Astrofísica Computacional

Ejercicios 08. Un primer modelo de la Hidrodinámica.

En este ejercicio se solucionará el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \tag{2}$$

$$P = \kappa \rho^{\gamma} \tag{3}$$

donde ρ representa la densidad de masa, $\vec{v}$ la velocidad del fluido, P la presión interna, $\vec{g}$ es la aceleración gravitacional y con κ y γ dos constantes que definen la ecuación de estado del fluido descrito.

Considere el caso particular de una distribución de materia, descrita por estas ecuaciones, con la forma de un disco delgado (i.e. el problema será 2-dimensional) localizado en el plano ecuatorial alrededor de una fuente de gravedad puntual (i.e. se considerará simetría esferica). Introduzca coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) y reescriba las ecuaciones en términos de la densidad superficial de masa,

$$\Sigma(t, r, \phi) = \int_0^h \rho(t, r, \phi) dz, \tag{4}$$

con h el ancho del disco, el cual se considerará como una cantidad constante pequeña.

Utilizando las coordenadas cilíndricas, reescriba las ecuaciones como un sistema diferencial para las funciones:

- Densidad superficial: $\Sigma(t, r, \phi)$

- Componente radial de la velocidad $v^r(t, r, \phi)$

- Componente tangencial de la velocidad $v^\phi(t, r, \phi)$

- Presión: $P(t, r, \phi)$

La aceleración gravitacional debida al objeto central tendrá la forma

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \tag{5}$$

donde G es la constante gravitacional Newtoniana y M es la masa del cuerpo central.

Construya un código que resuelva numéricamente este problema para encontrar las cuatro funciones de interés bajo las siguientes condiciones:

$M = 10 M_\odot$

$\kappa = 1.2 \times 10^{15} \times (0.5)^\gamma$ dyn cm^{-2}(g^{-1} cm^3)$^\gamma$

$\gamma = \frac{5}{3}$

$h = 1$ km

El disco debe poseer un radio interno de $r_i = 180$ km y un radio externo de $r_f = 4000$ km.

Las condiciones iniciales para las funciones serán

$\Sigma(0, r, \phi) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-r_0}{\sigma}\right)^2}$

$v^r(0, r, \phi) = 0$

$v^\phi(0, r, \phi) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

donde $r_0 = 1500$ km y $\sigma = 600$ km.

Imponga condiciones de frontera de outflow (gradiente cero) tanto en r_i como en r_f.

Finalmente, evoluciones el sistema por un intervalo de tiempo adecuado y muestre gráficamente la dinámica de las funciones encontradas.

NOTA: De ser el caso, modifique los parámetros y condiciones propuestos para ver diferentes comportamientos.