

Questions sur les systèmes dynamiques

Clément Dell'Aiera

Contents

0.1	Le principe de Maxwell	2
0.1.1	Un exemple	3
0.2	Exposé : Heisenberg selon Alain Connes	4
0.2.1	Mécanique classique	4
0.2.2	Mécanique quantique	5
0.2.3	Introduction à la mécanique quantique	5
1	Physics : why ?	6
1.1	6
1.1.1	Quantum physics and probability theory	6
1.1.2	Quantification of the harmonic oscillator	7
1.1.3	The imprimitivity theorem of Mackey	7

0.1 Le principe de Maxwell

Dans son livre, *Structure des systèmes dynamiques*, J-M. Souriau donne un cadre symplectique à la mécanique classique, qui s'étend sans difficulté à celui de la relativité restreinte. Le voici. On se donne une variété V feuilletée par une 2-forme σ , telle que l'espace des feuilles $U = V/\ker \mathcal{F}$ soit une variété sur laquelle σ induit une structure symplectique. La première doit être pensée comme l'espace d'évolution du système physique que l'on étudie, et la seconde comme l'espace des mouvements du système.

Arrivé là, un expérimentateur doit pouvoir communiquer ses mesures à un second expérimentateur, et l'on doit donc se donner une règle qui permet de passer d'un référentiel à l'autre. Cela est fait grâce à l'action d'un groupe. Soit donc G un groupe de Lie, qui agit sur V de façon à préserver les feuilles, et qui induit donc une action par symplectomorphismes sur U .

Sous certaines conditions (si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i.e. G est semi-simple), on peut associer une application moment $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$, où \mathfrak{g}^* est le dual de l'algèbre de Lie de G , qui vérifie

$$\sigma(Z_U(x)) = -d\langle \mu(x), Z \rangle \quad , \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

En mécanique classique, $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$, et l'on passe d'un référentiel galiléen à un autre par transformations du groupe de Galilée, i.e. $G = \text{Gal}(3)$, remplacé par le groupe de Poincaré en relativité restreinte. Il existe des référentiels privilégiés appelés inertiels, et on passe de l'un à l'autre par des transformations du groupe de Galilée. La mécanique classique repose sur l'hypothèse suivante :

Principe de Galilée La forme σ est invariante sous l'action de $G = \text{Gal}(3)$.

C'est finalement ce principe que Souriau propose de généraliser en définissant le cadre de la mécanique comme une action d'un groupe de Lie par symplectomorphisme. On peut alors définir un principe analogue en relativité restreinte en remplaçant $\text{Gal}(3)$ par $P(3, 1)$. Le condition qui donne les équations du système est le principe de Maxwell.

Principe de Maxwell. Pour un système isolé, la forme de Lagrange est fermée : $d\sigma = 0$.

Le défaut d'équivariance de l'application moment, i.e.

$$\theta_x(a) = \underline{a}_{\mathfrak{g}^*} \mu(x) - \mu(\underline{a}_U x) \quad , \forall a \in G, x \in U$$

définit un \mathfrak{g}^* -cocycle de G , dont on peut montrer que la classe de cohomologie ne dépend ni de x (à vérifier) ni de μ . Cette classe, notée $m \in H^*(G)$, exprime la masse du système dans le cadre galiléen. Une résultat remarquable est que le groupe de Poincaré a une cohomologie triviale, ce qui donne une preuve mathématique simple qu'un système n'a pas de masse intrinsèque en relativité restreinte.

- Souriau mentionne dans son livre que ce formalisme peut s'étendre en relativité générale, au prix d'abandonner les groupes de Lie pour les pseudo-groupes. A l'heure actuelle, je n'ai pas trouvé encore où ni comment le faire. Ce formalisme mettant en jeu des actions de groupes (et possiblement de pseudo-groupes, donc de groupoïdes), je me demande si une réécriture en terme de groupoïdes ne permettrait pas d'éclaircir la méthode, ou encore d'apporter des réponses à des situations plus complexes en donnant de bons invariants. Par exemple, on peut penser à l'action de \mathbb{R} sur le tore \mathbb{T} par le flot donné par la forme $dy - \theta dx$, avec θ un irrationnel.
- Au départ, mon intérêt pour ce formalisme me vient de la question suivante : quel est le lien entre la K -théorie et la "masse" d'un système physique ? Ce lien est mentionné dans un des deux articles (plus précis !) d'E. Witten sur la K -théorie, où il explique que la K -théorie d'une certaine algèbre labelle naturellement les valeurs possibles de la charge conservée d'un champ de Ramond-Ramond. Ensuite, il est connu que si l'on observe un électron dans un cristal aperiodique, son énergie est donnée par un élément de la K -théorie d'une certaine algèbre (la C^* -algèbre du groupoïde de l'action du groupe d'isométrie des pavages sur l'orbite d'icelui). Bien sûr, cette question est entièrement basée sur des analogies, dont la plus simple est que la charge électrique joue pour le champ électromagnétique le rôle de la masse pour le champ gravitationnel.

0.1.1 Un exemple

En mécanique classique, $V = \{y = (r, v, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\}$ et

$$\sigma(dy)(d'y) = \sum_j \langle m_j dv_j - F_j dt, d'r_j - v_j d't \rangle - \sum_j \langle m_j d'v_j - F_j d't, dr_j - v_j dt \rangle.$$

L'idée est de remplacer le système $m \frac{\partial v}{\partial t} = F$, $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ par σ , et de passer de l'espace de phase $R^N \times R^N$ par V . Ce faisant, le temps devient une variable comme les autres, ce qui permet de traiter le cadre de la relativité restreinte, où un changement de repère mélange coordonnées de temps et d'espace, avec le même formalisme que celui de Galilée.

Voici d'ailleurs

- le groupe de Galilée

$$Gal(3) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in SO(3), v, x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Si l'on passe R à R' par une telle transformation, l'origine de R' est translatée de x à vitesse v par rapport à celle de R , et il faut appliquer A au repère de R pour obtenir celui de R' .

- Le groupe de Lorentz $O(3, 1)$ est le groupe de $E_{3,1}$ qui préserve la forme de Minkowski $dt^2 - dx^2$. Le groupe de Poincaré est donné par

$$P(3, 1) = O(3, 1) \rtimes E_{3,1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in O(3, 1), v \in E_{3,1} \right\}.$$

On voit que le groupe de Galilée en est un sous-groupe, et que $P(3, 1)$ permet lui de mélanger coordonnées spatiales et temporelles.

Soit $Z = \begin{pmatrix} j(\omega) & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gal}(3)$ un déplacement infinitésimal du groupe de Galilée. Il induit sur V le champ de vecteur suivant

$$\underline{Z}_V(y) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} + (\omega \wedge r + \beta t + \gamma) \frac{\partial}{\partial r} + (\omega \wedge v + \beta) \frac{\partial}{\partial v},$$

et un simple calcul donne que $\mu(y)$ à quatre composantes :

$$(l, g, p, E) = \left(mr \wedge v, r - vt, mv, \frac{1}{2} \|v\|^2 \right).$$

0.2 Exposé : Heisenberg selon Alain Connes

0.2.1 Mécanique classique

Mécanique Lagrangienne

Dans les des prochains paragraphes, nous allons présenter des formulations variationnelles de la mécanique. L'idée est de faire découler les équations du mouvement d'un système d'un principe variationnel.

Plus précisément, on se donne

- un espace des phases $\Omega = \mathbb{R}^{6N}$ dont les points représentent l'état du système,
- une fonction appelée Lagrangien $L : \Omega \times [T_1, T_2] \rightarrow \mathbb{R}$, qui définit une action pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dans un ensemble de courbes assez régulières \mathcal{C} :

$$S[\gamma] = \int_{T_1}^{T_2} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

Le principe de la moindre action s'énonce alors ainsi : $\gamma \in \mathcal{C}$ est un mouvement du système ssi il est un point extrémal de l'action.

Pour trouver les trajectoires du système, il suffit donc de résoudre l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} L = \frac{\partial}{\partial x^\mu} L.$$

En mécanique classique, le Lagrangien est souvent donné par la différence $K - T$ entre l'énergie cinétique et potentielle.

Mécanique Hamiltonienne

Pour passer à la formulation Hamiltonienne, on définit l'impulsion conjuguée à x^μ par

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}.$$

Alors $\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \ddot{x}^\mu = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \{p^\mu \dot{x}^\mu\}$. On définit l'Hamiltonien comme $H = p^\mu \dot{x}^\mu - L$, ce qui permet de réécrire l'équation précédente comme $-\dot{H} = \frac{\partial L}{\partial t}$.

Les équations d'Euler Lagrange peuvent alors se réécrire sous les formes suivantes :

$$\text{EL1 : } \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad \text{et} \quad \text{EL2 : } -\dot{H} = \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Chacune exprime une propriété différente. **EL1** exprime la conservation d'une quantité (\dot{p} est constante si le Lagrangien ne dépend pas de la position), et **EL2** donne les équations du mouvement.

Par exemple, prenons le Lagrangien d'un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω ,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \omega^2 x^2,$$

alors **EL1** donne la conservation de l'énergie et **EL2** donne l'équation du pendule $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Faites le pour le Lagrangien d'un corps en chute libre dans un champ de pesanteur

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgx.$$

Le formalisme Hamiltonien donne l'évolution d'une observable par $\dot{f} = \{H, f\}$.

Mécanique symplectique

Voir la section précédente. D'où viennent les expressions de l'énergie cinétique et potentielles ? Lien avec l'application moment ?

0.2.2 Mécanique quantique

Historique

Peu avant 1900, Lord Kelvin prononça un célèbre discours au cours duquel il affirma que la physique était essentiellement terminée. Seuls résistaient quelques petits problèmes :

- le problème du corps noir,
- l'incompatibilité des équations de Maxwell avec la relativité Galiléenne,
- le problème des raies spectrales.

Chacun de ses problèmes allait forcer les physiciens à revoir entièrement les théorie établies.

Le problème du corps noir vise à comprendre les interactions entre lumière et matière. Par exemple, comment expliquer la lumière qu'émet un corps lorsqu'on le chauffe ? Les physiciens expérimentaux avaient tabulé les valeurs à température fixée de l'intensité du rayonnement émis en fonction de la longueur d'onde, ce qui donnait ce genre de graphique :

Les lois de Rayleigh-Jeans et Wien donnaient des formules pour approximer la fonction qui ne fonctionnaient qu'à haute ou basse longueur d'onde. C'est Planck qui donna une formule qui collait parfaitement aux données, et qui collait au deux précédentes en faisant les bonnes approximations. C'est toutefois la dérivation de la formule qui posé problème aux physiciens de l'époque (y compris à Planck, qui affirmait lui même n'y voir qu'un artifice mathématique).

Pour voir que les équations de Maxwell ne respectent pas la relativité Galiléenne, il suffit de prendre

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gal,$$

et de prendre $f = \tilde{f} \circ T$ différentiable deux fois, et de montrer que

$$\left(\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) (t, x) = \left(\tilde{\Delta} \tilde{f} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{(\partial \tilde{t})^2} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{(\partial \tilde{x}^1)^2} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^1} \right) (\tilde{t}, \tilde{x}).$$

La spectroscopie permet d'analyser la composition des atomes des corps simples, par exemple. On peut par exemple envoyer de la lumière sur un tube transparent contenant du gaz hydrogène, puis diffracter la lumière grâce à un spectromètre, tel qu'un prisme, et obtenir les raies d'émission du corps en question.

La loi de Rydberg (1890), généralisation de la loi de Balmer (1885), donne quelle sont les raies observées :

$$\nu_{m,n} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Le point important est que ces fréquences peuvent se composer selon la loi de Ritz-Rydberg

$$\nu_{nm} = \nu_{nl} + \nu_{lm}.$$

Le problème était que la théorie classique ne prévoyait pas cela, puisqu'elle prévoit que les fréquences observées forment un sous-groupe additif de \mathbb{R} , ce qui n'est pas ce que l'on observe.

Heisenberg

0.2.3 Introduction à la mécanique quantique

Chapter 1

Physics : why ?

These notes are based on a seminar given by PhD students in Mathematics at the University of Lorraine during spring 2017.

Notations :

If H is a complex Hilbert space, $\mathcal{L}(H)$ denotes the bounded linear operators on H . If $T \in \mathcal{L}(H)$, T^* denotes its adjoint.

1.1

The following section

1.1.1 Quantum physics and probability theory

In his article [?], W. Heisenberg built a model of the atom using what he called q-numbers. It is, to the knowledge of the author, the first time a physicist proposes the use of non-commutative variables to describe a measurable phenomenon. The aim of this section is to explain how physicists compute measurable quantities out of a self-adjoint operator. The key notion is that of Projection Valued Measure.

Definition 1.1.1. Let (Ω, \mathcal{B}) be a measurable space, and H a complex Hilbert space. A Projection Valued Measure (POVM) on Ω is a map

$$P : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

such that :

- $P(\emptyset) = 0$ and $P(\Omega) = id_H$,
- for each measurable subset $B \in \mathcal{B}$, $P(B)$ is a self-adjoint projection, i.e.

$$P(B) = P(B)^* = P(B)^2,$$

- for every $B, B' \in \mathcal{B}$,

$$P(B \cap B') = P(B)P(B'),$$

- for every $B, B' \in \mathcal{B}$ such that $B \cap B' = \emptyset$,

$$P(B \cup B') = P(B) + P(B'),$$

- for every $\xi, \eta \in H$, $B \mapsto P_{\xi, \eta}(B) = \langle \xi, P(B)\eta \rangle$ defines a complex measure $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$.

A POVM allows to define bounded functional calculus. Let $f \in L^\infty(\Omega)$ be an essentially bounded function on Ω . Then

$$P_{\xi, \eta}(f) = \int f(x) dP_{\xi, \eta}(dx)$$

defines a bounded operator on H , which we will denote by $\int_\Omega f dP$.

Proposition 1.1.2 (Functional Calculus). The map

$$P : \begin{cases} L^\infty(\Omega) & \rightarrow \mathcal{L}(H) \\ f & \mapsto \int_\Omega f dP \end{cases}$$

defines a $*$ -homomorphism, continuous for the $*$ -weak topology. Moreover, an operator $T \in \mathcal{L}(H)$ commutes with $P(f)$ iff T commutes with $P(B)$ for every $B \in \mathcal{B}$.

The functional calculus allows to give a nice setting for the spectral theorem.

Theorem 1.1.3 (Spectral theorem). Let $T \in \mathcal{L}(H)$ be a normal operator, i.e. such that T and T^* commutes. Then there exists a unique POVM P on $\Omega = Sp(T)$ such that

$$T = \int_\Omega x P(dx) (= P(id)),$$

\hat{T} being the Gelfand transform of T . Moreover, for every $A \in \mathcal{L}(H)$ which commutes with T , there exists $f \in L^\infty(\Omega)$ such that $A = P(f)$.

Remark 1.1.4. A good setting for that theorem is that of Von Neumann algebras. Indeed, the spectral theorem exactly says that if M is any unital commutative Von Neumann algebra of $\mathcal{L}(H)$, there exists a unique POVM P such that, for every $T \in A$,

$$T = \int_\Omega \hat{T}(x) P(dx).$$

Moreover, $A' = \cap_{B \in \mathcal{B}} E(B)'$.

It is this theorem that allows physicists to understand self-adjoint operators as generalized observables. Indeed, given a self-adjoint operator $A \in \mathcal{L}(H)$ supposed to describe an observable, what is measured during the experiment if the system is prepared in the state $\xi \in H$ ($\|\xi\| = 1$) is a random variable X which follows the probability law $P_{\xi, \xi}$. This theory entirely recovers the classical probability theory. What is gained is the existence of incompatible variable. Indeed, if two variables commute, they are function one of another. But if they don't, no POVM diagonalize them, which physically means they cannot be simultaneously measured.

1.1.2 Quantification of the harmonic oscillator

One of the simplest system to describe is the harmonic oscillator. Classically, it is defined as ...

In QM, a family of harmonic oscillator is described by operators $\{p_i, q_i\}_i$ which satisfies the Canonical Commutation Relations (CCR) :

$$[p_i, q_j] = i\hbar \delta_i^j \quad [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0.$$

Such operators cannot be bounded. Indeed, let A be a unital \mathbb{C} -algebra with a multiplicative norm, and two elements $x, y \in A$ such that

$$xy - yx = 1_A.$$

Then by induction $x^n y - y x^n = n x^{n-1}$ for every $n > 1$. Hence $n \leq 2\|x\|\|y\|$, which is absurd. This proof is of Wielandt, and can be found in [?].

The theorem of Stone-Von Neumann asserts that there is only one irreducible unitary representation of the CCR, and that one representative is given by $p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ and $q_j = x_j$ on $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.1.3 The imprimitivity theorem of Mackey

In this section, we explain a result of Mackey which generalizes the Stone-Von Neumann theorem.

Definition 1.1.5. Let G be a Lie group and X a differentiable manifold. A system of imprimitivity for (G, X) is given by :

- a complex Hilbert space H ,

- a POVM $P : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ on X ,
- a unitary representation $V : G \rightarrow U(H)$ of G on H ,
- an action of G by diffeomorphisms on X .

such that

$$V_g P(B) V_g^* = P(gB) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X), g \in G.$$

Remark 1.1.6. Such a system is supposed to describe a particle evolving on the spacetime X with internal symmetries G .

Remark 1.1.7. The POVM P can be replaced by a $*$ -representation $\pi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ such that

$$V_g \pi(f) V_g^* = \pi(\alpha_g(f))$$

where $\alpha_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$.

Let K be a closed subgroup of G and $X = G/K$. X is called a homogeneous space, and

$$g.(g'K) = (gg')K,$$

defines a differentiable action of G on X .

Theorem 1.1.8 (Mackey). Let K be a compact subgroup of G . System of imprimitivity of $(G, G/K)$ are in bijective correspondence with unitary representations of K .

Remark 1.1.9. This result is actually contained in the $*$ -isomorphism

$$C_0(G/K) \rtimes_r G \cong C_r^*(K) \otimes \mathfrak{K}(L^2(G)),$$

which is convenient to prove using the fact that the groupoids $G/K \rtimes G$ and K are Morita equivalent via G/K .

Remark 1.1.10. One can recover Stone-Von Neumann theorem by taking $G = \mathbb{R}^n$, and $K = 1$.

Remark 1.1.11. If $G = Isom(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$, and $K = SO(n)$, one gets that particles evolving on Euclidean spaces with isometries as symmetries are govern by unitary representations of $SO(n)$.

Remark 1.1.12. If $G = SO(n+1)$, and $K = SO(n)$, one gets that particles evolving on n dimensionnal spheres with rotations as symmetries are govern by unitary representations of $SO(n)$.

Bibliography