Heinrich-Böll-Gymnasium Troisdorf

Heinrich-Böll-Gymnasium Troisdorf

Schuljahr 2022/2023

Die Mandelbrot-Menge

Mathematische Grundlagen und die visuelle Darstellung

verfasst von

Christoph Derszteler

Leistungskurs Mathematik

Betreuerin: Frau Dammers

Abgabetermin: 23.02.2023 12:00 Uhr CET

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Mandelbrot-Menge ist durch ihre hübschen, ansehnlichen Darstellungen verglichen mit anderen mathematischen Phänomenen recht bekannt. Dies liegt jedoch nicht nur an ihrer rein visuellen Attraktivität, sondern vielmehr auch an Benoît Mandelbrot, dem Entdecker dieser Menge. Dieser sorgte mit seinen vielen Vorträgen und Büchern dafür, dass sich Fraktale, vornehmlich die Mandelbrot-Menge, in der Bevölkerung weit verbreiteten[1].

Obwohl die Natur mit ihren fraktal-ähnlichen Formationen wie dem Aufbau einer Schneeflocke, dem Verlauf eines Flusses oder die Verteilung von Baumästen [nna] die Inspiration für Mandelbrot war [ZK14], so liegt der Ursprung dieser Arbeit in den für manchen simpler erscheinenden, viel moderneren aber dennoch genauso spannenden, computer-generierten Videos[2], die man im Internet finden kann. Mit unter anderem der Frage, wie diese Videos in Ansätzen generiert werden können und vielem weiteren beschäftigt sich diese Arbeit.

Dafür jedoch und zum vollen Verständnis der Mandelbrot-Menge ist Wissen außerhalb des regulären Schullehrplans erforderlich, das in Kapitel 2 näher erörtert wird. Kapitel 3 beschäftigt sich daraufhin mit der Mandelbrot-Menge selbst und insbesondere mit der Analyse visueller Darstellungen dieser. Abschließend befasst sich diese Arbeit in Kapitel 4 mit der praktischen Anwendung der Mandelbrot-Menge in Form von Bildgenerierungen mithilfe von Computern als auch anderweitigen Zusammenhänge zwischen dem theoretischen, mathematischen Konzept der Mandelbrot-Menge und der realen Welt.

[1] [IBM11], Vgl. letzten Absatz.

[2] Vgl. bspw. [Tow17].

2 Benötiges Vorwissen

Dieses Kapitel befasst sich mit den benötigten mathematischen Grundlagen, um der restlichen Arbeit mit reinem Schulwissen folgen zu können. Dafür wird zunächst das Konzept der komplexen Zahlen als auch der für den weiteren Verlauf benötigter Umgang mit diesen erörtert. Darauffolgend wird lediglich das Prinzip und die Eigenschaften von Iterationen grob anhand eines Beispiels skizziert.

2.1 Komplexe Zahlen

Unter den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ versteht man die nächst größere Zahlenmenge nach den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die zusätzlich zu einem Realteil auch einen sogenannten Imaginärteil besitzen. Sie werden im weiteren Verlauf in der kartesischen Form $z = a + bi$ dargestellt, wobei a der Realteil und bi der Imaginärteil ist. Der Buchstabe i steht hierbei für die imaginäre Einheit und ist definiert durch die Gleichung $i^2 = -1$.

2.1.1 Multiplikation & Addition von komplexen Zahlen

Viele Rechenoperationen mit komplexen Zahlen funktionieren anders, als man sie von den reellen oder natürlichen Zahlen gewohnt ist.

Zur Addition zwei komplexer Zahlen addiert man den Realteil und den Imaginärteil getrennt voneinander und fügt diesen danach wieder zusammen [Lic02]: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$.

Um komplexe Zahlen zu multiplizieren, wendet man das Distributivgesetz an, indem man den zweiten Faktor ebenfalls in seinen Realteil und seinen Imaginärteil trennt und diese jeweils einzeln mit dem ersten Faktor multipliziert [Lic02]. Die zwei entstehenden Produkte lassen sich dann wie oben beschrieben addieren. Bei der Multiplikation mit dem Imaginärteil multipliziert man unter anderem zwei imaginäre Elemente miteinander. Da $i^2 = -1$ gilt, entsteht durch diese Multiplikation ein negatives, aber reales Produkt. Wie in A.1 gezeigt, gilt somit:

$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$

Das für die Mandelbrot-Menge besonders wichtige Quadrieren von komplexen Zahlen lässt sich mit der kartesischen Form ebenfalls herleiten [A.2]. Für eine gegeben, zu quadrierende, komplexe Zahl $a + bi$ gilt somit: $a^2 - b^2 + 2abi$

Ein illustriertes Beispiel soll beide Rechenoperationen veranschaulichen:

$$\begin{aligned} &(-3 + 6i)^2 + (7 + (-4i)) \\ &= ((-3 \cdot (-3)) - (6 \cdot 6) + ((6 \cdot (-3)) + (-3 \cdot 6))i) + (7 + (-4i)) \\ &= (-27 + (-36i)) + (7 + (-4i)) \\ &= -20 + (-40i) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Graphische Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen können wie auch Zahlen anderer Zahlenmengen grafisch dargestellt werden. Da komplexe Zahlen jedoch sowohl aus einem Realteil und einem Imaginärteil bestehen, reicht eine Gerade nicht aus, um diese darzustellen, stattdessen braucht man eine **Ebene**[3]. Diese komplexe Zahlenebene teilt den Realteil auf der waagerechten Achse und den Imaginärteil auf die horizontale Achse auf. Eine komplexe Zahl $z_1 = a + bi$ besitzt somit die Koordinaten $P(a|b)$.

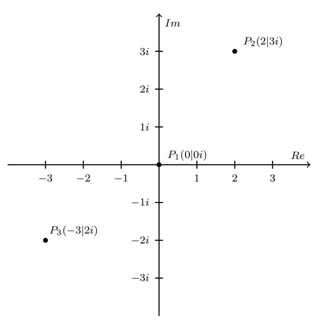

Abbildung 1: Komplexe Ebene mit den Punkten P_1, P_2 und P_3

[3]Ebenfalls unter komplexer Zahlenebene und gaußscher Zahlenebene zu finden.

2.2 Iterationen

Iterationen beziehen sich in der Mathematik auf das Wiederholen einer bestimmten Prozedur beziehungsweise in diesem Fall einer Berechnung. Bei Funktionsiterationen iteriert (also wiederholt) man die Berechnung eines Funktionswerts mit dem Funktionsargument des vorherigen Funktionswerts: $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2)$, $\cdots$, $z_n = f(z_{n-1})$

Eine wichtige Eigenschaft von Iterationen ist das Verhalten für $z \to \infty$. Dabei wird unterschieden, ob die Iteration gegen Unendlich verläuft („explodiert“) oder sich einem bestimmten Punkt, oftmals Null, annähert. Letzteres bezeichnet man als einen beschränkten Verlauf.

Dieser Verlauf ist bei Iterationen, die ihre Ausgangswerte als neue Eingangswerte benutzen, schwer vorauszusagen. Dabei können ähnlich Funktionen bereits sehr unterschiedliche Verhalten aufweisen. Die Funktionen $f(z) = z^2 + c$ mit $z_0 = 0$ stellt beispielhaft die unterschiedlichen Verlaufstypen für $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$ dar:

	Parameter für $f(z)$	
Iteration	$c_1 = 1$	$c_2 = -1$
1.	1	-1
2.	2	0
3.	5	-1
4.	26	0
5.	667	-1
6.	$\approx 1.9 \times 10^{11}$	0
7.	$\approx 3.9 \times 10^{22}$	-1

3 Literatur und Quellen

[IBM11] IBM. *Fractal Geometry*. 21. Mai 2011. URL: https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/ (besucht am 16. 01. 2023).

[Lic02] Klaus Lichtenegger. *Komplexe Analysis*. Mai 2002, S. 2–3. URL: https://www.math.tugraz.at/~lichtenegger/kompan.pdf (besucht am 16. 01. 2023).

[nna] Mike (nnart). *Fractals in Nature*. How Do Fractals Appear in Nature? 10 Outstanding Examples. URL: https://nnart.org/fractals-in-nature/ (besucht am 16. 01. 2023).

[Tow17] Maths Town. *Eye of the Universe*. Eye of the Universe - Mandelbrot Fractal Zoom (e1091) (4k 60fps). 28. Aug. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=pCpLWbHVNhk (besucht am 16. 01. 2023).

[Tro] Heinrich Böll Gymnasium Troisdorf. *HBG Logo*. In der Titelseite zu finden. URL: https://www.hbgtroisdorf.de/images/hbg_logo_web.png (besucht am 18. 12. 2022).

[ZK14] Iris Zink und Hanna Kotarba. *Der kosmische Code*. Der kosmische Code. 28. Sep. 2014. URL: https://www.zdf.de/dokumentation/terra-x/faszination-universum-der-kosmische-code-mit-harald-lesch-100.html (besucht am 16. 01. 2023).

4 Anhang

A.1:

$$\begin{aligned} &(a+bi)\cdot(c+di) \\ &= c(a+bi)+di(a+bi) \\ &= ac+bci+adi+bdi^2 \\ &= ac+bci+adi - bd \\ &= ac-bd+(bc+ad)i \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.2:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= z_1\cdot z_1 \\ &= (a+bi)\cdot(a+bi) \\ &= a\cdot(a+bi)+bi\cdot(a+bi) \\ &= a^2+abi+abi-b^2 \\ &= a^2-b^2+2abi \end{aligned} \tag{A.2}$$