

Questions sur les systèmes dynamiques

Clément Dell'Aiera

Table des matières

| | | |
|----------|-------------------------------|----------|
| 1 | Le principe de Maxwell | 3 |
| 1.1 | Un exemple | 4 |

1 Le principe de Maxwell

Dans son livre, *Structure des systèmes dynamiques*, J-M. Souriau donne un cadre symplectique à la mécanique classique, qui s'étend sans difficulté à celui de la relativité restreinte. Le voici. On se donne une variété V feuilletée par une 2-forme σ , telle que l'espace des feuilles $U = V/\ker \mathcal{F}$ soit une variété sur laquelle σ induit une structure symplectique. La première doit être pensée comme l'espace d'évolution du système physique que l'on étudie, et la seconde comme l'espace des mouvements du système.

Arrivé là, un expérimentateur doit pouvoir communiquer ses mesures à un second expérimentateur, et l'on doit donc se donner une règle qui permet de passer d'un référentiel à l'autre. Cela est fait grâce à l'action d'un groupe. Soit donc G un groupe de Lie, qui agit sur V de façon à préserver les feuilles, et qui induit donc une action par symplectomorphismes sur U .

Sous certaines conditions (si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ i.e. G est semi-simple), on peut associer une application moment $\mu : U \rightarrow \mathfrak{g}^*$, où \mathfrak{g}^* est le dual de l'algèbre de Lie de G , qui vérifie

$$\sigma(Z_U(x)) = -d\langle \mu(x), Z \rangle \quad , \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

En mécanique classique, $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$, et l'on passe d'un référentiel galiléen à un autre par transformations du groupe de Galilée, i.e. $G = \text{Gal}(3)$, remplacé par le groupe de Poincaré en relativité restreinte. Il existe des référentiels privilégiés appelés inertiels, et on passe de l'un à l'autre par des transformations du groupe de Galilée. La mécanique classique repose sur l'hypothèse suivante :

Principe de Galilée La forme σ est invariante sous l'action de $G = \text{Gal}(3)$.

C'est finalement ce principe que Souriau propose de généraliser en définissant le cadre de la mécanique comme une action d'un groupe de Lie par symplectomorphisme. On peut alors définir un principe analogue en relativité restreinte en remplaçant $\text{Gal}(3)$ par $P(3, 1)$. Le condition qui donne les équations du système est le principe de Maxwell.

Principe de Maxwell. Pour un système isolé, la forme de Lagrange est fermé : $d\sigma = 0$.

Le défaut d'équivariance de l'application moment, i.e.

$$\theta_x(a) = \underline{a}_{\mathfrak{g}^*} \mu(x) - \mu(\underline{a}_U x) \quad , \forall a \in G, x \in U$$

définit un \mathfrak{g}^* -cocycle de G , dont on peut montrer que la classe de cohomologie ne dépend ni de x (à vérifier) ni de μ . Cette classe, notée $m \in H^*(G)$, exprime la masse du système dans le cadre galiléen. Un résultat remarquable est que le groupe de Poincaré a une cohomologie triviale, ce qui donne une preuve mathématique simple qu'un système n'a pas de masse intrinsèque en relativité restreinte.

- Souriau mentionne dans son livre que ce formalisme peut s'étendre en relativité générale, au prix d'abandonner les groupes de Lie pour les

pseudo-groupes. A l'heure actuelle, je n'ai pas trouvé encore où ni comment le faire. Ce formalisme mettant en jeu des actions de groupes (et possiblement de pseudo-groupes, donc de groupoïdes), je me demande si une réécriture en terme de groupoïdes ne permettrait pas d'éclaircir la méthode, ou encore d'apporter des réponses à des situations plus complexes en donnant de bons invariants. Par exemple, on peut penser à l'action de \mathbb{R} sur le tore \mathbb{T} par le flot donné par la forme $dy - \theta dx$, avec θ un irrationnel.

- Au départ, mon intérêt pour ce formalisme me vient de la question suivante : quel est le lien entre la K -théorie et la "masse" d'un système physique ? Ce lien est mentionné dans un des deux articles (plus précis !) d'E. Witten sur la K -théorie, où il explique que la K -théorie d'une certaine algèbre labelle naturellement les valeurs possibles de la charge conservée d'un champ de Ramond-Ramond. Ensuite, il est connu que si l'on observe un électron dans un cristal aperiodique, son énergie est donnée par un élément de la K -théorie d'une certaine algèbre (la C^* -algèbre du groupoïde de l'action du groupe d'isométrie des pavages sur l'orbite d'icelui). Bien sûr, cette question est entièrement basée sur des analogies, dont la plus simple est que la charge électrique joue pour le champ électro-magnétique le rôle de la masse pour le champ gravitationnel.

1.1 Un exemple

En mécanique classique, $V = \{y = (r, v, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\}$ et

$$\sigma(dy)(d'y) = \sum_j \langle m_j dv_j - F_j dt, d'r_j - v_j d't \rangle - \sum_j \langle m_j d'v_j - F_j d't, dr_j - v_j dt \rangle.$$

L'idée est de remplacer le système $m \frac{\partial v}{\partial t} = F, \frac{\partial x}{\partial t} = v$ par σ , et de passer de l'espace de phase $R^N \times R^N$ par V . Ce faisant, le temps devient une variable comme les autres, ce qui permet de traiter le cadre de la relativité restreinte, où un changement de repère mélange coordonnées de temps et d'espace, avec le même formalisme que celui de Galilée.

Voici d'ailleurs

- le groupe de Galilée

$$Gal(3) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in SO(3), v, x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Si l'on passe R à R' par une telle transformation, l'origine de R' est translatée de x à vitesse v par rapport à celle de R , et il faut appliquer A au repère de R pour obtenir celui de R' .

- Le groupe de Lorentz $O(3, 1)$ est le groupe de $E_{3,1}$ qui préserve la forme de Minkowski $dt^2 - dx^2$. Le groupe de Poincaré est donné par

$$P(3, 1) = O(3, 1) \rtimes E_{3,1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in O(3, 1), v \in E_{3,1} \right\}.$$

On voit que le groupe de Galilée en est un sous-groupe, et que $P(3, 1)$ permet lui de mélanger coordonnées spatiales et temporelles.

Soit $Z = \begin{pmatrix} j(\omega) & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gal}(3)$ un déplacement infinitésimal du groupe de Galilée. Il induit sur V le champ de vecteur suivant

$$\underline{Z}_V(y) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} + (\omega \wedge r + \beta t + \gamma) \frac{\partial}{\partial r} + (\omega \wedge v + \beta) \frac{\partial}{\partial v},$$

et un simple calcul donne que $\mu(y)$ à quatre composantes :

$$(l, g, p, E) = \left(mr \wedge v, r - vt, mv, \frac{1}{2} ||v||^2 \right).$$