# Notes

Clément Dell'Aiera

# Table des matières

# 1 Groupoïds

## 1.1 Definitions

**Définition 1.** A groupoid is a small category whose arrows are all invertible. More concretly, it is the data of a set $G$ together with a set of units $G^{(0)}$ and two maps $r, s : G \to G^{(0)}$. We can compose two arrows when the range of the first agrees with the source of the second. If we denote, for $x \in G^{(0)}$, $G_x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x\}$ and $G^x = \{\gamma \in G : r(\gamma) = x\}$, this can be rephrase as the existence of a family of maps

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G_x \times G^x & \to & G \\ (\gamma, \gamma') & \mapsto & \gamma\gamma' \end{array} \right. , \forall x \in G^{(0)}.$$

An automorphism of a groupoid is just an endofunctor which is invertible.

Depending on the situation, we will require these to be topological spaces with continuous maps, manifolds with smooth functions, etc. In these cases, we will talk about topological or smooth groupoïds. For now on, $L_\gamma$ denotes the left translation $G^{s(\gamma)} \to G^{r(\gamma)}; \gamma' \mapsto \gamma\gamma'$, and $X = G^{(0)}$ is the set of units.

**Définition 2.** A Haar system $\lambda = (\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$ is a family of borelian measures $\lambda^x$ with support $G^x$ such that :

1. for all continuous function with compact support $f \in C_c(G)$, the map $x \mapsto \int_{G^x} f d\lambda^x$ is continuous.
2. $\lambda$ is left-invariant w.r.t $G$, i.e. $L_{\gamma,*}\lambda^{s(\gamma)} = \lambda^{r(\gamma)} \forall \gamma \in G$ or

$$\int_{G^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma') d^{s(\gamma)}\gamma' = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') d^{r(\gamma)}\gamma'.$$

From $L_\gamma \circ \alpha = \alpha \circ L_{\alpha^{-1}(\gamma)}$, we deduce

$$\int_{G^{s(\alpha^{-1}(\gamma))}} f(\gamma\alpha(\gamma')) d\gamma' = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') \frac{1}{\rho(\alpha^{-1}(\gamma^{-1}\gamma'))} d\gamma'$$

$$\int_{G^{s(\alpha^{-1}(\gamma))}} f(\alpha(\alpha^{-1}(\gamma)\gamma')) = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma') \frac{1}{\rho(\alpha^{-1}(\gamma'))} d\gamma'$$

and $\rho(\gamma^{-1}\gamma') = \rho(\gamma')$. In particular, $\rho$ is constant on $G_x$, for all $x \in X$.

**Définition 3.** An automorphism $\alpha$ of $G$ preserves a Haar system $\lambda$ if, for each $x \in X$, $\alpha_*\lambda^x$ is absolutely continuous w.r.t $\lambda^{\alpha(x)}$ and there exists a continuous function $\rho_\alpha : G \to \mathbb{R}^+$ such that $\rho_\alpha$ restricted to $G^{\alpha(x)}$ is the Radon-Nikodym derivative $\frac{d\alpha_*\lambda^x}{d\lambda^{\alpha(x)}}$.

**Définition 4.** Given an automorphism $\alpha$ of a groupoid $G$, we can form the suspension groupoid relative to $\alpha$ as follow. It is the groupoid with arrows

$$G_\alpha = G \times \mathbb{R}/\sim \quad \text{where } (\gamma, t) \sim (\alpha(\gamma), t-1)$$

and units

$$X_\alpha = X \times \mathbb{R}/\sim \quad \text{where } (x, t) \sim (\alpha_X(x), t-1).$$

If $[\gamma, t]$ and $[x, t]$ denote the equivalence classes in $G_\alpha$ and $X_\alpha$ respectively, then the source and the range map are given by

$$s([\gamma, t])] = [s(\gamma), t] \quad \text{and} \quad r([\gamma, t])] = [r(\gamma), t].$$

The composition is $[\gamma, t][\gamma', t] = [\gamma\gamma', t]$.

**Lemme 1.** If $\rho_\alpha \circ \alpha = \rho_\alpha$, then the suspension groupoid $G_\alpha$ admits a Haar system $\lambda_\alpha$, given by

$$\lambda^{[x,t]}(f) = \int_{G^x} \rho_\alpha(\gamma)^{-t} f([\gamma, t]) d\lambda^x(\gamma).$$

**Preuve 1.** We shall first demonstrate that this definition does make sense, i.e. that it is independent of the representant of the class $[x, t]$.

$$\begin{aligned}
\lambda^{[x,t]}(f) &= \int_{G^x} \rho(\alpha(\gamma))^{-t} f([\gamma, t]) d^x\gamma \\
&= \int_{G^{\alpha(x)}} \rho(\gamma)^{-t} f([\alpha^{-1}(\gamma), t]) \frac{d^{\alpha(x)}\gamma}{\rho(\gamma)} \\
&= \int_{G^{\alpha(x)}} \rho(\gamma)^{-t+1} f([\gamma, t-1]) d^{\alpha(x)}\gamma \qquad = \lambda^{[\alpha(x), t-1]}(f).
\end{aligned}$$

As the continuity is clear, we can conclude by showing the left-invariance.

$$\begin{aligned}
\int_{G_\alpha^{[s(\gamma),t]}} f([\gamma\gamma', t]) d^{[s(\gamma),t]}[\gamma', t] &= \int_{G^{s(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma') f([\gamma\gamma', t]) d^{s(\gamma)}\gamma' \\
&= \int_{G^{r(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma^{-1}\gamma') f([\gamma', t]) d^{r(\gamma)}\gamma' \\
&= \int_{G^{r(\gamma)}} \rho^{-t}(\gamma') f([\gamma', t]) d^{r(\gamma)}\gamma'
\end{aligned}$$

The last equality follows from the fact that $\rho$ is constant on $G_x$, for all $x \in X$, and then

$$\int_{G_\alpha^{[s(\gamma),t]}} f([\gamma\gamma', t]) d^{[s(\gamma),t]}[\gamma', t] = \int_{G_\alpha^{[r(\gamma),t]}} f([\gamma', t]) d^{[r(\gamma),t]}[\gamma', t].$$

□

## 1.2 Principal *étale* groupoids

In this section, we are interested in locally compact groupoids. The maps $r, s : G \to X$, the composition and inverse maps are continuous.

**Définition 5.** A groupoid is said to be *étale* if $r : G \to X$ is a local homeomorphism.
It is principal if the product map $s \times r : G \to X \times X$ is one-to-one.

Let $x \in X$ and $\gamma \in G^x$. If $G$ is *étale*,there exists a neighborhood $U$ of $\gamma$ such that $r_{|U}$ is a homeomorphism. So $G^x \cap U = \{\gamma\}$ is open in $G^x$. That show that the fibers $G^x$ are discrete for all $x \in X$.

**Proposition 1.** If $G$ is a principal étale groupoid, the fibers $G^x$ are discrete for all $x \in X$ and the only Haar systems are the multiple of the counting measure on the fibers.

**Preuve 2.** If $\lambda$ is a non-zero Haar system and $G$ is principal, $\lambda^x$ is a measure on the discrete space $G^x$, which entails that there exists a $\gamma \in G^x$ such that $\lambda(\gamma) > 0$. By left-invariance,

$$\lambda^{r(\gamma')}\{\gamma'\gamma\} = \lambda\{\gamma\} > 0.$$

Replacing $\gamma' = \gamma^{-1}$ in this relation, we have $\lambda^x\{x\} > 0$, which we can suppose equal to 1. The left invariane assures then that

$$\lambda^x\{\gamma\} = 1 \quad \forall \gamma \in G^x.$$

$\square$

## 2 Stone-Cech compactification

Let $X$ be a topological space. The Stone-Cech compactification of $X$, denoted by $\beta X$, is defined as the compact Hausdorff space, unique up to homeomorphism, together with a $C_b(X)$-embedding $\phi_X : X \to \beta X$ such that, for any continuous map $f : X \to K$ in a compact space $K$, there exists a unique continuous map $\tilde{f} : \beta X \to K$ that makes the following diagram commutes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_X"] & K \\ \beta X \arrow[ur, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd} .$$

The universal property of the Stone-Cech compactified makes it a functor from the category of topological spaces to the category of compact Hausdorff spaces. Indeed, it is general property that, if we are given two categories $C$ and $C'$ and a functor $\phi : C \to$, such that for every functor $F : C \to C'$, there exists

Let $X$ be a compact Hausdorff space. Then the maximal ideals of $C(X)$ are in a one-to-one correspondence with the points of $X$. Explicitely, to a point $p \in X$ corresponds the maximal ideal

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}.$$

If one endorses the spaces of maximal ideals of $C(X)$ with the Stone topology, this correspondence $p \mapsto \mathfrak{M}_p$ is actually a homeomorphism. Now, it is a theorem that when $X$ is just locally compact, $C(\beta X)$ and $C_b(X)$ are homeomorphic, and then we have that $\beta X \simeq \mathfrak{M}(C(\beta X)) \simeq \mathfrak{M}(C_b(X))$. This amounts saying that we can see $\beta X$ as the spectra of $C_b(X)$, for all locally compact spaces.

## 3 Asymptotic dimension

**Définition 6.** Let $X$ be a metric space.
The multiplicity of a cover $\mathcal{U}$ of $X$ is the largest number $n \in \mathbb{N}$ such that every point $x \in X$ is contained in at most $n$ elements of $\mathcal{U}$.
If $R > 0$, the $R$-multiplicity is the defined as the multiplicity restricted on covers uniformly bounded by $R$.
The asymptotic dimension of $x$ is the smallest natural integer $n \in \mathbb{N}$ such that, for all $R > 0$, there exists a uniformly bounded cover $\{U_j\}$ with $R$-multiplicity $n + 1$.
Such a space is said to have finite asymptotic dimension if this number, denoted $\dim_\infty X$, is bounded.

# 4 Assembly maps for groupoids and for coarse spaces

## 4.1 The case of a finitely generated group

Let $\Gamma$ be a discrete finitely generated group. The word length provides a structure of metric space, of which the class up to coarse equivalence is independent of the set of generators.

Denoting $C^*(\Gamma)$ the Roe algebra, i.e. the $C^*$-algebra generated by locally compact operators on $l^2(\Gamma) \otimes H$ with finite propagation, we can show that

$$C_u^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma) \times_\alpha \Gamma$$

$$C^*(\Gamma) = l^\infty(\Gamma, \mathfrak{K}(H)) \times_\alpha \Gamma.$$

Here $\alpha \in Aut(A)$ is the automorphism encoding the left action of $\Gamma$ on $A$ :

$$\alpha_\gamma(a) = s \to a_{s\gamma^{-1}}.$$

Let $S_\gamma$ be the operator acting on $l^2(\Gamma)$ as

$$(S_\gamma \eta)_s = \eta_{s\gamma^{-1}}.$$

We see $l^\infty(\Gamma)$ as an algebra of operator, acting by left multiplication on $l^2(\Gamma)$. Then

$$S_\gamma a S_\gamma^* = \alpha_\gamma(a),$$

for any $a \in l^\infty(\Gamma)$ and $\gamma \in \Gamma$. The algebra $C^*(\Gamma)$ is generated by finite sums of the form

$$\sum_\gamma a_\gamma S_\gamma$$

which are of finite propagation $\max_\gamma\{l(\gamma) : a_\gamma \neq 0\}$ and locally compact.

## 4.2 Relation between the coarse and the groupoid assembly maps

We have to show that there is an isomorphism

$$KX_*(X) \to KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K})).$$

Let us recall that the Stone-Cech compactification of our coarse groupoid $\Gamma = G(X)$ identified itself to the spectrum of the bounded continuous functions over $X$, which is discrete. We have

$$C(\beta X) \simeq l^\infty(X)$$

and we can think of $C(\beta X)$-algebras as $l^\infty(X)$-algebras.

The left handside $KX_*(X)$ is defined as the limit of the directed groups

$$KK_*(C_0(P_E(X), \mathbb{C})$$

when $E$ is an entourage of $X$. Here $P_E(X)$ denotes the Rips complex defined by the entourage $E$, which is the set of simplexes $[x_0, ...., x_n]$ such that $(x_i, x_j) \in E$.

Now the classifying space $\mathcal{E}\Gamma$ of the groupoid $G(X)$ is unique up to homotopy, and can be realised by the space of measures $\mu$ on $G(X)$ which satisfied $s^*\mu$ is a Dirac measure on $G^{(0)} = \beta X$, and $\frac{1}{2} < |\mu| \leq 1$. Saying that $s^*\mu$ is a Dirac measure is the same as demanding $\mu$ to be supported in a fiber $\Gamma_x$ for some $x \in X$. The abelian group $KK_*^{top}(G(X), l^\infty(X, \mathfrak{K}))$ is defined as the inductive limit of

$$KK_{G(X)}\left(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K})\right)$$

when $Y$ is a $\Gamma$-compact space of $\mathcal{E}\Gamma$.

Let $E$ be an entourage of $X$. A Fredholm module $(H, \phi, F)$ in $E(C_0(P_E(X)), \mathbb{C})$ is defined by a Hilbert space $H$, a $*$-homomorphism $\phi : C_0(P_E(X)) \to \mathcal{L}(H)$ and an operator $F$ satisfying all definitions.
We can form the $l^\infty(X, \mathfrak{K})$-module $\mathcal{E} = H \otimes_{\mathbb{C}} l^2(\Gamma, \mathfrak{K}))$, and extend $\phi$ into $\phi \otimes id : C_0(P_E(X)) \to \mathcal{L}(H \otimes l^2(\Gamma, \mathfrak{K})$. We do the same with $F : \hat{F} := F \otimes id$. Then, as $P_E(X)$ identifies itself as a $G$-compact of $\mathcal{E}G$, $(\mathcal{E}, \phi \otimes id, F \otimes id)$ defines an element of $KK_{G(X)}\left(C_0(Y), l^\infty(X, \mathfrak{K})\right)$.

# 5 Correspondance between the coarse $K$-homology of a space and the one of its coarse groupoid

The aim of this section is to give a proof of a result of [?], in which it is stated that the following diagramm commutes :

$$\begin{tikzcd}
KX_*(X,B) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\simeq"] & K_*(C^*X,B) \arrow[d, "\simeq"] \\
K_*(G(X), l^\infty(X,B)) \arrow[r, "\mu"] & K_*(C_r(G(X)),B).
\end{tikzcd}$$

The vertical arrow from the left comes from an isomorphism at the $C^*$-algebraic level, as

$$C^*(X) \simeq l^\infty(X) \times G(X).$$

The rest of this section is devoted to describe the vertical arrow from the right in the langage of Kasparov $KK$-theory, i.e.

$$\varinjlim_d KK(C_0(P_d(X)), B) \to \varinjlim_{Y \subset \mathcal{E}G(X)} KK(C_0(Y), B),$$

were the inductive limite on the right is taken among the proper $G(X)$-compact subsets $Y$ of the universal classifying space for proper actions of $G(X)$.

Recall from [?] that we can take for $\mathcal{E}G(X)$ the space $\mathfrak{M}$ of positive measures $\mu$ on $G(X)$ satisfying :

— $\frac{1}{2} < \mu(G(X)) \leq 1$,

— $s^*\mu$ is a Dirac measure, i.e. its support consists of arrows of $G(X)$ that all source from the same base point of $\beta X$.

If $\mathfrak{M}_d$ denotes the space of measures $\mu$ of $\mathfrak{M}$ such that :

— $\mu$ is a probability measure

— for all $\gamma$ and $\gamma'$ in the support of $\mu$, $\gamma'\gamma^{-1}$ is $d$-controlled, i.e. $d(r(\gamma), r(\gamma')) \leq d$,

then $\mathfrak{M} = \varinjlim \mathfrak{M}_d$.

The Rips complex of $X$, denoted $P_d(X)$, is the topological space of the complexes of diameter less than $d$, identified with probability measures on $X$ with support of diameter less than $d$, with the weak topology coming from $C_c(C)$. We will write $[y, t]$ for a point of a simplex defined by barycentric coordinates of $k$ points $y_1, ..., y_k$, ie $\sum t_j \delta_{y_j}$. To such a point $[y, t]$ and an element of the Stone-Cech compactification $w \in \beta X$, we can associate a measure of $\mathfrak{M}_d$ in the following way. As $G(X)$ is a principal and transitive groupoid, there exists only one arrow $\gamma_j$ such that $s(\gamma_j) = x$ and $r(\gamma_j) = y_j$. To $z = ([y, t], w) = (z_w, w)$, we associate

$$\phi_d(z) = \sum_{j=1,k} t_j \delta_{\gamma_j} \in \mathfrak{M}_d.$$

**Proposition 2.** The map

$$\phi_d : P_d(X) \times \beta X \to \mathfrak{M}_d$$

is an homeomorphism.

**Preuve 3.** It is clearly bijective. The bicontinuity comes from the identity :

$$\langle z_w, f \rangle = \langle \phi_d(z), f \circ r \rangle$$

for all $z = (z_w, w) \in P_d(X) \times \beta X$, and $f \in C_c(X)$. □

This homeomorphism $\phi_d$ gives an $*$-isomorphism at the level of $C^*$-algebras

$$\Psi_d : C_0(\mathfrak{M}_d) \to C_0(P_d(X) \times \beta X).$$

Let $(\mathcal{E}, \pi, F) \in \mathbb{E}(C_0(P_d(X)), B)$ be an elliptic operator. **A FINIR**

Let $X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_j \subset ...$ the $n$-skeleton decomposition associated to the simplicial structure of the Rips complex $P_d(X)$, and similarly $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}_1 \subset ... \subset \tilde{X}_j \subset ...$ for $\mathfrak{M}_d$, and

$$Z_j = C_0(X_j) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_j = C_0(\tilde{X}_j).$$

$$Z_{j-1}^j = C_0(X_j - X_{j-1}) \quad \text{and} \quad \tilde{Z}_{j-1}^j = C_0(\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j-1}).$$

We will show the isomorphism by a Mayer-Vietoris type argument. By applying the $KK$-theory to the exact sequence :

$$0 \longrightarrow C_0(X_j - X_{j-1}) \longrightarrow C_0(X_j) \longrightarrow C_0(X_{j-1}) \longrightarrow 0$$

we have a commutative diagramm with exact lines :

$$\begin{tikzcd}
KK_*(Z^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta^j_{j-1}"] & KK_*(Z_{j-1},B) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{j-1}"] & KK_*(Z_j,B) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_j"] & KK_*(Z^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta^j_{j-1}"] & KK_*(Z_{j-1},B) \arrow[d, "\theta_{j-1}"] \\
KK_*(\tilde{Z}^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] & KK_*(\tilde{Z}_{j-1},B) \arrow[r] & KK_*(\tilde{Z}_j,B) \arrow[r] & KK_*(\tilde{Z}^j_{j-1},B) \arrow[r, "\delta"] & KK_*(\tilde{Z}_{j-1},B)
\end{tikzcd}$$

The five lemma assures that if $\theta_{j-1}$ and $\theta^j_{j-1}$ are isomorphisms, then so is $\theta_j$. Moreover, $X_j - X_{j-1}$ is equivariantly homeomorphic to $\mathring{\sigma}_j \times \Sigma_j$, where $\mathring{\sigma}_j$ denotes the interior of the standard simplex, and $\Sigma_j$ is the set of centers of $j$-simplices of $X_j$. Bott periodicty assures then that, if $\theta_{j-1}$ is an isomorphism, then so is $\theta^j_{j-1}$. By induction, proving that $\theta_0$ is an isomorphism concludes the proof.

# 6 Séminaire $KK$-théorie et groupe quantique, exposé du 17 Octobre 2014

Ce court rapport a pour but de présenter les bases de la $K$-théorie des $C^*$-algèbres. Nous irons des définitions à la suite exacte à 6 termes.

## 6.1 Motivations

Comme Lorenzo Pittau vous a tout raconté sur $K_0$ la semaine dernière, je vais me permettre d'aller plus vite sur les détails techniques.

Le foncteur $K$ a été introduit par Grothendieck dans sa démonstration du théorème de Riemann-Roch à la fin des années 50, voir l'article de Borel et Serre [?]. Ces travaux ont inspiré Atiyah et Singer dans la démonstration de leur fameux théorème de l'indice.

Voici une version très simplifiée d'un théorème de l'indice trouvée dans un article de Jean Bellissard [?], que je trouve très pédagogique. Soit $f \in C(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^\times)$. Cette fonction définit un lacet $\gamma$, donc un élément du premier groupe d'homologie du cercle $[\gamma] = f^*(\mathbb{S}^1) \in H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, dont la classe est représentée via cet isomorphisme par le degré de $f$. Si l'on suppose que $f$ est une fonction holomorphe, on peut même calculer ce degré :

$$\deg(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{f(\mathbb{S}^1)} f(z) \frac{dz}{-z} = -\langle [w], [f] \rangle_{H^1 \times H_1},$$

où $w = \frac{dz}{2i\pi z}$ est une forme fermée qui définit une classe de cohomologie de $\mathbb{S}^1$, et le crochet est la dualité usuelle entre cohomologie et homologie.

Cette formule a aussi une interprétation opératorielle. Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ possédant un prolongement de carré intégrable sur le bord du disque $\mathbb{S}^1$. Cet espace $\mathcal{H}$, appelé espace de Hardy, est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1)$, et on note $\mathcal{P}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. On peut montrer que l'espace de Hardy est celui des fonctions dont les coefficients de Fourier strictement négatifs sont nuls.

A toute fonction continue sur le cercle $f \in C(\mathbb{S}^1)$, on associe un opérateur dit de Toeplitz $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$T_f : g \mapsto \mathcal{P} f g.$$

Cet opérateur induit un $*$-morphisme de $C(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{B}/\mathbb{K}$ à valeur dans l'algèbre de Calkin (les opérateurs bronés quotientés par l'idéal des opérateurs compacts), et donc $T_f T_{\overline{f}} = T_{\overline{f}} T_f \bmod \mathbb{K} = 1 \bmod \mathbb{K}$. On a donc un opérateur de Fredholm, dont on sait que le noyau et le conoyau sont de dimension finie : il a un indice

$$\mathrm{Ind}(T_f) = \dim(Ker(T)) - \dim(coker(T)) \in \mathbb{Z}.$$

Le "théorème-0" de l'indice affirme que cette indice est précisément le degré de $f$, ce que l'on peut réécrire comme

$$\mathrm{Ind}(T_f) = \langle [w], f^*(\mathbb{S}^1) \rangle_{H^1 \times H_1}.$$

Pour le montrer, remarquez d'abord que l'indice est invariant par perturbation compacte et par homotopie. Il suffit alors de le montrer pour les fonctions $z^n$, or $T_{z^n} = S^n$, où $S$ est le shift unilatéral, qui est injectif. Le noyau de $S^{*n}$ étant de dimension $n$, $Ind(T_{z^n}) = -n$. $\square$

Atiyah et Singer ont profondément généralisé ce type de résultat au cadre des fibrés vectoriels. L'exemple typique est celui d'un opérateur de Dirac sur un variété munie d'une structure spin$^c$, dont on peut montrer qu'il est inversible modulo les opérateurs pseudo-différentiels réguliers. On verra comment calculer des indices associés à toute extension de $C^*$-algèbre, et ici l'extension pertinente est celle des opérateurs pseudo-différentiels. On a alors un indice associé à cet opérateur de Dirac, qui est un entier. Dans certains cas, lorsque votre variété est un espace homogène par exemple, on peut relever notre opérateur de Dirac, sur le revêtement universel dans notre exemple. Le receptacle pour l'indice de cet opérateur est alors la $K$-théorie : l'indice n'est plus un entier mais un élément d'un certain groupe de $K$-théorie.

Il se trouve que la $K$-théorie se généralise bien au cadre non-commutatif. Pour cela, rappelons le théorème de Serre-Swan :

**Théorème 1.** Soit $X$ un espace topologique compact et $\Phi$ le foncteur qui va de la catégorie des fibrés vectoriels complexes de base $X$ dans celle des $C(X)$-modules projectifs de type fini qui, à un fibré $\begin{array}{c} E \\ \downarrow_{\pi} \\ X \end{array}$ associe l'espace des sections continues $\Phi : E \mapsto \Gamma(E) = \{s : X \to E / \pi \circ s = id\}$.
Alors $\Phi$ réalise une équivalence de catégories.

Ce théorème assure que se donner un fibré, c'est se donner un $C(X)$-module projectif de type fini. C'est ainsi que les algébristes définissent le premier groupe de $K$-théorie d'un anneau $A$ comme le groupe de Grothendieck du monoïde des classes d'équivalence des $A$-modules projectifs de type fini. C'est d'ailleurs une définition que l'on peut prendre pour les $C^*$-algèbres, si l'on utilise la théorie des $C^*$-modules hilbertiens (voir les prochains exposés !). Pour mémoire, rappelons qu'un $A$-module $P$ est dit projectif si pour tout $A$-modules $N$ et $M$ et tout morphisme $f : N \to P$ et tout épimorphisme $g : M \to P$, il existe une unique flèche $h : N \to M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} . & M \arrow[d, two heads, "g"] \\ N \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "f"'] & P \end{tikzcd}$$

Que se passe t'il pour un $A$-module projectif de type fini $\mathcal{E}$ ? On a un morphisme surjectif $g : A^n \to \mathcal{E}$, et on peut relever l'identité grâce à la propriété universelle

$$\begin{tikzcd} . & A^n \arrow[d, two heads, "g"] \\ \mathcal{E} \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "id_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Il existe donc $f : \mathcal{E} \to A^n$ telle que $g \circ f = id_{\mathcal{E}}$. Alors $p = f \circ g$ est un projecteur, et on a un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq pA^n$. Ainsi, un module projectif de type fini est donné par un projecteur de $\mathfrak{M}_n(A)$.

## 6.2 Propriétés de $K_0$

**Définition 7.** Soit $p$ et $q$ deux projecteurs dans une $C^*$-algèbre $A$. On définit trois relations d'équivalences :
$p \sim q$ s'il existe une isométrie partielle $u$ de $A$ telle que $p = u^*u$ et $q = uu^*$. ( équivalence de Murray-Von Neumann)
$p \sim_u q$ s'il existe un unitaire $u$ de $A^+$ tel que $p = uqu^*$. (Similitude)
$p \sim_h q$ s'il existe un chemin continu en norme de projections de $p$ à $q$.(Homotopie)

**Lemme 2.** Soit $A$ une $C^*$-algèbre unitale et $p$ et $q$ deux projecteurs de $A$ tels que $||p - q|| < 1$. Alors il existe un unitaire $u \in A$ vérifiant

$$p = uqu^*.$$

**Preuve 4.** Pour tout projecteur $\in A$, on pose $s_p = 2p - 1$ : c'est une symmétrie. De plus

$$s_p - s_q = 2(p - q),$$

ce qui assure que si $||p - q|| < 1$, $v := \frac{s_p s_q + 1}{2}$ est inversible. Mais $pv = pq$ et donc par symmétrie $qv^* = qp$ d'où $pv = vq$. La décomposition polaire de $v$ assure alors que l'unitaire $v|v|^{-1}$ entrelace $p$ et $q$. $\square$

Une remarque : on vient finalement de montrer qu'il existe une application continue sur un voisinage de $p$ (la boule de centre $p$ et de rayon $||2p - 1||$ par exemple,

$$\Psi \left\{ \begin{array}{ccc} B_p & \to & A^{-1} \\ q & \mapsto & \frac{s_p s_q + 1}{2} |\frac{s_p s_q + 1}{2}|^{-1} \end{array} \right.$$

telle que $\Psi(q) p \Psi(q)^* = q$.

**Proposition 3.** Les relations d'équivalence sur les projecteurs sont ordonnées comme suit : $\sim_h \Rightarrow \sim_u \Rightarrow \sim$. De plus,

$$\text{si} \quad p \sim q \text{ alors} \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et si} \quad p \sim_u q \text{ alors} \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Preuve 5.** Si $p \sim_h q$, il existe un chemin continu de projecteurs $[0, 1] \to P(A); t \mapsto p_t$. En découpant l'intervalle $[0, 1]$ en segment assez petits, le lemme 2 donne l'existence d'un chemin d'unitaires $t \mapsto u_t$ tel que $t \mapsto u_t p u_t^*$ soit un chemin continu de projecteurs de $p$ à $q$. En particulier, $p \sim_u q$.

Si $p \sim_u q$, alors il existe un unitaire $u$ vérifiant

$$p = uqu^* = (uq)(uq)^*$$

comme $uq$ est une isométrie partielle, $p \sim q$.

Si $p \sim q$. Soit $v$ une isométrie partielle de $A$ telle que $p = v^*v$ et $q = vv^*$. Alors

$$w = \begin{pmatrix} v & 1 - vv^* \\ 1 - v^*v & v^* \end{pmatrix}$$

est une isométrie de $\mathfrak{M}_2(A)$. De plus

$$w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $p \sim_u q$, soit $u$ un unitaire qui entrelace $p$ et $q$. Alors

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$

est un unitaire homotope à $1 \otimes I_2$, et un tel chemin continu d'unitaire $t \mapsto w_t$ assure que

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Cette propostion montre que les différentes relations d'équivalence coïncident si l'on se place dans $\mathfrak{M}_\infty(A)$.

## 6.3 Exercices

On a vu que le foncteur $K_*$ est stable par limite inductive. Pour autant certains exemples demandent un peu d'attention. Soit $A$ une $C^*$-algèbre unitale et $q$ un entier positif. On note $A_j = \mathfrak{M}_{q^j}(A)$, et $\phi_j^{j+1} : A_j \to A_{j+1}$ défini par

$$\phi_j^{j+1} : a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & & & \\ 0 & a & & & \\ & & a & & \\ & & & .. & \\ & & & & a \end{pmatrix} = a \otimes 1_q$$

En composant on obtient des $*$-morphismes, où $i \leq j$ :

$$\phi_i^j : \left\{ \begin{array}{ccc} A_i & \to & A_j \\ a & \mapsto & a \otimes 1_{q^{j-i}} \end{array} \right.$$

qui nous définissent un système inductif $\{A_i, \phi_i^j\}$. Comme $K_*(A_j) = K_*(A)$, on serait tenter de conclure que la $K$-théorie de la limite inductive est celle de $A$. Il n'en n'est rien comme on peut facilement le voir avec $A = \mathbb{C}$. Les morphismes $\phi_{i*}^j$ sont donnés par la multiplication

$$\phi_{i*}^j \left\{ \begin{array}{ccc} K_*(A_i) & \to & K_*(A_j) \\ [x] & \mapsto & q^{j-i}[x] \end{array} \right.$$

et même si lorsque $A = \mathbb{C}$, $K_0(A_j) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, on obtient $K_0(\varinjlim A_j)) = \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$.

# Références


[1] Alexandre Grothendieck. Produits tensoriels d'espace topologiques et espaces nucléaires. *Séminaire N. Bourbaki*, 69 :193–200, 1951-1954.

[2] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* 2001.

[3] D. Voiculescu M. Pimsner. Exact sequences for $k$-groups and $ext$-groups of certain cross-products of $c^*$-algebras. *Operator theory*, 4 :93–118, 1980.

[4] Gerard J. Murphy. *$C^*$-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., 1990.

[5] Alain Connes Paul Baum. Geometric $k$-theory for lie groups and foliations. *Enseign. Math.*, 46 :3–42, 2000.

[6] Nigel Higson Paul Baum, Alain Connes. Classifying space for proper actions and $k$-theory of group $c^*$-algebras. *Contemporary Mathematics*, 197 :241–291, 1994.

[7] Michael V. Pimsner. A class of $c^*$-algebras generalizing both cuntz-krieger algebras and crossed products by $F$. *Fields Institute Communications*, 12 :189–212, 1997.

[8] Jean Renault. *A groupoid approach to $C^*$-algebras.* Springer-Verlag, 1980.

[9] Marc Rieffel. $c^*$-algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics.*, 93(2) :415–429, 1981.

[10] Tu J.L. Yu G. Skandalis, G. The coarse baum-connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4) :807–834, 2002.

[11] Jean-Louis Tu. a conjceture de novikov pour les feuilletages hyperboliques. *$K$-theory*, 16(2) :129–184, 1999.

[12] Jean-Louis Tu. The baum-connes conjecture for groupoids. *$C^*$-algebras*, 18 :227–242, 1999.

[13] Jean-Louis Tu. The coarse baum-connes conjecture and groupoids ii. *New York J. Math.*, 18 :1–27, 2012.

[14] N.E. Wegge-Olsen. *$K$-theory and $C^*$-algebras, a friendly approach.* Oxford University Press, 1993.