Astrofísica Computacional

Ejercicios 01. Métodos Numéricos Básicos

1 El Límite de Difracción para un Telescopio

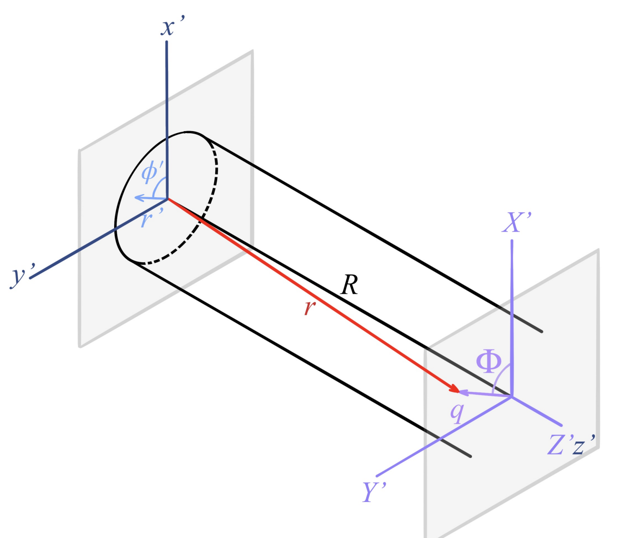
Los telescopios suelen tener aperturas circulares y por ello el estudio de la difracción bajo esta simetría es de particular interés.

Consideramos una onda plana incidiendo de forma normal a un agujero circular de radio a localizado en una superficie opaca. El objetivo es calcular la intensidad de la luz que se registra en una pantalla localizada a una distancia $R \gg a$. De esta forma, el campo eléctrico en la apertura es constante espacialmente,

$$E(t, x', y') = E_0 e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

De esta relación se tiene la transformada

$$E(t, k_x, k_y) = \frac{e^{ikr}}{\lambda r} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} E(t, x', y') e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx' dy'. \tag{2}$$



Utilizando las coordenadas r' y ϕ' en el plano donde se encuentra el agujero, definidas por

$$x' = r' \cos \phi' \tag{3}$$

$$y' = r' \sin \phi' \tag{4}$$

se tiene

$$dx' dy' = r dr' d\phi'. \tag{5}$$

Haciendo el cambio de vaiable, la integral toma la forma

$$E(t, k_x, k_y) = \frac{e^{ikr}}{\lambda r} \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} E(t, r', \phi') e^{-i(k_x r' \cos \phi' + k_y r' \sin \phi')}. \tag{6}$$

Al utilizar las coordenadas cartesianas X y Y en el plano de la pantalla, las componentes del vector momentum (vector de onda) en aproximación de ángulo pequeño se pueden escribir como

$$k_x \approx k\frac{X}{r} \tag{7}$$

$$k_y \approx k\frac{Y}{r} \tag{8}$$

e introduciendo las coordenadas q y Φ mediante las relaciones

$$X = q\cos\Phi \tag{9}$$

$$Y = q\sin\Phi \tag{10}$$

las componentes del vector de onda serán

$$k_x \approx k\frac{X}{r} = \frac{kq\cos\Phi}{r} \tag{11}$$

$$k_y \approx k\frac{Y}{r} = \frac{kq\sin\Phi}{r}. \tag{12}$$

Al reemplazar en la integral se tiene

$$E(t,q) = \frac{e^{ikr}}{\lambda r}\int_0^a r'dr'\int_0^{2\pi} E(t,r',\phi')\exp\left[-i(\frac{kqr'}{r}\cos\Phi\cos\phi' + \frac{kqr'}{r}\sin\Phi\sin\phi')\right] \tag{13}$$

$$E(t,q) = \frac{e^{ikr}}{\lambda r}\int_0^a dr'r'\int_0^{2\pi} E_0 e^{-i\omega t}\exp\left[-\frac{ikr'q}{r}(\cos\phi'\cos\Phi + \sin\phi'\sin\Phi)\right] \tag{14}$$

$$E(t,q) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{\lambda r}\int_0^a dr'r'\int_0^{2\pi} E_0\exp\left[-\frac{ikr'q}{r}\cos(\phi'-\Phi)\right]. \tag{15}$$

Debido a la simetría azimuthal (alrededor del eje z), la respuesta que estamos buscando debe ser independiente de la coordenada Φ en la pantalla. Por esta razón, podemos tomar $\Phi = 0$, sin perdida de generalidad y así, la integral con respecto a ϕ' que aparece en la anterior expresión se identifica con una de las funciones de Bessel,

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi}\exp\left[-\frac{ikr'q}{r}\cos\phi'\right]. \tag{16}$$

La función de Bessel de primera especie de orden m esta representada por la integral

$$J_m(u) = \frac{(i)^{-m}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(mv+u\cos v)}dv. \tag{17}$$

En particular, la función de Bessel de orden $m = 0$ es

$$J_0(u) = J_0(-u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(u\cos v)}dv. \tag{18}$$

Mediante comparación, podemos identificar $u = \frac{kr'q}{r}$ y con ello podemos concluir que

$$\mathcal{J} = 2\pi J_0\left(\frac{kr'q}{r}\right). \tag{19}$$

La expresión para el campo eléctrico se escribirá entonces en la forma

$$E(t,q) = \frac{2\pi E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\lambda r}\int_0^a dr'r'J_0\left(\frac{kr'q}{r}\right). \tag{20}$$

Cambiamos ahora la variable de integración mediante

$$v = \frac{kr'q}{r} \to dv = \frac{kq}{r}dr', \tag{21}$$

con lo que se obtiene

$$E(t,q) = \frac{2\pi E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\lambda r}\left(\frac{r}{kq}\right)^2\int_0^{\frac{kaq}{r}} vJ_0(v)dv. \tag{22}$$

Las funciones de Beseel satisfacen la relación de recurrencia

$$\frac{d}{du}\left[u^m J_m(u)\right] = u^m J_{m-1}(u) \tag{23}$$

que se puede expresar en la forma

$$u^m J_m(u) = \int_0^u v^m J_{m-1}(v)dv. \tag{24}$$

Utilizando esta recurrencia con $m = 1$, el campo eléctrico resulta en

$$E(t,q) = \frac{2\pi E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\lambda r}\left(\frac{r}{kq}\right)^2\left(\frac{kaq}{r}\right)J_1\left(\frac{kaq}{r}\right) \tag{25}$$

$$E(t,q) = \frac{\pi a^2 E_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\lambda r}\left(\frac{r}{kaq}\right)2J_1\left(\frac{kaq}{r}\right) \tag{26}$$

$$E(t,\theta) = \frac{AE_0 e^{i(kr-\omega t)}}{\lambda r}\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta} \tag{27}$$

donde se ha definido $\theta = \frac{q}{r}$. La intensidad de la radiación estará dada por

$$I(ka\theta) = \frac{c}{8\pi}E(t,\theta)E^*(t,\theta) \tag{28}$$

la cual da como resultado

$$I(ka\theta) = \frac{cA^2E_0}{8\pi\lambda^2r^2}\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2 \tag{29}$$

o mejor

$$I(k\rho) = \frac{cA^2E_0}{8\pi\lambda^2r^2}\left[\frac{2J_1(k\rho)}{k\rho}\right]^2 \tag{30}$$

donde se ha definido $\rho = a\theta$. Aún cuando esta expresión determina correctamente la intensidad para $\rho > 0$, el punto $\rho = 0$ esta indeterminado. Sin embargo, la relación de recurrencia para las funciones de Bessel permite escribir

$$uJ_0(u) = \frac{d}{du}\left[uJ_1(u)\right] = J_1(u) + u\frac{dJ_1(u)}{du} \tag{31}$$

$$J_0(u) = \frac{J_1(u)}{u} + \frac{dJ_1(u)}{du}. \tag{32}$$

Ya que $J_0(0) = 1$ y $J_1(0) = 0$, se tiene que

$$1 = \lim_{u\to 0}\frac{J_1(u)}{u} + \left.\frac{dJ_1}{du}\right|_{u=0}. \tag{33}$$

Utilizando la regla de L'Hopital en el primer término se tiene

$$1 = \lim_{u\to 0}\frac{\frac{dJ_1(u)}{du}}{1} + \left.\frac{dJ_1}{du}\right|_{u=0} \tag{34}$$

$$1 = 2\left.\frac{dJ_1}{du}\right|_{u=0} \tag{35}$$

y entonces

$$\lim_{u\to 0}\frac{J_1(u)}{u} = \left.\frac{dJ_1}{du}\right|_{u=0} = \frac{1}{2}. \tag{36}$$

Utilizando este resultado en la ecuación para la intensidad se puede evaluar

$$I(0) = \frac{cA^2E_0}{8\pi\lambda^2r^2}\left[2\frac{1}{2}\right]^2 \tag{37}$$

$$I(0) = \frac{cA^2E_0}{8\pi\lambda^2r^2}. \tag{38}$$

De esta forma obtenemos finalmente la función de intensidad para cualquier valor de ρ no-negativo,

$$I(ka\theta) = I(0)\left[\frac{2J_1(k\rho)}{k\rho}\right]^2. \tag{39}$$

Esta ecuación da como resultado el *patrón de Airy* para la difracción circular.