne dépend pas de la fonction h choisie, et l'application d'assemblage de Baum-Connes est définie par l'évaluation en cette classe.

5 Géométrie asymptotique

Pour tout $z \in KK^\Gamma(A,B)$, il existe un morphisme contrôlé

$$\tau_X(z) : K_*(C^*(X,A)) \to K_*(C^*(X,B))$$

6 English Notes

In a serie of papers, H. Oyono-Oyono and G. Yu have defined a controlled version of operator K-theory, [8] [6] [7], that allows them to define a quantitative and local assembly map, and a related Baum-Connes Conjecture. The aim of this work is to extend their work to the realm of groupoids. In a second part, we shall see how this setting can help us understand better the relation between the coarse-Baum-Connes conjecture and the Baum-Connes Conjecture with coefficient for groupoids. Indeed, in [20] and [18], G. Skandalis, J-L.Tu and G. Yu proved that there is a commutative diagramm

$$\begin{tikzcd} K_*(X) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\simeq"] & K_*(C^*X) \arrow[d, "\simeq"] \\ K_*(\mathcal{E}\Gamma) \arrow[r, "\mu_r"] & K_*(C_r\Gamma) \end{tikzcd}$$

where :

- the left sides are K-homology of certain spaces, the left sides are K-theory of certain C^*-algebras,
- the first line is the coarse assembly map associated to a coarse space X, the second being the assembly map for groupoids associated to the coarse groupoid of X, namely $\Gamma = G(X)$,
- the vertical arrows are isomorphisms on the level of KK-groups. The left one will be studied later, the right one derives from an isomomorphism on the level of the C^*-algebras. Indeed, it has been shown that the Roe algebra is $*$-isomorphic to the crossed product of $l^\infty(X)$ by $\Gamma : C^*(X) \simeq l^\infty(X) \times \Gamma$.

We shall see that this relation is already true "locally" and factorises through quantitative K-theory. Locally here means that we can factorize the assembly map through $KK(C_0(P_d(X), B)$. Indeed, the K-homology can be expressed as an inductive limit

$$K_*(X, B) = \varinjlim_{d \to \infty} KK(C_0(P_d(X)), B) \quad \text{and}$$

hence the local.

The local quantitative assembly maps defined in [6] are of the form

$$KK^F(C_0(P_d(F)), B) \to K_*^{\epsilon,r}(B \times_r \Gamma)$$

where F is a finite group.

We will be using the bivariant functor KK^Γ introduced by P-Y. Le Gall in his thesis [4], which is a generalization of Kasparov's bifunctor for the case where Γ is a Hausdorff locally compact groupoid with Haar system. As for the KK-theory for Banach algebras introduced by V. Lafforgue [10], there is no (not yet ?) a Kasparox product in quantitative K-theory. The crucial point to define an assembly map is the existence of a morphism

$$\hat{J} : KK^\Gamma(A, B) \to Hom^*(\hat{K}_*(A), \hat{K}_*(B))$$

which allows us, for every element $x \in K_*(A)$, to consider the related index

$$Ind_x \left\{ \begin{array}{ccc} KK_*(A,B) & \to & K_*(B) \\ z & \mapsto & \hat{J}(z)(x) \end{array} \right.$$

to construct $\hat{J}$, we will mimic the construction for $\mathcal{J}$ in [6], which gives the right morphism when considering finite groups. The starting point is the following

Lemme 2. Let Γ be a Hausdorff locally compact groupoid with Haar system. Then, if A is a $\Gamma - C^*$-algebra, forming the reduced (and maximal) crossed product $A \times_r \Gamma$ is functorial in A. Moreover, if Γ is *étale*, then it preserves short semi-split filtered exact sequences of $\Gamma - C^*$-algebras, meaning that if

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

is a semi-split filtered exact sequence of $\Gamma - C^*$-algebras, then

$$0 \longrightarrow A' \times_r \Gamma \longrightarrow A \times_r \Gamma \longrightarrow A'' \times_r \Gamma \longrightarrow 0$$

is too.

Preuve 2. Let

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\Psi} A \xrightarrow{\Phi} A'' \longrightarrow 0$$

be a semi-split filtered exact sequence of $\Gamma - C^*$-algebras.

Let $f \in C_c(\Gamma, A)$ such that $\Phi_\Gamma(f) = 0$. For every $\gamma \in \Gamma$, there exists a unique $g(\gamma) \in A'$ such that $\Psi(g(\gamma)) = f(\gamma)$. But, as Ψ and Φ commute with the action of Γ, we have $g(\gamma'^{-1}\gamma) = \gamma'.g(\gamma)$, so that g is continuous.

Let $a \in A \times \Gamma$ such that $\Phi_\Gamma(a) = 0$. We can approximate a by a sequence of $f_n \in C_c(\Gamma, A)$. But, with the preceeding work on compactly supported continuous functions, there exist a sequence $g_n \in C_c(\Gamma, A')$ such that :

$$f_n = \Psi(g_n) + \sigma \circ \Phi(f_n).$$

Moreover, Im Ψ is a closed ideal in A, and $\lim ||f_n - \Psi(g_n)|| = 0$ so that $a \in$ Im Ψ : the sequence is exact in the middle. $\square$

6.1

Let X be a discrete metric space with bounded geometry and Γ its coarse groupoid. We denote by $\tilde{A}$ the $C(\Gamma)$-algebra $C_0(P_d(\Gamma))$, and by A the C^*-algebra $C_0(P_d(X))$. As $P_d(\Gamma)$ is equivariantly homeomorphic to $\beta X \times P_d(X)$, the fiber $\tilde{A}_x$ is isomorphic to A as a C^*-algebra.

Lemme 3. Let B be a C^*-algebra and $x \in X$. The morphism of groupoids $\iota : \{e_x\} \to \Gamma$ induces an isomorphism in KK-theory

$$KK_*^\Gamma(\tilde{A}, l^\infty(X,B)) \xrightarrow{\simeq} KK_*(A,B) \quad .$$

Preuve 3. Let us first check that the fiber over $x \in X$ of $\tilde{B} := l^\infty(X, B)$ is B : easily, if I_x denotes the kernel of the evaluation map $\tilde{B} \to B$ at x, $\tilde{B}_x = \tilde{B}/I_x\tilde{B} \simeq B$. Moreover, as $\tilde{A}_x \simeq A$, functoriality assures that ι induces $\iota^* : KK_*^\Gamma(\tilde{A}, l^\infty(X, B)) \to KK_*(A, B)$.

We can now construct an explicit R inverse for ι^*. Let $z = (\hat{H}_{\tilde{B}}, \Phi, T) \in \mathbb{E}^\Gamma(\tilde{A}, \tilde{B})$ be a K-cycle. By stabilization theorem, we can suppose that the Hilbert $\tilde{B}$ module is in canonical form, that is the standard separable Hilbert module over $\tilde{B}$ with usual grading. We will also suppose that T is Γ-equivariant, which is always true up to compact perturbation. The image of z under R is defined to be its restriction to x, $(\hat{H}_B, \Phi_x, T_x)$. This definition gives immediatly $R \circ \iota^* = 1$. Now let $V : s^*\hat{H}_{\tilde{B}} \to \hat{H}_{\tilde{B}}$ be the unitary implementing the action of Γ on $\hat{H}_{\tilde{B}}$. The equivariance of T can be written as

$$V_\gamma T_{s(\gamma)} V_\gamma^* = T_{r(\gamma)} \quad , \forall \gamma \in \Gamma.$$

If $T' = \iota^* \circ R(T)$, it is the constant operator with fiber $T_x \in \mathcal{L}_B(\hat{H}_B)$ on the trivial Hilbert module $\bigoplus_{y \in X} (H_{\tilde{B}})_x$. Define $V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$. It is unitary and intertwines T and T', i.e. the cycles are homotopic and $\iota^* \circ R = 1$.

□

Lemme 4. The uniform Roe algebra of X and the Roe algebra of X are $*$-isomorphic to crossed-product algebras by Γ, respectively :

$$\begin{array}{l} C_u^* X \simeq l^\infty(X, \mathbb{K}) \rtimes \Gamma \\ C^* X \simeq l^\infty(X, \mathbb{K} \otimes B) \rtimes \Gamma \end{array} .$$

Preuve 4. □

7 Assembly maps for groupoids and for coarse spaces

7.1 The case of a finitely generated group

Let Γ be a discrete finitely generated group. The word length provides a structure of metric space, of which the class up to coarse equivalence is independent of the set of generators.

Denoting $C^*(\Gamma)$ the Roe algebra, i.e. the C^*-algebra generated by locally compact operators on $l^2(\Gamma) \otimes H$ with finite propagation, we can show that

$$C_u^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma) \times_\alpha \Gamma$$

$$C^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma, \mathfrak{K}(H)) \times_\alpha \Gamma.$$

Here $\alpha \in Aut(A)$ is the automorphism encoding the left action of Γ on A :

$$\alpha_\gamma(a) = s \to a_{s\gamma^{-1}}.$$

Let S_γ be the operator acting on $l^2(\Gamma)$ as

$$(S_\gamma \eta)_s = \eta_{s\gamma^{-1}}.$$

We see $l^\infty(\Gamma)$ as an algebra of operator, acting by left multiplication on $l^2(\Gamma)$. Then

$$S_\gamma a S_\gamma^* = \alpha_\gamma(a),$$

for any $a \in l^\infty(\Gamma)$ and $\gamma \in \Gamma$. The algebra $C^*(\Gamma)$ is generated by finite sums of the form

$$\sum_\gamma a_\gamma S_\gamma$$

which are of finite propagation $\max_\gamma\{l(\gamma) : a_\gamma \neq 0\}$ and locally compact.

7.2 Relation between the coarse and the groupoid assembly maps

We have to show that there is an isomorphism

$$KX_*(X) \to KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K})).$$

Let us recall that the Stone-Cech compactification of our coarse groupoid $\Gamma = G(X)$ identified itself to the spectrum of the bounded continuous functions over X, which is discrete. We have

$$C(\beta X) \simeq l^\infty(X)$$

and we can think of $C(\beta X)$-algebras as $l^\infty(X)$-algebras.

The left handside $KX_*(X)$ is defined as the limit of the directed groups

$$KK_*(C_0(P_E(X), \mathbb{C})$$

when E is an entourage of X. Here $P_E(X)$ denotes the Rips complex defined by the entourage E, which is the set of simplexes $[x_0, ..., x_n]$ such that $(x_i, x_j) \in E$.

Now the classifying space $\mathcal{E}\Gamma$ of the groupoid $G(X)$ is unique up to homotopy, and can be realised by the space of measures μ on $G(X)$ which satisfied $s^*\mu$ is a Dirac measure on $G^{(0)} = \beta X$, and $\frac{1}{2} < |\mu| \leq 1$. Saying that $s^*\mu$ is a Dirac measure is the same as demanding μ to be supported in a fiber Γ_x for some $x \in X$. The abelian group $KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$ is defined as the inductive limit of

$$KK_{G(X)}\,(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$$

when Y is a Γ-compact space of $\mathcal{E}\Gamma$.

Let E be an entourage of X. A Fredholm module (H, ϕ, F) in $E(C_0(P_E(X)), \mathbb{C})$ is defined by a Hilbert space H, a $*$-homomorphism $\phi : C_0(P_E(X)) \to \mathcal{L}(H)$ and an operator F satisfying all definitions.
We can form the $l^\infty(X, \mathfrak{K})$-module $\mathcal{E} = H \otimes_{\mathbb{C}} l^2(\Gamma, \mathfrak{K}))$, and extend ϕ into $\phi \otimes id : C_0(P_E(X)) \to \mathcal{L}(H \otimes l^2(\Gamma, \mathfrak{K})$. We do the same with $F : \hat{F} := F \otimes id$. Then, as $P_E(X)$ identifies itself as a G-compact of $\mathcal{E}G$, $(\mathcal{E}, \phi \otimes id, F \otimes id)$ defines an element of $KK_{G(X)}\,(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$.

8 Correspondance between the coarse K-homology of a space and the one of its coarse groupoid

The aim of this section is to give a proof of a result of [20], in which it is stated that the following diagramm commutes :

$$\begin{tikzcd} KX_*(X, B) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\simeq"] & K_*(C^*X, B) \arrow[d, "\simeq"] \\ K_*(G(X), l^\infty(X, B)) \arrow[r, "\mu"] & K_*(C_r(G(X)), B). \end{tikzcd}$$

The vertical arrow from the left comes from an isomorphism at the C^*-algebraic level, as

$$C^*(X) \simeq l^\infty(X) \times G(X).$$

The rest of this section is devoted to describe the vertical arrow from the right in the langage of Kasparov KK-theory, i.e.

$$\varinjlim_{d} KK(C_0(P_d(X)), B) \to \varinjlim_{Y \subset \mathcal{E}G(X)} KK(C_0(Y), B),$$

were the inductive limite on the right is taken among the proper $G(X)$-compact subsets Y of the universal classifying space for proper actions of $G(X)$.

Recall from [19] that we can take for $\mathcal{E}G(X)$ the space $\mathfrak{M}$ of positive measures μ on $G(X)$ satisfying :
– $\frac{1}{2} < \mu(G(X)) \leq 1$,
– $s^*\mu$ is a Dirac measure, i.e. its support consists of arrows of $G(X)$ that all source from the same base point of βX.

If $\mathfrak{M}_d$ denotes the space of measures μ of $\mathfrak{M}$ such that :
– μ is a probability measure
– for all γ and γ' in the support of μ, $\gamma'\gamma^{-1}$ is d-controlled, i.e. $d(r(\gamma), r(\gamma')) \leq d$, then $\mathfrak{M} = \varinjlim \mathfrak{M}_d$.

The Rips complex of X, denoted $P_d(X)$, is the topological space of the complexes of diameter less than d, identified with probability measures on X with support of diameter less than d, with the weak topology coming from $C_c(C)$. We will write $[y, t]$ for a point of a simplex defined by barycentric coordinates of k points $y_1, ..., y_k$, ie $\sum t_j \delta_{y_j}$. To such a point $[y, t]$ and an element of the Stone-Cech compactification $w \in \beta X$, we can associate a measure of $\mathfrak{M}_d$ in the following way. As $G(X)$ is a principal and transitive groupoid, there exists only one arrow γ_j such that $s(\gamma_j) = x$ and $r(\gamma_j) = y_j$. To $z = ([y, t], w) = (z_w, w)$, we associate

$$\phi_d(z) = \sum_{j=1,k} t_j \delta_{\gamma_j} \in \mathfrak{M}_d.$$

Proposition 2. The map

$$\phi_d : P_d(X) \times \beta X \to \mathfrak{M}_d$$

is an homeomorphism.

Preuve 5. It is clearly bijective. The bicontinuity comes from the identity :

$$\langle z_w, f \rangle = \langle \phi_d(z), f \circ r \rangle$$

for all $z = (z_w, w) \in P_d(X) \times \beta X$, and $f \in C_c(X)$. □

This homeomorphism ϕ_d gives an $*$-isomorphism at the level of C^*-algebras

$$\Psi_d : C_0(\mathfrak{M}_d) \to C_0(P_d(X) \times \beta X).$$

Let $(\mathcal{E}, \pi, F) \in \mathbb{E}(C_0(P_d(X)), B)$ be an elliptic operator. **A FINIR**

Let $X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_j \subset ...$ the n-skeleton decomposition associated to the simplicial structure of the Rips complex $P_d(X)$, and similarly $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}_1 \subset ... \subset \tilde{X}_j \subset ...$ for $\mathfrak{M}_d$, and

$$Z_j = C_0(X_j) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_j = C_0(\tilde{X}_j).$$

$$Z_{j-1}^j = C_0(X_j - X_{j-1}) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_{j-1}^j = C_0(\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j-1}).$$

We will show the isomorphism by a Mayer-Vietoris type argument. By applying the KK-theory to the exact sequence :

$$0 \longrightarrow C_0(X_j - X_{j-1}) \longrightarrow C_0(X_j) \longrightarrow C_0(X_{j-1}) \longrightarrow 0$$

we have a commutative diagramm with exact lines :

$$\begin{tikzcd}
KK_*(Z^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta^j_{j-1}"] & KK_*(Z_{j-1},B) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{j-1}"] & KK_*(Z_j,B) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_j"] & KK_*(Z^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta^j_{j-1}"] & KK_*(Z_{j-1},B) \arrow[d, "\theta_{j-1}"] \\
KK_*(\tilde{Z}^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] & KK_*(\tilde{Z}_{j-1},B) \arrow[r] & KK_*(\tilde{Z}_j,B) \arrow[r] & KK_*(\tilde{Z}^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] & KK_*(\tilde{Z}_{j-1},B)
\end{tikzcd}$$

The five lemma assures that if θ_{j-1} and θ^j_{j-1} are isomorphisms, then so is θ_j. Moreover, $X_j - X_{j-1}$ is equivariantly homeomorphic to $\mathring{\sigma}_j \times \Sigma_j$, where $\mathring{\sigma}_j$ denotes the interior of the standard simplex, and Σ_j is the set of centers of j-simplices of X_j. Bott periodicty assures then that, if θ_{j-1} is an isomorphism, then so is θ^j_{j-1}. By induction, proving that θ_0 is an isomorphism concludes the proof.

Références

[1] J.P. Serre A. Borel. Le théorème de riemann-roch. *Bulletin de la S.M.F*, 86 :97–136, 1958.

[2] J. Bellissard. Gap labelling theorems for schrödinger operators. *From Number theory to Physics, Les Houches*, 89 :538–630, 1993.

[3] Joachim Cuntz. K-theory and c^*-algebras. *Algebraic K-theory, Number Theory, Geometry and Analysis*, pages 55–79, 1982.

[4] Pierre-Yves Le Gall. Thesis.

[5] Alexandre Grothendieck. Produits tensoriels d'espace topologiques et espaces nucléaires. *Séminaire N. Bourbaki*, 69 :193–200, 1951-1954.

[6] G. Yu H. Oyono-Oyono. On quantitative operator k-theory. *Annales de l'Institut Fourier.*

[7] G. Yu H. Oyono-Oyono. Persitance approximation property and controlled k-theory.

[8] G. Yu H. Oyono-Oyono. Ktheory for the maximal roe algebra of certain expanders. *Journal of functionnal analysis*, 257 :3239–3292, 2009.

[9] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* 2001.

[10] Vincent Lafforgue. Banach kk-theory and the baum-connes conjecture. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. II (Beijing, 2002)(Higher Ed. Press, Beijing) :795–812, 2002.

[11] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for k-groups and ext-groups of certain cross-products of c^*-algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.

[12] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., 1990.

[13] Alain Connes Paul Baum. Geometric k-theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.

[14] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and k-theory of group c^*-algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.

[15] Michael V. Pimsner. A class of c^*-algebras generalizing both cuntz-krieger algebras and crossed products by $\mathcal{F}$. *Fields Institute Communications*, 12 :189–212, 1997.

[16] Jean Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras.* Springer-Verlag, 1980.

[17] Marc Rieffel. c^*-algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics.*, 93(2) :415–429, 1981.

[18] Tu J.L. Yu G. Skandalis, G. The coarse baum-connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4) :807–834, 2002.

[19] Jean-Louis Tu. a conjceture de novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-theory*, 16(2) :129–184, 1999.

[20] Jean-Louis Tu. The baum-connes conjecture for groupoids. *C^*-algebras*, 18 :227–242, 1999.

[21] Jean-Louis Tu. The coarse baum-connes conjecture and groupoids ii. *New York J. Math.*, 18 :1–27, 2012.

[22] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras, a friendly approach.* Oxford University Press, 1993.