Notes

Clément Dell'Aiera

Table des matières

1 Groupoïds

1.1 Definitions

Définition 1. A groupoid is a small category whose arrows are all invertible. More concretly, it is the data of a set G together with a set of units $G^{(0)}$ and two maps $r, s : G \to G^{(0)}$. We can compose two arrows when the range of the first agrees with the source of the second. If we denote, for $x \in G^{(0)}$, $G_x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x\}$ and $G^x = \{\gamma \in G : r(\gamma) = x\}$, this can be rephrase as the existence of a family of maps

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G_x \times G^x & \to & G \\ (\gamma, \gamma') & \mapsto & \gamma\gamma' \end{array} \right. , \forall x \in G^{(0)}.$$

An automorphism of a groupoid is just an endofunctor which is invertible.

Depending on the situation, we will require these to be topological spaces with continuous maps, manifolds with smooth functions, etc. In these cases, we will talk about topological or smooth groupoïds. For now on, L_γ denotes the left translation $G^{s(\gamma)} \to G^{r(\gamma)}; \gamma' \mapsto \gamma\gamma'$, and $X = G^{(0)}$ is the set of units.

Définition 2. A Haar system $\lambda = (\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$ is a family of borelian measures λ^x with support G^x such that :

1. for all continuous function with compact support $f \in C_c(G)$, the map $x \mapsto \int_{G^x} f d\lambda^x$ is continuous.
2. λ is left-invariant w.r.t G, i.e. $L_{\gamma,*}\lambda^{s(\gamma)} = \lambda^{r(\gamma)} \forall \gamma \in G$ or

$$\int_{G^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma') d^{s(\gamma)}\gamma' = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') d^{r(\gamma)}\gamma'.$$

From $L_\gamma \circ \alpha = \alpha \circ L_{\alpha^{-1}(\gamma)}$, we deduce

$$\int_{G^{s(\alpha^{-1}(\gamma))}} f(\gamma\alpha(\gamma')) d\gamma' = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') \frac{1}{\rho(\alpha^{-1}(\gamma^{-1}\gamma'))} d\gamma'$$

$$\int_{G^{s(\alpha^{-1}(\gamma))}} f(\alpha(\alpha^{-1}(\gamma)\gamma')) = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') \frac{1}{\rho(\alpha^{-1}(\gamma'))} d\gamma'$$

and $\rho(\gamma^{-1}\gamma') = \rho(\gamma')$. In particular, ρ is constant on G_x, for all $x \in X$.

Définition 3. An automorphism α of G preserves a Haar system λ if, for each $x \in X$, $\alpha_*\lambda^x$ is absolutely continuous w.r.t $\lambda^{\alpha(x)}$ and there exists a continuous function $\rho_\alpha : G \to \mathbb{R}^+$ such that ρ_α restricted to $G^{\alpha(x)}$ is the Radon-Nikodym derivative $\frac{d\alpha_*\lambda^x}{d\lambda^{\alpha(x)}}$.

Définition 4. Given an automorphism α of a groupoid G, we can form the suspension groupoid relative to α as follow. It is the groupoid with arrows

$$G_\alpha = G \times \mathbb{R}/\sim \quad \text{where } (\gamma, t) \sim (\alpha(\gamma), t-1)$$

and units

$$X_\alpha = X \times \mathbb{R}/\sim \quad \text{where } (x, t) \sim (\alpha_X(x), t-1).$$

If $[\gamma, t]$ and $[x, t]$ denote the equivalence classes in G_α and X_α respectively, then the source and the range map are given by

$$s([\gamma, t])] = [s(\gamma), t] \quad \text{and} \quad r([\gamma, t])] = [r(\gamma), t].$$

The composition is $[\gamma, t][\gamma', t] = [\gamma\gamma', t]$.

Lemme 1. If $\rho_\alpha \circ \alpha = \rho_\alpha$, then the suspension groupoid G_α admits a Haar system λ_α, given by

$$\lambda^{[x,t]}(f) = \int_{G^x} \rho_\alpha(\gamma)^{-t} f([\gamma, t]) d\lambda^x(\gamma).$$

Preuve 1. We shall first demonstrate that this definition does make sense, i.e. that it is independent of the representant of the class $[x, t]$.

$$\begin{aligned}
\lambda^{[x,t]}(f) &= \int_{G^x} \rho(\alpha(\gamma))^{-t} f([\gamma, t]) d^x\gamma \\
&= \int_{G^{\alpha(x)}} \rho(\gamma)^{-t} f([\alpha^{-1}(\gamma), t]) \frac{d^{\alpha(x)}\gamma}{\rho(\gamma)} \\
&= \int_{G^{\alpha(x)}} \rho(\gamma)^{-t+1} f([\gamma, t-1]) d^{\alpha(x)}\gamma \qquad = \lambda^{[\alpha(x), t-1]}(f).
\end{aligned}$$

As the continuity is clear, we can conclude by showing the left-invariance.

$$\begin{aligned}
\int_{G_\alpha^{[s(\gamma),t]}} f([\gamma\gamma', t]) d^{[s(\gamma),t]}[\gamma', t] &= \int_{G^{s(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma') f([\gamma\gamma', t]) d^{s(\gamma)}\gamma' \\
&= \int_{G^{r(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma^{-1}\gamma') f([\gamma', t]) d^{r(\gamma)}\gamma' \\
&= \int_{G^{r(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma') f([\gamma', t]) d^{r(\gamma)}\gamma'
\end{aligned}$$

The last equality follows from the fact that ρ is constant on G_x, for all $x \in X$, and then

$$\int_{G_\alpha^{[s(\gamma),t]}} f([\gamma\gamma', t]) d^{[s(\gamma),t]}[\gamma', t] = \int_{G_\alpha^{[r(\gamma),t]}} f([\gamma', t]) d^{[r(\gamma),t]}[\gamma', t].$$

$\square$

1.2 Principal *étale* groupoids

In this section, we are interested in locally compact groupoids. The maps $r, s : G \to X$, the composition and inverse maps are continuous.

Définition 5. A groupoid is said to be *étale* if $r : G \to X$ is a local homeomorphism.
It is principal if the product map $s \times r : G \to X \times X$ is one-to-one.

Let $x \in X$ and $\gamma \in G^x$. If G is *étale*,there exists a neighborhood U of γ such that $r_{|U}$ is a homeomorphism. So $G^x \cap U = \{\gamma\}$ is open in G^x. That show that the fibers G^x are discrete for all $x \in X$.

Proposition 1. If G is a principal étale groupoid, the fibers G^x are discrete for all $x \in X$ and the only Haar systems are the multiple of the counting measure on the fibers.

Preuve 2. If λ is a non-zero Haar system and G is principal, λ^x is a measure on the discrete space G^x, which entails that there exists a $\gamma \in G^x$ such that $\lambda(\gamma) > 0$. By left-invariance,

$$\lambda^{r(\gamma')}\{\gamma'\gamma\} = \lambda\{\gamma\} > 0.$$

Replacing $\gamma' = \gamma^{-1}$ in this relation, we have $\lambda^x\{x\} > 0$, which we can suppose equal to 1. The left invariane assures then that

$$\lambda^x\{\gamma\} = 1 \quad \forall \gamma \in G^x.$$

$\square$

2 Stone-Cech compactification

Let X be a topological space. The Stone-Cech compactification of X, denoted by βX, is defined as the compact Hausdorff space, unique up to homeomorphism, together with a $C_b(X)$-embedding $\phi_X : X \to \beta X$ such that, for any continuous map $f : X \to K$ in a compact space K, there exists a unique continuous map $\tilde{f} : \beta X \to K$ that makes the following diagram commutes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_X"] & K \\ \beta X \arrow[ur, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd} .$$

The universal property of the Stone-Cech compactified makes it a functor from the category of topological spaces to the category of compact Hausdorff spaces. Indeed, it is general property that, if we are given two categories C and C' and a functor $\phi : C \to$, such that for every functor $F : C \to C'$, there exists

Let X be a compact Hausdorff space. Then the maximal ideals of $C(X)$ are in a one-to-one correspondence with the points of X. Explicitely, to a point $p \in X$ corresponds the maximal ideal

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}.$$

If one endorses the spaces of maximal ideals of $C(X)$ with the Stone topology, this correspondence $p \mapsto \mathfrak{M}_p$ is actually a homeomorphism. Now, it is a theorem that when X is just locally compact, $C(\beta X)$ and $C_b(X)$ are homeomorphic, and then we have that $\beta X \simeq \mathfrak{M}(C(\beta X)) \simeq \mathfrak{M}(C_b(X))$. This amounts saying that we can see βX as the spectra of $C_b(X)$, for all locally compact spaces.

3 Asymptotic dimension

Définition 6. Let X be a metric space.
The multiplicity of a cover $\mathcal{U}$ of X is the largest number $n \in \mathbb{N}$ such that every point $x \in X$ is contained in at most n elements of $\mathcal{U}$.
If $R > 0$, the R-multiplicity is the defined as the multiplicity restricted on covers uniformly bounded by R.
The asymptotic dimension of x is the smallest natural integer $n \in \mathbb{N}$ such that, for all $R > 0$, there exists a uniformly bounded cover $\{U_j\}$ with R-multiplicity $n + 1$.
Such a space is said to have finite asymptotic dimension if this number, denoted $\dim_\infty X$, is bounded.

4 Assembly maps for groupoids and for coarse spaces

4.1 The case of a finitely generated group

Let Γ be a discrete finitely generated group. The word length provides a structure of metric space, of which the class up to coarse equivalence is independent of the set of generators.

Denoting $C^*(\Gamma)$ the Roe algebra, i.e. the C^*-algebra generated by locally compact operators on $l^2(\Gamma) \otimes H$ with finite propagation, we can show that

$$C^*_u(\Gamma) = l^\infty(\Gamma) \times_\alpha \Gamma$$

$$C^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma, \mathfrak{K}(H)) \times_\alpha \Gamma.$$

Here $\alpha \in Aut(A)$ is the automorphism encoding the left action of Γ on A :

$$\alpha_\gamma(a) = s \to a_{s\gamma^{-1}}.$$

Let S_γ be the operator acting on $l^2(\Gamma)$ as

$$(S_\gamma \eta)_s = \eta_{s\gamma^{-1}}.$$

We see $l^\infty(\Gamma)$ as an algebra of operator, acting by left multiplication on $l^2(\Gamma)$. Then

$$S_\gamma a S_\gamma^* = \alpha_\gamma(a),$$

for any $a \in l^\infty(\Gamma)$ and $\gamma \in \Gamma$. The algebra $C^*(\Gamma)$ is generated by finite sums of the form

$$\sum_\gamma a_\gamma S_\gamma$$

which are of finite propagation $\max_\gamma\{l(\gamma) : a_\gamma \neq 0\}$ and locally compact.

4.2 Relation between the coarse and the groupoid assembly maps

We have to show that there is an isomorphism

$$KX_*(X) \to KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K})).$$

Let us recall that the Stone-Cech compactification of our coarse groupoid $\Gamma = G(X)$ identified itself to the spectrum of the bounded continuous functions over X, which is discrete. We have

$$C(\beta X) \simeq l^\infty(X)$$

and we can think of $C(\beta X)$-algebras as $l^\infty(X)$-algebras.

The left handside $KX_*(X)$ is defined as the limit of the directed groups

$$KK_*(C_0(P_E(X), \mathbb{C})$$

when E is an entourage of X. Here $P_E(X)$ denotes the Rips complex defined by the entourage E, which is the set of simplexes $[x_0, ..., x_n]$ such that $(x_i, x_j) \in E$.

Now the classifying space $\mathcal{E}\Gamma$ of the groupoid $G(X)$ is unique up to homotopy, and can be realised by the space of measures μ on $G(X)$ which satisfied $s^*\mu$ is a Dirac measure on $G^{(0)} = \beta X$, and $\frac{1}{2} < |\mu| \leq 1$. Saying that $s^*\mu$ is a Dirac measure is the same as demanding μ to be supported in a fiber Γ_x for some $x \in X$. The abelian group $KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$ is defined as the inductive limit of

$$KK_{G(X)}(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$$

when Y is a Γ-compact space of $\mathcal{E}\Gamma$.

Let E be an entourage of X. A Fredholm module (H, ϕ, F) in $E(C_0(P_E(X)), \mathbb{C})$ is defined by a Hilbert space H, a $*$-homomorphism $\phi : C_0(P_E(X)) \to \mathcal{L}(H)$ and an operator F satisfying all definitions.
We can form the $l^\infty(X, \mathfrak{K})$-module $\mathcal{E} = H \otimes_{\mathbb{C}} l^2(\Gamma, \mathfrak{K}))$, and extend ϕ into $\phi \otimes id : C_0(P_E(X)) \to \mathcal{L}(H \otimes l^2(\Gamma, \mathfrak{K})$. We do the same with $F : \hat{F} := F \otimes id$. Then, as $P_E(X)$ identifies itself as a G-compact of $\mathcal{E}G$, $(\mathcal{E}, \phi \otimes id, F \otimes id)$ defines an element of $KK_{G(X)}(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$.

5 Correspondance between the coarse K-homology of a space and the one of its coarse groupoid

The aim of this section is to give a proof of a result of [20], in which it is stated that the following diagramm commutes :

$$\begin{array}{ccc} KX_*(X, B) & \xrightarrow{A} & K_*(C^*X, B) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ K_*(G(X), l^\infty(X, B)) & \xrightarrow{\mu} & K_*(C_r(G(X)), B). \end{array}$$

The vertical arrow from the left comes from an isomorphism at the C^*-algebraic level, as

$$C^*(X) \simeq l^\infty(X) \times G(X).$$

The rest of this section is devoted to describe the vertical arrow from the right in the langage of Kasparov KK-theory, i.e.

$$\varinjlim_{d} KK(C_0(P_d(X)), B) \to \varinjlim_{Y \subset \mathcal{E}G(X)} KK(C_0(Y), B),$$

were the inductive limite on the right is taken among the proper $G(X)$-compact subsets Y of the universal classifying space for proper actions of $G(X)$.

Recall from [19] that we can take for $\mathcal{E}G(X)$ the space $\mathfrak{M}$ of positive measures μ on $G(X)$ satisfying :
– $\frac{1}{2} < \mu(G(X)) \leq 1$,
– $s^*\mu$ is a Dirac measure, i.e. its support consists of arrows of $G(X)$ that all source from the same base point of βX.

If $\mathfrak{M}_d$ denotes the space of measures μ of $\mathfrak{M}$ such that :
– μ is a probability measure
– for all γ and γ' in the support of μ, $\gamma'\gamma^{-1}$ is d-controlled, i.e. $d(r(\gamma), r(\gamma')) \leq d$,
then $\mathfrak{M} = \varinjlim \mathfrak{M}_d$.

The Rips complex of X, denoted $P_d(X)$, is the topological space of the complexes of diameter less than d, identified with probability measures on X with support of diameter less than d, with the weak topology coming from $C_c(C)$. We will write $[y, t]$ for a point of a simplex defined by barycentric coordinates of k points $y_1, ..., y_k$, ie $\sum t_j \delta_{y_j}$. To such a point $[y, t]$ and an element of the Stone-Cech compactification $w \in \beta X$, we can associate a measure of $\mathfrak{M}_d$ in the following way. As $G(X)$ is a principal and transitive groupoid, there exists only one arrow γ_j such that $s(\gamma_j) = x$ and $r(\gamma_j) = y_j$. To $z = ([y, t], w) = (z_w, w)$, we associate

$$\phi_d(z) = \sum_{j=1,k} t_j \delta_{\gamma_j} \in \mathfrak{M}_d.$$

Proposition 2. The map

$$\phi_d : P_d(X) \times \beta X \to \mathfrak{M}_d$$

is an homeomorphism.

Preuve 3. It is clearly bijective. The bicontinuity comes from the identity :

$$\langle z_w, f \rangle = \langle \phi_d(z), f \circ r \rangle$$

for all $z = (z_w, w) \in P_d(X) \times \beta X$, and $f \in C_c(X)$. □

This homeomorphism ϕ_d gives an $*$-isomorphism at the level of C^*-algebras

$$\Psi_d : C_0(\mathfrak{M}_d) \to C_0(P_d(X) \times \beta X).$$

Let $(\mathcal{E}, \pi, F) \in \mathbb{E}(C_0(P_d(X)), B)$ be an elliptic operator. **A FINIR**

Let $X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_j \subset ...$ the n-skeleton decomposition associated to the simplicial structure of the Rips complex $P_d(X)$, and similarly $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}_1 \subset ... \subset \tilde{X}_j \subset ...$ for $\mathfrak{M}_d$, and

$$Z_j = C_0(X_j) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_j = C_0(\tilde{X}_j).$$

$$Z^j_{j-1} = C_0(X_j - X_{j-1}) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}^j_{j-1} = C_0(\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j-1}).$$

We will show the isomorphism by a Mayer-Vietoris type argument. By applying the KK-theory to the exact sequence :

$$0 \longrightarrow C_0(X_j - X_{j-1}) \longrightarrow C_0(X_j) \longrightarrow C_0(X_{j-1}) \longrightarrow 0$$

we have a commutative diagramm with exact lines :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
KK_*(Z^j_{j-1},B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(Z_{j-1},B) & \longrightarrow & KK_*(Z_j,B) & \longrightarrow & KK_*(Z^j_{j-1},B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(Z_{j-1},B) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta^j_{j-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{j-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_j} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^j_{j-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{j-1}} \\
KK_*(\tilde{Z}^j_{j-1},B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(\tilde{Z}_{j-1},B) & \longrightarrow & KK_*(\tilde{Z}_j,B) & \longrightarrow & KK_*(\tilde{Z}^j_{j-1},B) & \xrightarrow{\delta} & KK_*(\tilde{Z}_{j-1},B)
\end{array}
$$

The five lemma assures that if θ_{j-1} and θ^j_{j-1} are isomorphisms, then so is θ_j. Moreover, $X_j - X_{j-1}$ is equivariantly homeomorphic to $\mathring{\sigma}_j \times \Sigma_j$, where $\mathring{\sigma}_j$ denotes the interior of the standard simplex, and Σ_j is the set of centers of j-simplices of X_j. Bott periodicty assures then that, if θ_{j-1} is an isomorphism, then so is θ^j_{j-1}. By induction, proving that θ_0 is an isomorphism concludes the proof.

In a serie of papers, H. Oyono-Oyono and G. Yu have defined a controlled version of operator K-theory, [8] [6] [7], that allows them to define a quantitative and local assembly map, and a related Baum-Connes Conjecture. The aim of this work is to extend their work to the realm of groupoids. In a second part, we shall see how this setting can help us understand better the relation between the coarse-Baum-Connes conjecture and the Baum-Connes Conjecture with coefficient for groupoids. Indeed, in [20] and [18], G. Skandalis, J-L.Tu and G. Yu proved that there is a commutative diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_*(X) & \xrightarrow{A} & K_*(C^*X) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ K_*(\mathcal{E}\Gamma) & \xrightarrow{\mu_r} & K_*(C_r\Gamma) \end{array}$$

where :

– the left sides are K-homology of certain spaces, the left sides are K-theory of certain C^*-algebras,
– the first line is the coarse assembly map associated to a coarse space X, the second being the assembly map for groupoids associated to the coarse groupoid of X, namely $\Gamma = G(X)$,
– the vertical arrows are isomorphisms on the level of KK-groups. The left one will be studied later, the right one derives from an isomomorphism on the level of the C^*-algebras. Indeed, it has been shown that the Roe algebra is $*$-isomorphic to the crossed product of $l^\infty(X)$ by Γ : $C^*(X) \simeq l^\infty(X) \times \Gamma$.

We shall see that this relation is already true "locally" and factorises through quantitative K-theory. Locally here means that we can factorize the assembly map through $KK(C_0(P_d(X), B)$. Indeed, the K-homology can be expressed as an inductive limit

$$K_*(X, B) = \varinjlim_{d\to\infty} KK(C_0(P_d(X)), B) \quad \text{and}$$

hence the local.

The local quantitative assembly maps defined in [6] are of the form

$$KK^F(C_0(P_d(F)), B) \to K_*^{\epsilon,r}(B \times_r \Gamma)$$

where F is a finite group.

We will be using the bivariant functor KK^Γ introduced by P-Y. Le Gall in his thesis [4], which is a generalization of Kasparov's bifunctor for the case where Γ is a Hausdorff locally compact groupoid with Haar system. As for the KK-theory for Banach algebras introduced by V. Lafforgue [10], there is no (not yet ?) a Kasparox product in quantitative K-theory. The crucial point to define an assembly map is the existence of a morphism

$$\hat{J} : KK^\Gamma(A, B) \to Hom^*(\hat{K}_*(A), \hat{K}_*(B))$$

which allows us, for every element $x \in K_*(A)$, to consider the related index

$$Ind_x \left\{ \begin{array}{ccc} KK_*(A, B) & \to & K_*(B) \\ z & \mapsto & \hat{J}(z)(x) \end{array} \right.$$

to construct $\hat{J}$, we will mimic the construction for $\mathcal{J}$ in [6], which gives the right morphism when considering finite groups. The starting point is the following

Lemme 2. Let Γ be a Hausdorff locally compact groupoid with Haar system. Then, if A is a $\Gamma - C^*$-algebra, forming the reduced (and maximal) crossed product $A \times_r \Gamma$ is functorial in A. Moreover, if Γ is *étale*, then it preserves short semi-split filtered exact sequences of $\Gamma - C^*$-algebras, meaning that if

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

is a semi-split filtered exact sequence of $\Gamma - C^*$-algebras, then

$$0 \longrightarrow A' \times_r \Gamma \longrightarrow A \times_r \Gamma \longrightarrow A'' \times_r \Gamma \longrightarrow 0$$

is too.

Preuve 4. Let $f \in C_c(\Gamma, A)$ such that $\phi_\Gamma(f) = 0$. For every $\gamma \in \Gamma$, there exists a unique $g(\gamma) \in A'$ such that $\Psi(g(\gamma)) = f(\gamma)$. But, as Ψ and Φ commute with the action of Γ, we have $g(\gamma'^{-1}\gamma) = \gamma'.g(\gamma)$, so that g is continuous. $\square$

6 Séminaire KK-théorie et groupe quantique, exposés du 17 et 24 Octobre 2014

Ce court rapport a pour but de présenter les bases de la K-théorie des C^*-algèbres. Nous irons des définitions à la suite exacte à 6 termes.

6.1 Motivations

Comme Lorenzo Pittau vous a tout raconté sur K_0 la semaine dernière, je vais me permettre d'aller plus vite sur les détails techniques.

Le foncteur K a été introduit par Grothendieck dans sa démonstration du théorème de Riemann-Roch à la fin des années 50, voir l'article de Borel et Serre [1]. Ces travaux ont inspiré Atiyah et Singer dans la démonstration de leur fameux théorème de l'indice.

Voici une version très simplifiée d'un théorème de l'indice trouvée dans un article de Jean Bellissard [2], que je trouve très pédagogique. Soit $f \in C(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^\times)$. Cette fonction définit un lacet γ, donc un élément du premier groupe d'homologie du cercle $[\gamma] = f^*(\mathbb{S}^1) \in H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, dont la classe est représentée via cet isomorphisme par le degré de f. Si l'on suppose que f est une fonction holomorphe, on peut même calculer ce degré :

$$\deg(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{f(\mathbb{S}^1)} f(z) \frac{dz}{-z} = -\langle [w], [f] \rangle_{H^1 \times H_1},$$

où $w = \frac{dz}{2i\pi z}$ est une forme fermée qui définit une classe de cohomologie de $\mathbb{S}^1$, et le crochet est la dualité usuelle entre cohomologie et homologie.

Cette formule a aussi une interprétation opératorielle. Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ possédant un prolongement de carré intégrable sur le bord du disque $\mathbb{S}^1$. Cet espace $\mathcal{H}$, appelé espace de Hardy, est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1)$, et on note $\mathcal{P}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. On peut montrer que l'espace de Hardy est celui des fonctions dont les coefficients de Fourier strictement négatifs sont nuls.

A toute fonction continue sur le cercle $f \in C(\mathbb{S}^1)$, on associe un opérateur dit de Toeplitz $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$T_f : g \mapsto \mathcal{P} f g.$$

Cet opérateur induit un $*$-morphisme de $C(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{B}/\mathbb{K}$ à valeur dans l'algèbre de Calkin (les opérateurs bronés quotientés par l'idéal des opérateurs compacts), et donc $T_f T_{\overline{f}} = T_{\overline{f}} T_f \bmod \mathbb{K} = 1 \bmod \mathbb{K}$. On a donc un opérateur de Fredholm, dont on sait que le noyau et le conoyau sont de dimension finie : il a un indice

$$\mathrm{Ind}(T_f) = \dim(Ker(T)) - \dim(coker(T)) \in \mathbb{Z}.$$

Le "théorème-0" de l'indice affirme que cette indice est précisément le degré de f, ce que l'on peut réécrire comme

$$\mathrm{Ind}(T_f) = \langle [w], f^*(\mathbb{S}^1) \rangle_{H^1 \times H_1}.$$

Pour le montrer, remarquez d'abord que l'indice est invariant par perturbation compacte et par homotopie. Il suffit alors de le montrer pour les fonctions z^n, or $T_{z^n} = S^n$, où S est le shift unilatéral, qui est injectif. Le noyau de S^{*n} étant de dimension n, $Ind(T_{z^n}) = -n$. $\square$

Atiyah et Singer ont profondément généralisé ce type de résultat au cadre des fibrés vectoriels. L'exemple typique est celui d'un opérateur de Dirac sur un variété munie d'une structure spin^c, dont on peut montrer qu'il est inversible modulo les opérateurs pseudo-différentiels réguliers. On verra comment calculer des indices associés à toute extension de C^*-algèbre, et ici l'extension pertinente est celle des opérateurs pseudo-différentiels. On a alors un indice associé à cet opérateur de Dirac, qui est un entier. Dans certains cas, lorsque votre variété est un espace homogène par exemple, on peut relever notre opérateur de Dirac, sur le revêtement universel dans notre exemple. Le receptacle pour l'indice de cet opérateur est alors la K-théorie : l'indice n'est plus un entier mais un élément d'un certain groupe de K-théorie.

Il se trouve que la K-théorie se généralise bien au cadre non-commutatif. Pour cela, rappelons le théorème de Serre-Swan :

Théorème 1. *Soit X un espace topologique compact et Φ le foncteur qui va de la catégorie des fibrés vectoriels complexes de base X dans celle des $C(X)$-modules projectifs de type fini qui, à un fibré* $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$ *associe l'espace des sections continues $\Phi : E \mapsto \Gamma(E) = \{s : X \to E / \pi \circ s = id\}$.*
Alors Φ réalise une équivalence de catégories.

Ce théorème assure que se donner un fibré, c'est se donner un $C(X)$-module projectif de type fini. C'est ainsi que les algébristes définissent le premier groupe de K-théorie d'un anneau A comme le groupe de Grothendieck du monoïde des classes d'équivalence des A-modules projectifs de type fini. C'est d'ailleurs une définition que l'on peut prendre pour les C^*-algèbres, si l'on utilise la théorie des C^*-modules hilbertiens (voir les prochains exposés !). Pour mémoire, rappelons qu'un A-module P est dit projectif si pour tout A-modules N et M et tout morphisme $f : N \to P$ et tout épimorphisme $g : M \to P$, il existe une unique flèche $h : N \to M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} . & M \arrow[d, two heads, "g"] \\ N \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "f"] & P \end{tikzcd}$$

Que se passe t'il pour un A-module projectif de type fini $\mathcal{E}$? On a un morphisme surjectif $g : A^n \to \mathcal{E}$, et on peut relever l'identité grâce à la propriété universelle

$$\begin{tikzcd} . & A^n \arrow[d, two heads, "g"] \\ \mathcal{E} \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "id_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Il existe donc $f : \mathcal{E} \to A^n$ telle que $g \circ f = id_{\mathcal{E}}$. Alors $p = f \circ g$ est un projecteur, et on a un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq pA^n$. Ainsi, un module projectif de type fini est donné par un projecteur de $\mathfrak{M}_n(A)$.

6.2 Propriétés de K_0

On rappelle la description standard du premier groupe de K-théorie.

Définition 7. Soit p et q deux projecteurs dans une C^*-algèbre A. On définit trois relations d'équivalences :
$p \sim q$ s'il existe une isométrie partielle u de A telle que $p = u^*u$ et $q = uu^*$. (équivalence de Murray-Von Neumann)
$p \sim_u q$ s'il existe un unitaire u de A^+ tel que $p = uqu^*$. (Similitude)
$p \sim_h q$ s'il existe un chemin continu en norme de projections de p à q.(Homotopie)

Proposition 3 (Description standard)**.** Soit A une C^*-algèbre. Tout élément x de $K_0(A)$ peut être représenté par une différence

$$x = [p] - [p_n] \text{ tels que } p = p_n \mod \mathfrak{M}_k(A)$$

où k et n sont deux entiers tels que $k \geq n$, $p \in \mathfrak{M}_k(A^+)$ est un projecteur et p_n est l'élément de $\mathfrak{M}_k(A^+)$ avec des 0 partout et des 1 sur les n premiers emplacements diagonaux.

6.2.1 Equivalence entre les relations d'équivalences sur les projecteurs modulo stabilisation

Lemme 3. Soit A une C^*-algèbre unitale et p et q deux projecteurs de A tels que $||p - q|| < 1$. Alors il existe un unitaire $u \in A$ vérifiant

$$p = uqu^*.$$

Preuve 5. Pour tout projecteur $\in A$, on pose $s_p = 2p - 1$: c'est une symmétrie. De plus

$$s_p - s_q = 2(p - q),$$

ce qui assure que si $||p-q|| < 1$, $v := \frac{s_p s_q + 1}{2}$ est inversible. Mais $pv = pq$ et donc par symmétrie $qv^* = qp$ d'où $pv = vq$. La décomposition polaire de v assure alors que l'unitaire $v|v|^{-1}$ entrelace p et q. □

Une remarque : on vient finalement de montrer qu'il existe une application continue sur un voisinage de p (la boule de centre p et de rayon $||2p - 1||$ par exemple,

$$\Psi \left\{ \begin{array}{ccc} B_p & \to & A^{-1} \\ q & \mapsto & \frac{s_p s_q + 1}{2} \left| \frac{s_p s_q + 1}{2} \right|^{-1} \end{array} \right.$$

telle que $\Psi(q) p \Psi(q)^* = q$.

Lemme 4. Soit v une isométrie partielle d'une C^*-algèbre unitale A i.e. v^*v et vv^* sont des projecteurs. Alors

$$\begin{pmatrix} v & 1-vv^* \\ v^*v-1 & v^* \end{pmatrix}$$

est un unitaire de $\mathfrak{M}_2(A)$ homotope à l'identité $1_A \otimes I_2$.

Preuve 6. Un calcul suffit à montrer l'unitarité. Le chemin

$$t \mapsto \cos(\frac{\pi}{2}t)\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} + (1-\sin(\frac{\pi}{2}t))\begin{pmatrix} 0 & -vv^* \\ v^*v & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

connecte la matrice en question à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans les unitaires. □

Proposition 4. Les relations d'équivalence sur les projecteurs sont ordonnées comme suit : $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$. De plus,

$$\text{si } \; p \sim q \text{ alors } \; \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et si } \; p \sim_u q \text{ alors } \; \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve 7. Si $p \sim_h q$, il existe un chemin continu de projecteurs $[0,1] \to P(A); t \mapsto p_t$. En découpant l'intervalle $[0,1]$ en segment assez petits, le lemme 3 donne l'existence d'un chemin d'unitaires $t \mapsto u_t$ tel que $t \mapsto u_t p u_t^*$ soit un chemin continu de projecteurs de p à q. En particulier, $p \sim_u q$.

Si $p \sim_u q$, alors il existe un unitaire u vérifiant

$$p = uqu^* = (uq)(uq)^*$$

comme uq est une isométrie partielle, $p \sim q$.

Si $p \sim q$. Soit v une isométrie partielle de A telle que $p = v^*v$ et $q = vv^*$. Alors

$$w = \begin{pmatrix} v & 1-vv^* \\ 1-v^*v & v^* \end{pmatrix}$$

est une isométrie de $\mathfrak{M}_2(A)$. De plus

$$w\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $p \sim_u q$, soit u un unitaire qui entrelace p et q. Alors

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$

est un unitaire homotope à $1 \otimes I_2$, et un tel chemin continu d'unitaire $t \mapsto w_t$ assure que

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Cette propostion montre que les différentes relations d'équivalence coïncident si l'on se place dans $\mathfrak{M}_\infty(A)$.

6.2.2 Limites inductives

Proposition 5. Soit $\{A_i, \phi_i^j\}$ un système inductif de C^*-algèbres. Alors $\{K_0(A_i), \phi_{i*}^j\}$ est un système inductif de groupes abéliens et

$$K_0(\varinjlim A_j) = \varinjlim K_0(A_j).$$

Preuve 8. Par définition, pour tout $i \leq j$, il existe des morphismes ϕ_i et ϕ_j qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\phi_i^j"'] & \varinjlim A_j \\ A_j \arrow[ur, "\phi_j"] & \end{tikzcd} .$$

En passant ce diagramme en K_0-théorie, on obtient un second diagramme commutatif que la propriété universelle de la limite inductive nous permet de compléter en pointillés :

$$\begin{tikzcd} K_0(A_i) \arrow[r, "\phi_{i*}"] \arrow[d, "\phi_{i*}^j"'] \arrow[dr, dotted] & K_0(\varinjlim A_j) \\ K_0(A_j) \arrow[ur, "\phi_{j*}"] \arrow[r, dotted] & \varinjlim K_0(A_j) \arrow[u, dotted, "\exists ! \phi"'] \end{tikzcd} .$$

L'injectivité de ϕ est claire puisque tous les ϕ_{j*} le sont. Soit $[p] - [p_n] \in K_0(\varinjlim A_j)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $j > 0$ et élément a autoadjoint de A_j tel que $||a - p|| < \epsilon$. Alors le spectre de a est inclus dans la réunion de 2 intervalles centrés en 0 et 1. Par calcul fonctionnel continu, on peut alors définir un projecteur $q = f(a)$ tel que $||q - a||$ soit borné par $O(\epsilon)$. Pour ϵ assez petit, $||p - q|| < 1$ et donc $[p] = [q]$ dans $K_0(\varinjlim A)$. Mais $[q] \in K_0(A_j) \subset \varinjlim K_0(A_j)$: la surjectivité est démontrée. $\square$

Voici un exercice sur ce thème.

On a vu que le foncteur K_* est stable par limite inductive. Pour autant certains exemples demandent un peu d'attention. Soit A une C^*-algèbre unitale et q un entier positif. On note $A_j = \mathfrak{M}_{q^j}(A)$, et $\phi_j^{j+1} : A_j \to A_{j+1}$ défini par

$$\phi_j^{j+1} : a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & & & \\ 0 & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} = a \otimes 1_q$$

En composant on obtient des $*$-morphismes, où $i \leq j$:

$$\phi_i^j : \begin{cases} A_i & \to & A_j \\ a & \mapsto & a \otimes 1_{q^{j-i}} \end{cases}$$

qui nous définissent un système inductif $\{A_i, \phi_i^j\}$. Comme $K_*(A_j) = K_*(A)$, on serait tenter de conclure que la K-théorie de la limite inductive est celle de A.

Il n'en n'est rien comme on peut facilement le voir avec $A = \mathbb{C}$. Les morphismes ϕ^j_{i*} sont donnés par la multiplication

$$\phi^j_{i*} \begin{cases} K_*(A_i) & \to & K_*(A_j) \\ [x] & \mapsto & q^{j-i}[x] \end{cases}$$

et même si lorsque $A = \mathbb{C}$, $K_0(A_j) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, on obtient $K_0(\varinjlim A_j)) = \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$.

6.2.3 Suites exactes

Proposition 6. Soit $0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$ une suite exacte de C^*-algèbres. Alors la suite de groupes abéliens

$$K_0(J) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J)$$

est exacte.

Preuve 9. Soit $[p] - [p_n] \in K_0(J)$ avec $p = p_n \mod \mathfrak{M}_k(J), k \geq n$. Cela assure que $\pi(p) = p_n$ et

$$\pi_*([p] - [p_n]) = [\pi(p)] - [p_n] = 0$$

donc $\pi_* \circ \iota_* = 0$.

Soit $[p] - [p_n] \in K_0(A)$ avec $p = p_n \mod \mathfrak{M}_k(A), k \geq n$, d'image nulle par π_*. Alors $[\pi(p)] = [p_n]$. Il existe donc deux entiers $r \leq r'$ et un unitaire $u \in \mathfrak{M}_{k+r'}((A/J)^+)$ tels que

$$u \begin{pmatrix} \pi(p) & 0 \\ 0 & p_r \end{pmatrix} u^* = \begin{pmatrix} p_n & 0 \\ 0 & p_r \end{pmatrix}.$$

Soit $w \in \mathfrak{M}_{2(k+r')}(A^+)$ un unitaire qui relève $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$. Alors la relation ci-dessus assure que

$$w(p \oplus p_r)w^* = p_n \oplus p_r \mod \mathfrak{M}_{2(k+r')}(J)$$

donc $[p] - [p_n] = [w(p \oplus p_r)w^*] - [p_n \oplus p_r] \in K_0(J)$ et donc $\ker\pi_* \subset \mathrm{im}\iota_*$. $\square$

6.3 Foncteur K_1

6.3.1 Définition

On rappelle que, si A est une C^*-algèbre, non nécessairement unitale,

$$GL_n(A) := \{x \in GL_n(A^+) : x = 1_n \mod \mathfrak{M}_n(A)\},$$

et c'est un sous-groupe fermé distingué de $GL_n(A^+)$. On peut naturellement plonger $GL_n(A)$ dans $GL_{n+1}(A)$ par $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_{A^+} \end{pmatrix}$, et ces morphismes définissent

$$GL_\infty(A) = \varinjlim GL_n(A),$$

que l'on peut voir comme des matrices infinies à valeurs dans $1_{A^+} + A$ sur la diagonale, dans A ailleurs, et dont tous les termes sont nuls ou égaux à 1_{A^+} sur la diagonale, sauf un nombre fini. Les inclusion envoient $GL_n(A)_0$ dans $GL_{n+1}(A)_0$, on a donc

$$GL_\infty(A)_0 = \varinjlim GL_n(A)_0.$$

Définition 8. Soit A un C^*-algèbre. On définit le groupe

$$\begin{aligned} K_1(A) &= GL_\infty(A)/GL_\infty(A)_0 &&= \varinjlim GL_n(A)/GL_n(A)_0 \\ &= U_\infty(A)/U_\infty(A)_0 &&= \varinjlim U_n(A)/U_n(A)_0 \end{aligned}$$

La seconde ligne provient de la décomposition polaire, qui assure que $U_n(A)$ est un retract de $GL_n(A)$.

On voit que le groupe K_1 est généré par les classes $[u]$ où u est un unitaire de $\mathfrak{M}_n(A)$, soumis aux relations $[uv] = [u] + [v] = [u \oplus v]$. En effet

Proposition 7. Le groupe $K_1(A)$ est abélien.

Preuve 10. Le chemin $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ connecte l'identité à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui assure que l'on peut permuter des lignes et des colonnes (modulo un signe) sans changer la classe dans $K_1(A)$. Si $\sim$ dénote la relation ¡¡être homotope¿¿, alors pour x et y dans A :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors, par symmétrie : $[xy] = [yx] = [x] + [y]$. □

Voici un lemme, et surtout son corollaire, qui sont utiles dans le maniement des suites exactes avec K_1.

Lemme 5. Soit A une C^*-algèbre unitale. Alors, si $\langle \exp(A) \rangle$ dénote le sous-groupe multiplicatif de $GL_1(A)$ algébriquement engendré par les exponentielles du type $\exp(a)$, alors

$$GL_1(A)_0 = \langle \exp(A) \rangle.$$

Preuve 11. Soit $z = \prod_{j=1}^n e^{a_j} \in \langle \exp(A) \rangle$. Si $||z - z'|| < \frac{1}{||z^{-1}||}$, alors le logarithme de $z'z^{-1}$ est defini et donc $z' = \exp(\log(z'z^{-1}))z$ est dans $\langle \exp(A) \rangle$. Le sous-groupe $\langle \exp(A) \rangle$ est donc un ouvert d'un groupe de Lie, donc fermé, et il contient l'identité : c'est la composante connexe $GL_1(A)_0$. □

Le corollaire découle directement du lemme.

Corollaire 1. Soit $\Psi : A \to A''$ un $*$-morphisme surjectif. Alors

$$\Psi^{-1}(GL_1(A'')_0) \subset GL_1(A)_0.$$

6.3.2 Suspension

Définition 9. On définit la suspension d'une C^*-algèbre A comme la C^*-algèbre

$$SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

Comme $C_0(\mathbb{R})$ est abélienne, elle est nucléaire et le produit tensoriel est unique. De plus, on a directement la

Proposition 8. S est un foncteur covariant exact de la catégorie des C^*-algèbres dans la catégorie des C^*-algèbres non-unitales.

Bien-sûr, cette définition peut être remplacée par une construction plus à la main, que l'on va décrire pour se familiariser avec cet objet. Cette façon de faire à la mérite de donner directement l'exactitude.
La suspension peut aussi se voir comme

$$SA = \{f : \mathbb{R} \to A / f \text{ continue telle que } \lim_{x\to\infty} ||f(x)|| = 0\},$$

munie des opérations point par point et de la norme sup. Attention, $(SA)^+ \neq S(A^+)$. D'ailleurs, cela nous servira beaucoup dans les preuves suivantes, $(SA)^+ \simeq \{f : \mathbb{S}^1 \to A^+ : f(z) = \lambda 1_{A^+} + g(z) \text{ où } g \in SA\}$.

Théorème 2. Il existe un isomorphisme naturel entre K_1 et $K_0 S$, i.e. pour toute C^*-algèbre A, il existe un isomorphisme de groupe abéliens $\theta_A : K_1(A) \to K_0(SA)$ tel que, pour tout C^*-algèbre B et tout $*$-morphisme $\phi : A \to B$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{\phi_*} & K_1(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_B} \\ K_0(SA) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0(SB) \end{array}$$

commute.

Preuve 12. Nous allons d'abors définir l'application θ_A. Si $u \in GL_n(A)$, on peut construire un chemin continu $t \mapsto z_t$ d'unitaires dans $GL_{2n}(A)$ connectant $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ à l'identité 1_{2n} et vérifiant $z_t = 1_{2n} \bmod \mathfrak{M}_n(A)$. Alors $e_t = z_t p_n z_t^{-1}$ est une boucle de projecteurs de base $p_n : e \in \mathfrak{M}_{2n}((SA)^+)$. On pose :

$$\theta_A[u] = [e] - [p_n].$$

Cette application est bien définie car si $[u] = [v]$ dans $K_1(A)$, alors pour un n assez grand, on peut trouver deux chemins d'unitaires

$$\begin{array}{c} a_t : uv^{-1} \sim 1_n \\ b_t : u^{-1}v \sim 1_n \end{array}.$$

Et si $z_t : \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \sim 1_{2n}$ et $w_t : \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix} \sim 1_{2n}$ avec $\theta_A[u] = [e] - [p_n] = [zp_n z^{-1}] - [p_n]$ et $\theta_A[v] = [f] - [p_n] = [wp_n w^{-1}] - [p_n]$, on pose $\begin{pmatrix} a_t & 0 \\ 0 & b_t \end{pmatrix}$, alors

$$e_t = z_t x_t p_n x_t^{-1} z_t^{-1} = y_t f_t y_t^{-1}$$

où $y_t = z_t x_t w_t^{-1}$ définit un inversible de $\mathfrak{M}_{2n}((SA)^+)$ car $y_0 = y_1 = 1_{2n}$. Comme e et f sont unitairement équivalents, $\theta_A[u] = \theta_A[v]$.

Montrons que θ_A est injective. Si $\theta_A[u] = \theta_A[v]$, alors, avec les mêmes notations, $[e] = [f]$, donc pour k assez grand, il existe un inversible x de $\mathfrak{M}_k((SA)^+)$ tel que $xex^{-1} = f$. Cette relation assure que

$$x_t z_t p_n z_t^{-1} = w_t p_n w_t^{-1} x_t$$

donc $y_t = w_t^{-1} x_t z_t$ commute à p_n et est donc de la forme $\begin{pmatrix} a_t & 0 \\ 0 & b_t \end{pmatrix}$. Comme $x_0 = x_1 = 1_k$, a_t connecte 1_n à $v^{-1}u$, qui sont donc homotopes : $[u] = [v]$.

Montrons la surjectivité. Soit $[f] - [p_n] \in K_0(SA)$: $f \in \mathfrak{M}_k((SA)^+)$ tel que $f = p_n \mod \mathfrak{M}_k(SA)$, $k \geq n$. Chaque f_t est dans $\mathfrak{M}_k(A^+)$ et $f_0 = f_1 = p_n$ donc il existe un chemin d'unitaires $t \mapsto w_t$ connectés à l'identité tel que $f_t = w_t p_n w_t^{-1}$. Comme $w_1 p_n = p_n w_1$, w_1 est de la forme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ où $u \in \mathfrak{M}_n(A^+)$ et $v \in \mathfrak{M}_{K-n}(A^+)$ sont deux inversibles. Mais v est connecté par un chemin b_t à $\begin{pmatrix} 1_{k-n} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$, et on a un chemin z_t qui connecte 1_k à $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{k-n} \end{pmatrix}$. Si on pose $e_t = z_t p_n z_t^{-1}$, on obtient que $z_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v^{-1} b_t \end{pmatrix} w_t^{-1}$ entrelace e_t et f_t. Comme précédement, ses valeurs coïncident en 0 et 1 avec 1_{2k} : c'est un inversible de $\mathfrak{M}_k((SA)^+)$. Donc

$$\theta_A[u] = [e] - [p_n] = [f] - [p_n],$$

θ_A est surjective. La naturalité est immédiate, la définition de l'application utilisant des sommes directes. □

Théorème 3. Pour toute suite exacte de C^*-algèbres

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

la suite de groupes abéliens

$$K_*(A') \xrightarrow{\iota_*} K_*(A) \xrightarrow{\pi_*} K_*(A'')$$

est exacte.

6.3.3 Indice

Dans cette section, nous allons définir un morphisme $\delta : K_1(A/J) \to K_0(J)$, appelé indice, qui rend exacte la suite

$$K_1(J) \xrightarrow{\iota_*} K_1(A) \xrightarrow{\pi_*} K_1(A/J) \xrightarrow{\delta} K_0(J) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J) \quad . \tag{1}$$

Définition 10. Soit $u \in GL_n(A/J)$ et $w \in GL_{2n}(A)$ un relevé de $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$. On définit l'indice de $[u] \in K_1(A/J)$ par

$$\delta[u] = [wp_n w^{-1}] - [p_n].$$

Proposition 9. La suite 1 est exacte en $K_1(A/J)$.

Proposition 10. La suite 1 est exacte en $K_0(J)$.

6.4 Periodicité de Bott

Dans cette section, nous allons montrer un résultat central en K-théorie des C^*-algèbres, celui de la périodicité de Bott : il existe un isomorphisme naturel $\beta_A : K_0(A) \to K_1(SA)$ pour toute C^*-algèbre A, et donc la K-théorie est 2-périodique : $K(S^2A) \simeq K(A)$.

La preuve donnée dans le cadre de la K-théorie topologique s'adapte facilement au cadre non-commutatif, nous la proposerons sous forme d'exercice. Celle que nous avons choisi de détailler utilise la non-commutativité de l'algèbre de Toeplitz. Elle est due à Cuntz [3], et est détaillée dans le livre de Wegge-Olsen [22]. Nous exposerons donc un point de vue moins C^*-algébrique, où la K-théorie est vue comme une théorie de l'homologie sur la catégorie des C^*-algèbres.

6.4.1 Rappels

Définition 11. On définit le cône d'une C^*-algèbre A comme

$$CA = \{f : \mathbb{R} \to A / f \text{ continue bornée telle que } \lim_{x \to -\infty} ||f(x)|| = 0\}.$$

SA est clairement un idéal de CA et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \xrightarrow{\epsilon_1} A \longrightarrow 0$$

grâce à l'évaluation en 1, notée ϵ_1.

Le cône CA est toujours contractile : $t \mapsto f(st)$ pour s allant de 0 à 1 donne une homotopie entre 0 et id_{CA}.

Définition 12. Pour tout $*$-morphisme $\pi : A \to A''$, on peut définir le cône de π comme le pullback de A'' via π et $\epsilon_1 : CA'' \to A''$:

$$\begin{tikzcd} C_\pi \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & A \arrow[d, "\pi"] \\ CA'' \arrow[r, "\epsilon_1"] & A''. \end{tikzcd}$$

Attention, C_π n'est pas forcément contractile.
Le lemme suivant est simple, mais technique, et il sera utile pour la suite.

Lemme 6. Soit

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de C^*-algèbre. On a alors trois suites exactes :

$$0 \longrightarrow SA'' \xrightarrow{\iota_1} C_\pi \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota_2} C_\pi \xrightarrow{\pi_2} CA'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow CA' \xrightarrow{\iota_3} D \xrightarrow{\pi_3} C_\pi \longrightarrow 0$$

avec $D = \{f : \mathbb{R} \to A/\ f$ continue bornée telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \iota(A')\}$ et

$$\begin{gathered} \iota_1(f) = 0 \oplus f\pi_1(a \oplus f) = a, \\ \iota_2(a') = \iota(a') \oplus 0\pi_2(a \oplus f) = f, \\ \iota_3(f) = \{t \mapsto \iota(f(1-t))\}\pi_3(g) = g(1) \oplus (\pi \circ g). \end{gathered}$$

De plus, on a une équivalence d'homotopie $\left\{ \begin{array}{ccc} A' & \to & D \\ a' & \mapsto & \iota(a') \end{array} \right.$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\iota} & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ D & \xrightarrow{\pi_3} & C_\pi. \end{array}$$

6.4.2 Homologie

Définition 13. Deux $*$-morphismes $\phi, \Psi : A \to B$ sont dit homotopes s'il existe une fammile $\phi_t : A \to B$ de $*$-morphismes telle que $\phi_0 = \phi$, $\phi_1 = \Psi$ et $t \mapsto \phi_t(a)$ est continue pour tout a. On note $\phi \sim \Psi$.
Un foncteur F de la catégorie des C^*-algèbres dans celle des groupes abéliens est dit foncteur d'homologie s'il est exacte au milieu et invariant par homotopie.

Proposition 11. Soit F un foncteur covariant de la catégorie des C^*-algèbres dans celle des groupes abéliens qui est invariant par homotopie. Alors toute équivalence $\phi : A \to B$ induit un isomorphisme de groupe $F(\phi) : F(A) \to F(B)$.

Preuve 13. Si ϕ est une équivalence, il existe $\psi : B \to A$ telle que $\phi \circ \psi \sim id_B$ et $\psi \circ \phi \sim id_B$. Alors $F(\psi)F(\phi) = id_{F(A)}$ et $F(\phi)F(\psi) = id_{F(B)}$, donc $F(\phi)$ est un isomorphisme. $\square$

Ce lemme assure que :
– si B est une rétraction de A, alors $F(A) \simeq F(B)$,
– si A est contractile, $F(A) = 0$.

Définition 14. Une théorie de l'homologie sur la catégorie des C^*-algèbres est une suite de foncteurs d'homologie H_n telle que, pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0,$$

il existe des morphismes connectant $\delta_n : H_n(A'') \to H_{n+1}(A')$ qui rendent la suite longue

$$\ldots \longrightarrow H_n(A') \xrightarrow{\iota_*} H_n(A) \xrightarrow{\pi_*} H_n(A'') \xrightarrow{\delta_n} H_{n+1}(A') \xrightarrow{\iota} H_{n+1}(A) \xrightarrow{\pi_*} H_{n+1}(A'') \xrightarrow{\delta} \ldots$$

exacte, et telle que chaque δ soit une application naturelle.
On distingue les théories infinies à gauche ($n \leq 0$), à droite ($n \geq 0$), ou doublement infinie.

On voit que la partie précédente montre que $H_{-n}(A) = K_0(C_0(\mathbb{R}^n) \otimes A)$ définit une théorie de l'homologie pour les C^*-algèbres.

Proposition 12. Soit (H_n) une théorie de l'homologie pour les C^*-algèbres, infinie à gauche ou doublement infinie. Alors pour toute suite exacte scindée, l'application connectante est nulle.

Proposition 13. Soit F un foncteur d'homologie et

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Alors
- si A'' est contractile, ι_* est un isomorphisme,
- il existe un morphisme de groupes abéliens $\delta : F(SA'') \to F(A')$ telle que la suite suivante soit exacte :

$$F(SA') \xrightarrow{\iota_*} F(SA) \xrightarrow{\pi_*} F(SA'') \xrightarrow{\delta} F(A)' \xrightarrow{\iota_*} F(A) \xrightarrow{\pi_*} F(A'').$$

Corollaire 2. Tout foncteur d'homologie F définit une théorie de l'homologie pour les C^*-algèbres par

$$\begin{cases} H_0(A) = F(A) \\ H_{-n}(A) = F(S^n A) \quad , n \geq 0. \end{cases}$$

6.4.3 Périodicité de Bott

Théorème 4. Tout foncteur F de la catégorie des C^*-algèbres dans celle des groupes abéliens qui est exact au mileu, invariant par homotopie et stable admet une periodicité de Bott, c'est-à-dire que $F(S^2A)$ et $F(A)$ sont naturellement isomorphes.

Références

[1] J.P. Serre A. Borel. Le théorème de riemann-roch. *Bulletin de la S.M.F*, 86 :97–136, 1958.

[2] J. Bellissard. Gap labelling theorems for schrödinger operators. *From Number theory to Physics, Les Houches*, 89 :538–630, 1993.

[3] Joachim Cuntz. K-theory and c^*-algebras. *Algebraic K-theory, Number Theory, Geometry and Analysis*, pages 55–79, 1982.

[4] Pierre-Yves Le Gall. Thesis.

[5] Alexandre Grothendieck. Produits tensoriels d'espace topologiques et espaces nucléaires. *Séminaire N. Bourbaki*, 69 :193–200, 1951-1954.

[6] G. Yu H. Oyono-Oyono. On quantitative operator k-theory. *Annales de l'Institut Fourier.*

[7] G. Yu H. Oyono-Oyono. Persitance approximation property and controlled k-theory.

[8] G. Yu H. Oyono-Oyono. Ktheory for the maximal roe algebra of certain expanders. *Journal of functionnal analysis*, 257 :3239–3292, 2009.

[9] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* 2001.

[10] Vincent Lafforgue. Banach *kk*-theory and the baum-connes conjecture. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. II (Beijing, 2002)(Higher Ed. Press, Beijing) :795–812, 2002.

[11] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for k-groups and *ext*-groups of certain cross-products of c^*-algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.

[12] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., 1990.

[13] Alain Connes Paul Baum. Geometric k-theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.

[14] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and k-theory of group c^*-algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.

[15] Michael V. Pimsner. A class of c^*-algebras generalizing both cuntz-krieger algebras and crossed products by $\digamma$. *Fields Institute Communications*, 12 :189–212, 1997.

[16] Jean Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras.* Springer-Verlag, 1980.

[17] Marc Rieffel. c^*-algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics.*, 93(2) :415–429, 1981.

[18] Tu J.L. Yu G. Skandalis, G. The coarse baum-connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4) :807–834, 2002.

[19] Jean-Louis Tu. a conjceture de novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-theory*, 16(2) :129–184, 1999.

[20] Jean-Louis Tu. The baum-connes conjecture for groupoids. *C^*-algebras*, 18 :227–242, 1999.

[21] Jean-Louis Tu. The coarse baum-connes conjecture and groupoids ii. *New York J. Math.*, 18 :1–27, 2012.

[22] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras, a friendly approach.* Oxford University Press, 1993.