K-théorie contrôlée pour les groupoïdes et applications

Clément Dell'Aiera

IECL

12 Juillet 2017

Introduction

En physique, les modèles prévoient les valeurs de quantités mesurables, appelées **observables**. Ce sont des fonctions

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

où Ω est l'espace de configuration du système. Ces observables commutent en physique classique.

Pour donner un modèle de l'atome d'hydrogène en accord avec l'expérience, Heisenberg propose en 1925 de remplacer les observables classiques par des "q-nombres", qui ne commutent pas.

$$pq - qp = i\hbar 1$$

Introduction

Les "nombres" utilisés en physique quantique sont des opérateurs sur un espace de Hilbert. Les algèbres d'opérateurs sont encodées d'un point de vue abstrait par la notion de C^*-algèbre.

Définition

Une C^*-algèbre est une $\mathbb{C}$-algèbre A munie d'un antihomomorphisme involutif $*$ et d'une norme multiplicative $||.||$ telle que :

- $(A, ||.||)$ est une algèbre de Banach,
- $||a^*a|| = ||a||^2$ pour tout $a \in A$.

- l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{L}(H)$,
- l'algèbre des fonctions continues sur un espace localement compact $C_0(X)$.

Introduction

Il s'avère que toute C^*-algèbre commutative est équivalente à un espace localement compact.

Théorème (Dualité de Gelfand)

Soit A une C^*-algèbre commutative. Alors il existe un espace localement compact X et un $*$-isomorphisme

$$A \cong C_0(X).$$

Alain Connes développe à partir des années 80 la géométrie non-commutative basée sur le principe suivant

Géométrie Non-Commutative

Une C^*-algèbre représente un "espace non-commutatif".

Introduction

L'idée des physiciens (remplacer l'algèbre des coordonnées par une algèbre d'opérateurs) peut être utilisée pour étudier des espaces pathologiques.

Philosophie

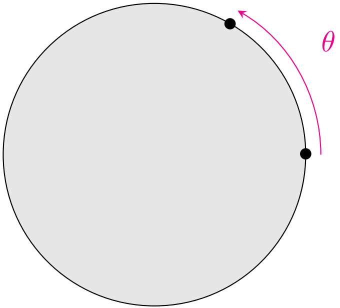
Associer à une situation géométrique une C^*-algèbre.

Quels espaces pathologiques ? Principalement, des espaces d'orbites, associés à :

- des actions de groupes,
- des feuilletages,
- des sytèmes dynamiques.

Introduction

Exemple : Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur le cercle $\mathbb{S}^1$ par rotation d'angle $2\pi\theta$.



Introduction

Deux cas :

- $\theta \in \mathbb{Q}$: les orbites sont périodiques, et le quotient est

$$\mathbb{S}^1/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1,$$

- $\theta \notin \mathbb{Q}$: toute orbite est dense, et $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}$ est un espace hautement pathologique. Rien ne le distingue d'un point.

$$C_0(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}.$$

Une solution : construire un groupoïde qui encode la situation géométrique. On sait associer des C^*-algèbres aux groupoïdes. (approche développée par J. Renault)

Introduction

Définition (Groupoïde)

Un groupoïde est la donnée de deux espaces topologiques, l'espace des flèches G et celui des unités $G^{(0)}$, ainsi que de :

- un plongement topologique $e : G^{(0)} \to G; x \mapsto e_x$,
- des applications continues surjectives source et but $s, r : G \rightrightarrows G^{(0)}$ telles que $r \circ e = s \circ e = id_{G^{(0)}}$,
- une multiplication continue

  $$G^{(2)} = G \times_{s,r} G \to G; (g, g') \mapsto gg'$$

  telle que $g(g'g'') = (gg')g''$ et $ge_{s(g)} = e_{r(g)}g = g$,
- une involution continue $G \to G; g \mapsto g^{-1}$ telle que $gg^{-1} = e_{r(g)}$, $g^{-1}g = e_{s(g)}$ et $s(g^{-1}) = r(g)$.

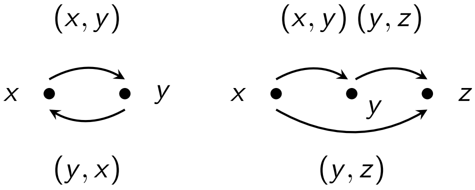
Introduction

$$\begin{tikzcd} s(g)\,\bullet \arrow[r, bend left, "g"] & \bullet\, r(g) \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Introduction

Des exemples de groupoïdes :

- un espace topologique $X \rightrightarrows X$,
- un groupe topologique $G \rightrightarrows *$,
- le groupoïde des paires $X \times X \rightrightarrows X$,



- le dernier exemple se généralise aux relations d'équivalence : $R \subseteq X \times X$.

Introduction

• Soit Γ un groupe dénombrable discret agissant sur X par homéomorphismes. Le groupoïde produit croisé noté $X \rtimes \Gamma \rightrightarrows X$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "{(x,g)}"] & gx \arrow[l, bend left, "{(gx,g^{-1})}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "{(x,g)}"] \arrow[rr, bend right, "{(gx,g'gx)}"'] & gx \arrow[r, bend left, "{(gx,g')}"] & g'gx \end{tikzcd}$$

Introduction

Quelques C^*-algèbres associées :

- $C_r^*(X) \cong C_0(X)$,
- dans le cas d'un groupe, on retrouve la C^*-algèbre de groupe,
- si X est fini, $C_r^*(X \times X) \cong \mathcal{L}(l^2(X)) \cong \mathfrak{M}_{|X|}(\mathbb{C})$,
- $C_r^*(X \rtimes \Gamma) \cong C_0(X) \rtimes_r \Gamma$.

Les 3 derniers cas sont des complétions d'algèbres de convolution.

Introduction

Dans le cas de la topologie classique, un des objets à déterminer est ce qu'on appelle l'homologie et la cohomologie d'un espace.

Dans le cadre de la géométrie non-commutative, on voudra déterminer la K-théorie de certaines C^*-algèbres, qui est l'analogue des théories homologiques classiques.

Objectif de la thèse

Déterminer les groupes de K-théorie de certaines familles de C^*-algèbres.

Introduction

Pour cela, voici notre stratégie :

- détecter la filtration naturelle des produits croisés de C^*-algèbres par des groupoïdes étales et des groupes quantiques discrets,
- approximer la K-théorie par la K-théorie contrôlée,
- dans le cas des C^*-algèbres de Roe et des produits croisés de groupoïdes étales, construire des applications d'assemblage,
- prouver une version contrôlée de la conjecture de Baum-Connes.

Introduction

Situation
géométrique

Introduction

$$\begin{tikzcd} \text{Situation géométrique} \arrow[r] & \text{Groupoïdes} \end{tikzcd}$$

Introduction

$$\begin{tikzcd}
\text{Situation géométrique} \arrow[r] & \text{Groupoïdes} \arrow[d] \\
& C^*\text{-algèbres}
\end{tikzcd}$$

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
\text{Situation géométrique} \arrow[r] & \text{Groupoïdes} \arrow[d] \\
K\text{-théorie} & C^*\text{-algèbres} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Introduction

$$
\begin{tikzcd}
\text{Situation géométrique} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\text{Assemblage}"] & \text{Groupoïdes} \arrow[d] \\
K\text{-théorie} & C^*\text{-algèbres} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Motivations

Soit X un espace métrique dénombrable discret à géométrie bornée, i.e. $\sup_{x \in X} |B(x,R)| < \infty$ pour tout $R > 0$. On note $H_X = l^2(X) \otimes H$ et

$$C_R[X] = \{ T \in \mathcal{L}(H_X) \text{ t.q. } T_{xy} \in \mathfrak{K}(H) \text{ et } prop(T) < R \}$$

Définition (Algèbre de Roe)

$$C^*(X) = \overline{\cup_{R>0} C_R[X]} \subseteq \mathcal{L}(H_X).$$

Si X est une variété riemannienne non-compacte, $K(C^*(X))$ est le réceptacle pour les indices d'opérateurs différentiels elliptiques. (Approche développée par J. Roe)

Motivations

Conjecture (Baum-Connes coarse)

Soit X un espace métrique dénombrable discret à géométrie bornée. Alors l'application d'assemblage

$$\mu_X : \varinjlim KK_*(C_0(P_d(X)), \mathbb{C}) \to K_*(C^*(X))$$

est un isomorphisme.

Soit Γ un groupe finiment engendré par une partie symmétrique S.

On note $|\Gamma|$ l'espace métrique obtenu en munissant Γ de la métrique de la longueur des mots.

La conjecture de Baum-Connes coarse pour $|\Gamma|$ implique la conjecture de Novikov sur les hautes signatures associées à Γ.

Motivations

Théorème (Yu, 2010 [5])

Soit X de dimension asymptotique finie. Alors l'application d'assemblage

$$\mu_X : \varinjlim KK(C_0(P_d(X), \mathbb{C}) \to K(C^*(X))$$

est un isomorphisme.

Dans la preuve : des groupes d'obstruction notés $QP_{\delta,r,s,k}(X)$ et $QU_{\delta,r,s,k}(X)$ qui approximent la K-théorie. Ce sont les ancêtres de la K-théorie contrôlée.

Motivations

Définition (Dimension asymptotique)

Un espace métrique est de dimension asymptotique $\leq d$ si, pour tout $R > 0$, il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de X tel que :

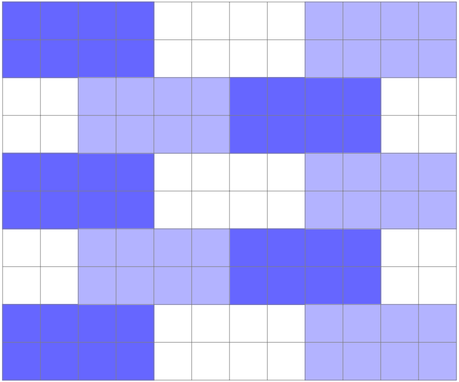
- $\sup_{\mathcal{U}} diam(U) < \infty$ i.e. $\mathcal{U}$ est uniformément borné,
- $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \coprod \ldots \coprod \mathcal{U}_d$ i.e. on peut colorier les ensembles par $d+1$ couleurs,
- $\inf_{U,U' \in \mathcal{U}_j} d(U, U') \geq R$, i.e. deux ensembles de la même couleur sont distants d'au moins R.

Motivations

Par exemple, $asdim(\mathbb{Z}^2) \leq 2$.

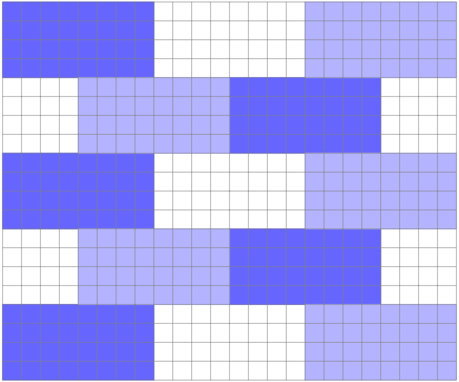
Motivations

Par exemple, $asdim(\mathbb{Z}^2) \leq 2$.



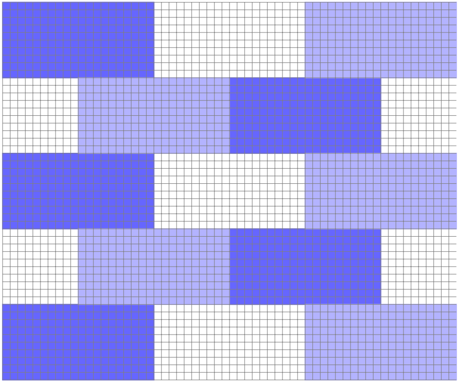
Motivations

Par exemple, $asdim(\mathbb{Z}^2) \leq 2$.



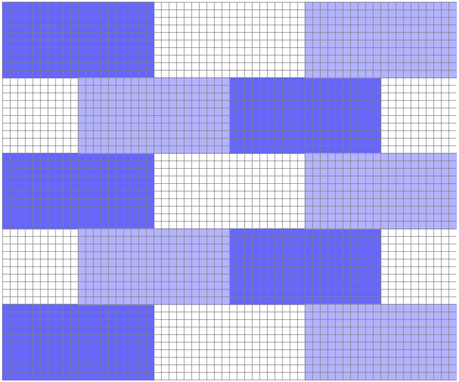
Motivations

Par exemple, $asdim(\mathbb{Z}^2) \leq 2$.



Motivations

Par exemple, $asdim(\mathbb{Z}^2) \leq 2$.



Les groupes $QP_{\delta,r,s,k}(X)$ et $QU_{\delta,r,s,k}(X)$ satisfont une suite de Mayer-Vietoris qui n'existe pas en K-théorie.

Motivations

Un cadre plus général : la K-théorie quantitative (Oyono-Oyono & Yu, 2015 [3]) pour les C^*-algèbres filtrées.

Une preuve plus générale :

Théorème (Oyono-Oyono Yu, 2017)

Soit X de décomposition géométrique finie. Alors l'application d'assemblage

$$\mu_X : \varinjlim KK(C_0(P_d(X), \mathbb{C}) \to K(C^*(X))$$

est un isomorphisme.

K-théorie contrôlée

C^*-algèbres filtrée

Associer une filtration à une structure géométrique.

- Oyono-Oyono & Yu : utilisation de metriques,
- Structure coarse : définir la filtration de manière intrinsèque. Le résultat de dépend plus de la métrique, et peut s'appliquer dans des situations purement algébrique (groupes quantiques).

K-théorie contrôlée

Situation
géométrique

K-théorie contrôlée

Situation géométrique $\longrightarrow$ Groupoïdes

K-théorie contrôlée

$$
\begin{tikzcd}
\text{Situation géométrique} \arrow[r] & \text{Groupoïdes} \arrow[d, "\text{Convolution}"] \\
& C^*\text{-algèbres } \mathcal{E}\text{-filtrées}
\end{tikzcd}
$$

K-théorie contrôlée

$$
\begin{tikzcd}
\text{Situation géométrique} \arrow[r] & \text{Groupoïdes} \arrow[d, "\text{Convolution}"] \\
K\text{-théorie contrôlée} & C^*\text{-algèbres } \mathcal{E}\text{-filtrées} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

K-théorie contrôlée

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{Situation géométrique} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\text{Assemblage contrôlée}"] & \text{Groupoïdes} \arrow[d, "\text{Convolution}"] \\
K\text{-théorie contrôlée} & C^*\text{-algèbres } \mathcal{E}\text{-filtrées} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

K-théorie contrôlée

Définition

Une structure coarse $\mathcal{E}$ est un semi-groupe abélien qui est aussi un treillis.

Rappelons qu'un treillis est un ensemble partiellement ordonné tel que toute paire (E, E') admette un supremum $E \vee E'$ et un infimum $E \wedge E'$.

On note $(E, E') \mapsto E \circ E'$ la loi de composition de $\mathcal{E}$.

K-théorie contrôlée

Définition

Une C^*-algèbre A est $\mathcal{E}$-filtrée s'il existe une famille de sous-espaces vectoriels fermés auto-adjoints $\{A_E\}_{E\in\mathcal{E}}$ de A telle que :

- si $E \leq E'$, alors $A_E \subseteq A_{E'}$,
- pour tout $E, E' \in \mathcal{E}$, $A_E.A_{E'} \subseteq A_{E\circ E'}$,
- A est l'adhérence de l'union des sous-espaces A_E, i.e. $\overline{\cup_{E\in\mathcal{E}} A_E} = A$.
- si A est unitale, on a de plus $1 \in A_E, \forall E \in \mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}_+^*$ muni de la somme, on retrouve la définition de Oyono-Oyono et Yu.

K-théorie contrôlée

Plus de C^*-algèbres peuvent être vues commes des C^*-algèbres filtrées.

Exemple

Les C^*-algèbres de Roe sont filtrées.

Exemple

Les produits croisés de C^*-algèbres par des actions de groupoïdes étales sont filtrées.

Exemple

Les produits croisés de C^*-algèbres par des actions de groupes quantiques discrets sont filtrées.

K-théorie contrôlée

Soit $\mathcal{E}$ une structure coarse et A une C^*-algèbre $\mathcal{E}$ filtrée. On définit les ε-E-unitaires

$$U^{\varepsilon,E}(A) = \{u \in A_E \text{ t.q. } ||u^*u - 1|| < \varepsilon \text{ et } ||uu^* - 1|| < \varepsilon\}$$

et les ε-E-projections

$$P^{\varepsilon,E}(A) = \{p \in A_E \text{ t.q. } p = p^* \text{ et } ||p^2 - p|| < \varepsilon\}.$$

K-théorie contrôlée

Comme en K-théorie,

- $P_\infty^{\varepsilon,E}(A)$ est la limite inductive algébrique des $P_n^{\varepsilon,E}(A)$ par rapports aux inclusions

$$\begin{cases} P_n^{\varepsilon,E}(A) & \to & P_{n+1}^{\varepsilon,E}(A) \\ p & \mapsto & \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $U_\infty^{\varepsilon,E}(A)$ est la limite inductive algébrique des $U_n^{\varepsilon,E}(A)$ par rapports à

$$\begin{cases} U_n^{\varepsilon,E}(A) & \to & U_{n+1}^{\varepsilon,E}(A) \\ u & \mapsto & \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

K-théorie contrôlée

On munit $P_\infty^{\varepsilon,E}(A)\times\mathbb{N}$ et $U_\infty^{\varepsilon,E}(A)$ des relations d'équivalence suivantes:

- $(p,l)\sim(q,l')$ s'il existe une homotopie de quasi-projections $h\in P_\infty^{\varepsilon,E}(A[0,1])$ et un entier k tel que

$$h(0)=\begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & 1_{k+l'}\end{pmatrix} \text{ and } h(1)=\begin{pmatrix} q & 0\\ 0 & 1_{k+l}\end{pmatrix}$$

- $u\sim v$ s'il existe une homotopie de quasi-unitaires $h\in U_\infty^{3\varepsilon,E\circ E}(A[0,1])$ tel que $h(0)=u$ and $h(1)=v$.

K-théorie contrôlée

Si A est unitale,

- $K_0^{\varepsilon,E}(A) = P_\infty^{\varepsilon,E}(A) \times \mathbb{N}/\sim_{\varepsilon,E}$
- $K_1^{\varepsilon,E}(A) = U_\infty^{\varepsilon,E}(A)/\sim_{\varepsilon,E}$.

Si A n'est pas unitale,

$$K_0^{\varepsilon,E}(A) = \{[p,l]_{\varepsilon,E} : p \in P_\infty^{\varepsilon,E}(\tilde{A}), l \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \mathrm{rank}(\kappa_0(\rho_A(p))) = l\}$$

et $K_1^{\varepsilon,E}(A)$ est défini par $U_\infty^{\varepsilon,E}(\tilde{A})/\sim_{\varepsilon,E}$.

Définition

La K-théorie contrôlée d'une C^*-algèbre filtrée $(A,\mathcal{E})$ est la famille de groupes abéliens

$$\hat{K}_0(A) = (K_0^{\varepsilon,E}(A))_{\varepsilon\in(0,\frac{1}{4}),E\in\mathcal{E}} \text{ et } \hat{K}_1(A) = (K_1^{\varepsilon,E}(A))_{\varepsilon\in(0,\frac{1}{4}),E\in\mathcal{E}}.$$

K-théorie contrôlée

- Pour tout $\varepsilon < \varepsilon'$ et $E \subseteq E'$, on dispose de morphismes

$$\iota_{\varepsilon,E}^{\varepsilon',E'} : K^{\varepsilon,E}(A) \to K^{\varepsilon',E'}(A)$$

tels que $\iota_{\varepsilon',E'}^{\varepsilon'',E''} \circ \iota_{\varepsilon,E}^{\varepsilon',E'} = \iota_{\varepsilon,E}^{\varepsilon'',E''}$ et $\iota_{\varepsilon,E}^{\varepsilon,E} = id_{K^{\varepsilon,E}(A)}$.

- Pour tout ε et $E \in \mathcal{E}$, on dispose de morphismes

$$\iota_{\varepsilon,E} : K^{\varepsilon,E}(A) \to K(A)$$

tels que $\iota_{\varepsilon',E'} \circ \iota_{\varepsilon,E}^{\varepsilon',E'} = \iota_{\varepsilon,E}$.

- Pour tout élément $x \in K(A)$ et tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, il existe $E \in \mathcal{E}$ et $y \in K^{\varepsilon,E}(A)$ tel que $x = \iota_{\varepsilon,E}(y)$.

K-théorie contrôlée

- Une paire de contrôle (α, ρ) est donnée par $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ et $k : (0, \frac{1}{4\alpha}) \to \mathbb{N}$ croissante.

Définition (Morphisme contrôlé)

Un morphisme (α, k)-contrôlé $\hat{F} : \hat{K}(A) \to \hat{K}(B)$ est une famille de morphismes

$$F^{\varepsilon,E} : K^{\varepsilon,E}(A) \to K^{\alpha\varepsilon,k_\varepsilon.E}(B)$$

compatible avec les $\iota_{\varepsilon,E}^{\varepsilon',E'}$.

On dit que $\hat{F}$ induit $F : K(A) \to K(B)$ en K-théorie si

$$\iota_{\alpha\varepsilon,k_\varepsilon E} \circ F^{\varepsilon,E} = F.$$

Remarque : Notion d'isomorphisme contrôlé et de suite exacte contrôlée.

K-théorie contrôlée

- Tout $*$-homomorphisme filtré $\phi ; A \to B$, i.e. $\phi(A_E) \subseteq B_E$, induit un morphisme contrôlé

$$\phi_* : \hat{K}(A) \to \hat{K}(B).$$

- Morita équivalence : $A \to A \otimes \mathfrak{K}; a \mapsto a \otimes e$ induit un isomorphisme

$$K^{\varepsilon,E}(A) \to K^{\varepsilon,E}(A \otimes \mathfrak{K}).$$

- Pour toute suite exacte complètement filtrée, il existe une suite exacte contrôlée à 6 termes, ainsi qu'un bord contrôlé.

- Périodicité de Bott contrôlée : $p \mapsto 1 + (e^{2i\pi} - 1)p$ induit un isomorphisme contrôlé

$$\beta_A : \hat{K}_0(A) \to \hat{K}_1(SA).$$

Groupoïdes

Soit $G \rightrightarrows G^{(0)}$ un groupoïde localement compact.

On note $r, s : G \rightrightarrows G^{(0)}$ les applications source et but, $e : G^{(0)} \to G$ l'application unité, et

$$G^{(2)} = \{(g, g') \in G \times G \text{ t.q. } s(g) = r(g')\}$$

les paires composables.

On rappelle des constructions dues à P-Y. Le Gall, J. Renault, J-L. Tu.

Définition

Le groupoïde G est dit étale si l'application but $r : G \to G^{(0)}$ est un homéomorphisme local.

Groupoïdes

Une $C(G^{(0)})$-algèbre A est la donnée d'une C^*-algèbre A muni d'un $*$-morphisme non-dégénéré $\theta : C(G^{(0)}) \to Z(\mathcal{M}(A))$.

Définition

L'espace $C_c(G, A)$ des sections à support compact est défini comme

$$C_c(G, A) = \bigcup_U C_0(U) \otimes_s A$$

où U parcourt les ouverts $U \subseteq G$ relativement compacts.

Groupoïdes

Une action de G sur une $C(G^{(0)})$-algèbre A est la donnée d'un isomorphisme de $C(G)$-algèbres

$$\alpha : s^*A \to r^*A$$

tel que $\alpha_{e_x} = id$ et $\alpha_g \circ \alpha_{g'} = \alpha_{gg'}$ pour tout $x \in G^{(0)}$ et toute paire composable $(g, g') \in G^{(2)}$.

On munit $C_c(G, A)$ du produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G^{r(g)}} f_1(h)\alpha_h(f_2(h^{-1}g)).$$

et de l'involution $\overline{f}(g) = \alpha_g(f(g^{-1})^*)$.

Groupoïdes

Le A-module hilbertien $L^2(G, A)$ est la complétion de $C_c(G, A)$ pour le produit scalaire

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = \sum_{g \in G^x} \xi(g^{-1})^* \eta(g^{-1}) \quad x \in G^{(0)}$$

sur lequel $C_c(G, A)$ est représenté par $\lambda(f)\xi = f * \xi$, pour tout $f \in C_c(G, A)$ et $\xi \in L^2(G, A)$.

Groupoïdes

Notation : $EE' = \{gg'/(g,g') \in G^{(2)} \cap E \times E'\}$.

Définition (Produit croisé)

Le produit croisé $A \rtimes_r G$ est la C^*-algèbre obtenue en complétant $C_c(G, A)$ pour la norme $||f||_r = ||\lambda(f)||$.

On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des compacts symétriques non vides de G, muni de la loi de compostion $E \circ E' = EE' \cup E'E$. Alors $\mathcal{E}$ est une structure coarse et $A \rtimes_r G$ est $\mathcal{E}$-filtrée avec

$$A_E = \cup_{U \subseteq E} C_0(U) \otimes_s A.$$

Groupoïdes

Pour calculer la K-théorie de $A \rtimes_r G$, on dispose de l'application d'assemblage de Baum-Connes

$$\mu_{G,A} : K^{top}(G,A) \to K(A \rtimes_r G)$$

définie pour toute G-algèbre A (J-L. Tu). Le membre de gauche est calculable par des méthodes de topologie algébrique classique.

Conjecture (Baum-Connes)

Le groupoïde G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients si $\mu_{G,A}$ est un ismomorphisme pour toute G-algèbre A.

Rappel: $K^{top}(G,A) = \varinjlim_{E \in \mathcal{E}} RK^G(P_E, A)$ où P_E est le complexe de Rips associé à G :

$$P_E = \{\eta \in Prob(G) \text{ t.q. } \exists x \in G^{(0)}, g \in G^x / \ supp(\eta) \subseteq G^x \cap gE\}$$

Assemblage contrôlé

On construit une application

$$\mu_{G,A}^{\varepsilon,E,F} : RK^G(P_E, A) \to K^{\varepsilon,F}(A \rtimes_r G)$$

définie pour toute G-algèbre A, qui induit $\mu_{G,A}$ en K-théorie.

Rappel : $\mu_{G,A}(z) = z \otimes j_G([\mathcal{L}_E])$, où

$$j_G : KK^G(A, B) \to KK(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G)$$

est l'application de descente de Kasparov.

Assemblage contrôlé

Proposition (Application descente)

Soient A et B deux G-algèbres. Pour tout $z \in KK_*^G(A,B)$, il existe une paire de contrôle (α_J, k_J) et un morphisme (α_J, k_J)-contrôlé

$$J_{red,G}(z) : \hat{K}(A \rtimes_r G) \to \hat{K}(B \rtimes_r G)$$

de même degré que z, tels que

(i) $J_{red,G}(z)$ induit la multiplication à droite par $j_{red,G}(z)$ en K-théorie ;

(ii) $J_{red,G}$ est additif, i.e.

$$J_{red,G}(z+z') = J_{red,G}(z) + J_{red,G}(z').$$

Assemblage contrôlé

Proposition (suite)

(iii) Pour tout G-morphisme $f : A_1 \to A_2$,

$$J_{red,G}(f^*(z)) = J_{red,G}(z) \circ f_{G,red,*}$$

pour tout $z \in KK_*^G(A_2, B)$.

(iv) Pour tout G-morphisme $g : B_1 \to B_2$,

$$J_{red,G}(g_*(z)) = g_{G,red,*} \circ J_{red,G}(z)$$

pour tout $z \in KK_*^G(A, B_1)$.

Assemblage contrôlé

Proposition (suite)

(v) Soient $0 \to J \to A \to A/J \to 0$ une extension semi-scindée G-équivariante de G-algèbres et $[\partial_J] \in KK_1^G(A/J, J)$ son bord en KK^G-théorie. Alors

$$J_G([\partial_J]) = D_{J\rtimes_r G, A\rtimes_r G}.$$

(vi) $J_{red,G}([id_A]) \sim_{(\alpha_J, k_J)} id_{\hat{K}(A\rtimes G)}$

(vii) $J_{red,G}$ respecte le produit de Kasparov.

Assemblage contrôlé

Pour tout ensemble contrôlé $E \subseteq G$, on dispose d'un projecteur $\mathcal{L}_E \in C_0(P_E(G)) \rtimes_r G$ qui est de propagation finie. Il définit donc une classe de K-théorie contrôlée.

Tout $\eta \in P_E(G)$ peut être écrit comme une somme finie

$$\eta = \sum_{g \in G^{p(\eta)}} \lambda_g(\eta)\delta_g,$$

avec δ_g la mesure de Dirac en $g \in G^{p(\eta)}$. On définit :

$$\mathcal{L}_E(g,\eta) = \lambda_{e_x}^{\frac{1}{2}}(\eta)\lambda_g^{\frac{1}{2}}(\eta),$$

qui est bien un projecteur de propagation E.

Assemblage contrôlé

Soient B une G-algèbre, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, et $E \in \mathcal{E}$. Soit $F \in \mathcal{E}$ tel que $k_J(\varepsilon).E \subseteq F$.

Définition

L'application d'assemblage contrôlée pour G est définie comme la famille d'applications :

$$\mu_{G,B}^{\varepsilon,E,F} \left\{ \begin{array}{rcl} RK^G(P_E(G), B) & \to & K_*^{\varepsilon,F}(B \rtimes_r G) \\ z & \mapsto & \iota_{\alpha_J\varepsilon', k_J(\varepsilon').F'}^{\varepsilon,F} \circ J_G^{\varepsilon',F'}(z)([\mathcal{L}_E, 0]_{\varepsilon',F'}) \end{array} \right.$$

où ε' et F' vérifient :

- $\varepsilon' \in (0, \frac{1}{4})$ tel que $\alpha_J\varepsilon' \leq \varepsilon$,
- et $F' \in \mathcal{E}$ tel que $E \subseteq F'$ et $k_J(\varepsilon').F' \subseteq F$.

Assemblage contrôlé

On définit une application d'assemblage coarse contrôlée.

Définition

Soient B une C^*-algèbre, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ et $E, F \in \mathcal{E}_X$ des entourages tels que $k_X(\varepsilon).E \subseteq F$. L'application d'assemblage contrôllée $\hat{\mu}_{X,B} = (\mu^{\varepsilon,E,F}_{X,B})_{\varepsilon,E}$ est définie comme la famille d'applications

$$\hat{\mu}^{\varepsilon,E,F}_{X,B} : \begin{cases} KK(C_0(P_E(X)), B) & \rightarrow & K^{\varepsilon,F}(C^*(X,B)) \\ z & \mapsto & \iota^{\varepsilon,F}_{\alpha_X\varepsilon', k_X(\varepsilon').F'} \circ \hat{\sigma}_X(z)[P_E, 0]_{\varepsilon',F'} \end{cases}$$

où ε' et F' vérifient :

- $\varepsilon' \in (0, \frac{1}{4})$ tel que $\alpha_X \varepsilon' \leq \varepsilon$,
- et $F' \in \mathcal{E}$ tel que $E \subseteq F'$ et $k_X(\varepsilon').F' \subseteq F$.

Ici, $\hat{\sigma}_X(z) : \hat{K}(C^*(X,A)) \rightarrow K(C^*(X,B))$ remplace $J_G(z)$, et P_E remplace $\mathcal{L}_E$.

Enoncés quantitatifs

Deuxième étape : formuler une version controlée de la conjecture de Baum-Connes.

Pour cela, il nous faut d'abord introduire les propriétés suivantes :

- $QI_{G,B}(E, E', F, \varepsilon)$: pour tout $x \in RK^G(P_E(G), B)$, alors $\mu_{G,B}^{\varepsilon,E,F}(x) = 0$ implique que $q_E^{E'}(x) = 0$ dans $RK^G(P_{E'}(G), B)$.

- $QS_{G,B}(E, F, F', \varepsilon, \varepsilon')$: pour tout $y \in K^{\varepsilon,F}(B \rtimes G)$, il existe $x \in RK^G(P_E(G), B)$ tel que $\mu_{G,B}^{\varepsilon',E,F'}(x) = \iota_{\varepsilon,F}^{\varepsilon',F'}(y)$.

Enoncés quantitatifs

Les énoncés quantitatifs forment le résultat central de la thèse. Ils prennent la forme suivante. Soit G un groupoïde étale σ-compact à base compacte.

Théorème (Injectivité Quantitative)

Soient B une G-algèbre, et $\tilde{B} = l^\infty(\mathbb{N}, B \otimes \mathfrak{K})$. Alors $\mu_{G,\tilde{B}}$ est injective ssi pour tout $E \in \mathcal{E}, \varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ et F tel que $k_J(\varepsilon).E \subseteq F$, il existe $E' \in \mathcal{E}$ tel que $E \subseteq E'$ et $QI_{G,B}(E, E', \varepsilon, F)$ soit vérifiée.

Enoncés quantitatifs

Théorème (Surjectivité Quantitative)

Soient B une G-algèbre, et $\tilde{B} = l^\infty(\mathbb{N}, B \otimes \mathfrak{K})$. Alors il existe $\lambda \geq 1$ tel que $\mu_{G,\tilde{B}}$ est surjective ssi pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{4\lambda}$ et $F \in \mathcal{E}$, il existe $E \in \mathcal{E}$ et F' tel que $k_J.E \subseteq F$ tel que $QS_{B,G}(E, F, F', \varepsilon, \lambda\varepsilon)$ soit vérifiée.

Enoncés quantitatifs

Ils admettent une version uniforme :

Théorème (Version uniforme)

Soit G un groupoïde étale σ-compact avec une base compacte.

- Supposons que pour toute G-algèbre B, $\mu_{G,B}$ soit injective. Alors, pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ et tout $E, F \in \mathcal{E}$ tels que $k_J(\varepsilon).E \subseteq F$, il existe $E' \in \mathcal{E}$ tel que $E \subseteq E'$ et tel que $QI_{G,B}(E, E', \varepsilon, F)$ soit satisfait pout toute G-algèbre B.
- Supposons que pour toute G-algèbre B, $\mu_{G,B}$ soit surjective. Alors, pour un certain $\lambda \geq 1$ et pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\lambda})$ et tout $F \in \mathcal{E}$, il existe $E, F' \in \mathcal{E}$ tels que $k_J(\varepsilon).E \subseteq F'$ et $F \subseteq F'$ tel que, pour toute G-algèbre B, $QS_{G,B}(E, F, F', \varepsilon, \lambda\varepsilon)$ soit satisfait.

Géométrie Coarse

Soit X un espace métrique discret à géométrie bornée. Le groupoïde coarse $G(X)$, introduit par G. Skandalis, J-L. Tu et G. Yu [4], est un groupoïde étale associé à tout espace coarse X.

Définition

Il existe une seule structure de groupoïde étale sur

$$G(X) = \cup_{E \in \mathcal{E}} \overline{E} \subseteq \beta(X \times X)$$

au-dessus de βX qui étend le groupoïde des paires $X \times X \rightrightarrows X$.

Géométrie Coarse

On pose $l_B^\infty = l_B^\infty(X, B \otimes \mathfrak{K})$. C'est une $G(X)$-algèbre.

$C^*(X, B)$: l'algèbre de Roe à coefficients dans une C^*-algèbre B.

Proposition (Skandalis, Tu, Yu 2012 [4])

Pour toute C^*-algèbre B, il existe un $*$-isomorphisme

$$\Psi_B : l_B^\infty \rtimes_r G(X) \cong C^*(X, B),$$

naturel en B.

Cette équivalence entre géométrie coarse et groupoïde s'étend au niveau de la KK-théorie.

Géométrie Coarse

On note $\iota : \{x\} \hookrightarrow G(X)$ l'inclusion d'un point $x \in X$.

Théorème

Soient B une C^*-algèbre, $E \in \mathcal{E}_X$ un entourage et l_B^∞ la G-algèbre $l^\infty(X, B \otimes \mathfrak{K})$. Alors, pour tout $z \in RK^G(P_{\overline{E}}(G), l_B^\infty)$ et tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$(\Psi_B)_* \circ \mu_{G, l_B^\infty}^{\epsilon, \overline{E}}(z) = \mu_{X,B}^{\epsilon, E}(\iota^*(z)).$$

Ce théorème induit en K-théorie un résultat de G. Skandalis, J-L. Tu et G. Yu [4], qui établit l'équivalence entre la conjecture de Baum-Connes coarse pour X à coefficients dans B et la conjecture de Baum-Connes pour $G(X)$ à coefficients dans $l^\infty(X, B \otimes \mathfrak{K})$.

Le théorème précédent permet notamment de donner une version contrôlée d'un résultat de M. Finn-Sell [1].

Corollaire

Soit X un espace coarse qui admet un plongement fibré dans l'espace de Hilbert. Alors $\hat{\mu}_X^{max}$ est un isomorphisme contrôlé, i.e. X vérifie la version maximale de la conjecture de Baum-Connes coarse contrôlée.

Le box space

$$\square SL(2,\mathbb{Z}) = \coprod_{coarse, n \geq 1} SL(2, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

est un expanseur qui admet un plongement fibré dans l'espace de Hilbert.

Formule de Künneth

Pour toutes C^*-algèbres A et B, on définit

$$\alpha_{A,B} : K_*(A) \otimes K_*(B) \to K_*(A \otimes B) \quad ; \quad (x, y) \mapsto x \otimes \tau_A(y).$$

Définition

Une C^*-algèbre A satisfait la formule de Künneth si, pour toute C^*-algèbre B telle que $K_*(B)$ soit libre, $\alpha_{A,B}$ est un isomorphisme.

Si A satisfait la formule de Künneth, alors, pour toute C^*-algèbre B, la suite suivante

$$0 \to K_*(A) \otimes K_*(B) \to K_*(A \otimes B) \to Tor(K_*(A), K_*(B)) \to 0$$

est exacte.

Formule de Künneth

Si A est $\mathcal{E}$-filtrée, $A \otimes B$ est $\mathcal{E}$-filtrée par $\{A_E \otimes B\}_E$. Pour tout $z \in KK(B_1, B_2)$, on dispose d'un morphisme contrôlé

$$\hat{\tau}_A(z) : K^{\varepsilon,E}(A \otimes B_1) \to K^{\alpha_\tau \varepsilon, k_\tau(\varepsilon).E}(A \otimes B_2)$$

qui induit $- \otimes \tau_A(z)$ en K-théorie [3].

On définit le morphisme contrôlé

$$\hat{\alpha}_{A,B} : \hat{K}_*(A) \otimes K_*(B) \to \hat{K}_*(A \otimes B) \quad ; \quad (x, y) \mapsto \hat{\tau}_A(y)(x),$$

qui induit donc $\alpha_{A,B}$ en K-théorie.

Formule de Künneth

Le morphisme contrôlé $\hat{\alpha}_{A,B}$ est dit :

- quasi-injectif s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\alpha_\tau \lambda})$ et $F \in \mathcal{E}$, il existe $F' \in \mathcal{E}$, et $F \subseteq F'$, tels que:

  $$\forall x \in K^{\varepsilon,F}(A) \otimes K(B) \text{ t.q. } \alpha^{\varepsilon,F}_{A,B}(x) = 0 \text{ alors } (\iota^{\lambda\varepsilon,F'}_{\varepsilon,F} \otimes id)(x) = 0.$$

- quasi-surjectif s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\alpha_\tau})$ et $F \in \mathcal{E}$, il existe $F' \in \mathcal{E}$, $F \subseteq h_{\tau,\lambda\varepsilon}.F'$, tels que:

  $$\forall y \in K^{\varepsilon,F}(A \otimes B), \exists x \in K^{\lambda\varepsilon,F'}(A) \otimes K(B) \text{ t.q.}$$

  $$\alpha^{\lambda\varepsilon,F'}_{A,B}(x) = \iota^{\alpha\lambda\varepsilon,h_{\tau,\lambda\varepsilon}.F'}_{\varepsilon,F}(y).$$

Formule de Künneth

Définition

Une C^*-algèbre $\mathcal{E}$-filtrée A satisfait la formule de Künneth quantitative s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que, pour toute C^*-algèbre B telle que $K_*(B)$ soit libre, $\hat{\alpha}_{A,B}$ est quasi-injectif et quasi-surjectif.

Si A satisfait la formule de Künneth quantitative, alors elle satisfait la formule de Künneth usuelle.

Remarque : l'intêret de la formule de Künneth quantitative est qu'elle est stable par des décompositions plus faibles que la formule usuelle. (Oyono-Oyono & Yu, 2016 [2]).

Formule de Künneth

On veut démontrer que, sous de bonnes conditions,

$$\alpha_{A\rtimes_r G,B} : K(A \rtimes_r G) \otimes K(B) \to K((A \rtimes_r G) \otimes B)$$

est un isomorphisme pour toute C^*-algèbre B telle que $K(B)$ soit libre.

Stratégie:

- définir une version topologique

  $$\alpha^G_{A,B} : K^{top}(G, A) \otimes K(B) \to K^{top}(G, A \otimes B)$$

  de $\alpha_{A\rtimes_r G,B}$.
- montrer que l'application d'assemblage les entrelace.
- se ramener au cas de certains sous-groupoïdes de G par restriction.

Formule de Künneth

La classe $\mathcal{C}$ définit une classe de groupoïdes dont toutes les actions propres sont localement induites par des sous-groupoïdes compacts ouverts.

Définition

Un groupoïde étale G est dans la classe $\mathcal{C}$ si, pour toute action propre G sur un espace Z, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Z tel que, pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe un sous-groupoïde compact ouvert H_U de G et un H_U-espace Z_U et un homéomorphisme G-equivariant

$$\psi_U : U \to G \times_{H_U} Z_U.$$

Exemples: les groupes discrets, les groupoïdes amples (J. Renault).

Formule de Künneth

Théorème

Soit G un groupoïde σ-compact étale et A une G-algèbre. Si

- G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients,
- G est dans la classe $\mathcal{C}$,
- pour tout sous-groupoïde compact ouvert H de G et tout H-espace V telle que l'application moment $p : V \to H^{(0)}$ soit localement injective, $\alpha_{A,B}^{H,V}$ est un isomorphisme.

Alors $A \rtimes_r G$ vérifie la formule de Künneth contrôlée.

Idée de la preuve

On définit

$$\alpha_{A,B}^{G,Z} : RK^G(Z,A)\otimes K(B) \to RK^G(Z, A\otimes B)$$

pour toute G-algèbre A, C^*-algèbre B et G-espace Z. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \alpha_{A,B}^{G,P_E} : RK^G(P_E,A)\otimes K(B) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{G,A}\otimes id"] & RK^G(P_E, A\otimes B) \arrow[d, "\mu_{G,A\otimes B}"] \\ \alpha_{A\rtimes_r G,B} : K(A\rtimes_r G)\otimes K(B) \arrow[r] & K((A\rtimes_r G)\otimes B) \end{tikzcd}$$

Idée de la preuve

Théorème

Soit G un groupoïde de la classe $\mathcal{C}$, et soit $E \in \mathcal{E}$. Si, pour tout

- sous-groupoïde compact ouvert H de G
- tout H-espace V tel que l'application moment $p : V \to H^{(0)}$ soit localement injective,

$\alpha^{H,V}_{Res^G_H(A),B}$ est un isomorphisme, alors

$$\alpha^{G,P_E}_{A,B} : RK^G(P_E, A) \otimes K(B) \to RK^G(P_E, A \otimes B)$$

est un isomorphisme pour toute C^*-algèbre B telle que $K_*(B)$ est un groupe abélien libre.

Idée de la preuve

P_E possède une strucuture de G-complexe simplicial fini. (J-L. Tu).

Soit $Z_0 \subseteq \ldots \subseteq Z_n$ la décomposition en squelette de P_E. Par un argument de type Mayer-Vietoris, il suffit de le démontrer pour $Z_0 = G$. Mais $p = r : Z_0 \to G^{(0)}$ est localement injective.

Lemme

Soit H un sous-groupoïde compact ouvert de G, et V un H-espace tel que l'application moment

$$p : V \to H^{(0)}$$

soit localement injective. Alors, pour tout G-algèbre B, on a un isomorphisme de groupes abéliens $\mathbb{Z}_2$-gradués

$$RK^G(G \times_H V, B) \cong RK^H(V, B).$$

Idée de la preuve

Le lemme précédent se montre en définissant l'induction sur les groupoïdes étales.

On peut ensuite refaire la preuve avec l'application d'assemblage contrôlée

$$\mu_{G,A}^{\varepsilon,E,E'} : RK^G(P_E, A) \to K^{\varepsilon,E'}(A \rtimes_r G)$$

pour obtenir la version contrôlée du résultat.

Références

Martin Finn-Sell.
Fibred coarse embeddings, a-T-menability and the coarse analogue of the Novikov conjecture.
Journal of Functional Analysis, 267(10):3758–3782, 2014.

H. Oyono-Oyono and G. Yu.
Quantitative K-theory and the Künneth formula for operator algebras.
ArXiv e-prints, August 2016.

Hervé Oyono-Oyono and Guoliang Yu.
On quantitative operator K–theory.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble). Available at www. math. univ-metz. fr/˜ oyono/pub. html, 2011.

Georges Skandalis, Jean-Louis Tu, and Guoliang Yu.
The coarse Baum-Connes conjecture and groupoids.
Topology, 41(4):807–834, 2002.

Guoliang Yu.
The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension.
Annals of Mathematics, 147(2):325–355, 1998.

Merci de votre attention !