Astrofísica Computacional

Ejercicios 06. Volumenes Finitos. Advección multi-dimensional

A. Solución de la ecuación de advección lineal 1D.
La ecuación de advección lineal en una dimensión es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \ , \tag{1}$$

donde la velocidad de advección, v, es una constante.

1. Implemente un código que resuelva numéricamente esta ecuación utilizando el método de volumenes finitos. Considere como condición incial un perfíl gaussiano,

$$\Psi_0 = \psi(x, t = 0) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2}$$

con $x_0 = 30$, $\sigma = \sqrt{15}$ y un perfil sinusoidal

$$\Psi_0 = \psi(x, t = 0) = \sin\frac{4\pi x}{L}, \tag{3}$$

con $L = 100$. En los dos casos, considere una velocidad de advección constante positiva $v = 0.2$ y resuelva en el dominio espacial $x \in [0, 100]$ para un intervalo temporal con $t \in [0, 1000]$. Implemente condiciones de frontera periódicas en los dos casos.

B. Advección Multidimensional

La ecuación de advección lineal 2-dimensional es

$$\partial_t\psi + v^x\partial_x\psi + v^y\partial_y\psi = 0 \tag{4}$$

donde v^x y v^y son las componentes de la velocidad en las direcciones x y y, respectivamente.

1. Resuelva numéricamente la ecuación de advección 2-dimensional mediante el método de volumenes finitos considerando un perfíl inicial Gaussiano,

$$\Psi_0 = \psi(t = 0, x, y) = e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

donde $x_0 = 20$, $y_0 = 30$, $\sigma = \sqrt{20}$ y considerando $v^x = 0.8$, $v^y = 1.0$ en el dominio espacial $x \in [0, 100]$ y $y \in [0, 100]$. Además implemente la posibilidad de condiciones de frontera de gradiente nulo (outflow) y periodicas.