**Astrofísica Computacional**

Ejercicios 03. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**A. Movimiento de un Cometa**

Existen muchos cometas que orbitan alrededor del Sol con trayectorias elípticas. De acuerdo con las leyes de Kepler, cuando el cometa se encuentra lejos del centro de fuerza, su movimiento es lento, mientras que al acercarse al Sol su velocidad es bastante grande. Este es un sistema físico que claramente debería ser solucionado con un método de paso adaptativo: en la región lejana se pueden utilizar pasos grandes mientras que en la región cercana se necesitan pasos muy cortos para tener un error pequeño.

Utilizando coordenadas cartesianas en el plano de movimiento, la dinámica del cometa bajo la influencia Solar está descrito por las ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{r^3} \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -GM\frac{y}{r^3} \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $G$ es la constante gravitacional de Newton y $M$ es la masa del Sol.

1. Escriba un programa para solucionar estas ecuaciones utilizando el método Runge-Kutta de orden 4 con paso fijo. Elija adecuadamente el sistema de unidades y escriba correspondientemente los valores de $M$ y $G$. Como condición inicial, suponga que en $t = 0$ el cometa se encuentra en las coordenadas

$$\begin{cases} x = & 4 \times 10^9 \text{ km} \\ y = & 0 \text{ km} \end{cases} \tag{3}$$

y se mueve con la velocidad

$$\begin{cases} v_x = & 0 \text{ m/s} \\ v_y = & 500 \text{ m/s.} \end{cases} \tag{4}$$

Implemente una función que calcule las cantidades conservadas del problema (energía y momento angular) para cada paso temporal. Escoja un tamaño de paso $\Delta t$ apropiado para poder calcular al menos 5 orbitas completas del cometa. Grafique la trayectoria y compruebe que durante las 5 orbitas se mantiene igual. Grafique el comportamiento de las cantidades conservadas en función del tiempo y verifique su valor durante toda la trayectoria obtenida.

2. Ahora escriba un programa que resuelva el problema utilizando uno de los métodos RK con paso adaptativo. Establezca la tolerancia de tal forma que se tenga una precisión de 1 km por año en la posición del cometa. Como se comparan los resultadosde los dos métodos? Realice un gráfico de $x$ vs. $t$ y otro de $y$ vs. $t$ localizando los puntos correspondientes a los calculos con paso adaptativo para confirmar que el tamaño cambia de acuerdo a la ubicación del cometa con respecto al Sol.

**B. Orbita Terrestre**

Las ecuaciones para el movimeinto de la Tiera alrededor del Sol son

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{5}$$

donde $G$ es la constante gravitacional de Newton y $M$ es la masa del Sol. Como es bien conocido, la órbita terrestre no es perfectamente circular. En el punto de máximo acercamiento al Sol (perihelio), la distancia entre los dos cuerpos es de $1{,}4710 \times 10^{11}$ m y su velocidad lineal es de $3{,}0287 \times 10^{4}$ m/s.

1. Escriba un programa que calcule la orbita terrestre utilizando uno de los métodos simplécticos con un paso temporal de 1hora. Grafique la trayectoria completando varias vueltas alrededor del Sol.

2. Incluya en el programa una función que calcule la energía potencial, la energía cinética y la energía total del sistema en cada paso y grafique sus resultados en los mismos ejes. Los resultados deben mostrar que las energías cinética y potencial cambian visiblemente a lo largo de la trayectoria mientras que la energía total debe permanecer aproximadamente constante.

3. Ahora grafique únicamente la energía total para comprobar que existe una pequeña variación en cada una de las orbitas. Sin embargo, el método simpléctico debe retornar al valor inicial después de cada vuelta.

4. Utilice el programa que escribió para verificar si puede describir el movimiento del planeta enano Plutón. Este objeto tiene una orbita mucho mas excentrica que la orbita terrestre, con una distancia al Sol en el perihelio de $4{,}4368 \times 10^{12}$ m y una velocidad lineal en este punto de $6{,}1218 \times 10^{3}$ m/s.

### C. Problema Gravitacional de los N-Cuerpos

Las ecuaciones de movimiento de N-partículas moviendose bajo su interacción gravitacional mutua se pueden escribir en la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -G m_i \sum_{j=1, i \neq j}^{N} \frac{m_j}{|\mathbf{x}_{ij}|^2} \hat{\mathbf{x}}_{ij}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ es el vector que apunta desde la partícula $j$ a la partícula $i$.

1. Implemente un programa que resuelva el problema diferencial de las ecuaciónes de movimiento (6 ) utilizando un método Runge-Kutta de orden 4. El algoritmo debe ser lo suficientemente general para poder incluír un número arbitrario de partículas y las condiciones iniciales deben ser leídas de un archivo.

2. Con el fin de probar el código implementado, utilice los datos iniciales para el sistema Sol-Tierra dados en el archivo *sun_earth.dat* y grafique el comportamiento del sistema a lo largo de algunos años. Comprube que la orbita no se comporta a la forma de una espiral.

3. Con el fin de asegurar la convergencia del algoritmo, implmente una rutina dentro del programa que calcule la energía total del sistema de N-partículas. Evalue el comportamiento de la energía a lo largo de la evolución y grafique para comprobar si existe algun cambio significativo. El comportamiento mejora o empeora al modificar el paso de la integración?

4. Ahora utilice su código para estudiar la evolución del sistema de 13 estrellas S0 moviendose alrededor del agujero negro supermasivo SgrA*, proporcionado en el archivo *S0stars.dat*. Verifique también el comportamiento de la energía del sistema de 13+1 partículas. Grafique las orbitas de estas estrellas a lo largo de un periodo de al menos 100 años.

5. Modifique el código para incorporar el método de Verlet para solucionar el problema y resuelva de nuevo para el sistema de las 13 estrellas S0 moviendose alrededor de SgrA*. Mejora el tiempo de computo utilizando este método? Se conserva la energía total del sistema?

**Nota:** En cada uno de los casos, verifique el sistema de unidades utilizado para las condiciones iniciales del sistema y realice las transformaciones del caso para que estos datos se ajusten a las unidades que utilice su código.