

Heinrich-Böll-Gymnasium Troisdorf

Schuljahr 2022/2023

Die Mandelbrot-Menge

Mathematische Grundlagen und die visuelle Darstellung

verfasst von

Christoph Derszteler

Leistungskurs Mathematik

Betreuerin: Frau Dammers

Abgabetermin: 23.02.2023 12:00 Uhr CET

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Benötigtes Vorwissen	4
2.1	Komplexe Zahlen	4
2.1.1	Multiplikation & Addition von komplexen Zahlen	4
2.1.2	Graphische Darstellung komplexer Zahlen	5
2.2	Iterationen	6
3	Theoretische Grundlage	8
3.1	Mathematische Definition	8
4	Literatur und Quellen	10
5	Anhang	12

1 Einleitung

Die Mandelbrot-Menge ist durch ihre hübschen, ansehnlichen Darstellungen verglichen mit anderen mathematischen Phänomenen recht bekannt. Dies liegt jedoch nicht nur an ihrer rein visuellen Attraktivität, sondern vielmehr auch an Benoît Mandelbrot[A.3], dem Entdecker dieser Menge. Dieser sorgte mit seinen vielen Vorträgen und Büchern dafür, dass sich Fraktale, also geometrische Figuren mit gebrochener Dimension¹, vornehmlich die Mandelbrot-Menge, in der Bevölkerung weit verbreiteten².

Obwohl die Natur mit ihren fraktal-ähnlichen Formationen wie dem Aufbau einer Schneeflocke, dem Verlauf eines Flusses oder die Verteilung von Baumästen [nna] die Inspiration für Mandelbrot war [ZK14], so liegt der Ursprung dieser Arbeit in den für manchen simpler erscheinenden, viel moderneren aber dennoch genauso spannenden, computer-generierten Videos³, die man im Internet finden kann. Mit unter anderem der Frage, wie diese Videos in Ansätzen generiert werden können und vielem weiteren beschäftigt sich diese Arbeit.

Dafür jedoch und zum vollen Verständnis der Mandelbrot-Menge ist Grundlagenwissen gewisser Themengebiete erforderlich, das in Kapitel 2 näher erörtert wird. Kapitel 3 beschäftigt sich daraufhin mit der Mandelbrot-Menge selbst und insbesondere mit der Analyse visueller Darstellungen dieser. Abschließend befasst sich diese Arbeit in Kapitel 4 mit der praktischen Anwendung der Mandelbrot-Menge in Form von Bildgenerierungen mithilfe von Computern als auch anderweitigen Zusammenhänge zwischen dem theoretischen, mathematischen Konzept der Mandelbrot-Menge und der realen Welt.

¹Im Vergleich zu zum Beispiel einem zwei-dimensionalen Viereck

²[IBM11], Vgl. letzten Absatz.

³Vgl. bspw. [Tow17].

2 Benötigtes Vorwissen

Dieses Kapitel befasst sich mit den benötigten mathematischen Grundlagen, um der restlichen Arbeit folgen zu können. Dafür wird zunächst das Konzept der komplexen Zahlen als auch der für den weiteren Verlauf benötigter Umgang mit diesen erörtert. Daraufgehend wird lediglich das Prinzip und die Eigenschaften von Iterationen grob anhand eines Beispiels skizziert.

2.1 Komplexe Zahlen

Unter den komplexen Zahlen \mathbb{C} versteht man die nächst größere Zahlenmenge nach den reellen Zahlen \mathbb{R} , die zusätzlich zu einem Realteil auch einen sogenannten Imaginärteil besitzen. Sie werden im weiteren Verlauf in der kartesischen Form $z = a + bi$ dargestellt, wobei a der Realteil und bi der Imaginärteil ist. Der Buchstabe i steht hierbei für die imaginäre Einheit und ist definiert durch die Gleichung $i^2 = -1$.

2.1.1 Multiplikation & Addition von komplexen Zahlen

Viele Rechenoperationen mit komplexen Zahlen funktionieren anders, als man sie von den reellen oder natürlichen Zahlen gewohnt ist.

Zur Addition zwei komplexer Zahlen addiert man den Realteil und den Imaginärteil getrennt voneinander und fügt diesen danach wieder zusammen [Lic02, S. 2]: $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$.

Um komplexe Zahlen zu multiplizieren, wendet man das Distributivgesetz an, indem man den zweiten Faktor ebenfalls in seinen Realteil und seinen Imaginärteil trennt und diese jeweils einzeln mit dem ersten Faktor multipliziert [Lic02, S. 2f.]. Die zwei entstehenden Produkte lassen sich dann wie oben beschrieben addieren. Bei der Multiplikation mit dem Imaginärteil multipliziert man unter anderem zwei imaginäre Elemente miteinander. Da $i^2 = -1$ gilt, entsteht durch diese Multiplikation ein negatives, aber reales Produkt. Wie in A.1 gezeigt, gilt

somit: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$

Das für die Mandelbrot-Menge besonders wichtige Quadrieren von komplexen Zahlen lässt sich mit der kartesischen Form ebenfalls herleiten [A.2]. Für eine gegebene, zu quadrierende, komplexe Zahl $a + bi$ gilt somit: $a^2 - b^2 + 2abi$

Ein illustriertes Beispiel soll beide Rechenoperationen veranschaulichen:

$$\begin{aligned}
 & (-3 + 6i)^2 + (7 + (-4i)) \\
 = & ((-3 \cdot (-3)) - (6 \cdot 6) + ((6 \cdot (-3)) + (-3 \cdot 6))i) + (7 + (-4i)) \\
 = & (-27 + (-36i)) + (7 + (-4i)) \\
 = & -20 + (-40i)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Graphische Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen können wie auch Zahlen anderer Zahlenmengen grafisch dargestellt werden. Da komplexe Zahlen jedoch sowohl aus einem Realteil und einem Imaginärteil bestehen, reicht eine Gerade nicht aus, um diese darzustellen, stattdessen braucht man eine **Ebene**⁴. Diese komplexe Zahlenebene teilt den Realteil auf der waagerechten Achse und den Imaginärteil auf die horizontale Achse auf. Eine komplexe Zahl $z_1 = a + bi$ besitzt somit die Koordinaten $P(a|b)$.

Eine komplexe Zahl lässt sich wie auch eine reelle Zahl absolut betrachten, wobei dieser absolute Wert ebenfalls als einen Abstand zum Ursprung zu betrachten ist [Lic02, S. 3]. Aufgrund dessen, dass eine komplexe Zahl aus zwei Komponenten besteht, lässt sich der Abstand über den Satz des Pythagoras berechnen:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{beziehungsweise} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.2}$$

⁴Ebenfalls unter komplexer Zahlenebene und gaußscher Zahlenebene zu finden.

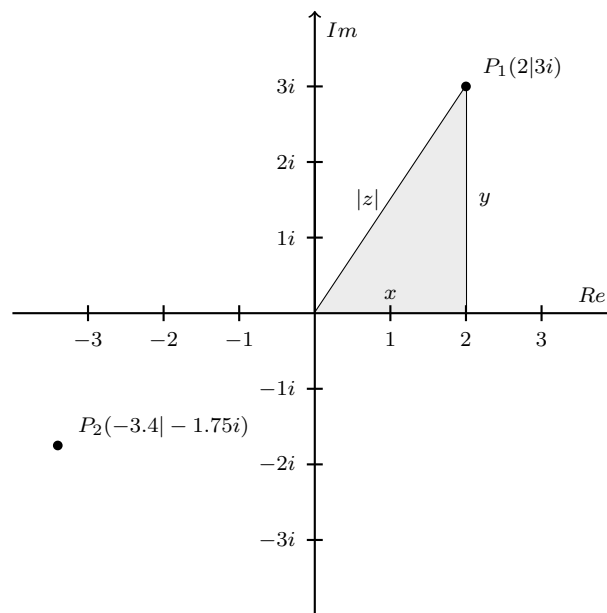


Abbildung 1: Komplexe Ebene mit den Punkten P_1 , und P_2 und dem absoluten Wert $|z|$ vom Punkt P_1

2.2 Iterationen

Iterationen beziehen sich in der Mathematik auf das Wiederholen einer bestimmten Prozedur beziehungsweise in diesem Fall einer Berechnung. Bei Funktionsiterationen iteriert (also wiederholt) man die Berechnung eines Funktionswerts mit dem Funktionsargument des vorherigen Funktionswerts: $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2)$, \dots , $z_n = f(z_{n-1})$

Eine wichtige Eigenschaft von Iterationen ist die Entwicklung von z für $z \rightarrow \infty$. Dabei wird unterschieden, ob die Iteration divergent ist, das heißt gegen Unendlich verläuft („explodiert“), oder sich einem bestimmten Punkt, annähert. Letzteres bezeichnet man als einen beschränkten Verlauf.

Dieser Verlauf ist bei Iterationen, die ihre Ausgangswerte als neue Eingangswerte benutzen, schwer vorausszusagen. Dabei können ähnlich Funktionen bereits sehr unterschiedliche Entwicklungen aufweisen. Die Funktionen $f(z) = z^2 +$

c mit $z_0 = 0$ stellt beispielhaft die unterschiedlichen Verlaufstypen für $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$ dar:

Iteration	Parameter für $f(z)$	
	$c_1 = 1$	$c_2 = -1$
1.	1	-1
2.	2	0
3.	5	-1
4.	26	0
5.	667	-1
6.	$\approx 1.9 \times 10^{11}$	0
7.	$\approx 3.9 \times 10^{22}$	-1

Tabelle 1: $f(z)$ verläuft mit c_1 divergent, hingegen ist der Verlauf für $f(z)$ mit c_2 beschränkt.

3 Theoretische Grundlage

Nachdem im vorherigen Kapitel die Grundlagen für die Mandelbrot-Menge erklärt wurden, befasst sich dieses Kapitel nun mit der rein mathematischen Betrachtung dieser Menge, indem diese zunächst fachlich korrekt definiert und im Anschluss grafisch analysiert wird.

3.1 Mathematische Definition

Die Mandelbrot-Menge befasst sich mit der bereits im vorherigen Kapitel vorgestellten, komplexen Iteration $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $z_0 = 0$ und einem variablen Wert für c [Sch17, S.25]. Die Mandelbrot-Menge enthält dabei alle komplexen Werte für c , mit denen die oben angegebene Iteration beschränkt ist. Mathematisch lässt sich die Menge iterativ wie folgt definiert:

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : |f_c^n(z)| \leq 2; n \rightarrow \infty\} \quad \text{mit} \quad f_c(z) = z^2 + c; z, c \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

Wie in der Definition zu sehen, wird der Funktionswert der gegen Unendlich strebenden n -ten Iteration absolut betrachtet, da die Funktion symmetrisch zur reellen Achse ist.

Ebenfalls zu betrachten ist die Einschränkung auf Funktionswerte ≤ 2 . Dies hängt mit einem Kreis, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Radius 2 beträgt, zusammen. Für alle Funktionswerte, die sich in einer Iteration ergeben und außerhalb dieses Radius beziehungsweise dem Kreis liegen, lässt das jeweilige c aus der Mandelbrot-Menge ausschließen [MH97]. Obwohl der gesamte Beweis dessen den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, so soll dennoch angemerkt werden, dass mithilfe der Dreiecksungleichung und vollständiger Induktion unter der Voraussetzung von $|z_n| > 2$ und $|z_n| > |c|$ folgende Ungleichung, die eine divergente Entwicklung repräsentiert, $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ bewiesen werden kann, wobei zusätzlich

gezeigt werden kann, dass für alle Werte von $|c| > 2$ nach spätestens 2 Iterationen gilt: $z_{n=2} = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| > 2$.

4 Literatur und Quellen

- [Gai97] Raphael Gaillarde. *Benoit Mandelbrot, mathematician, inventor of fractals*. 9. Feb. 1997. URL: <https://www.gettyimages.co.uk/detail/news-photo/benoit-mandelbrot-mathematician-inventor-of-fractals-in-news-photo/110137025> (besucht am 22.01.2023).
- [IBM11] IBM. *Fractal Geometry*. 21. Mai 2011. URL: <https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/> (besucht am 16.01.2023).
- [Lic02] Klaus Lichtenegger. *Komplexe Analysis*. Mai 2002. URL: <https://www.math.tugraz.at/~lichtenegger/kompan.pdf> (besucht am 16.01.2023).
- [MH97] Robert P. Munafo und Mike Hurley. “Escape Radius”. In: (19. Sep. 1997). URL: <http://mrob.com/pub/muency/escaperadius.html> (besucht am 24.01.2023).
- [nna] Mike (nnart). *Fractals in Nature*. How Do Fractals Appear in Nature? 10 Outstanding Examples. URL: <https://nnart.org/fractals-in-nature/> (besucht am 16.01.2023).
- [Sch17] Petra Schuh. “Fraktale Geometrie und Möglichkeiten der Umsetzung im Mathematik-Unterricht der Sekundarstufe I und II sowie im Wahlpflichtfach”. Diplomarbeit. Wien, 2017. 86 S. URL: <https://theses.univie.ac.at/detail/43454> (besucht am 22.01.2023).
- [Tow17] Maths Town. *Eye of the Universe*. Eye of the Universe - Mandelbrot Fractal Zoom (e1091) (4k 60fps). 28. Aug. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=pCpLWbHVNhk> (besucht am 16.01.2023).
- [Tro] Heinrich Böll Gymnasium Troisdorf. *HBG Logo*. In der Titelseite zu finden. URL: https://www.hbgtroisdorf.de/images/hbg_logo_web.png (besucht am 18.12.2022).

-
- [ZK14] Iris Zink und Hanna Kotarba. *Der kosmische Code*. Der kosmische Code. 28. Sep. 2014. URL: <https://www.zdf.de/dokumentation/terra-x/faszination-universum-der-kosmische-code-mit-harald-lesch-100.html> (besucht am 16.01.2023).

5 Anhang

A.1:

$$\begin{aligned} & (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= c(a + bi) + di(a + bi) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac + bci + adi - bd \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.2:

$$\begin{aligned} & z_1^2 = z_1 \cdot z_1 \\ &= (a + bi) \cdot (a + bi) \\ &= a \cdot (a + bi) + bi \cdot (a + bi) \\ &= a^2 + abi + abi - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3:



Abbildung 2: Benoît Mandelbrot 1997 in Frankreich [Gai97]