

Tarea 1 Astrofísica Computacional

Carlos A. del Valle U.*
Universidad Nacional de Colombia

En astronomía es necesario utilizar instrumentos como los telescopios para poder hacer observaciones. La habilidad de un telescopio para resolver detalles está limitada (entre otros muchos factores) por la difracción de luz. Para calcular la difracción del telescopio se hizo una implementación de la función de Bessel que tiene un error relativo del orden de 10^{-12} con respecto a la implementación de la librería estándar de Julia. Para la implementación se utilizó la regla de Simpson. También se calculó el patrón de difracción de algunos arreglos de rendijas según la función de transmisión de cada caso. Finalmente, se consiguió generalizar este cálculo al caso bidimensional y adaptar la regla de Simpson para calcular integrales dobles. Encontrando que el cálculo de integrales dobles es costoso computacionalmente, sin embargo, en algunos casos es posible reducir el cálculo de la integral doble al de dos integrales sencillas.

I. INTRODUCCIÓN

En astronomía las observaciones son importantes para corroborar modelos teóricos y para descubrir aspectos del universo. Como las distancias son tan grandes es necesario utilizar instrumentos como los telescopios que hagan posible realizar dichas observaciones. Es por esto que conocer las limitaciones de los instrumentos es importante. La habilidad de un telescopio para resolver detalles está limitada (entre otros muchos factores) por la difracción de luz. Para modelar este efecto, se puede asumir que la luz de una estrella es emitida a partir de un punto localizado en el infinito. Cuando esta radiación de longitud de onda λ pasa a través de la apertura circular de un telescopio (con un radio unitario) y se enfoca en el plano focal, no se produce un solo punto luminoso, sino que se registra un patrón circular de difracción que consiste de una región central luminosa rodeada de una serie de anillos concéntricos. La intensidad de la luz en el patrón de difracción está dado por la función

$$I(r) = \left(\frac{2J_1(kr)}{kr} \right)^2, \quad (1)$$

donde r es la distancia en el plano focal medida desde el centro del patrón,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2)$$

y $J_1(x)$ es una función de Bessel de orden 1. Las funciones de Bessel de orden $m \geq 0$ y entero, están dadas por la relación

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta, \quad (3)$$

para todo $x \geq 0$. Cuando x tiende a cero se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Debido a que el coseno es una función par en el intervalo de integración $[0, 2\pi]$, entonces la ecuación 3 se puede reescribir como

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta. \quad (5)$$

Matemáticamente, estas dos representaciones son equivalentes, sin embargo, en la sección III se va a hacer una comparación de ambas para ver cuál de las dos es más conveniente computacionalmente. Utilizando la regla de Simpson para calcular la integral, se hizo una implementación de la función de Bessel con la que se calculó el patrón de difracción de un telescopio.

Otro fenómeno ampliamente utilizado en observaciones es el análisis del patrón de difracción generado por un arreglo de rejillas. La difracción de un arreglo de rejillas está dada por la longitud de onda de la luz y por la función de transmisión $q(u)$, la cual describe la luz que es capaz de atravesar la rejilla. La intensidad registrada en la pantalla de observación está dada por

$$I(x) = \left| \int_{-w/2}^{w/2} \sqrt{q(u)} \exp\left(\frac{2\pi i x u}{\lambda f}\right) du \right|^2. \quad (6)$$

f es la distancia focal de la lente utilizada para proyectar sobre la pantalla de observación y w es la longitud de la región de la rejilla por la que la luz puede pasar. En la figura 1 se ve un esquema del montaje para ver el patrón generado por la rejilla.

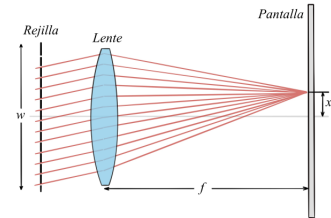


FIG. 1. Esquema del montaje para ver el patrón de difracción generado por la rejilla.

* cdelv@unal.edu.co

El cálculo del patrón de difracción se puede generalizar a dos dimensiones. Usando una transformada de Fourier bidimensional [1]. El patrón de difracción está dado por

$$I(x, y) = \left| \int_{-w_x/2}^{w_x/2} \int_{-w_y/2}^{w_y/2} \sqrt{q(u, v)} e^{\frac{2\pi i x u}{\lambda f}} e^{\frac{2\pi i y v}{\lambda f}} du dv \right|^2. \quad (7)$$

II. MÉTODOS COMPUTACIONALES

Para calcular numéricamente integrales en el computador existen algunos métodos. Uno de los más conocido es la regla del trapecio. Este consiste en aproximar el área de la función a integrar por trapecios y sumar el área de cada uno. La regla del trapecio está dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) [f(x_{i+1}) + f(x_i)]. \quad (8)$$

Un ejemplo gráfico de la integración por la regla del trapecio se puede ver en la figura 2.

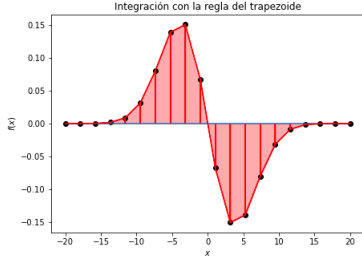


FIG. 2. Ilustración gráfica de la regla del trapecio.

El error de esta aproximación es proporcional a la longitud de la partición al cubo, $\mathcal{O}(\Delta x^3)$. Una aproximación más precisa es la regla de Simpson. Utilizando esta regla la integral está dada por

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]. \quad (9)$$

El error de esta aproximación es del orden de

$$\epsilon = \mathcal{O}(n\Delta x^5) = \mathcal{O}\left(\frac{(a-b)^5}{n^4}\right). \quad (10)$$

Un ejemplo gráfico de la regla de Simpson se puede ver en la figura 3.

Se puede generalizar la regla de Simpson para hacer integrales dobles de la siguiente manera

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx S_{mn} = \frac{(b-a)(d-c)}{9mn} \sum_{i,j=0,0}^{m,n} W_{i+1,j+1} f(x_i, y_j). \quad (11)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & \dots & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \dots & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \dots & 8 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 2 & 4 & \dots & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. RESULTADOS

Para calcular las funciones de Bessel y los patrones de difracción se utilizó el lenguaje de programación Julia [2]. Para resolver numéricamente las integrales se utilizó la regla de Simpson. Además, se hizo la implementación de la función de Bessel con la expresión de la ecuación 3 y con la ecuación 5. En la figura 4 se puede ver el error relativo y el error absoluto de ambas implementaciones

de la función de Bessel de orden 1 con respecto a la implementación de la librería estándar de Julia. Es claro que la implementación de la ecuación 5 es más estable.

En la región estable, el error absoluto es del orden de 10^{-15} y el relativo del orden de 10^{-12} para las dos implementaciones. Por lo que ambas implementaciones son adecuadas. La diferencia entre las dos funciones proviene de que la desratización es más grande en la que tiene un intervalo de integración de $[0, 2\pi]$. Al analizar la ecuación

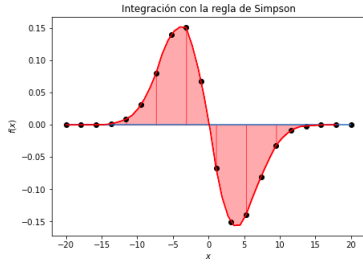


FIG. 3. Ilustración gráfica de la regla de Simpson.

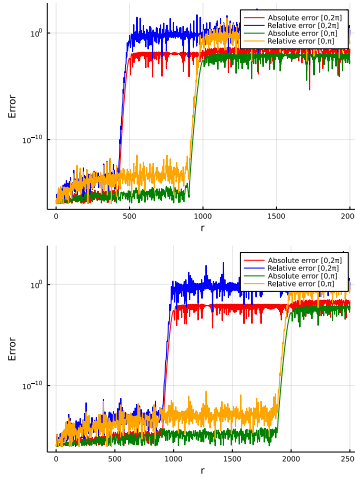


FIG. 4. Arriba, comparación del error de ambas implementaciones de la función de Bessel con $N = 1000$ pasos. Abajo lo mismo pero con $N = 2000$. El label $[0, \pi]$ y $[0, 2\pi]$ se refiere al intervalo de integración para identificar la ecuación de la cual proviene cada implementación. r es el número en el cual está evaluada la función de Bessel.

10 es evidente que este es el caso para un n constante. Al medir el tiempo de ejecución de ambas funciones 1000 veces se encontró que ambas tienen el mismo tiempo de ejecución promedio, 0.015 ± 0.003 ns.

Con la función de Bessel implementada se utilizó la ecuación 1 para graficar el patrón de intensidad con la función heatmap de la librería Plots de Julia. En la figura 5 se puede ver el patrón de difracción generado en un telescopio de radio unitario y luz con longitud de onda $\lambda = 500$ nm. La función heatmap de Julia tiene un error y no se puede graficar en escala logarítmica [3]. Entonces, se hizo la gráfica del logaritmo de los datos.

Luego, se calculó el patrón de difracción generado por 10 rendijas. La función de transmisión de cada rendija está dada por

$$q(u) = \sin^2(\alpha u) = \sin^2\left(\frac{\pi}{d}u\right). \quad (12)$$

d es la distancia entre los centros de cada rendija. La gráfica de la función de transmisión del arreglo de rendijas se puede ver en la figura 6

Utilizando la ecuación 6 se calculó el patrón de difracción generado por el arreglo. La distancia entre

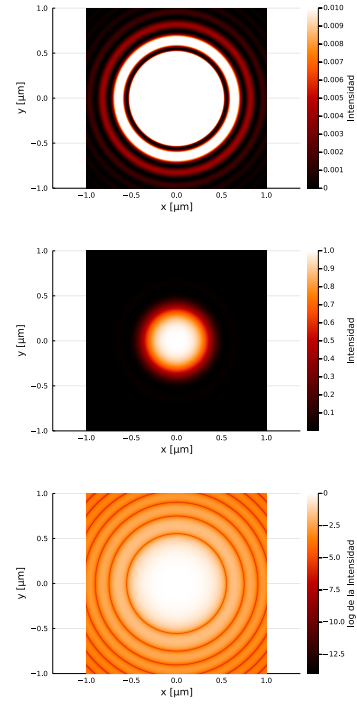


FIG. 5. Arriba, el patrón de difracción en un telescopio pero con el rango escalado para que los anillos sean más visibles. En el centro, el mismo patrón pero sin escalar. Abajo, el logaritmo del patrón.

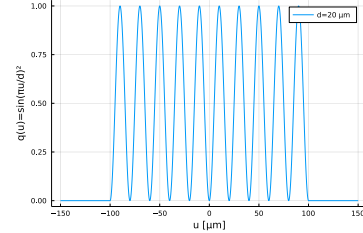


FIG. 6. Gráfica de la función de transmisión del arreglo de 10 rendijas.

rendijas es de $d = 20 \mu m$, la distancia focal de la lente es de $f = 1$ m y el ancho de la pantalla es de 10 cm. El intervalo de integración está definido por la función de transmisión. Es decir, w puede ser mayor o igual a $10d$. El motivo por el que el intervalo puede ser mayor es porque la función de transmisión es cero fuera del rango de las rendijas, por lo que una integral más allá del rango no aporta a la solución total. Sin embargo, como se mostró en la figura 4 entre menor sea el intervalo de integración, mayor será la precisión de la integral. Se usaron 1000 pasos para realizar la integral. Como la integral involucra una exponencial compleja, se utilizó el soporte nativo de Julia para hacer cálculos con números complejos y poder resolver la integral mediante la regla de Simpson. En la figura 7 se puede ver el patrón generado por las rendijas.

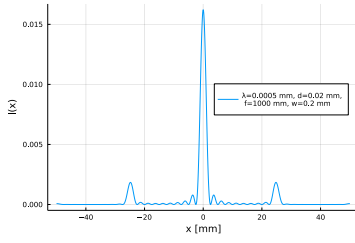


FIG. 7. Gráfica del patrón de difracción generado por el arreglo de 10 rendijas.

También se calculó el patrón de difracción de una rendija con una función de transmisión dada por

$$q(u) = \sin^2(\alpha u) \sin^2(\beta u), \quad (13)$$

donde $\beta = \frac{\alpha}{2}$ y $\alpha = \frac{\pi}{d}$ al igual que en el caso anterior. En la figura 8 se ve la gráfica de la función de transmisión.

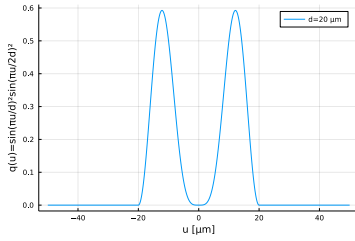


FIG. 8. Gráfica de la función de transmisión de una rendija.

El patrón de difracción generado por esta rendija se puede ver en la figura 9. Los parámetros son los mismos que en el caso anterior de las 10 rendijas, pero ahora el límite de integración está dado por $w = 4d$.

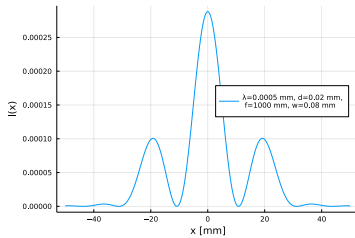


FIG. 9. Gráfica del patrón de difracción generado por la rendija.

También se calculó el patrón de difracción generado por dos rendijas cuadradas separadas $60 \mu m$. una de las rendijas tiene $10 \mu m$ de ancho y la otra $20 \mu m$. Las rendijas transmiten 100% de la luz incidente. La función de transmisión para este caso está dada por

$$q(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u \in [-5, 5], v \in [-5, 5]) \\ & \vee (u \in [40, 70], v \in [-10, 10]) \\ 0 & \text{O.C} \end{cases} \quad (14)$$

En la figura 10 se puede ver una gráfica de la función de transmisión.

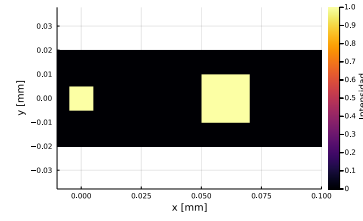


FIG. 10. Gráfica de la función de transmisión de las dos rendijas.

Para calcular el patrón de difracción generado por las dos rendijas se utilizó la ecuación 7. Sin embargo, utilizar la ecuación 11 para calcular numéricamente la integral es costoso computacionalmente. Es por esto que si se reemplaza la función de transmisión en la ecuación se obtienen que

$$I(x, y) = \left| \int_{-0.005}^{0.005} \exp\left(\frac{2\pi i x u}{\lambda f}\right) du \int_{-0.005}^{0.005} \exp\left(\frac{2\pi i y v}{\lambda f}\right) dv + \int_{0.05}^{0.07} \exp\left(\frac{2\pi i x u}{\lambda f}\right) du \int_{-0.01}^{0.01} \exp\left(\frac{2\pi i y v}{\lambda f}\right) dv \right|^2. \quad (15)$$

De esta manera no hay necesidad de calcular una integral doble sino solo cuatro integrales simples. Los límites de integración están en mm. En la figura 11 se puede ver el patrón de difracción calculado.

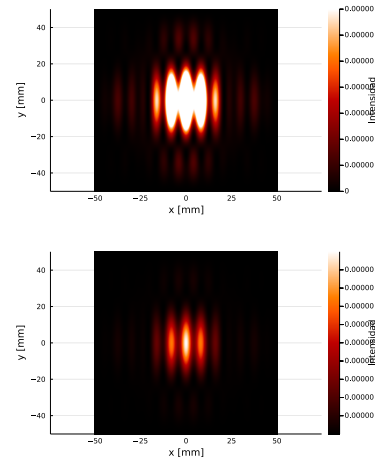


FIG. 11. Gráfica del patrón de difracción generado por las rendijas. Arriba, el patrón escalado para hacerlo más visible. Abajo, el mismo patrón sin escalar.

La función heatmap de Julia tiene otro bug a parte de no poder graficar en escala logarítmica. Las opciones para modificar la escala de la leyenda de la barra de color o la representación de los números (notación científica o exponencial) tampoco funciona. Es por esto que la escala en la imagen 11 no es visible.

IV. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados de la figura 4, utilizar la regla de Simpson para calcular funciones de Bessel es un método adecuado dentro de la región estable. Dentro de la región estable el error relativo es del orden de 10^{-12} y el error absoluto es del orden de 10^{-15} para la implementación de la ecuación 3 y para la ecuación 5. Incrementar el número de pasos de integración no mejora la precisión de la aproximación pero si aumenta la región en la que la función es estable. Aún así, la implementación de la ecuación 5 tiene una región estable más grande. Esto se atribuye a que el intervalo de integración es más pequeño. También se midió el tiempo de ejecución de las dos implementaciones, encontrando que las dos tienen el mismo tiempo promedio de ejecución, 0.015 ± 0.003 ns. Es por esto que se concluye que la implementación de la ecuación 5 es preferible sobre la implementación de la ecuación 3. Utilizando la implementación de la función de Bessel, se pudo calcular el patrón de difracción de un telescopio de radio unitario y luz incidente de longitud de onda $\lambda 500$ nm. En la figura 5 se puede ver el patrón obtenido, el cual concuerda con lo esperado. Debido a un error en la librería Plots de Julia no se pudo hacer la gráfica en escala logarítmica.

De acuerdo con los resultados de las figura 7 y 9 es posible calcular numéricamente el patrón de difracción generado por una rendija o un arreglo de rendijas a partir de su función de transmisión utilizando la ecuación 6 y la regla de Simpson. Además, si se define la función de transmisión como 0 fuera del rango de las rendijas, se puede calcular la ecuación 6 con un límite de integración

mayor o igual al rango de las rendijas, ya que evaluaciones de la integral fuera del rango no aportan al total. Sin embargo, según los resultados del error de la función de Bessel y la ecuación 10 del error de la regla de Simpson, entre más pequeño sea el intervalo de integración, mejor es la aproximación (para un número de pasos constante).

Teniendo en cuenta los resultados de la figura 11, es posible generalizar el cálculo de del patrón de difracción de un arreglo de rendijas a dos dimensiones usando la ecuación 7. Sin embargo, utilizar la regla de Simpson para una integral doble como se ve en la ecuación 11 es costoso computacionalmente. Dependiendo de la forma de la función de transmisión, es posible reducir la integral doble a el producto de dos integrales sencillas, reduciendo significativamente el coste computacional. Para el caso de dos rejillas cuadradas, una de lado $10 \mu m$ y la otra de lado $20 \mu m$ fue posible hacer esto como se puede ver en la ecuación 15. Concluyendo que en los casos en los que la integral se puede separar, la regla de Simpson es una opción eficiente.

El código con el que se hicieron todos los cálculos se puede encontrar en GitHub dentro de un Jupyter Notebook. Como está escrito en Julia para facilitar la visualización dentro del repositorio se incluyó un archivo llamado Visualizacion_Tarea.html en el que se puede ver una copia del cuaderno con las gráficas. Por algún motivo, desde GitHub las gráficas del cuaderno no son visibles. Para poder visualizar el archivo .html hay que descargarlo primero. De esta forma no es necesario instalar Julia y las respectivas librerías para ejecutar el cuaderno y poder ver las gráficas.

-
- [1] Yobani Mejía Barbosa. *Fundamentos de óptica. Curso introductorio*. Universidad Nacional de Colombia, 2021.
- [2] Jeff Bezanson, Alan Edelman, Stefan Karpinski, and Viral B Shah. Julia: A fresh approach to numerical comput-

- ing. *SIAM review*, 59(1):65–98, 2017.
- [3] Issue 1450 Julia Plots. <https://github.com/JuliaPlots/Makie.jl/issues/1405>, 2021.