

# Notes

Clément Dell'Aiera

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Méthode Dirac-Dual-Dirac</b>	<b>4</b>
2.1	Travaux de Vincent Lafforgue . . . . .	6
2.2	Construction de la flèche . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Géométrie à l'infini</b>	<b>7</b>

# 1 Introduction

La conjecture de Baum-Connes dérive de problèmes posés au départ en théorie des représentations. Les analogies entre la théorie de Fourier et les représentations des groupes finis ont ouvert une voie vers les représentations des groupes localement compacts : faire de l'analyse harmonique sur un groupe revient à décomposer en composantes irréductibles la représentation régulière gauche sur les fonctions de carrés intégrables sur le groupe  $L^2(G)$ . Ce problème est complètement compris pour les groupes compacts ainsi que pour les groupes abéliens localement compacts. À partir des travaux de Harish-Chandra, le cas des groupes de Lie réductifs commence à être attaquant. Ses travaux ont permis, entre autres, de déterminer la mesure de Plancherel du groupe, donc de décomposer la représentation régulière gauche modulo les ensembles de représentations de mesure nulle. À l'époque de ces travaux, envisager l'étude des groupes de Lie réductifs comme une classe n'était pas une démarche évidente : les mathématiciens de l'époque pensaient que les techniques d'algèbres d'opérateurs et d'analyse fonctionnelle permettraient de généraliser les résultats obtenus à tous les groupes localement compacts.

Fixons quelques notations. On note  $G$  un groupe localement compact ; si le groupe est discret, on le notera plus volontier  $\Gamma$ . Le but visé est donc l'étude des classes d'équivalence des représentations unitaires du groupe, c'est un ensemble appelé dual unitaire du groupe et noté  $\hat{G}$ . Les représentations  $\pi : G \rightarrow U(H)$  ne sont pas nécessairement finies dimensionnelles,  $H$  peut être un espace de Hilbert de dimension infinie, mais on demande tout de même à  $\pi$  d'être fortement continue : pour tout  $g \in G$ , la fonction  $v \mapsto \pi(g)v$  est continue.

Le point de vue développé par Alain Connes et appelé par lui *géométrie non-commutative* s'applique lorsque les techniques d'études habituelles sont mises en défaut lors de l'attaque de  $\hat{G}$ . Par exemple, si le dual unitaire n'est pas séparé, ou pire, si chaque point est dense. Une remarque : cela arrive avec des groupes faciles à construire. Par exemple, le groupe formé du produit croisé de  $\mathbb{Z}^2$  par l'action de  $\mathbb{Z}$ , donné par l'automorphisme  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , voir AC. Dans un tel cas, l'algèbre des fonctions continues sur  $\hat{G}$  tendant vers 0 à l'infini ne donnent aucune information et identifient le dual unitaire à un point. Le cadre non-commutatif donne une piste pour tenter de s'extraire de cette difficulté en associant à notre espace une  $C^*$ -algèbre, non-nécessairement commutative, à la place de  $C_0(\hat{G})$ . Cette algèbre est construite comme la complétion de  $C_c(G)$  pour la norme d'opérateur donnée par représentation régulière gauche, et est appelée  $C^*$ -algèbre réduite du groupe  $C_r^*G$ .

Pour étudier une  $C^*$ -algèbre, une bonne idée est de commencer par calculer sa  $K$ -théorie. C'est exactement ce que propose la conjecture de Baum-Connes, le calcul de  $K_*(C_r^*G)$ . Bien que  $C_r^*G$  soit un objet plutôt mystérieux, Baum et Connes ont conjecturé en '82 l'existence d'un groupe abélien de nature "géométrique"  $K^{top}(G)$  et d'un morphisme

$$\mu_r : K_*^{top}(G) \rightarrow K_*(G)$$

censé être un isomorphisme. Le point important est que le membre de gauche

peut se calculer facilement, et donc donne le membre de droite en cas d'isomorphisme. Pourquoi observer la  $K$ -théorie de  $C_r^*G$ ? Par exemple, dans le cas abélien,  $C_r^*G \simeq C_0(\hat{G}_r)$  et donc  $K_*(C_r^*G) \simeq K_*(\hat{G}_r)$ , où la  $K$ -théorie du membre de droite est la théorie de Atiyah-Hirzebruch, qui est une théorie homologique généralisée (au sens de Steenrod) A VERIFIER. Ici  $\hat{G}_r$  est le dual tempéré du groupe, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires du groupe faiblement contenues dans la régulière gauche, muni de la topologie de Fell. Si  $G$  n'est pas abélien, cet espace peut ne pas être  $T1$ ! Par contre, chaque point isolé de  $\hat{G}_r$  fournit un projecteur de  $C_r^*G$ , donc un élément de  $K$ -théorie.

En '94, Baum, Connes et Higson construisent effectivement ce groupe  $K^{top}(G)$  et l'application d'assemblage  $\mu_r$  en utilisant la  $KK$ -théorie bivariante de Kasparov :

$$K^{top}(G) = \varinjlim_{XG\text{-compact propre}} KK(C_0(X), \mathbb{C}).$$

Une remarque : les travaux de Harish-Chandra permettent le calcul de  $K_*(C_r^*G)$  pour  $G$  un groupe de Lie réductif connexe, et on sait calculer la  $K$ -homologie équivariante  $K^{top}(G)$  d'un tel groupe. Wasserman a donné une preuve dans une note de l'Académie des Sciences en '87 de la conjecture de Connes-Kasparov pour ces groupes, et on sait depuis que cette conjecture est équivalente, pour  $G$  réductif connexe, à la conjecture de Baum-Connes.

Dans la suite, nous présenterons différentes méthodes qui servent à démontrer la conjecture de Baum-Connes.

## 2 Méthode Dirac-Dual-Dirac

Cette section se base sur un exposé donné par Maria Paula Gomez Aparicio lors du groupe de travail "KK-théorie et groupes quantiques" à Paris Diderot en janvier 2015.

**Définition 1.** Un élément  $\gamma \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  est dit "de Kasparov" s'il existe une  $G$ - $C^*$ -algèbre  $A$  et deux éléments  $d \in KK^G(A, \mathbb{C})$  et  $\eta \in KK^G(\mathbb{C}, A)$  tels que

$$\gamma = \eta \otimes_A d$$

et pour tout  $G$ -espace propre  $Y$ ,

$$p^*(\gamma) = 1 \in KK^{G \rtimes Y}(C_0(Y), C_0(Y)),$$

où  $p : Y \rightarrow *$  est la projection sur le point.

Pour rappel, la projection induit un morphisme de groupoïdes  $Y \rtimes G \rightarrow G$ , et la  $KK$ -théorie bivariante généralisée par P-Y. Le Gall est contravariante en le groupoïde, donc  $p^* : KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow KK^{G \rtimes Y}(p_*\mathbb{C}, p_*\mathbb{C})$ , et bien sûr  $p_*\mathbb{C} \simeq C_0(Y)$ .

La condition  $p^*(\gamma)$  assure que  $\gamma$  agit sur  $K^{top}(G)$  par l'identité. En effet...

Cet élément  $\gamma$  a été introduit par Kasparov dans ses travaux sur la conjecture de Novikov. Voici entre autres ce qu'il démontre :

- tout groupe presque connexe ( $G/G_0$  est compact,  $G_0$  étant la composante connexe de l'identité) admet un élément  $\gamma$ .
- un tel élément est unique et c'est un idempotent,
- si un groupe  $G$  possède un élément  $\gamma$ , alors

$$\mu_r(K^{top}(G)) = \gamma \cdot K(C_r^*G) := \{x \otimes j_{G,r}(\gamma) : x \in K(C_r^*G)\}.$$

**Résultat 1** (Tu). – Si  $G$  a un élément  $\gamma$ , alors  $\mu_r$  est injective.

- Si de plus  $\gamma = 1$  dans  $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , alors  $\mu_r$  est surjective.

Une propriété assure que l'injectivité passe aux sous-groupes fermés :

**Proposition 1.** Si  $G$  a un élément de Kasparov, alors tout sous-groupe fermé de  $G$  en a un.

**Résultat 2.** L'existence d'un élément  $\gamma$  a été démontrée pour tous les groupes localement compacts agissant de façon continue, propre et isométrique sur :

- une variété riemannienne  $(M, g)$  complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, (Kasparov '88)
- un immeuble de Bruhat-Tits affine, (Kasparov Skandalis '91)
- un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique et faiblement "bolique". (Kasparov Skandalis '03)

Vincent Lafforgue note la classe formée de ces groupes  $\mathcal{C}$ . Elle contient tous les sous-groupes de Lie (et ses sous-groupes fermés), donc leurs réseaux. On sait donc que  $SL(3, \mathbb{R})$  et  $SL(3, \mathbb{Z})$  ont un élément  $\gamma$ .

On sait que  $\gamma = 1 \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  pour tous les groupes a- $T$ -menables, i.e. qui admettent une action propre et isométrique sur un espace de Hilbert affine.

Bien que ces travaux soient encourageants, rien n'était su pour des groupes ayant la propriété (T).

**Définition 2.** Soit  $G$  un groupe localement compact et  $\pi : G \rightarrow U(H)$  une représentation unitaire.

On dit que  $\pi$  admet des vecteurs presque invariants si, pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout compact  $K$  de  $G$ , il existe un vecteur  $\xi$   $(K, \epsilon)$ -invariant, i.e. tel que

$$\sup_{h \in K} \|\pi(h)\xi - \xi\| < \|\xi\|.$$

Un ensemble  $Q$  de  $G$  est dit de Kazhdan s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que toute représentation unitaire admettant des vecteurs  $(Q, \epsilon)$ -invariants admet aussi un vecteurs non nul et invariant.

Le groupe  $G$  a la propriété (T) s'il possède un ensemble de Kazhdan compact.

La propriété (T) est équivalente au fait que la représentation triviale  $1_G$  soit isolée dans le dual unitaire du groupe. Il est alors impossible de construire une homotopie entre n'importe quelle représentation unitaire et  $1_G : \gamma \neq 1$  dans  $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ . L'existence de l'élément  $\gamma$  et les méthodes utilisées jusque ici ne permettent donc pas de montrer la surjectivité de l'application d'assemblage pour un groupe qui a (T).

Pour un tel groupe, il existe un projecteur  $p$  dans la  $C^*$ -algèbre maximale  $C^*G$  du groupe tel que, pour toute représentation unitaire  $(\pi, H)$ ,  $\pi(p)$  soit le projecteur orthogonal  $P_\pi$  sur le sous-espace des vecteurs invariants  $H^G$ . On nomme  $p$  le projecteur de Kazhdan. Comme on va le voir, ce projecteur est invisible du point de vue de la  $C^*$ -algèbre réduite. La représentation régulière gauche

$$\lambda_G : G \rightarrow U(L^2(G))$$

se prolonge en un  $*$ -homomorphisme  $C^*G \rightarrow C_r^*G$  toujours noté  $\lambda_G$ . Alors si  $G$  est infini, les fonctions constantes ne sont pas dans  $L^2(G)$ , ce sont pourtant les seules qui pourraient être invariantes sous l'action de  $\lambda_G$  : le sous-espace des vecteurs invariants est nul. Mais  $\lambda_G(p)$  est le projecteur orthogonal sur ce sous-espace, donc est nul :

$$\lambda_G(p) = 0.$$

Cela assure que la méthode Dirac-Dual-Dirac ne permet pas de montrer Baum-Connes pour les groupes qui ont (T) : en effet, (qui ?) a montré que si  $G$  vérifie Baum-Connes, alors

$$\lambda_G^* : K_*(C^*G) \rightarrow K_*(C_r^*G)$$

est un isomorphisme. Mais l'existence d'un projecteur de Kazhdan, équivalente à la propriété (T), en empêche l'injectivité.

## 2.1 Travaux de Vincent Lafforgue

Si  $n$  est un entier supérieur à 3,  $SL(n, \mathbb{R})$  et  $SL(n, \mathbb{Z})$  ont la propriété (T). De façon générale, tous les groupes de Lie semi-simples de rang réel supérieur à 2 ont (T). La conjecture de Connes-Kasparov pour  $SL(n, \mathbb{R})$  ( ou pour tout groupe de Lie réductif connexe ) donne l'injectivité de ses réseaux, propriété stable par passage aux sous-groupes fermés. Toutefois, comme expliqué dans la section précédente, on ne peut montrer que  $\gamma = 1$ , ce qui assurerait la surjectivité. Avant de continuer, mentionnons que même après les travaux de Lafforgue, la conjecture de Baum-Connes est toujours ouverte pour  $SL(3, \mathbb{Z})$ .

La première idée de Lafforgue est de remplacer  $KK^G$  par un bifoncteur  $KK_{ban}^G$  défini sur la catégorie des espaces de Banach. Cette généralisation permet de passer des représentations unitaires d'un groupe localement compact à des représentations plus générales  $G \rightarrow GL(E)$  sur des espaces de Banach  $E$ . On peut aussi prendre des représentations sur des espaces de Hilbert, mais non nécessairement isométrique. Lafforgue considère des représentations qu'il appelle "à croissance modérée", qui vérifient

$$\|\pi(g)\|_E \leq Ce^{l(g)}, \forall g \in G$$

où  $l : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une longueur sur le groupe. Il démontre alors que pour tous les groupes de Lie et leurs réseaux,

$$\gamma = 1 \text{ dans } KK_{ban}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

Toutefois, le changement de théorie bivariente a un prix, et l'espace d'arrivée de l'application d'assemblage associée n'est plus  $K_*(C_r^*G)$  mais  $K_*(L^1(G))$ . Cela démontre tout de même la conjecture de Bost : pour tout groupe de Lie,  $\mu_{L^1(G)} : K^{top}(G) \rightarrow K(L^1(G))$  est un isomorphisme. De plus, on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} K^{top}(G) & \xrightarrow{\mu_{L^1}} & K(L^1(G)) \\ & \searrow \mu_r & \downarrow \\ & & K(C_r^*G) \end{array},$$

le problème étant de déterminer l'isomorphie ou non de la flèche verticale.

De manière plus générale, Lafforgue définit ce qu'il appelle des complétions inconditionnelles de  $C_c(G)$ . Munissant l'algèbre  $C_c(G)$  d'une norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(G)}$  telle que

$$\text{si } |f_1(g)| \leq |f_2(g)| \text{ alors } \|f_1\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f_2\|_{\mathcal{A}(G)},$$

on la complète en une algèbre de Banach  $\mathcal{A}(G)$ , et montre qu'elle s'injecte dans  $C_r^*G$ , ce qui impose une factorisation

$$\begin{array}{ccc} K^{top}(G) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}(G)}} & K(\mathcal{A}(G)) \\ & \searrow \mu_r & \downarrow \\ & & K(C_r^*G) \end{array}.$$

Si l'on trouve une telle complétion inconditionnelle  $\mathcal{A}(G)$  qui soit stable par calcul fonctionnel holomorphe, et dense dans  $C_r^*G$ , alors le diagramme commutatif précédent montre que Baum-Connes est vraie pour  $G$ , par principe d'Oka. (à détailler) Lafforgue a montré cela pour les groupes de Lie, et leurs réseaux qui ont la propriété de décroissance rapide (RD).

Voici quelques exemples pour finir cette section. Pour  $SL(n, \mathbb{R})$ , on retrouve l'algèbre de Schwartz. Pour tous les sous-groupes discrets des groupes de Lie qui ont (RD), c'est l'algèbre de Jolissaint qui apparaît. Tous les réseaux co-compacts de  $SL(3, \mathbb{R})$  (pour  $n > 3$ , c'est ouvert!), ainsi que ceux des groupes hyperboliques ou encore de 2 groupes exceptionnels, ont (RD).

## 2.2 Construction de la flèche

## 3 Géométrie à l'infini

Nous l'avons vu, l'application d'assemblage peut se construire comme la composée de l'homomorphisme de descente  $j_{G,r}$  avec l'évaluation en un élément de

$K$ -théorie de  $C_0(X)$  :

$$KK^G(C_0(X), B) \xrightarrow{j_{G,r}} KK(C_0(X) \rtimes_r G, B \rtimes_r \bar{G}) \xrightarrow{\otimes_{C_0(X)}^{[e_G]}} K(B \rtimes_r G)$$

puis en passant à la limite inductive sur les  $G$ -espaces propres et  $G$ -compacts  $X$ . Grâce à la théorie bivariante pour les actions de groupoïdes développée par P-Y. LeGall, cette approche fonctionne également pour  $G$  un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar, et l'on peut parler de conjecture de Baum-Connes pour un tel groupoïde.

Yu a défini une application d'assemblage sur les espaces métriques munis d'une structure "à l'infini" (*coarse* en anglais), ce que j'appellerai espaces asymptotiques. Pour tout espace asymptotique  $(X, d, \mathcal{E})$  et toute  $C^*$ -algèbre  $B$ , il existe une  $C^*$ -algèbre  $C^*(X, B)$ , appelée algèbre de Roe de  $X$  à coefficients dans  $B$ , construite comme une certaine complétion de l'algèbre des opérateurs de propagation finie localement compacts. De plus, pour toutes  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$ , il existe un homomorphisme

$$\tau_X : KK(A, B) \rightarrow KK(C^*(X, A), C^*(X, B))$$

analogue à la transformation de Kasparov  $j_G$ . L'application d'assemblage "à l'infini"  $A_{X,B}$ , à coefficients dans  $B$ , est alors définie par la limite inductive sur  $d$  des composées

$$KK(C_0(P_d(X)), B) \xrightarrow{\tau_X} KK(C^*(X, C_0(P_d(X))), C^*(X, B)) \xrightarrow{-\otimes^{[\lambda]}} K(C^*(X, B)).$$

Cela définit une application d'assemblage asymptotique  $A_{X,B} : KX_*(X, B) \rightarrow K(C^*(X, B))$ , où  $KX_*(X, B) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ d \rightarrow \infty}} KK(C_0(P_d(X)), B)$  est une version non équivariante de la  $K$ -homologie de  $\tilde{X}$ .

**Conjecture 1** (Baum-Connes asymptotique). Si  $X$  est à géométrie uniformément bornée, alors  $A_X$  est un isomorphisme.

Ce point de vue constitue une des stratégies possibles pour démontrer Baum-Connes pour une certaine classe de groupes. Si  $\Gamma$  est un groupe discret finiment engendré, on peut construire, relativement à n'importe quel système de générateurs  $S$ , une métrique invariante à gauche, et elle est unique à équivalence asymptotique près. Il existe donc une structure "à l'infini" naturelle sur le groupe  $\Gamma$ , et l'on peut observer l'application d'assemblage asymptotique sur cet espace. Bien qu'a priori la conjecture de Baum-Connes pour  $\Gamma$  soit complètement décorrélée de cette situation, Yu a montré que l'application d'assemblage pour l'espace asymptotique  $(\Gamma, d_S)$  est naturellement équivalente à l'application d'assemblage pour  $\Gamma$  à coefficients dans  $l^\infty(\Gamma, H)$ ,  $H$  étant l'espace de Hilbert séparable.



## Références

- [1] J.P. Serre A. Borel. Le théorème de riemann-roch. *Bulletin de la S.M.F.*, 86 :97–136, 1958.
- [2] J. Bellissard. Gap labelling theorems for schrödinger operators. *From Number theory to Physics, Les Houches*, 89 :538–630, 1993.
- [3] Joachim Cuntz. K-theory and  $c^*$ -algebras. *Algebraic K-theory, Number Theory, Geometry and Analysis*, pages 55–79, 1982.
- [4] Pierre-Yves Le Gall. Thesis.
- [5] Alexandre Grothendieck. Produits tensoriels d’espace topologiques et espaces nucléaires. *Séminaire N. Bourbaki*, 69 :193–200, 1951-1954.
- [6] G. Yu H. Oyono-Oyono. On quantitative operator k-theory. *Annales de l’Institut Fourier*.
- [7] G. Yu H. Oyono-Oyono. Persistance approximation property and controlled k-theory.
- [8] G. Yu H. Oyono-Oyono. Ktheory for the maximal roe algebra of certain expanders. *Journal of functionnal analysis*, 257 :3239–3292, 2009.
- [9] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [10] Vincent Lafforgue. Banach  $kk$ -theory and the baum-connes conjecture. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. II (Beijing, 2002)(Higher Ed. Press, Beijing) :795–812, 2002.
- [11] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for  $k$ -groups and  $ext$ -groups of certain cross-products of  $c^*$ -algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.
- [12] Gerard J. Murphy.  *$C^*$ -algebras and operator theory*. Academic Press Inc., 1990.
- [13] Alain Connes Paul Baum. Geometric  $k$ -theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.
- [14] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and  $k$ -theory of group  $c^*$ -algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.
- [15] Michael V. Pimsner. A class of  $c^*$ -algebras generalizing both cuntz-krieger algebras and crossed products by  $F$ . *Fields Institute Communications*, 12 :189–212, 1997.
- [16] Jean Renault. *A groupoid approach to  $C^*$ -algebras*. Springer-Verlag, 1980.
- [17] Marc Rieffel.  $c^*$ -algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics*., 93(2) :415–429, 1981.
- [18] Tu J.L. Yu G. Skandalis, G. The coarse baum-connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4) :807–834, 2002.
- [19] Jean-Louis Tu. a conjcture de novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-theory*, 16(2) :129–184, 1999.
- [20] Jean-Louis Tu. The baum-connes conjecture for groupoids.  *$C^*$ -algebras*, 18 :227–242, 1999.
- [21] Jean-Louis Tu. The coarse baum-connes conjecture and groupoids ii. *New York J. Math.*, 18 :1–27, 2012.
- [22] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and  $C^*$ -algebras, a friendly approach*. Oxford University Press, 1993.