

# Notes

Clément Dell'Aiera

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Groupeïds</b>	<b>3</b>
1.1	Definitions . . . . .	3
1.2	Principal <i>étale</i> groupoids . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Stone-Cech compactification</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Asymptotic dimension</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Assembly maps for groupoids and for coarse spaces</b>	<b>8</b>
4.1	The case of a finitely generated group . . . . .	8
4.2	Relation between the coarse and the groupoid assembly maps . .	8
<b>5</b>	<b>Correspondance between the coarse <math>K</math>-homology of a space and the one of its coarse groupoid</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Application d'assemblage quantitative</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Géométrie asymptotique</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Séminaire <math>KK</math>-théorie et groupe quantique, exposés du 17 et 24 Octobre 2014</b>	<b>16</b>
8.1	Motivations . . . . .	16
8.2	Propriétés de $K_0$ . . . . .	18
8.2.1	Equivalence entre les relations d'équivalences sur les projecteurs modulo stabilisation . . . . .	18
8.2.2	Limites inductives . . . . .	20
8.2.3	Suites exactes . . . . .	21
8.3	Foncteur $K_1$ . . . . .	21
8.3.1	Définition . . . . .	21
8.3.2	Suspension . . . . .	23
8.3.3	Indice . . . . .	24
8.4	Périodicité de Bott . . . . .	25
8.4.1	Rappels . . . . .	25
8.4.2	Homologie . . . . .	26
8.4.3	Périodicité de Bott . . . . .	27
<b>9</b>	<b>Introduction</b>	<b>28</b>
<b>10</b>	<b>Méthode Dirac-Dual-Dirac</b>	<b>29</b>
10.1	Travaux de Vincent Lafforgue . . . . .	31

# 1 Groupoids

## 1.1 Definitions

**Définition 1.** A groupoid is a small category whose arrows are all invertible. More concretely, it is the data of a set  $G$  together with a set of units  $G^{(0)}$  and two maps  $r, s : G \rightarrow G^{(0)}$ . We can compose two arrows when the range of the first agrees with the source of the second. If we denote, for  $x \in G^{(0)}$ ,  $G_x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x\}$  and  $G^x = \{\gamma \in G : r(\gamma) = x\}$ , this can be rephrased as the existence of a family of maps

$$\begin{cases} G_x \times G^x & \rightarrow G \\ (\gamma, \gamma') & \mapsto \gamma\gamma' \end{cases}, \forall x \in G^{(0)}.$$

An automorphism of a groupoid is just an endofunctor which is invertible.

Depending on the situation, we will require these to be topological spaces with continuous maps, manifolds with smooth functions, etc. In these cases, we will talk about topological or smooth groupoids. For now on,  $L_\gamma$  denotes the left translation  $G^{s(\gamma)} \rightarrow G^{r(\gamma)}; \gamma' \mapsto \gamma\gamma'$ , and  $X = G^{(0)}$  is the set of units.

**Définition 2.** A Haar system  $\lambda = (\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$  is a family of borelian measures  $\lambda^x$  with support  $G^x$  such that :

1. for all continuous function with compact support  $f \in C_c(G)$ , the map  $x \mapsto \int_{G^x} f d\lambda^x$  is continuous.
2.  $\lambda$  is left-invariant w.r.t  $G$ , i.e.  $L_{\gamma,*} \lambda^{s(\gamma)} = \lambda^{r(\gamma)} \forall \gamma \in G$  or

$$\int_{G^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma') d^{s(\gamma)} \gamma' = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') d^{r(\gamma)} \gamma'.$$

From  $L_\gamma \circ \alpha = \alpha \circ L_{\alpha^{-1}(\gamma)}$ , we deduce

$$\begin{aligned} \int_{G^{s(\alpha^{-1}(\gamma))}} f(\gamma\alpha(\gamma')) d\gamma' &= \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') \frac{1}{\rho(\alpha^{-1}(\gamma^{-1}\gamma'))} d\gamma' \\ \int_{G^{s(\alpha^{-1}(\gamma))}} f(\alpha(\alpha^{-1}(\gamma)\gamma')) &= \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') \frac{1}{\rho(\alpha^{-1}(\gamma'))} d\gamma' \end{aligned}$$

and  $\rho(\gamma^{-1}\gamma') = \rho(\gamma')$ . In particular,  $\rho$  is constant on  $G_x$ , for all  $x \in X$ .

**Définition 3.** An automorphism  $\alpha$  of  $G$  preserves a Haar system  $\lambda$  if, for each  $x \in X$ ,  $\alpha_* \lambda^x$  is absolutely continuous w.r.t  $\lambda^{\alpha(x)}$  and there exists a continuous function  $\rho_\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $\rho_\alpha$  restricted to  $G^{\alpha(x)}$  is the Radon-Nikodym derivative  $\frac{d\alpha_* \lambda^x}{d\lambda^{\alpha(x)}}$ .

**Définition 4.** Given an automorphism  $\alpha$  of a groupoid  $G$ , we can form the suspension groupoid relative to  $\alpha$  as follow. It is the groupoid with arrows

$$G_\alpha = G \times \mathbb{R} / \sim \quad \text{where } (\gamma, t) \sim (\alpha(\gamma), t - 1)$$

and units

$$X_\alpha = X \times \mathbb{R} / \sim \quad \text{where } (x, t) \sim (\alpha_X(x), t - 1).$$

If  $[\gamma, t]$  and  $[x, t]$  denote the equivalence classes in  $G_\alpha$  and  $X_\alpha$  respectively, then the source and the range map are given by

$$s([\gamma, t]) = [s(\gamma), t] \quad \text{and} \quad r([\gamma, t]) = [r(\gamma), t].$$

The composition is  $[\gamma, t][\gamma', t] = [\gamma\gamma', t]$ .

**Lemme 1.** If  $\rho_\alpha \circ \alpha = \rho_\alpha$ , then the suspension groupoid  $G_\alpha$  admits a Haar system  $\lambda_\alpha$ , given by

$$\lambda^{[x, t]}(f) = \int_{G^x} \rho_\alpha(\gamma)^{-t} f([\gamma, t]) d\lambda^x(\gamma).$$

**Preuve 1.** We shall first demonstrate that this definition does make sense, i.e. that it is independent of the representant of the class  $[x, t]$ .

$$\begin{aligned} \lambda^{[x, t]}(f) &= \int_{G^x} \rho(\alpha(\gamma))^{-t} f([\gamma, t]) d^x \gamma \\ &= \int_{G^{\alpha(x)}} \rho(\gamma)^{-t} f([\alpha^{-1}(\gamma), t]) \frac{d^{\alpha(x)} \gamma}{\rho(\gamma)} \\ &= \int_{G^{\alpha(x)}} \rho(\gamma)^{-t+1} f([\gamma, t-1]) d^{\alpha(x)} \gamma = \lambda^{[\alpha(x), t-1]}(f). \end{aligned}$$

As the continuity is clear, we can conclude by showing the left-invariance.

$$\begin{aligned} \int_{G_\alpha^{[s(\gamma), t]}} f([\gamma\gamma', t]) d^{[s(\gamma), t]}[\gamma', t] &= \int_{G^{s(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma') f([\gamma\gamma', t]) d^{s(\gamma)} \gamma' \\ &= \int_{G^{r(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma^{-1}\gamma') f([\gamma', t]) d^{r(\gamma)} \gamma' \\ &= \int_{G^{r(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma') f([\gamma', t]) d^{r(\gamma)} \gamma' \end{aligned}$$

The last equality follows from the fact that  $\rho$  is constant on  $G_x$ , for all  $x \in X$ , and then

$$\int_{G_\alpha^{[s(\gamma), t]}} f([\gamma\gamma', t]) d^{[s(\gamma), t]}[\gamma', t] = \int_{G_\alpha^{[r(\gamma), t]}} f([\gamma', t]) d^{[r(\gamma), t]}[\gamma', t].$$

□

## 1.2 Principal *étale* groupoids

In this section, we are interested in locally compact groupoids. The maps  $r, s : G \rightarrow X$ , the composition and inverse maps are continuous.

**Définition 5.** A groupoid is said to be *étale* if  $r : G \rightarrow X$  is a local homeomorphism.

It is principal if the product map  $s \times r : G \rightarrow X \times X$  is one-to-one.

Let  $x \in X$  and  $\gamma \in G^x$ . If  $G$  is *étale*, there exists a neighborhood  $U$  of  $\gamma$  such that  $r|_U$  is a homeomorphism. So  $G^x \cap U = \{\gamma\}$  is open in  $G^x$ . That show that the fibers  $G^x$  are discrete for all  $x \in X$ .

**Proposition 1.** If  $G$  is a principal étale groupoid, the fibers  $G^x$  are discrete for all  $x \in X$  and the only Haar systems are the multiple of the counting measure on the fibers.

**Preuve 2.** If  $\lambda$  is a non-zero Haar system and  $G$  is principal,  $\lambda^x$  is a measure on the discrete space  $G^x$ , which entails that there exists a  $\gamma \in G^x$  such that  $\lambda(\gamma) > 0$ . By left-invariance,

$$\lambda^{r(\gamma')} \{\gamma' \gamma\} = \lambda\{\gamma\} > 0.$$

Replacing  $\gamma' = \gamma^{-1}$  in this relation, we have  $\lambda^x\{x\} > 0$ , which we can suppose equal to 1. The left invariance assures then that

$$\lambda^x\{\gamma\} = 1 \quad \forall \gamma \in G^x.$$

□

## 2 Stone-Cech compactification

Let  $X$  be a topological space. The Stone-Cech compactification of  $X$ , denoted by  $\beta X$ , is defined as the compact Hausdorff space, unique up to homeomorphism, together with a  $C_b(X)$ -embedding  $\phi_X : X \rightarrow \beta X$  such that, for any continuous map  $f : X \rightarrow K$  in a compact space  $K$ , there exists a unique continuous map  $\tilde{f} : \beta X \rightarrow K$  that makes the following diagram commutes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow \phi_X & \nearrow \tilde{f} & \\ \beta X & & . \end{array}$$

The universal property of the Stone-Cech compactified makes it a functor from the category of topological spaces to the category of compact Hausdorff spaces. Indeed, it is general property that, if we are given two categories  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}'$  and a functor  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , such that for every functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , there exists

Let  $X$  be a compact Hausdorff space. Then the maximal ideals of  $C(X)$  are in a one-to-one correspondence with the points of  $X$ . Explicitely, to a point  $p \in X$  corresponds the maximal ideal

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}.$$

If one endorses the spaces of maximal ideals of  $C(X)$  with the Stone topology, this correspondence  $p \mapsto \mathfrak{M}_p$  is actually a homeomorphism. Now, it is a theorem that when  $X$  is just locally compact,  $C(\beta X)$  and  $C_b(X)$  are homeomorphic, and then we have that  $\beta X \simeq \mathfrak{M}(C(\beta X)) \simeq \mathfrak{M}(C_b(X))$ . This amounts saying that we can see  $\beta X$  as the spectra of  $C_b(X)$ , for all locally compact spaces.

### 3 Asymptotic dimension

**Définition 6.** Let  $X$  be a metric space.

The multiplicity of a cover  $\mathcal{U}$  of  $X$  is the largest number  $n \in \mathbb{N}$  such that every point  $x \in X$  is contained in at most  $n$  elements of  $\mathcal{U}$ .

If  $R > 0$ , the  $R$ -multiplicity is the defined as the multiplicity restricted on covers uniformly bounded by  $R$ .

The asymptotic dimension of  $x$  is the smallest natural integer  $n \in \mathbb{N}$  such that, for all  $R > 0$ , there exists a uniformly bounded cover  $\{U_j\}$  with  $R$ -multiplicity  $n + 1$ .

Such a space is said to have finite asymptotic dimension if this number, denoted  $\dim_\infty X$ , is bounded.

## 4 Assembly maps for groupoids and for coarse spaces

### 4.1 The case of a finitely generated group

Let  $\Gamma$  be a discrete finitely generated group. The word length provides a structure of metric space, of which the class up to coarse equivalence is independent of the set of generators.

Denoting  $C^*(\Gamma)$  the Roe algebra, i.e. the  $C^*$ -algebra generated by locally compact operators on  $l^2(\Gamma) \otimes H$  with finite propagation, we can show that

$$C_u^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma) \times_\alpha \Gamma$$

$$C^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma, \mathfrak{K}(H)) \times_\alpha \Gamma.$$

Here  $\alpha \in \text{Aut}(A)$  is the automorphism encoding the left action of  $\Gamma$  on  $A$  :

$$\alpha_\gamma(a) = s \rightarrow a_{s\gamma^{-1}}.$$

Let  $S_\gamma$  be the operator acting on  $l^2(\Gamma)$  as

$$(S_\gamma \eta)_s = \eta_{s\gamma^{-1}}.$$

We see  $l^\infty(\Gamma)$  as an algebra of operator, acting by left multiplication on  $l^2(\Gamma)$ . Then

$$S_\gamma a S_\gamma^* = \alpha_\gamma(a),$$

for any  $a \in l^\infty(\Gamma)$  and  $\gamma \in \Gamma$ . The algebra  $C^*(\Gamma)$  is generated by finite sums of the form

$$\sum_\gamma a_\gamma S_\gamma$$

which are of finite propagation  $\max_\gamma \{l(\gamma) : a_\gamma \neq 0\}$  and locally compact.

### 4.2 Relation between the coarse and the groupoid assembly maps

We have to show that there is an isomorphism

$$KX_*(X) \rightarrow KK_*^{\text{top}}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K})).$$

Let us recall that the Stone-Cech compactification of our coarse groupoid  $\Gamma = G(X)$  identified itself to the spectrum of the bounded continuous functions over  $X$ , which is discrete. We have

$$C(\beta X) \simeq l^\infty(X)$$

and we can think of  $C(\beta X)$ -algebras as  $l^\infty(X)$ -algebras.

The left handside  $KX_*(X)$  is defined as the limit of the directed groups

$$KK_*(C_0(P_E(X), \mathbb{C}))$$



when  $E$  is an entourage of  $X$ . Here  $P_E(X)$  denotes the Rips complex defined by the entourage  $E$ , which is the set of simplexes  $[x_0, \dots, x_n]$  such that  $(x_i, x_j) \in E$ .

Now the classifying space  $\mathcal{E}\Gamma$  of the groupoid  $G(X)$  is unique up to homotopy, and can be realised by the space of measures  $\mu$  on  $G(X)$  which satisfied  $s^*\mu$  is a Dirac measure on  $G^{(0)} = \beta X$ , and  $\frac{1}{2} < |\mu| \leq 1$ . Saying that  $s^*\mu$  is a Dirac measure is the same as demanding  $\mu$  to be supported in a fiber  $\Gamma_x$  for some  $x \in X$ . The abelian group  $KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$  is defined as the inductive limit of

$$KK_{G(X)}(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$$

when  $Y$  is a  $\Gamma$ -compact space of  $\mathcal{E}\Gamma$ .

Let  $E$  be an entourage of  $X$ . A Fredholm module  $(H, \phi, F)$  in  $E(C_0(P_E(X)), \mathbb{C})$  is defined by a Hilbert space  $H$ , a  $*$ -homomorphism  $\phi : C_0(P_E(X)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  and an operator  $F$  satisfying all definitions.

We can form the  $l^\infty(X, \mathfrak{K})$ -module  $\mathcal{E} = H \otimes_{\mathbb{C}} l^2(\Gamma, \mathfrak{K})$ , and extend  $\phi$  into  $\phi \otimes id : C_0(P_E(X)) \rightarrow \mathcal{L}(H \otimes l^2(\Gamma, \mathfrak{K}))$ . We do the same with  $F : \hat{F} := F \otimes id$ . Then, as  $P_E(X)$  identifies itself as a  $G$ -compact of  $\mathcal{E}G$ ,  $(\mathcal{E}, \phi \otimes id, F \otimes id)$  defines an element of  $KK_{G(X)}(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$ .

## 5 Correspondance between the coarse $K$ -homology of a space and the one of its coarse groupoid

The aim of this section is to give a proof of a result of [20], in which it is stated that the following diagram commutes :

$$\begin{array}{ccc} KX_*(X, B) & \xrightarrow{A} & K_*(C^*X, B) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ K_*(G(X), l^\infty(X, B)) & \xrightarrow{\mu} & K_*(C_r(G(X)), B). \end{array}$$

The vertical arrow from the left comes from an isomorphism at the  $C^*$ -algebraic level, as

$$C^*(X) \simeq l^\infty(X) \times G(X).$$

The rest of this section is devoted to describe the vertical arrow from the right in the langage of Kasparov  $KK$ -theory, i.e.

$$\varinjlim_d KK(C_0(P_d(X)), B) \rightarrow \varinjlim_{Y \subset \mathcal{E}G(X)} KK(C_0(Y), B),$$

where the inductive limite on the right is taken among the proper  $G(X)$ -compact subsets  $Y$  of the universal classifying space for proper actions of  $G(X)$ .

Recall from [19] that we can take for  $\mathcal{E}G(X)$  the space  $\mathfrak{M}$  of positive measures  $\mu$  on  $G(X)$  satisfying :

- $\frac{1}{2} < \mu(G(X)) \leq 1$ ,
- $s^*\mu$  is a Dirac measure, i.e. its support consists of arrows of  $G(X)$  that all source from the same base point of  $\beta X$ .

If  $\mathfrak{M}_d$  denotes the space of measures  $\mu$  of  $\mathfrak{M}$  such that :

- $\mu$  is a probability measure
  - for all  $\gamma$  and  $\gamma'$  in the support of  $\mu$ ,  $\gamma'\gamma^{-1}$  is  $d$ -controlled, i.e.  $d(r(\gamma), r(\gamma')) \leq d$ ,
- then  $\mathfrak{M} = \varinjlim \mathfrak{M}_d$ .

The Rips complex of  $X$ , denoted  $P_d(X)$ , is the topological space of the complexes of diameter less than  $d$ , identified with probability measures on  $X$  with support of diameter less than  $d$ , with the weak topology coming from  $C_c(C)$ . We will write  $[y, t]$  for a point of a simplex defined by barycentric coordinates of  $k$  points  $y_1, \dots, y_k$ , ie  $\sum t_j \delta_{y_j}$ . To such a point  $[y, t]$  and an element of the Stone-Cech compactification  $w \in \beta X$ , we can associate a measure of  $\mathfrak{M}_d$  in the following way. As  $G(X)$  is a principal and transitive groupoid, there exists only one arrow  $\gamma_j$  such that  $s(\gamma_j) = x$  and  $r(\gamma_j) = y_j$ . To  $z = ([y, t], w) = (z_w, w)$ , we associate

$$\phi_d(z) = \sum_{j=1, k} t_j \delta_{\gamma_j} \in \mathfrak{M}_d.$$

**Proposition 2.** The map

$$\phi_d : P_d(X) \times \beta X \rightarrow \mathfrak{M}_d$$

is an homeomorphism.

**Preuve 3.** It is clearly bijective. The bicontinuity comes from the identity :

$$\langle z_w, f \rangle = \langle \phi_d(z), f \circ r \rangle$$

for all  $z = (z_w, w) \in P_d(X) \times \beta X$ , and  $f \in C_c(X)$ . □

This homeomorphism  $\phi_d$  gives an  $*$ -isomorphism at the level of  $C^*$ -algebras

$$\Psi_d : C_0(\mathfrak{M}_d) \rightarrow C_0(P_d(X) \times \beta X).$$

Let  $(\mathcal{E}, \pi, F) \in \mathbb{E}(C_0(P_d(X)), B)$  be an elliptic operator. **A FINIR**

Let  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_j \subset \dots$  the  $n$ -skeleton decomposition associated to the simplicial structure of the Rips complex  $P_d(X)$ , and similarly  $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}_1 \subset \dots \subset \tilde{X}_j \subset \dots$  for  $\mathfrak{M}_d$ , and

$$Z_j = C_0(X_j) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_j = C_0(\tilde{X}_j).$$

$$Z_{j-1}^j = C_0(X_j - X_{j-1}) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_{j-1}^j = C_0(\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j-1}).$$

We will show the isomorphism by a Mayer-Vietoris type argument. By applying the  $KK$ -theory to the exact sequence :

$$0 \longrightarrow C_0(X_j - X_{j-1}) \longrightarrow C_0(X_j) \longrightarrow C_0(X_{j-1}) \longrightarrow 0$$

we have a commutative diagramm with exact lines :

$$\begin{array}{ccccccccc}
KK_*(Z_{j-1}^j, B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(Z_{j-1}, B) & \longrightarrow & KK_*(Z_j, B) & \longrightarrow & KK_*(Z_{j-1}^j, B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(Z_{j-1}, B) \\
\downarrow \theta_{j-1}^j & & \downarrow \theta_{j-1} & & \downarrow \theta_j & & \downarrow \theta_{j-1}^j & & \downarrow \theta_{j-1} \\
KK_*(\tilde{Z}_{j-1}^j, B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(\tilde{Z}_{j-1}, B) & \longrightarrow & KK_*(\tilde{Z}_j, B) & \longrightarrow & KK_*(\tilde{Z}_{j-1}^j, B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(\tilde{Z}_{j-1}, B)
\end{array}$$

The five lemma assures that if  $\theta_{j-1}$  and  $\theta_{j-1}^j$  are isomorphisms, then so is  $\theta_j$ . Moreover,  $X_j - X_{j-1}$  is equivariantly homeomorphic to  $\mathring{\sigma}_j \times \Sigma_j$ , where  $\mathring{\sigma}_j$  denotes the interior of the standard simplex, and  $\Sigma_j$  is the set of centers of  $j$ -simplices of  $X_j$ . Bott periodicity assures then that, if  $\theta_{j-1}$  is an isomorphism, then so is  $\theta_{j-1}^j$ . By induction, proving that  $\theta_0$  is an isomorphism concludes the proof.

In a serie of papers, H. Oyono-Oyono and G. Yu have defined a controlled version of operator  $K$ -theory, [8] [6] [7], that allows them to define a quantitative and local assembly map, and a related Baum-Connes Conjecture. The aim of this work is to extend their work to the realm of groupoids. In a second part, we shall see how this setting can help us understand better the relation between the coarse-Baum-Connes conjecture and the Baum-Connes Conjecture with coefficient for groupoids. Indeed, in [20] and [18], G. Skandalis, J-L.Tu and G. Yu proved that there is a commutative diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_*(X) & \xrightarrow{A} & K_*(C^*X) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ K_*(\mathcal{E}\Gamma) & \xrightarrow{\mu_r} & K_*(C_r\Gamma) \end{array}$$

where :

- the left sides are  $K$ -homology of certain spaces, the left sides are  $K$ -theory of certain  $C^*$ -algebras,
- the first line is the coarse assembly map associated to a coarse space  $X$ , the second being the assembly map for groupoids associated to the coarse groupoid of  $X$ , namely  $\Gamma = G(X)$ ,
- the vertical arrows are isomorphisms on the level of  $KK$ -groups. The left one will be studied later, the right one derives from an isomomorphism on the level of the  $C^*$ -algebras. Indeed, it has been shown that the Roe algebra is  $*$ -isomorphic to the crossed product of  $l^\infty(X)$  by  $\Gamma : C^*(X) \simeq l^\infty(X) \rtimes \Gamma$ .

We shall see that this relation is already true "locally" and factorises through quantitative  $K$ -theory. Locally here means that we can factorize the assembly map through  $KK(C_0(P_d(X)), B)$ . Indeed, the  $K$ -homology can be expressed as an inductive limit

$$K_*(X, B) = \varinjlim_{d \rightarrow \infty} KK(C_0(P_d(X)), B) \quad \text{and}$$

hence the local.

The local quantitative assembly maps defined in [6] are of the form

$$KK^F(C_0(P_d(F)), B) \rightarrow K_*^{\epsilon, r}(B \rtimes_r \Gamma)$$

where  $F$  is a finite group.

We will be using the bivariant functor  $KK^\Gamma$  introduced by P-Y. Le Gall in his thesis [4], which is a generalization of Kasparov's bifunctor for the case where  $\Gamma$  is a Hausdorff locally compact groupoid with Haar system. As for the  $KK$ -theory for Banach algebras introduced by V. Lafforgue [10], there is no (not yet ?) a Kasparox product in quantitative  $K$ -theory. The crucial point to define an assembly map is the existence of a morphism

$$\hat{J} : KK^\Gamma(A, B) \rightarrow Hom^*(\hat{K}_*(A), \hat{K}_*(B))$$

which allows us, for every element  $x \in K_*(A)$ , to consider the related index

$$Ind_x \left\{ \begin{array}{ccc} KK_*(A, B) & \rightarrow & K_*(B) \\ z & \mapsto & \hat{J}(z)(x) \end{array} \right.$$

to construct  $\hat{J}$ , we will mimic the construction for  $\mathcal{J}$  in [6], which gives the right morphism when considering finite groups. The starting point is the following

**Lemme 2.** Let  $\Gamma$  be a Hausdorff locally compact groupoid with Haar system. Then, if  $A$  is a  $\Gamma - C^*$ -algebra, forming the reduced (and maximal) crossed product  $A \times_r \Gamma$  is functorial in  $A$ . Moreover, if  $\Gamma$  is *étale*, then it preserves short semi-split filtered exact sequences of  $\Gamma - C^*$ -algebras, meaning that if

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

is a semi-split filtered exact sequence of  $\Gamma - C^*$ -algebras, then

$$0 \longrightarrow A' \times_r \Gamma \longrightarrow A \times_r \Gamma \longrightarrow A'' \times_r \Gamma \longrightarrow 0$$

is too.

**Preuve 4.** Let

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\Psi} A \xrightarrow{\Phi} A'' \longrightarrow 0$$

be a semi-split filtered exact sequence of  $\Gamma - C^*$ -algebras.

Let  $f \in C_c(\Gamma, A)$  such that  $\Phi_\Gamma(f) = 0$ . For every  $\gamma \in \Gamma$ , there exists a unique  $g(\gamma) \in A'$  such that  $\Psi(g(\gamma)) = f(\gamma)$ . But, as  $\Psi$  and  $\Phi$  commute with the action of  $\Gamma$ , we have  $g(\gamma'^{-1}\gamma) = \gamma'.g(\gamma)$ , so that  $g$  is continuous.

Let  $a \in A \times \Gamma$  such that  $\Phi_\Gamma(a) = 0$ . We can approximate  $a$  by a sequence of  $f_n \in C_c(\Gamma, A)$ . But, with the preceeding work on compactly supported continuous functions, there exist a sequence  $g_n \in C_c(\Gamma, A')$  such that :

$$f_n = \Psi(g_n) + \sigma \circ \Phi(f_n).$$

Moreover,  $\text{Im } \Psi$  is a closed ideal in  $A$ , and  $\lim \|f_n - \Psi(g_n)\| = 0$  so that  $a \in \text{Im } \Psi$  : the sequence is exact in the middle.  $\square$

## 6 Application d'assemblage quantitative

Dans la suite,  $\Gamma$  dénote un groupoïde localement compact de base  $\Gamma^{(0)} = X$  et muni d'un système de Haar  $(\lambda^x)_{x \in X}$ . On rappelle qu'une suite exacte courte est dite semi-scindée si elle admet une section complètement positive. Pour éviter les phrases à rallonge, on parlera de bonne extension de  $C^*$ -algèbres pour une suite exacte courte semi-scindée et filtrée. Par équivalence de Morita, on entend les isomorphismes de groupes

$$M_A^{\epsilon, r} : K_*^{\epsilon, r}(A) \rightarrow K_*^{\epsilon, r}(A \otimes \mathbb{K}) \quad , \forall r \geq 0, \forall \epsilon \in (0, \frac{1}{4})$$

induit par  $A \rightarrow A \otimes \mathbb{K}; x \mapsto x \otimes e$ , où  $e$  est n'importe quel projecteur de rang 1,  $A$  une  $C^*$ -algèbre, et  $\mathbb{K}$  l'idéal des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert séparable.

**Lemme 3.** On suppose le groupoïde  $\Gamma$  muni d'une longueur  $l$ .

Soit  $0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0$  une suite exacte semi-scindée et de  $\Gamma$ - $C^*$ -algèbres. Alors la suite  $0 \rightarrow J \times \Gamma \rightarrow A \times \Gamma \rightarrow A/J \times \Gamma \rightarrow 0$  est une bonne extension.

**Preuve 5.** Voir mes notes en anglais. □

Si l'élément  $z \in KK^\Gamma(A, B)$  est représenté par un cycle  $(H, \pi, T)$ , nous allons définir sa transformée de Kasparov  $J_\Gamma(z) \in KK(A \times_r \Gamma, B \times_r \Gamma)$ .

Tout d'abord, le cas pair. Notons  $P_\Gamma = P \otimes_B id_{B \times_r \Gamma}$  l'opérateur sur  $H \otimes B \times_r \Gamma$  induit par  $P = \frac{T + id_{H \otimes B}}{2}$ . Si l'on pose

$$\mathcal{E} := \{(x, y) \in A \times_r \Gamma \oplus \mathcal{L}(H \otimes B \times_r \Gamma) : P_\Gamma \pi_\Gamma(x) P_\Gamma = y \text{ mod } \mathbb{K} \otimes B \times_r \Gamma\},$$

observons l'extension

$$(E) : 0 \rightarrow \mathbb{K} \otimes B \times_r \Gamma \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow A \times_r \Gamma \rightarrow 0 \quad .$$

Toute extension  $(Ext) : 0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  induit une application contrôlée

$$D_{Ext} = D_{A'}^A : \hat{K}(A'') \rightarrow \hat{K}(A').$$

Montrons que  $D_E$  ne dépend que de la classe de  $z$ , et pas de  $\pi$  et  $T$ .

**A FAIRE**

**Définition 7.** La transformée de Kasparov d'un élément  $z$  de  $KK^\Gamma(A, B)$  est le morphisme contrôlé

$$J_\Gamma(z) = M_{B \times_r \Gamma}^{-1} \circ D_E : \hat{K}_*(A \times_r \Gamma) \rightarrow \hat{K}_*(B \times_r \Gamma),$$

où  $(E)$  est l'extension précédemment décrite.

Ce morphisme  $J_\Gamma : KK^\Gamma(A, B) \rightarrow \text{Hom}_0(\hat{K}(A \times_r \Gamma), \hat{K}(B \times_r \Gamma))$  nous permet de définir l'application d'assemblage associée à n'importe quel élément de  $\hat{K}(A \times_r \Gamma)$  par simple évaluation :

$$\text{Ind}_x(z) = J_\Gamma(z)(x).$$

La conjecture de Baum-Connes s'intéresse à l'application d'assemblage associée à un certain élément. Dans le cas des groupoïdes, il existe une fonction continue à support compact  $h : P_d(\Gamma) \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(h^2) = 1.$$

Alors  $\gamma \rightarrow \sum_{\gamma \in \Gamma} h\gamma(h)$  définit un projecteur de  $A = C_0(P_d(\Gamma)) \times_r \Gamma$  de propagation finie, majorée par une certaine constante  $s$ . Comme les fonctions  $h$  admissibles forment un ensemble convexe, la classe de  $[e_h, 0] \in K_0^{\epsilon, r(A)}$  ne dépend pas de la fonction  $h$  choisie, et l'application d'assemblage de Baum-Connes est définie par l'évaluation en cette classe.

## 7 Géométrie asymptotique

Pour tout  $z \in KK^\Gamma(A, B)$ , il existe un morphisme contrôlé

$$\tau_X(z) : K_*(C^*(X, A)) \rightarrow K_*(C^*(X, B))$$

## 8 Séminaire $KK$ -théorie et groupe quantique, exposés du 17 et 24 Octobre 2014

Ce court rapport a pour but de présenter les bases de la  $K$ -théorie des  $C^*$ -algèbres. Nous irons des définitions à la suite exacte à 6 termes.

### 8.1 Motivations

Comme Lorenzo Pittau vous a tout raconté sur  $K_0$  la semaine dernière, je vais me permettre d'aller plus vite sur les détails techniques.

Le foncteur  $K$  a été introduit par Grothendieck dans sa démonstration du théorème de Riemann-Roch à la fin des années 50, voir l'article de Borel et Serre [1]. Ces travaux ont inspiré Atiyah et Singer dans la démonstration de leur fameux théorème de l'indice.

Voici une version très simplifiée d'un théorème de l'indice trouvée dans un article de Jean Bellissard [2], que je trouve très pédagogique. Soit  $f \in C(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^\times)$ . Cette fonction définit un lacet  $\gamma$ , donc un élément du premier groupe d'homologie du cercle  $[\gamma] = f^*(\mathbb{S}^1) \in H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ , dont la classe est représentée via cet isomorphisme par le degré de  $f$ . Si l'on suppose que  $f$  est une fonction holomorphe, on peut même calculer ce degré :

$$\deg(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{f(\mathbb{S}^1)} f(z) \frac{dz}{-z} = -\langle [w], [f] \rangle_{H^1 \times H_1},$$

où  $w = \frac{dz}{2i\pi z}$  est une forme fermée qui définit une classe de cohomologie de  $\mathbb{S}^1$ , et le crochet est la dualité usuelle entre cohomologie et homologie.

Cette formule a aussi une interprétation opératorielle. Soit  $\mathcal{H}$  l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  possédant un prolongement de carré intégrable sur le bord du disque  $\mathbb{S}^1$ . Cet espace  $\mathcal{H}$ , appelé espace de Hardy, est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{S}^1)$ , et on note  $\mathcal{P}$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}$ . On peut montrer que l'espace de Hardy est celui des fonctions dont les coefficients de Fourier strictement négatifs sont nuls.

A toute fonction continue sur le cercle  $f \in C(\mathbb{S}^1)$ , on associe un opérateur dit de Toeplitz  $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$T_f : g \mapsto \mathcal{P}fg.$$

Cet opérateur induit un  $*$ -morphisme de  $C(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{B}/\mathbb{K}$  à valeur dans l'algèbre de Calkin (les opérateurs bornés quotientés par l'idéal des opérateurs compacts), et donc  $T_f T_{\bar{f}} = T_{\bar{f}} T_f \bmod \mathbb{K} = 1 \bmod \mathbb{K}$ . On a donc un opérateur de Fredholm, dont on sait que le noyau et le conoyau sont de dimension finie : il a un indice

$$\text{Ind}(T_f) = \dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{coker}(T)) \in \mathbb{Z}.$$

Le "théorème-0" de l'indice affirme que cette indice est précisément le degré de  $f$ , ce que l'on peut réécrire comme

$$\text{Ind}(T_f) = \langle [w], f^*(\mathbb{S}^1) \rangle_{H^1 \times H_1}.$$



Pour le montrer, remarquez d'abord que l'indice est invariant par perturbation compacte et par homotopie. Il suffit alors de le montrer pour les fonctions  $z^n$ , or  $T_{z^n} = S^n$ , où  $S$  est le shift unilatéral, qui est injectif. Le noyau de  $S^{*n}$  étant de dimension  $n$ ,  $Ind(T_{z^n}) = -n$ .  $\square$

Atiyah et Singer ont profondément généralisé ce type de résultat au cadre des fibrés vectoriels. L'exemple typique est celui d'un opérateur de Dirac sur un variété munie d'une structure  $\text{spin}^c$ , dont on peut montrer qu'il est inversible modulo les opérateurs pseudo-différentiels réguliers. On verra comment calculer des indices associés à toute extension de  $C^*$ -algèbre, et ici l'extension pertinente est celle des opérateurs pseudo-différentiels. On a alors un indice associé à cet opérateur de Dirac, qui est un entier. Dans certains cas, lorsque votre variété est un espace homogène par exemple, on peut relever notre opérateur de Dirac, sur le revêtement universel dans notre exemple. Le receptacle pour l'indice de cet opérateur est alors la  $K$ -théorie : l'indice n'est plus un entier mais un élément d'un certain groupe de  $K$ -théorie.

Il se trouve que la  $K$ -théorie se généralise bien au cadre non-commutatif. Pour cela, rappelons le théorème de Serre-Swan :

**Théorème 1.** Soit  $X$  un espace topologique compact et  $\Phi$  le foncteur qui va de la catégorie des fibrés vectoriels complexes de base  $X$  dans celle des  $C(X)$ -

modules projectifs de type fini qui, à un fibré  $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$  associe l'espace des sections

continues  $\Phi : E \mapsto \Gamma(E) = \{s : X \rightarrow E/\pi \circ s = id\}$ .

Alors  $\Phi$  réalise une équivalence de catégories.

Ce théorème assure que se donner un fibré, c'est se donner un  $C(X)$ -module projectif de type fini. C'est ainsi que les algébristes définissent le premier groupe de  $K$ -théorie d'un anneau  $A$  comme le groupe de Grothendieck du monoïde des classes d'équivalence des  $A$ -modules projectifs de type fini. C'est d'ailleurs une définition que l'on peut prendre pour les  $C^*$ -algèbres, si l'on utilise la théorie des  $C^*$ -modules hilbertiens (voir les prochains exposés!). Pour mémoire, rappelons qu'un  $A$ -module  $P$  est dit projectif si pour tout  $A$ -modules  $N$  et  $M$  et tout morphisme  $f : N \rightarrow P$  et tout épimorphisme  $g : M \rightarrow P$ , il existe une unique flèche  $h : N \rightarrow M$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow h & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

Que se passe t'il pour un  $A$ -module projectif de type fini  $\mathcal{E}$  ? On a un morphisme surjectif  $g : A^n \rightarrow \mathcal{E}$ , et on peut relever l'identité grâce à la propriété universelle

$$\begin{array}{ccc} & & A^n \\ & \nearrow f & \downarrow g \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{id_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E} \end{array}$$

Il existe donc  $f : \mathcal{E} \rightarrow A^n$  telle que  $g \circ f = id_{\mathcal{E}}$ . Alors  $p = f \circ g$  est un projecteur, et on a un isomorphisme  $\mathcal{E} \simeq pA^n$ . Ainsi, un module projectif de type fini est donné par un projecteur de  $\mathfrak{M}_n(A)$ .

## 8.2 Propriétés de $K_0$

On rappelle la description standard du premier groupe de  $K$ -théorie.

**Définition 8.** Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs dans une  $C^*$ -algèbre  $A$ . On définit trois relations d'équivalences :

$p \sim q$  s'il existe une isométrie partielle  $u$  de  $A$  telle que  $p = u^*u$  et  $q = uu^*$ . (équivalence de Murray-Von Neumann)

$p \sim_u q$  s'il existe un unitaire  $u$  de  $A^+$  tel que  $p = uqu^*$ . (Similitude)

$p \sim_h q$  s'il existe un chemin continu en norme de projections de  $p$  à  $q$ . (Homotopie)

**Proposition 3** (Description standard). Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Tout élément  $x$  de  $K_0(A)$  peut être représenté par une différence

$$x = [p] - [p_n] \text{ tels que } p = p_n \text{ mod } \mathfrak{M}_k(A)$$

où  $k$  et  $n$  sont deux entiers tels que  $k \geq n$ ,  $p \in \mathfrak{M}_k(A^+)$  est un projecteur et  $p_n$  est l'élément de  $\mathfrak{M}_k(A^+)$  avec des 0 partout et des 1 sur les  $n$  premiers emplacements diagonaux.

### 8.2.1 Equivalence entre les relations d'équivalences sur les projecteurs modulo stabilisation

**Lemme 4.** Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre unitale et  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $A$  tels que  $\|p - q\| < 1$ . Alors il existe un unitaire  $u \in A$  vérifiant

$$p = uqu^*.$$

**Preuve 6.** Pour tout projecteur  $p \in A$ , on pose  $s_p = 2p - 1$  : c'est une symétrie. De plus

$$s_p - s_q = 2(p - q),$$

ce qui assure que si  $\|p - q\| < 1$ ,  $v := \frac{s_p s_q + 1}{2}$  est inversible. Mais  $pv = pq$  et donc par symétrie  $qv^* = qp$  d'où  $pv = vq$ . La décomposition polaire de  $v$  assure alors que l'unitaire  $v|v|^{-1}$  entrelace  $p$  et  $q$ .  $\square$

Une remarque : on vient finalement de montrer qu'il existe une application continue sur un voisinage de  $p$  (la boule de centre  $p$  et de rayon  $\|2p - 1\|$  par exemple,

$$\Psi \begin{cases} B_p & \rightarrow A^{-1} \\ q & \mapsto \frac{s_p s_q + 1}{2} \left| \frac{s_p s_q + 1}{2} \right|^{-1} \end{cases}$$

telle que  $\Psi(q)p\Psi(q)^* = q$ .

**Lemme 5.** Soit  $v$  une isométrie partielle d'une  $C^*$ -algèbre unitale  $A$  i.e.  $v^*v$  et  $vv^*$  sont des projecteurs. Alors

$$\begin{pmatrix} v & 1 - vv^* \\ v^*v - 1 & v^* \end{pmatrix}$$

est un unitaire de  $\mathfrak{M}_2(A)$  homotope à l'identité  $1_A \otimes I_2$ .

**Preuve 7.** Un calcul suffit à montrer l'unitarité. Le chemin

$$t \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} + (1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)) \begin{pmatrix} 0 & -vv^* \\ v^*v & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

connecte la matrice en question à  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans les unitaires.  $\square$

**Proposition 4.** Les relations d'équivalence sur les projecteurs sont ordonnées comme suit :  $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{si } p \sim q \text{ alors } \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{et si } p \sim_u q \text{ alors } \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Preuve 8.** Si  $p \sim_h q$ , il existe un chemin continu de projecteurs  $[0, 1] \rightarrow P(A); t \mapsto p_t$ . En découpant l'intervalle  $[0, 1]$  en segment assez petits, le lemme 4 donne l'existence d'un chemin d'unitaires  $t \mapsto u_t$  tel que  $t \mapsto u_t p u_t^*$  soit un chemin continu de projecteurs de  $p$  à  $q$ . En particulier,  $p \sim_u q$ .

Si  $p \sim_u q$ , alors il existe un unitaire  $u$  vérifiant

$$p = uqu^* = (uq)(uq)^*$$

comme  $uq$  est une isométrie partielle,  $p \sim q$ .

Si  $p \sim q$ . Soit  $v$  une isométrie partielle de  $A$  telle que  $p = v^*v$  et  $q = vv^*$ . Alors

$$w = \begin{pmatrix} v & 1 - vv^* \\ 1 - v^*v & v^* \end{pmatrix}$$

est une isométrie de  $\mathfrak{M}_2(A)$ . De plus

$$w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $p \sim_u q$ , soit  $u$  un unitaire qui entrelace  $p$  et  $q$ . Alors

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$

est un unitaire homotope à  $1 \otimes I_2$ , et un tel chemin continu d'unitaire  $t \mapsto w_t$  assure que

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Cette proposition montre que les différentes relations d'équivalence coïncident si l'on se place dans  $\mathfrak{M}_\infty(A)$ .

### 8.2.2 Limites inductives

**Proposition 5.** Soit  $\{A_i, \phi_i^j\}$  un système inductif de  $C^*$ -algèbres. Alors  $\{K_0(A_i), \phi_{i*}^j\}$  est un système inductif de groupes abéliens et

$$K_0(\varinjlim A_j) = \varinjlim K_0(A_j).$$

**Preuve 9.** Par définition, pour tout  $i \leq j$ , il existe des morphismes  $\phi_i$  et  $\phi_j$  qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\phi_i} & \varinjlim A_j \\ \downarrow \phi_i^j & \nearrow \phi_j & \\ A_j & & \end{array} .$$

En passant ce diagramme en  $K_0$ -théorie, on obtient un second diagramme commutatif que la propriété universelle de la limite inductive nous permet de compléter en pointillés :

$$\begin{array}{ccc} K_0(A_i) & \xrightarrow{\phi_{i*}} & K_0(\varinjlim A_j) \\ \downarrow \phi_{i*}^j & \nearrow \phi_{j*} & \uparrow \exists! \phi \\ K_0(A_j) & \cdots \cdots \cdots & \varinjlim K_0(A_j) \end{array} .$$

L'injectivité de  $\phi$  est claire puisque tous les  $\phi_{j*}$  le sont. Soit  $[p] - [p_n] \in K_0(\varinjlim A_j)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $j > 0$  et élément  $a$  autoadjoint de  $A_j$  tel que  $\|a - p\| < \epsilon$ . Alors le spectre de  $a$  est inclus dans la réunion de 2 intervalles centrés en 0 et 1. Par calcul fonctionnel continu, on peut alors définir un projecteur  $q = f(a)$  tel que  $\|q - a\|$  soit borné par  $O(\epsilon)$ . Pour  $\epsilon$  assez petit,  $\|p - q\| < 1$  et donc  $[p] = [q]$  dans  $K_0(\varinjlim A)$ . Mais  $[q] \in K_0(A_j) \subset \varinjlim K_0(A_j)$  : la surjectivité est démontrée.  $\square$

Voici un exercice sur ce thème.

On a vu que le foncteur  $K_*$  est stable par limite inductive. Pour autant certains exemples demandent un peu d'attention. Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre unitale et  $q$  un entier positif. On note  $A_j = \mathfrak{M}_{q^j}(A)$ , et  $\phi_j^{j+1} : A_j \rightarrow A_{j+1}$  défini par

$$\phi_j^{j+1} : a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & & \\ 0 & a & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ & & & & a \end{pmatrix} = a \otimes 1_q$$

En composant on obtient des  $*$ -morphisms, où  $i \leq j$  :

$$\phi_i^j : \begin{cases} A_i & \rightarrow & A_j \\ a & \mapsto & a \otimes 1_{q^{j-i}} \end{cases}$$

qui nous définissent un système inductif  $\{A_i, \phi_i^j\}$ . Comme  $K_*(A_j) = K_*(A)$ , on serait tenter de conclure que la  $K$ -théorie de la limite inductive est celle de  $A$ .

Il n'en n'est rien comme on peut facilement le voir avec  $A = \mathbb{C}$ . Les morphismes  $\phi_{i*}^j$  sont donnés par la multiplication

$$\phi_{i*}^j \begin{cases} K_*(A_i) & \rightarrow K_*(A_j) \\ [x] & \mapsto q^{j-i}[x] \end{cases}$$

et même si lorsque  $A = \mathbb{C}$ ,  $K_0(A_j) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ , on obtient  $K_0(\varinjlim A_j) = \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ .

### 8.2.3 Suites exactes

**Proposition 6.** Soit  $0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$  une suite exacte de  $C^*$ -algèbres. Alors la suite de groupes abéliens

$$K_0(J) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J)$$

est exacte.

**Preuve 10.** Soit  $[p] - [p_n] \in K_0(J)$  avec  $p = p_n \bmod \mathfrak{M}_k(J)$ ,  $k \geq n$ . Cela assure que  $\pi(p) = p_n$  et

$$\pi_*([p] - [p_n]) = [\pi(p)] - [p_n] = 0$$

donc  $\pi_* \circ \iota_* = 0$ .

Soit  $[p] - [p_n] \in K_0(A)$  avec  $p = p_n \bmod \mathfrak{M}_k(A)$ ,  $k \geq n$ , d'image nulle par  $\pi_*$ . Alors  $[\pi(p)] = [p_n]$ . Il existe donc deux entiers  $r \leq r'$  et un unitaire  $u \in \mathfrak{M}_{k+r'}((A/J)^+)$  tels que

$$u \begin{pmatrix} \pi(p) & 0 \\ 0 & p_r \end{pmatrix} u^* = \begin{pmatrix} p_n & 0 \\ 0 & p_r \end{pmatrix}.$$

Soit  $w \in \mathfrak{M}_{2(k+r')}(A^+)$  un unitaire qui relève  $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ . Alors la relation ci-dessus assure que

$$w(p \oplus p_r)w^* = p_n \oplus p_r \bmod \mathfrak{M}_{2(k+r')}(J)$$

donc  $[p] - [p_n] = [w(p \oplus p_r)w^*] - [p_n \oplus p_r] \in K_0(J)$  et donc  $\ker \pi_* \subset \text{im } \iota_*$ .  $\square$

## 8.3 Foncteur $K_1$

### 8.3.1 Définition

On rappelle que, si  $A$  est une  $C^*$ -algèbre, non nécessairement unitale,

$$GL_n(A) := \{x \in GL_n(A^+) : x = 1_n \bmod \mathfrak{M}_n(A)\},$$

et c'est un sous-groupe fermé distingué de  $GL_n(A^+)$ . On peut naturellement plonger  $GL_n(A)$  dans  $GL_{n+1}(A)$  par  $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_{A^+} \end{pmatrix}$ , et ces morphismes définissent

$$GL_\infty(A) = \varinjlim GL_n(A),$$

que l'on peut voir comme des matrices infinies à valeurs dans  $1_{A^+} + A$  sur la diagonale, dans  $A$  ailleurs, et dont tous les termes sont nuls ou égaux à  $1_{A^+}$  sur la diagonale, sauf un nombre fini. Les inclusion envoient  $GL_n(A)_0$  dans  $GL_{n+1}(A)_0$ , on a donc

$$GL_\infty(A)_0 = \varinjlim GL_n(A)_0.$$

**Définition 9.** Soit  $A$  un  $C^*$ -algèbre. On définit le groupe

$$\begin{aligned} K_1(A) &= GL_\infty(A)/GL_\infty(A)_0 = \varinjlim GL_n(A)/GL_n(A)_0 \\ &= U_\infty(A)/U_\infty(A)_0 = \varinjlim U_n(A)/U_n(A)_0 \end{aligned}$$

La seconde ligne provient de la décomposition polaire, qui assure que  $U_n(A)$  est un retract de  $GL_n(A)$ .

On voit que le groupe  $K_1$  est généré par les classes  $[u]$  où  $u$  est un unitaire de  $\mathfrak{M}_n(A)$ , soumis aux relations  $[uv] = [u] + [v] = [u \oplus v]$ . En effet

**Proposition 7.** Le groupe  $K_1(A)$  est abélien.

**Preuve 11.** Le chemin  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  connecte l'identité à  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ce qui assure que l'on peut permuter des lignes et des colonnes (modulo un signe) sans changer la classe dans  $K_1(A)$ . Si  $\sim$  dénote la relation d'homotopie, alors pour  $x$  et  $y$  dans  $A$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors, par symétrie :  $[xy] = [yx] = [x] + [y]$ . □

Voici un lemme, et surtout son corollaire, qui sont utiles dans le maniement des suites exactes avec  $K_1$ .

**Lemme 6.** Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre unitale. Alors, si  $\langle \exp(A) \rangle$  dénote le sous-groupe multiplicatif de  $GL_1(A)$  algébriquement engendré par les exponentielles du type  $\exp(a)$ , alors

$$GL_1(A)_0 = \langle \exp(A) \rangle.$$

**Preuve 12.** Soit  $z = \prod_{j=1}^n e^{a_j} \in \langle \exp(A) \rangle$ . Si  $\|z - z'\| < \frac{1}{\|z^{-1}\|}$ , alors le logarithme de  $z'z^{-1}$  est défini et donc  $z' = \exp(\log(z'z^{-1}))z$  est dans  $\langle \exp(A) \rangle$ . Le sous-groupe  $\langle \exp(A) \rangle$  est donc un ouvert d'un groupe de Lie, donc fermé, et il contient l'identité : c'est la composante connexe  $GL_1(A)_0$ . □

Le corollaire découle directement du lemme.

**Corollaire 1.** Soit  $\Psi : A \rightarrow A''$  un  $*$ -morphisme surjectif. Alors

$$\Psi^{-1}(GL_1(A'')_0) \subset GL_1(A)_0.$$

### 8.3.2 Suspension

**Définition 10.** On définit la suspension d'une  $C^*$ -algèbre  $A$  comme la  $C^*$ -algèbre

$$SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

Comme  $C_0(\mathbb{R})$  est abélienne, elle est nucléaire et le produit tensoriel est unique. De plus, on a directement la

**Proposition 8.**  $S$  est un foncteur covariant exact de la catégorie des  $C^*$ -algèbres dans la catégorie des  $C^*$ -algèbres non-unitaes.

Bien-sûr, cette définition peut être remplacée par une construction plus à la main, que l'on va décrire pour se familiariser avec cet objet. Cette façon de faire à la mérite de donner directement l'exactitude.

La suspension peut aussi se voir comme

$$SA = \{f : \mathbb{R} \rightarrow A/f \text{ continue telle que } \lim_{x \rightarrow \infty} \|f(x)\| = 0\},$$

munie des opérations point par point et de la norme sup. Attention,  $(SA)^+ \neq S(A^+)$ . D'ailleurs, cela nous servira beaucoup dans les preuves suivantes,  $(SA)^+ \simeq \{f : \mathbb{S}^1 \rightarrow A^+ : f(z) = \lambda 1_{A^+} + g(z) \text{ où } g \in SA\}$ .

**Théorème 2.** Il existe un isomorphisme naturel entre  $K_1$  et  $K_0S$ , i.e. pour toute  $C^*$ -algèbre  $A$ , il existe un isomorphisme de groupe abéliens  $\theta_A : K_1(A) \rightarrow K_0(SA)$  tel que, pour tout  $C^*$ -algèbre  $B$  et tout  $*$ -morphisme  $\phi : A \rightarrow B$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{\phi_*} & K_1(B) \\ \downarrow \theta_A & & \downarrow \theta_B \\ K_0(SA) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0(SB) \end{array}$$

commute.

**Preuve 13.** Nous allons d'abord définir l'application  $\theta_A$ . Si  $u \in GL_n(A)$ , on peut construire un chemin continu  $t \mapsto z_t$  d'unitaires dans  $GL_{2n}(A)$  connectant  $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$  à l'identité  $1_{2n}$  et vérifiant  $z_t = 1_{2n} \bmod \mathfrak{M}_n(A)$ . Alors  $e_t = z_t p_n z_t^{-1}$  est une boucle de projecteurs de base  $p_n : e \in \mathfrak{M}_{2n}((SA)^+)$ . On pose :

$$\theta_A[u] = [e] - [p_n].$$

Cette application est bien définie car si  $[u] = [v]$  dans  $K_1(A)$ , alors pour un  $n$  assez grand, on peut trouver deux chemins d'unitaires

$$\begin{array}{l} a_t : uv^{-1} \sim 1_n \\ b_t : u^{-1}v \sim 1_n \end{array}.$$

Et si  $z_t : \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \sim 1_{2n}$  et  $w_t : \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix} \sim 1_{2n}$  avec  $\theta_A[u] = [e] - [p_n] = [z_t p_n z_t^{-1}] - [p_n]$  et  $\theta_A[v] = [f] - [p_n] = [w_t p_n w_t^{-1}] - [p_n]$ , on pose  $\begin{pmatrix} a_t & 0 \\ 0 & b_t \end{pmatrix}$ , alors

$$e_t = z_t x_t p_n x_t^{-1} z_t^{-1} = y_t f_t y_t^{-1}$$

où  $y_t = z_t x_t w_t^{-1}$  définit un inversible de  $\mathfrak{M}_{2n}((SA)^+)$  car  $y_0 = y_1 = 1_{2n}$ . Comme  $e$  et  $f$  sont unitairement équivalents,  $\theta_A[u] = \theta_A[v]$ .

Montrons que  $\theta_A$  est injective. Si  $\theta_A[u] = \theta_A[v]$ , alors, avec les mêmes notations,  $[e] = [f]$ , donc pour  $k$  assez grand, il existe un inversible  $x$  de  $\mathfrak{M}_k((SA)^+)$  tel que  $xex^{-1} = f$ . Cette relation assure que

$$x_t z_t p_n z_t^{-1} = w_t p_n w_t^{-1} x_t$$

donc  $y_t = w_t^{-1} x_t z_t$  commute à  $p_n$  et est donc de la forme  $\begin{pmatrix} a_t & 0 \\ 0 & b_t \end{pmatrix}$ . Comme  $x_0 = x_1 = 1_k$ ,  $a_t$  connecte  $1_n$  à  $v^{-1}u$ , qui sont donc homotopes :  $[u] = [v]$ .

Montrons la surjectivité. Soit  $[f] - [p_n] \in K_0(SA) : f \in \mathfrak{M}_k((SA)^+)$  tel que  $f = p_n \bmod \mathfrak{M}_k(SA)$ ,  $k \geq n$ . Chaque  $f_t$  est dans  $\mathfrak{M}_k(A^+)$  et  $f_0 = f_1 = p_n$  donc il existe un chemin d'unitaires  $t \mapsto w_t$  connectés à l'identité tel que  $f_t = w_t p_n w_t^{-1}$ . Comme  $w_1 p_n = p_n w_1$ ,  $w_1$  est de la forme  $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$  où  $u \in \mathfrak{M}_n(A^+)$  et  $v \in \mathfrak{M}_{K-n}(A^+)$  sont deux inversibles. Mais  $v$  est connecté par un chemin  $b_t$  à  $\begin{pmatrix} 1_{k-n} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ , et on a un chemin  $z_t$  qui connecte  $1_k$  à  $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{k-n} \end{pmatrix}$ . Si on pose  $e_t = z_t p_n z_t^{-1}$ , on obtient que  $z_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v^{-1} b_t \end{pmatrix} w_t^{-1}$  entrelace  $e_t$  et  $f_t$ . Comme précédemment, ses valeurs coïncident en 0 et 1 avec  $1_{2k}$  : c'est un inversible de  $\mathfrak{M}_k((SA)^+)$ . Donc

$$\theta_A[u] = [e] - [p_n] = [f] - [p_n],$$

$\theta_A$  est surjective. La naturalité est immédiate, la définition de l'application utilisant des sommes directes.  $\square$

**Théorème 3.** Pour toute suite exacte de  $C^*$ -algèbres

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0 ,$$

la suite de groupes abéliens

$$K_*(A') \xrightarrow{\iota_*} K_*(A) \xrightarrow{\pi_*} K_*(A'')$$

est exacte.

### 8.3.3 Indice

Dans cette section, nous allons définir un morphisme  $\delta : K_1(A/J) \rightarrow K_0(J)$ , appelé indice, qui rend exacte la suite

$$K_1(J) \xrightarrow{\iota_*} K_1(A) \xrightarrow{\pi_*} K_1(A/J) \xrightarrow{\delta} K_0(J) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J) . \quad (1)$$



**Définition 11.** Soit  $u \in GL_n(A/J)$  et  $w \in GL_{2n}(A)$  un relevé de  $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ . On définit l'indice de  $[u] \in K_1(A/J)$  par

$$\delta[u] = [wp_n w^{-1}] - [p_n].$$

**Proposition 9.** La suite 1 est exacte en  $K_1(A/J)$ .

**Proposition 10.** La suite 1 est exacte en  $K_0(J)$ .

## 8.4 Périodicité de Bott

Dans cette section, nous allons montrer un résultat central en  $K$ -théorie des  $C^*$ -algèbres, celui de la périodicité de Bott : il existe un isomorphisme naturel  $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$  pour toute  $C^*$ -algèbre  $A$ , et donc la  $K$ -théorie est 2-périodique :  $K(S^2 A) \simeq K(A)$ .

La preuve donnée dans le cadre de la  $K$ -théorie topologique s'adapte facilement au cadre non-commutatif, nous la proposerons sous forme d'exercice. Celle que nous avons choisi de détailler utilise la non-commutativité de l'algèbre de Toeplitz. Elle est due à Cuntz [3], et est détaillée dans le livre de Wegge-Olsen [22]. Nous exposerons donc un point de vue moins  $C^*$ -algébrique, où la  $K$ -théorie est vue comme une théorie de l'homologie sur la catégorie des  $C^*$ -algèbres.

### 8.4.1 Rappels

**Définition 12.** On définit le cône d'une  $C^*$ -algèbre  $A$  comme

$$CA = \{f : \mathbb{R} \rightarrow A/f \text{ continue bornée telle que } \lim_{x \rightarrow -\infty} \|f(x)\| = 0\}.$$

$SA$  est clairement un idéal de  $CA$  et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \xrightarrow{\epsilon_1} A \longrightarrow 0$$

grâce à l'évaluation en 1, notée  $\epsilon_1$ .

Le cône  $CA$  est toujours contractile :  $t \mapsto f(st)$  pour  $s$  allant de 0 à 1 donne une homotopie entre 0 et  $id_{CA}$ .

**Définition 13.** Pour tout  $*$ -morphisme  $\pi : A \rightarrow A''$ , on peut définir le cône de  $\pi$  comme le pullback de  $A''$  via  $\pi$  et  $\epsilon_1 : CA'' \rightarrow A''$  :

$$\begin{array}{ccc} C_\pi & \xrightarrow{\quad} & A \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ CA'' & \xrightarrow{\epsilon_1} & A''. \end{array}$$

Attention,  $C_\pi$  n'est pas forcément contractile.

Le lemme suivant est simple, mais technique, et il sera utile pour la suite.

**Lemme 7.** Soit

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de  $C^*$ -algèbre. On a alors trois suites exactes :

$$0 \longrightarrow SA'' \xrightarrow{\iota_1} C_\pi \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota_2} C_\pi \xrightarrow{\pi_2} CA'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CA' \xrightarrow{\iota_3} D \xrightarrow{\pi_3} C_\pi \longrightarrow 0$$

avec  $D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow A / f \text{ continue bornée telle que } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \iota(A')\}$  et

$$\begin{aligned} \iota_1(f) &= 0 \oplus f\pi_1(a \oplus f) = a, \\ \iota_2(a') &= \iota(a') \oplus 0\pi_2(a \oplus f) = f, \\ \iota_3(f) &= \{t \mapsto \iota(f(1-t))\} \pi_3(g) = g(1) \oplus (\pi \circ g). \end{aligned}$$

De plus, on a une équivalence d'homotopie  $\begin{Bmatrix} A' & \rightarrow & D \\ a' & \mapsto & \iota(a') \end{Bmatrix}$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\iota} & A \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ D & \xrightarrow{\pi_3} & C_\pi. \end{array}$$

#### 8.4.2 Homologie

**Définition 14.** Deux  $*$ -morphisms  $\phi, \Psi : A \rightarrow B$  sont dit homotopes s'il existe une famille  $\phi_t : A \rightarrow B$  de  $*$ -morphisms telle que  $\phi_0 = \phi$ ,  $\phi_1 = \Psi$  et  $t \mapsto \phi_t(a)$  est continue pour tout  $a$ . On note  $\phi \sim \Psi$ .

Un foncteur  $F$  de la catégorie des  $C^*$ -algèbres dans celle des groupes abéliens est dit foncteur d'homologie s'il est exacte au milieu et invariant par homotopie.

**Proposition 11.** Soit  $F$  un foncteur covariant de la catégorie des  $C^*$ -algèbres dans celle des groupes abéliens qui est invariant par homotopie. Alors toute équivalence  $\phi : A \rightarrow B$  induit un isomorphisme de groupe  $F(\phi) : F(A) \rightarrow F(B)$ .

**Preuve 14.** Si  $\phi$  est une équivalence, il existe  $\psi : B \rightarrow A$  telle que  $\phi \circ \psi \sim id_B$  et  $\psi \circ \phi \sim id_A$ . Alors  $F(\psi)F(\phi) = id_{F(A)}$  et  $F(\phi)F(\psi) = id_{F(B)}$ , donc  $F(\phi)$  est un isomorphisme.  $\square$

Ce lemme assure que :

- si  $B$  est une rétraction de  $A$ , alors  $F(A) \simeq F(B)$ ,
- si  $A$  est contractile,  $F(A) = 0$ .

**Définition 15.** Une théorie de l'homologie sur la catégorie des  $C^*$ -algèbres est une suite de foncteurs d'homologie  $H_n$  telle que, pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0,$$

il existe des morphismes connectant  $\delta_n : H_n(A'') \rightarrow H_{n+1}(A')$  qui rendent la suite longue

$$\dots \longrightarrow H_n(A') \xrightarrow{\iota_*} H_n(A) \xrightarrow{\pi_*} H_n(A'') \xrightarrow{\delta_n} H_{n+1}(A') \xrightarrow{\iota_*} H_{n+1}(A) \xrightarrow{\pi_*} H_{n+1}(A'') \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

exacte, et telle que chaque  $\delta$  soit une application naturelle.

On distingue les théories infinies à gauche ( $n \leq 0$ ), à droite ( $n \geq 0$ ), ou doublement infinie.

On voit que la partie précédente montre que  $H_{-n}(A) = K_0(C_0(\mathbb{R}^n) \otimes A)$  définit une théorie de l'homologie pour les  $C^*$ -algèbres.

**Proposition 12.** Soit  $(H_n)$  une théorie de l'homologie pour les  $C^*$ -algèbres, infinie à gauche ou doublement infinie. Alors pour toute suite exacte scindée, l'application connectante est nulle.

**Proposition 13.** Soit  $F$  un foncteur d'homologie et

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Alors

- si  $A''$  est contractile,  $\iota_*$  est un isomorphisme,
- il existe un morphisme de groupes abéliens  $\delta : F(SA'') \rightarrow F(A')$  telle que la suite suivante soit exacte :

$$F(SA') \xrightarrow{\iota_*} F(SA) \xrightarrow{\pi_*} F(SA'') \xrightarrow{\delta} F(A)' \xrightarrow{\iota_*} F(A) \xrightarrow{\pi_*} F(A'').$$

**Corollaire 2.** Tout foncteur d'homologie  $F$  définit une théorie de l'homologie pour les  $C^*$ -algèbres par

$$\begin{cases} H_0(A) = F(A) \\ H_{-n}(A) = F(S^n A) \quad , n \geq 0. \end{cases}$$

### 8.4.3 Périodicité de Bott

**Théorème 4.** Tout foncteur  $F$  de la catégorie des  $C^*$ -algèbres dans celle des groupes abéliens qui est exact au milieu, invariant par homotopie et stable admet une périodicité de Bott, c'est-à-dire que  $F(S^2 A)$  et  $F(A)$  sont naturellement isomorphes.

## 9 Introduction

La conjecture de Baum-Connes dérive de problèmes posés au départ en théorie des représentations. Les analogies entre la théorie de Fourier et les représentations des groupes finis ont ouvert une voie vers les représentations des groupes localement compacts : faire de l'analyse harmonique sur un groupe revient à décomposer en composantes irréductibles la représentation régulière gauche sur les fonctions de carrés intégrables sur le groupe  $L^2(G)$ . Ce problème est complètement compris pour les groupes compacts ainsi que pour les groupes abéliens localement compacts. À partir des travaux de Harish-Chandra, le cas des groupes de Lie réductifs commence à être attaqué. Ses travaux ont permis, entre autres, de déterminer la mesure de Plancherel du groupe, donc de décomposer la représentation régulière gauche modulo les ensemble de représentations de mesure nulle. À l'époque de ces travaux, envisager l'étude des groupes de Lie réductifs comme une classe n'était pas une démarche évidente : les mathématiciens de l'époque pensaient que les techniques d'algèbre d'opérateurs et d'analyse fonctionnelle permettraient de généraliser les résultats obtenus à tous les groupes localement compacts.

Fixons quelques notations. On note  $G$  un groupe localement compact ; si le groupe est discret, on le notera plus volontier  $\Gamma$ . Le but visé est donc l'étude des classes d'équivalence des représentations unitaires du groupe, c'est un ensemble appelé dual unitaire du groupe et noté  $\hat{G}$ . Les représentations  $\pi : G \rightarrow U(H)$  ne sont pas nécessairement finies dimensionnelles,  $H$  peut être un espace de Hilbert de dimension infinie, mais on demande tout de même à  $\pi$  d'être fortement continue : pour tout  $g \in G$ , la fonction  $v \mapsto \pi(g)v$  est continue.

Le point de vue développé par Alain Connes et appelé par lui *géométrie non-commutative* s'applique lorsque les techniques d'études habituelles sont mises en défaut lors de l'attaque de  $\hat{G}$ . Par exemple, si le dual unitaire n'est pas séparé, ou pire, si chaque point est dense. Une remarque : cela arrive avec des groupes faciles à construire. Par exemple, le groupe formé du produit croisé de  $\mathbb{Z}^2$  par l'action de  $\mathbb{Z}$ , donné par l'automorphisme  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , voir AC. Dans un tel cas, l'algèbre des fonctions continues sur  $\hat{G}$  tendant vers 0 à l'infini ne donnent aucune information et identifient le dual unitaire à un point. Le cadre non-commutatif permet de s'extraire de la difficulté en associant à notre espace une  $C^*$ -algèbre, non-nécessairement commutative, à la place de  $C_0(\hat{G})$ . Cette algèbre est construite comme la complétion de  $C_c(G)$  pour la norme d'opérateur donnée par représentation régulière gauche, et est appelée  $C^*$ -algèbre réduite du groupe  $C_r^*G$ .

Pour étudier une  $C^*$ -algèbre, une bonne idée est de commencer par calculer sa  $K$ -théorie. C'est exactement ce que propose la conjecture de Baum-Connes, le calcul de  $K_*(C_r^*G)$ . Bien que  $C_r^*G$  soit un objet plutôt mystérieux, Baum et Connes ont conjecturé en '82 l'existence d'un groupe abélien de nature "géométrique"  $K^{top}(G)$  et d'un morphisme

$$\mu_r : K_*^{top}(G) \rightarrow K_*(G)$$

censé être un isomorphisme. Le point important est que le membre de gauche

peut se calculer facilement, et donc donne le membre de droite en cas d'isomorphisme. Pourquoi observer la  $K$ -théorie de  $C_r^*G$ ? Par exemple, dans le cas abélien,  $C_r^*G \simeq C_0(\hat{G}_r)$  et donc  $K_*(C_r^*G) \simeq K_*(\hat{G}_r)$ , où la  $K$ -théorie du membre de droite est la théorie de Atiyah-Hirzebruch, qui est une théorie homologique généralisée (au sens de Steenrod) A VERIFIER. Ici  $\hat{G}_r$  est le dual tempéré du groupe, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires du groupe faiblement contenues dans la régulière gauche, muni de la topologie de Fell. Si  $G$  n'est pas abélien, cet espace peut ne pas être  $T1$ ! Par contre, chaque point isolé de  $\hat{G}_r$  fournit un projecteur de  $C_r^*G$ , donc un élément de  $K$ -théorie.

En '94, Baum, Connes et Higson construisent effectivement ce groupe  $K^{top}(G)$  et l'application d'assemblage  $\mu_r$  en utilisant la  $KK$ -théorie bivariante de Kasparov :

$$K^{top}(G) = \varinjlim_{XG\text{-compact propre}} KK(C_0(X), \mathbb{C}).$$

Une remarque : les travaux de Harish-Chandra permettent le calcul de  $K_*(C_r^*G)$  pour  $G$  un groupe de Lie réductif connexe, et on sait calculer la  $K$ -homologie équivariante  $K^{top}(G)$  d'un tel groupe. Wasserman a donné une preuve dans une note de l'Académie des Sciences en '87 de la conjecture de Connes-Kasparov pour ces groupes, et on sait depuis que cette conjecture est équivalente, pour  $G$  réductif connexe, à la conjecture de Baum-Connes.

Dans la suite, nous présenterons différentes méthodes qui servent à démontrer la conjecture de Baum-Connes.

## 10 Méthode Dirac-Dual-Dirac

**Définition 16.** Un élément  $\gamma \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  est dit *jjde Kasparov* s'il existe une  $G$ - $C^*$ -algèbre  $A$  et deux éléments  $d \in KK^G(A, \mathbb{C})$  et  $\eta \in KK^G(\mathbb{C}, A)$  tels que

$$\gamma = \eta \otimes_A d$$

et pour tout  $G$ -espace propre  $Y$ ,

$$p^*(\gamma) = 1 \in KK^{G \rtimes Y}(C_0(Y), C_0(Y)),$$

où  $p : Y \rightarrow *$  est la projection sur le point.

Pour rappel, la projection induit un morphisme de groupoïdes  $Y \rtimes G \rightarrow G$ , et la  $KK$ -théorie bivariante généralisée par P-Y. Le Gall est contravariante en le groupoïde, donc  $p^* : KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow KK^{G \rtimes Y}(p_*\mathbb{C}, p_*\mathbb{C})$ , et bien sûr  $p_*\mathbb{C} \simeq C_0(Y)$ .

La condition  $p^*(\gamma)$  assure que  $\gamma$  agit sur  $K^{top}(G)$  par l'identité. En effet...

Cet élément  $\gamma$  a été introduit par Kasparov dans ses travaux sur la conjecture de Novikov. Voici entre autres ce qu'il démontre :

- tout groupe presque connexe ( $G/G_0$  est compact,  $G_0$  étant la composante connexe de l'identité) admet un élément  $\gamma$ .

- un tel élément est unique et c'est un idempotent,
- si un groupe  $G$  possède un élément  $\gamma$ , alors

$$\mu_r(K^{top}(G)) = \gamma \cdot K(C_r^*G) := \{x \otimes j_{G,r}(\gamma) : x \in K(C_r^*G)\}.$$

**Résultat 1** (Tu). – Si  $G$  a un élément  $\gamma$ , alors  $\mu_r$  est injective.

- Si de plus  $\gamma = 1$  dans  $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , alors  $\mu_r$  est surjective.

Une propriété assure que l'injectivité passe aux sous-groupes fermés :

**Proposition 14.** Si  $G$  a un élément de Kasparov, alors tout sous-groupe fermé de  $G$  en a un.

**Résultat 2.** L'existence d'un élément  $\gamma$  a été démontrée pour tous les groupes localement compacts agissant de façon continue, propre et isométrique sur :

- une variété riemannienne  $(M, g)$  complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, (Kasparov '88)
- un immeuble de Bruhat-Tits affine, (Kasparov Skandalis '91)
- un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique et faiblement "bolique". (Kasparov Skandalis '03)

Vincent Lafforgue note la classe formée de ces groupes  $\mathcal{C}$ . Elle contient tous les sous-groupes de Lie (et ses sous-groupes fermés), donc leurs réseaux. On sait donc que  $SL(3, \mathbb{R})$  et  $SL(3, \mathbb{Z})$  ont un élément  $\gamma$ .

On sait que  $\gamma = 1 \in KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  pour tous les groupes  $a$ - $T$ -menables, i.e. qui admettent une action propre et isométrique sur un espace de Hilbert affine.

Bien que ces travaux soient encourageants, rien n'était sûr pour des groupes ayant la propriété (T).

**Définition 17.** Soit  $G$  un groupe localement compact et  $\pi : G \rightarrow U(H)$  une représentation unitaire.

On dit que  $\pi$  admet des vecteurs presque invariants si, pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout compact  $K$  de  $G$ , il existe un vecteur  $\xi$   $(K, \epsilon)$ -invariant, i.e. tel que

$$\sup_{h \in K} \|\pi(h)\xi - \xi\| < \|\xi\|.$$

Un ensemble  $Q$  de  $G$  est dit de Kazhdan s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que toute représentation unitaire admettant des vecteurs  $(Q, \epsilon)$ -invariants admet aussi un vecteurs non nul et invariant.

Le groupe  $G$  a la propriété (T) s'il possède un ensemble de Kazhdan compact.

La propriété (T) est équivalente au fait que la représentation triviale  $1_G$  soit isolée dans le dual unitaire du groupe. Il est alors impossible de construire une homotopie entre n'importe quelle représentation unitaire et  $1_G : \gamma \neq 1$  dans  $KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ . L'existence de l'élément  $\gamma$  et les méthodes utilisées jusque ici ne

permettent donc pas de montrer la surjectivité de l'application d'assemblage pour un groupe qui a (T).

Pour un tel groupe, il existe un projecteur  $p$  dans la  $C^*$ -algèbre maximale  $C^*G$  du groupe tel que, pour toute représentation unitaire  $(\pi, H)$ ,  $\pi(p)$  soit le projecteur orthogonal  $P_\pi$  sur le sous-espace des vecteurs invariants  $H^G$ . On nomme  $p$  le projecteur de Kazhdan. Comme on va le voir, ce projecteur est invisible du point de vue de la  $C^*$ -algèbre réduite. La représentation régulière gauche

$$\lambda_G : G \rightarrow U(L^2(G))$$

se prolonge en un  $*$ -homomorphisme  $C^*G \rightarrow C_r^*G$  toujours noté  $\lambda_G$ . Alors si  $G$  est infini, les fonctions constantes ne sont pas dans  $L^2(G)$ , ce sont pourtant les seules qui pourraient être invariantes sous l'action de  $\lambda_G$  : le sous-espace des vecteurs invariants est nul. Mais  $\lambda_G(p)$  est le projecteur orthogonal sur ce sous-espace, donc est nul :

$$\lambda_G(p) = 0.$$

Cela assure que la méthode Dirac-Dual-Dirac ne permet pas de montrer Baum-Connes pour les groupes qui ont (T) : en effet, (qui ?) a montré que si  $G$  vérifie Baum-Connes, alors

$$\lambda_G^* : K_*(C^*G) \rightarrow K_*(C_r^*G)$$

est un isomorphisme. Mais l'existence d'un projecteur de Kazhdan, équivalente à la propriété (T), en empêche l'injectivité.

## 10.1 Travaux de Vincent Lafforgue

Si  $n$  est un entier supérieur à 3,  $SL(n, \mathbb{R})$  et  $SL(n, \mathbb{Z})$  ont la propriété (T). De façon générale, tous les groupes de Lie semi-simples de rang réel supérieur à 2 ont (T). La conjecture de Connes-Kasparov pour  $SL(n, \mathbb{R})$  ( ou pour tout groupe de Lie réductif connexe ) donne l'injectivité de ses réseaux, propriété stable par passage aux sous-groupes fermés. Toutefois, comme expliqué dans la section précédente, on ne peut montrer que  $\gamma = 1$ , ce qui assurerait la surjectivité. Avant de continuer, mentionnons que même après les travaux de Lafforgue, la conjecture de Baum-Connes est toujours ouverte pour  $SL(3, \mathbb{Z})$ .

La première idée de Lafforgue est de remplacer  $KK^G$  par un bifoncteur  $KK_{ban}^G$  défini sur la catégorie des espaces de Banach. Cette généralisation permet de passer des représentations unitaires d'un groupe localement compact à des représentations plus générales  $G \rightarrow GL(E)$  sur des espaces de Banach  $E$ . On peut aussi prendre des représentations sur des espaces de Hilbert, mais non nécessairement isométrique. Lafforgue considère des représentations qu'il appelle "à croissance modérée", qui vérifient

$$\|\pi(g)\|_E \leq C e^{l(g)}, \forall g \in G$$

où  $l : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une longueur sur le groupe. Il démontre alors que pour tous les groupes de Lie et leurs réseaux,

$$\gamma = 1 \text{ dans } KK_{ban}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

Toutefois, le changement de théorie bivariente a un prix, et l'espace d'arrivée de l'application d'assemblage associée n'est plus  $K_*(C_r^*G)$  mais  $K_*(L^1(G))$ . Cela démontre tout de même la conjecture de Bost : pour tout groupe de Lie,  $\mu_{L^1(G)} : K^{top}(G) \rightarrow K(L^1(G))$  est un isomorphisme. De plus, on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} K^{top}(G) & \xrightarrow{\mu_{L^1}} & K(L^1(G)) \\ & \searrow \mu_r & \downarrow \\ & & K(C_r^*G) \end{array},$$

le problème étant de déterminer l'isomorphie ou non de la flèche verticale.

De manière plus générale, Lafforgue définit ce qu'il appelle des complétion inconditionnelle de  $C_c(G)$ . Munissant l'algèbre  $C_c(G)$  d'une norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(G)}$  telle que

$$\text{si } |f_1(g)| \leq |f_2(g)| \quad \text{alors } \|f_1\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f_2\|_{\mathcal{A}(G)},$$

on la complète en une algèbre de Banach  $\mathcal{A}(G)$ , et montre qu'elle s'injecte dans  $C_r^*G$ , ce qui impose une factorisation

$$\begin{array}{ccc} K^{top}(G) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}(G)}} & K(\mathcal{A}(G)) \\ & \searrow \mu_r & \downarrow \\ & & K(C_r^*G) \end{array}.$$

Si l'on trouve une telle complétion inconditionnelle  $\mathcal{A}(G)$  qui soit stable par calcul fonctionnel holomorphe, et dense dans  $C_r^*G$ , alors le diagramme commutatif précédent montre que Baum-Connes est vraie pour  $G$ , par principe d'Oka.(à détailler) Lafforgue a montré cela pour les groupes de Lie, et leurs réseaux qui ont la propriété de décroissance rapide (RD).

Voici quelques exemples pour finir cette section. Pour  $SL(n, \mathbb{R})$ , on retrouve l'algèbre de Schwartz. Pour tous les sous-groupes discrets des groupes de Lie qui ont (RD), c'est l'algèbre de Jolissaint qui apparaît. Tous les réseaux cocompacts de  $SL(3, \mathbb{R})$  ( pour  $n > 3$ , c'est ouvert !), ainsi que ceux des groupes hyperboliques ou encore de 2 groupes exceptionnels, ont (RD).



## Références

- [1] J.P. Serre A. Borel. Le théorème de riemann-roch. *Bulletin de la S.M.F.*, 86 :97–136, 1958.
- [2] J. Bellissard. Gap labelling theorems for schrödinger operators. *From Number theory to Physics, Les Houches*, 89 :538–630, 1993.
- [3] Joachim Cuntz. K-theory and  $c^*$ -algebras. *Algebraic K-theory, Number Theory, Geometry and Analysis*, pages 55–79, 1982.
- [4] Pierre-Yves Le Gall. Thesis.
- [5] Alexandre Grothendieck. Produits tensoriels d’espace topologiques et espaces nucléaires. *Séminaire N. Bourbaki*, 69 :193–200, 1951-1954.
- [6] G. Yu H. Oyono-Oyono. On quantitative operator k-theory. *Annales de l’Institut Fourier*.
- [7] G. Yu H. Oyono-Oyono. Persistance approximation property and controlled k-theory.
- [8] G. Yu H. Oyono-Oyono. Ktheory for the maximal roe algebra of certain expanders. *Journal of functionnal analysis*, 257 :3239–3292, 2009.
- [9] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [10] Vincent Lafforgue. Banach  $kk$ -theory and the baum-connes conjecture. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. II (Beijing, 2002)(Higher Ed. Press, Beijing) :795–812, 2002.
- [11] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for  $k$ -groups and  $ext$ -groups of certain cross-products of  $c^*$ -algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.
- [12] Gerard J. Murphy.  *$C^*$ -algebras and operator theory*. Academic Press Inc., 1990.
- [13] Alain Connes Paul Baum. Geometric  $k$ -theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.
- [14] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and  $k$ -theory of group  $c^*$ -algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.
- [15] Michael V. Pimsner. A class of  $c^*$ -algebras generalizing both cuntz-krieger algebras and crossed products by  $F$ . *Fields Institute Communications*, 12 :189–212, 1997.
- [16] Jean Renault. *A groupoid approach to  $C^*$ -algebras*. Springer-Verlag, 1980.
- [17] Marc Rieffel.  $c^*$ -algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics*., 93(2) :415–429, 1981.
- [18] Tu J.L. Yu G. Skandalis, G. The coarse baum-connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4) :807–834, 2002.
- [19] Jean-Louis Tu. a conjcture de novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-theory*, 16(2) :129–184, 1999.
- [20] Jean-Louis Tu. The baum-connes conjecture for groupoids.  *$C^*$ -algebras*, 18 :227–242, 1999.
- [21] Jean-Louis Tu. The coarse baum-connes conjecture and groupoids ii. *New York J. Math.*, 18 :1–27, 2012.
- [22] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and  $C^*$ -algebras, a friendly approach*. Oxford University Press, 1993.