Astrofísica Computacional

Ejercicios 07. Ecuaciones Diferenciales Elípticas. La Ecuación de Poisson.

A. Solución de la ecuación de Poisson 2D.

La ecuación de Poisson en un espacio 2-dimensional para una función $\phi = \phi(x, y)$ es

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho \ , \tag{1}$$

donde $\rho = \rho(x, y)$ representa la función fuente.

1. Utilice el método de diferencias finitas descrito en clase para resolver la ecuación de Poisson 2D en la región entre $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, utilizando la función de fuente $\rho(x, y) = 2y$. Las condiciones de frontera (tipo Dirichlet) serán

$$\begin{cases} \phi(x,0) = & 0 \\ \phi(0,y) = & 0 \\ \phi(1,y) = & y \\ \phi(x,1) = & x. \end{cases} \tag{2}$$

   Para solucionar el problema, utilice una malla de discretización con $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{4}$ (claramente con este valor tan grande para el espacio entre nodos no se obtendrá un resultado mu preciso!).De esta forma, la malla tendrá 5×5 nodos localizados en las coordenadas

$$x_i = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right) \tag{3}$$

$$y_i = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right). \tag{4}$$

2. Utilice el métode de relajación SOR para resolver el mismo problema utilizando el parámetro $\omega = 1.4$, una tolerancia del orden de 10^{-8} y una malla con 100 nodos en cada dirección.

B. Potencial Gravitacional de una fuente esféricamente simétrica

Plantee y resuelva el problema de una partícula con simetría esférica y masa total M en el centro de un espacio bidimensional. Estime el potencial gravitacional que se genera en su entorno. Asuma la función de masa y las condiciones de frontera que considere adecuadas para encontrar la solución.