Propagation en K-théorie

Clément Dell'Aiera

Université de Lorraine

20 octobre 2015

La conjecture de Novikov est l'un des problèmes non résolus les plus importants de la topologie.
Soit Γ un groupe discret, $B\Gamma$ son espace classifiant et $f : B\Gamma \to M$ une application continue à valeur dans une variété fermée orientée M. On rappelle que $B\Gamma$ est un espace topologique dont le groupe fondamental est Γ et tous les autres groupes d'homotopies sont triviaux.

Definition

Pour une classe de cohomologie $x \in H^*(B\Gamma, \mathbb{Q})$, on définit la haute signature associée à x comme :

$$\sigma_x = \langle \mathcal{L}_M \cup f^*(x), [M] \rangle$$

$\mathcal{L}_M$ est un certain polynôme en les classes de Pontrjagin, et $[M] \in H_*(M, \mathbb{Q})$ la classe fondamentale de la variété.

Conjecture (Novikov)

Les hautes sinatures sont des invariants d'homotopies, i.e. si $\phi : M \to N$ est une équivalence d'homotopie, la haute signature associée à f et celle associée à $\phi \circ f$ sont égales.

On rappelle qu'un opérateur compact est un opérateur limite d'opérateurs de rang fini.
Un opérateur T est dit de Fredholm s'il est inversible modulo les opérateurs compacts. Son noyau et son conoyau sont alors fini-dimentsionnels et on peut définir son indice :

Definition

Soit T un opérateur de Fredholm, son indice est

$$Ind \ T = \dim KerT - \dim KerT^*$$

Soit M une variété différentielle, et d la différentielle extérieure définie sur le complexe de De Rham des formes extérieures

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} .. \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

Une métrique riemannienne g sur M induit une mesure μ sur M et un produit scalaire $(,)$ sur le cotangent T^*M que l'on peut étendre aux formes :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha(x), \beta(x)) \mu(dx)$$

On complète $\Omega_c^j(M)$par rapport à $\langle , \rangle$ pour obtenir un complexe d'espaces de Hilbert $\Omega_{L^2}^*(M)$

$$\Omega_{L^2}^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_{L^2}^1(M) \xrightarrow{d} .. \xrightarrow{d} \Omega_{L^2}^n(M)$$

C'est le complexe des formes de carré intégrable. L'opérateur d est cette fois un **opérateur non borné**, soit d^* son adjoint.

$D = d + d^*$ est ce que l'on appelle un opérateur de Dirac généralisé.
C'est un opérateur non-borné auto-adjoint, on peut donc donner un sens à une expression $f(D)$ par calcul fonctionnel, pour toute f borélienne bornée.

Théorème (Régularité elliptique)

Si $\phi \in C_0(\mathbb{R})$, alors $\phi(D)$ est un opérateur compact.

Si $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, bornée et impaire telle que $\chi(t) \to_{+\infty} 1$, alors

- $\chi(D)$ est un opérateur de Fredholm,
- $\chi_1(D) - \chi_2(D)$ est compact.

On peut donc calculer l'indice de $\chi(D)$!

Il vaut 0 !

$\chi(D)$ est autoadjoint... Mais on peut séparer les formes de degré pair et impair pour obtenir une graduation

$$\Omega_{L^2}(M) = \Omega^{even}(M) \bigoplus \Omega^{odd}(M),$$

et D est un opérateur impair par rapport à cette décomposition :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi(D_+)$ est de Fredholm, et on définit

$$Ind(D, \epsilon) = Ind\chi(D_+)$$

Cet indice est non nul en général, et ne dépend pas de χ.

($\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est l'opérateur de graduation.)

Les théorèmes de l'indice donnent une formule pour l'indice d'un opérateur de Dirac généralisé en fonction de données topologiques.
Indice $=$ évaluation d'une classe caractéristique contre la classe fondamentale de la variété

$$Ind\ (D, \epsilon) = \langle \mathcal{I}_D, [M] \rangle$$

Ici $\mathcal{I}_D \in H^*(M)$ est une classe caractéristique.

On suppose que la dimension n de M est paire, et comme auparavant

$$\Omega_{L^2}(M) = \Omega^{even}(M) \oplus \Omega^{odd}(M), \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = d + d^*$$

Théorème (Gauss-Bonnet)

$$Ind\ (D, \epsilon) = \begin{cases} \chi(M) & \text{caractéristique d'Euler} \\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M Pf(R) & \end{cases}$$

R est la courbure de la connexion de Levi-Civita, et Pf est un polynôme appelé le Pfaffien.

L'opérateur de Hodge $\star : \Omega^k_{L^2}(M) \to \Omega^{n-k}_{L^2}(M)$ implémente une autre graduation, et

$$Ind\ (D, \star) = \begin{cases} sg(M) & \text{signature de la variété} \\ \langle \mathcal{L}_M, [M] \rangle \end{cases}$$

Si M admet une structure Spin,

$$\not{D} = \sum c(X_j)\nabla_{X_j}$$

alors

$$Ind\ \not{D} = \langle \mathcal{A}, [M] \rangle$$

But : Etendre ces techniques au cas non-compact.
Problème : $\phi(D)$ n'est plus un opérateur compact.
Piste : Utiliser la preuve des théorèmes de l'indices utilisant le noyau de la chaleur.

Proposition (Formule de Weitzenböck)

$$\not{D}^2 = \nabla\nabla^* + \frac{1}{4}Sc$$

$$Ind\ \not{D} = Tr(\epsilon e^{-t\not{D}^2})$$

Lorsque $t \to 0$, cette formule devient locale en t et le terme dominant est l'inégrale sur M d'une forme $\mathcal{I}(x)dx$ que l'on peut determiner explicitement, sa classe de cohomolgie donne $\mathcal{I}_D$.
Idée : Le semi-groupe de la chaleur construit une homotopie entre l'invariant local $\mathcal{I}_D$ et l'invariant global $Ind\ \not{D}$.

Definition

Une C^*-algèbre est une sous-algèbre $A \subset \mathcal{L}(H)$ fermée pour la norme d'opérateur et stable par adjonction.

Exemples :

- $C_0(X)$ pour un espace localement compact X.
- l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{L}(H)$, des opérateurs compacts $\mathfrak{K}(H)$.

Remarque : le théorème de Gelfand Naimark assure que toute C^*-algèbre commutative est isomorphe à une C^*-algèbre du type $C_0(X)$: les C^*-algèbres doivent être pensée comme des espaces localment compacts "non-commutatifs".

Pourquoi ? Pour étudier les mauvais quotients. Soit X un espace topologique localement compact et R une relation d'équivalence. $C^*R :=$ la C^*-algèbre engendrée par les opérateurs $(T_{xy})_{(x,y)\in R}$ de $l^2(X)\otimes H$.

Exemples :

- $X = \{p, q\}$, $R = X \times X$, $C^*R = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Le quotient classique est la sous-algèbre diagonale $\mathbb{C}I_2$.
- Feuilletage de Kronecker d'angle $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sur le tore $\mathbb{T}_2$
- Si Γ est un groupe discret, $\hat{\Gamma}$ l'espace des classes d'équivalences unitaires de représentations irréductibles muni de la topologie de Fell peut être non séparé. On peut même avoir $C_0(\hat{\Gamma}) \simeq \mathbb{C}$.

- Soit X un espace métrique propre.
- Pour notre problème, on voudrait identifier les points qui sont à distance plus petite que $R > 0$ et ensuite faire $R \to \infty$. On va construire un C^*-algèbre qui encode cela : l'algèbre de Roe C^*X.

Definition

Un espace de Hilbert H est un X-module s'il existe un $*$-morphisme $\phi : C_0(X) \to \mathcal{L}(H)$. On le dira standard si aucune fonction non nulle agit comme un opérateur compact, et non dégénéré si $\overline{C_0(X)H} = H$.

On notera $f\xi = \phi(f)\xi$.
Toutes les définitions que l'on donnera par la suite ne dépendent pas du X-module choisi s'il est standard et non dégénéré, on s'en fixera donc un une fois pour toute, que l'on note H_X.

Definition

- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_X)$ est dit de propagation $\leq R$ si, pour toute fonctions $f, g \in C_0(X)$ telle que $d(supp\ f, supp\ g) > R$, on a $fTg = 0$.
- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_X)$ est dit localement compact si pour toute $f \in C_0(X)$, fT et Tf sont des opérateurs compacts.
- on note $C_R[X] := \{T \in \mathcal{L}(H_X) : prop(T) \leq R, T \text{ loc. compact}\}$ et l'algèbre de Roe est

$$C^*X := \overline{\cup_{R>0} C_R[X]}^{||.||_{op}}$$

Si (M, g) est une variété reimannienne complète, et D un opérateur de Dirac généralisé sur M, alors pour toute $\phi \in C_0(M)$,

$$\phi(D) \in C^*M.$$

On a un foncteur de cohomologie sur les C^*-algèbre : la K-théorie.

- A une C^*-algèbre A on associe une suite de groupes abéliens $K_n(A)$.
- Tout $*$-morphisme $\varphi : A \to B$ entre 2 C^*-algèbres induit un homomorphisme
$$\varphi_* : K_*(A) \to K_*(B)$$
- Ces règles respectent la somme directe, la composition des morphismes, l'homotopie,...

Remarques :
$K_*(C_0(X)) \simeq K^*(X)$: K-théorie topologique d'Atiyah-Hirzebruch, i.e. le groupe généré par les classes d'équivalences de fibrés vectoriels.
Une description de ces groupes.
$K_0(A) = \{[p] - [q] : p, q \in \mathfrak{M}_n(A) \text{ projecteurs}, n \text{ assez grand}\}$
$K_1(A) = \{[u] : u \in \mathfrak{M}_n(A) \text{ unitaire}, n \text{ assez grand}\}$
Ces foncteurs sont les seuls : $K_{n+2}(A) \simeq K_n(A)$.

Théorème

Si $\quad 0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{p} A/J \longrightarrow 0 \quad$ est une suite exacte de C^*-algèbre, alors il existe des applications bords ∂ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc}
K_1(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xrightarrow{p_*} & K_1(A/J) \\
\partial \uparrow & & & & \downarrow \partial \\
K_0(A/J) & \xleftarrow[p_*]{} & K_0(A) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_0(J)
\end{array}$$

On va appliquer cela à l'extension

$$0 \longrightarrow C^*X \xrightarrow{\iota} D^*X \xrightarrow{p} D^*X/C^*X \longrightarrow 0$$

D^*X est définie comme l'algèbre des multiplicateurs de C^*X : les opérateurs $S \in \mathcal{L}(H)$ tels que $\forall T \in C^*X, ST \in C^*X$.

Application :

Soit (M, g) une variété riemannienne complète et D un opérateur de Dirac généralisé sur M. Si χ est une fonction de troncature, alors $\chi(D) \in D^*M$, et $\chi(D)^2 - 1 \in C^*M$, $\chi_1(D) - \chi_2(D) \in C^*M$: $\chi(D)$ est un unitaire de A/J dont la classe ne dépend pas de χ. On définit alors

$$Ind\ D = \partial[\chi(D)] \in K_0(C^*X)$$

Exemple :

Si M est compacte, $C^*M = \mathfrak{K}(H)$ et $D^*X = \mathcal{L}(H)$. Alors on retrouve la définition usuelle de l'indice.

But :donner une formule topologique pour $Ind\ D \in K_0(C^*X)$.
$K_*(C^*X)$: objet analytique, difficile à calculer, mais intéressant (réceptacle pour les indices)
On va construire

1. un objet géométrique $K_*(X)$, la K-homologie de X, objet de la topologie algébrique usuelle.
2. une application d'assemblage qui permet de passer de l'un à l'autre

$$A : K_*(X) \to K(C^*(X))$$

Definition (Module de Fredholm)

Un module pair (resp. impair) de Fredholm sur X est la donnée d'un X-module H, d'un opérateur U (resp. P) sur H tel que

- **cas pair :** $UU^* - 1$, $U^*U - 1$ et les commutateurs $[U, f]$ soit localement compacts, pour toute $f \in C_0(X)$.
- **cas impair :** $P^2 - P$, $P^* - P$ et les commutateurs $[P, f]$ soit localement compacts, pour toute $f \in C_0(X)$.

Il existe des relations d'équivalences (homotopies) sur les modules de Fredholm et une somme directe. Kasparov montre que la somme directe munit l'ensemble des classes d'équivalence d'une structure de groupe abélien, noté $K_0(X)$ pour le cas pair, et $K_1(X)$ pour le cas impair.

On peut montrer que $K_*(X) \simeq K_*(D^*X/C^*X)$. La suite exacte à six termes pour l'extension

$$0 \longrightarrow C^*X \xrightarrow{\iota} D^*X \xrightarrow{p} D^*X/C^*X \longrightarrow 0$$

devient alors

$$\begin{tikzcd}
K_1(C^*X) \arrow[r, "\iota_*"] & K_1(D^*X) \arrow[r, "p_*"] & K_1(X) \arrow[d, "A"] \\
K_0(X) \arrow[u, "A"] & K_0(D^*X) \arrow[l, "p_*"] & K_0(C^*X) \arrow[l, "\iota_*"]
\end{tikzcd}$$

et l'application d'assemblage correspond aux bords de cette suite.

Conjecture (Baum-Connes coarse)

Soit X un espace discret à géométrie bornée. Alors l'aplication d'assemblage

$$A : K_*(X) \to K_*(C^*X)$$

est un isomorphisme.

Théorème (Le principe de descente)

Soit Γ un groupe f.g. dont l'espace classifiant $B\Gamma$ est un CW-complexe fini. La conjecture de Baum Connes coarse pour Γ implique alors la conjecture de Novikov pour Γ.

Definition

- Si $\mathcal{U} = (U_j)$ est un recouvrement de X et $R > 0$, la R-multiplicité de $\mathcal{U}$ au point $x \in X$ est

$$\text{R-}\mathit{mult}_x\, \mathcal{U} = \mathit{Card}\{j : B(x,R) \cap U_j \neq \varnothing\}$$

- $\mathcal{U}$ est de R-multiplicité $\leq m$ si R-$\mathit{mult}_x \leq m, \forall x \in X$.
- X est de dimension asymptotique $\leq d$ si pour tout $R > 0$, il existe une recouvrement $\mathcal{C} = (U_j)$ uniformément borné et de R-multiplicité $\leq d+1$:

$$\text{diam } U_j \leq S \quad \text{R-}\mathit{mult}\mathcal{U} \leq d+1$$

Remarque : La dimension asymptotique est un analogue coarse de la dimension de recouvrement en topologie.

Exemples : Le groupes hyperboliques au sens de Gromov

G. Yu a démontré la conjecture de Baum-Connes coarse pour les espaces de dimension asymptotique finie. **A FINIR**