

“

Heinrich Böll
Heinrich-Böll-Gymnasium Troisdorf

Heinrich-Böll-Gymnasium Troisdorf

Schuljahr 2022/2023

Die Mandelbrot-Menge

Mathematische Grundlagen und die visuelle Darstellung

verfasst von

Christoph Derszteler

Leistungskurs Mathematik

Betreuerin: Frau Dammers

Abgabetermin: 23.02.2023 12:00 Uhr CET

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Theoretische Grundlage	4
2.1 Komplexe Zahlen	4
2.1.1 Multiplikation & Addition von komplexen Zahlen	4
2.1.2 Graphische Darstellung komplexer Zahlen	5
2.2 Iterationen	6
3 Mathematische Betrachtung	8
3.1 Definition	8
3.2 Grafische Analyse	9
3.2.1 Farbbedeutung	10
3.2.2 Exemplarische Kartografierung	11
4 Praktische Anwendung	13
4.1 Korrelation zwischen Informationstechnik und Mathematik	13
4.2 Farbkodierung	14
5 Fazit	16
6 Literatur und Quellen	17
7 Selbstständigkeitserklärung	21
A Anhang	22

1 Einleitung

Die Mandelbrot-Menge ist durch ihre hübschen, ansehnlichen Darstellungen, verglichen mit anderen mathematischen Phänomenen, recht bekannt. Dies liegt nicht allein an ihrer visuellen Attraktivität, sondern vielmehr auch an Benoît Mandelbrot [A.1], dem Entdecker dieser Menge. Dieser sorgte mit seinen häufigen Vorträgen und Büchern dafür, dass sich Fraktale, also selbstähnliche¹, geometrische Figuren mit gebrochener Dimension², vornehmlich die Mandelbrot-Menge, in der Bevölkerung weit verbreiteten [IBM11, Vgl. letzten Absatz].

Obwohl die Natur mit ihren fraktal-ähnlichen Formationen wie dem Aufbau einer Schneeflocke, dem Verlauf eines Flusses oder die Verteilung von Baumästen [nna] die Inspiration für Mandelbrot war [ZK14], so liegt der Ursprung dieser Arbeit in den für manchen simpler erscheinenden, viel moderneren aber dennoch genauso spannenden, computer-generierten Videos³, die man im Internet finden kann. Mit unter anderem der Frage, wie diese Videos in Ansätzen generiert werden können, und vielem weiteren beschäftigt sich diese Arbeit.

Dafür und zum vollen Verständnis der Mandelbrot-Menge ist Grundlagenwissen gewisser Themengebiete erforderlich, das in Kapitel 2 näher erörtert wird. Kapitel 3 beschäftigt sich daraufhin mit der mathematischen Betrachtung der Mandelbrot-Menge und insbesondere mit der Analyse visueller Darstellungen dieser. Abschließend befasst sich diese Arbeit in Kapitel 4 mit der praktischen Anwendung der Mandelbrot-Menge in Form von Bildgenerierungen mithilfe von Computern.

¹Das heißt, sich selbst wiederholend oder in ähnlicher Form erneut aufkommend.

²Im Vergleich zu zum Beispiel einem zwei-dimensionalen Viereck.

³Vgl. bspw. [Tow17].

2 Theoretische Grundlage

Dieses Kapitel befasst sich mit den benötigten theoretischen Grundlagen, um der restlichen Arbeit folgen zu können. Dafür wird zunächst das Konzept der komplexen Zahlen als auch der für den weiteren Verlauf benötigter Umgang mit diesen erörtert. Darauffolgend wird das Prinzip und die Eigenschaften von Iterationen grob anhand eines Beispiels skizziert.

2.1 Komplexe Zahlen

Unter den komplexen Zahlen \mathbb{C} versteht man die nächst größere Zahlenmenge nach den reellen Zahlen \mathbb{R} , die zusätzlich zu einem Realteil auch einen sogenannten Imaginärteil besitzen. Sie werden im weiteren Verlauf in der kartesischen Form $z = a + bi$ dargestellt, wobei a der Realteil und bi der Imaginärteil ist. Der Buchstabe i steht hierbei für die imaginäre Einheit und ist definiert durch die Gleichung $i^2 = -1$.

2.1.1 Multiplikation & Addition von komplexen Zahlen

Viele Rechenoperationen mit komplexen Zahlen funktionieren anders, als man sie von den reellen oder natürlichen Zahlen gewohnt ist. Im Folgenden werden zwei dieser unterschiedlich funktionierenden Operationen vorgestellt:

Zur Addition zweier komplexer Zahlen addiert man den Realteil und den Imaginärteil getrennt voneinander und fügt diesen danach wieder zusammen [Lic02, S. 2]: $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$.

Um komplexe Zahlen zu multiplizieren, wendet man das Distributivgesetz an, indem man den zweiten Faktor ebenfalls in seinen Realteil und seinen Imaginärteil unterteilt und diese jeweils einzeln mit dem ersten Faktor multipliziert [Lic02, S. 2f.]. Die zwei entstehenden Produkte lassen sich dann wie oben beschrieben addieren. Bei der Multiplikation mit dem Imaginärteil multipliziert man unter anderem zwei imaginäre Elemente miteinander. Da $i^2 = -1$ gilt, entsteht durch

diese Multiplikation ein negatives, aber reales Produkt. Wie in A.2 gezeigt, gilt somit: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$

Das in der Mandelbrot-Menge häufig angewandte Quadrieren von komplexen Zahlen lässt sich mit der kartesischen Form ebenfalls herleiten [A.3]. Für eine gegebene, zu quadrierende, komplexe Zahl $a+bi$ gilt somit: $(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Ein illustriertes Beispiel soll beide Rechenoperationen veranschaulichen:

$$\begin{aligned}
 & (-3 + 6i)^2 + (7 + (-4i)) \\
 &= ((-3 \cdot (-3)) - (6 \cdot 6) + ((6 \cdot (-3)) + (-3 \cdot 6))i) + (7 + (-4i)) \\
 &= (-27 + (-36i)) + (7 + (-4i)) \\
 &= -20 + (-40i)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Graphische Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen können wie Zahlen anderer Zahlenmengen grafisch dargestellt werden. Da komplexe Zahlen sowohl aus einem Realteil als auch aus einem Imaginärteil bestehen, reicht eine Achse nicht aus, um diese darzustellen; stattdessen braucht man eine Ebene⁴. Diese komplexe Zahlenebene teilt den Realteil auf die waagerechte Achse und den Imaginärteil auf die horizontale Achse auf. Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ besitzt somit die Koordinaten $P(a|b)$.

Zusätzlich lässt sich eine komplexe Zahl wie eine reelle Zahl absolut betrachten, wobei dieser absolute Wert ebenfalls als der Abstand zum Ursprung zu betrachten ist [Lic02, S. 3]. Aufgrund dessen, dass eine komplexe Zahl aus zwei Komponenten besteht, lässt sich der Abstand über den Satz des Pythagoras berechnen:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \quad \text{beziehungsweise} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.2}$$

⁴Ebenfalls unter komplexer Zahlenebene und gaußsche Zahlenebene zu finden.

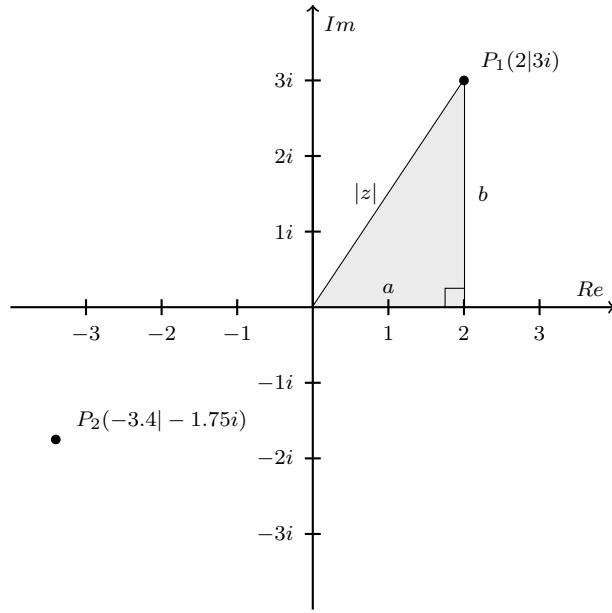


Abbildung 2.1: Komplexe Ebene mit den Punkten P_1 , und P_2 und dem absoluten Wert $|z|$ vom Punkt P_1 [Eigene Darstellung].

2.2 Iterationen

Iterationen beziehen sich in der Mathematik auf das Wiederholen einer bestimmten Prozedur beziehungsweise in diesem Fall einer Berechnung. Bei Funktionsiterationen iteriert (also wiederholt) man die Berechnung eines Funktionswerts mit dem Funktionsargument des vorherigen Funktionswerts: $z_1 = f(z_0), z_2 = f(z_1), z_3 = f(z_2), \dots, z_n = f(z_{n-1})$.

Eine wichtige Eigenschaft von Iterationen ist die Entwicklung von z für $z \rightarrow \infty$. Dabei wird unterschieden, ob die Iteration divergent ist, das heißt gegen Unendlich verläuft („explodiert“), oder sich einem bestimmten Punkt annähert. Letzteres bezeichnet man als einen beschränkten Verlauf.

Letzter Verlauf ist bei Iterationen schwer vorauszusagen, denn ähnliche wirkende Funktionen können dennoch sehr unterschiedliche Entwicklungen aufweisen. Die Funktionen $f_c(z) = z^2 + c$ mit $z_0 = 0$ stellen beispielhaft die unterschiedlichen Verlaufsformen für verschiedene Parameter c mithilfe von $c_1 = 1, c_2 =$

-1 und $c_3 = 0.5$ dar:

Iteration	$f_c(z)$ für unterschiedliche Parameter c		
	$c_1 = 1$	$c_2 = -1$	$c_3 = 0.5$
1.	1	-1	0,5
2.	2	0	0,75
3.	5	-1	1,0625
4.	26	0	$\approx 1,6289$
5.	667	-1	$\approx \mathbf{3,1533}$
6.	$\approx 1,9 \cdot 10^{11}$	0	$\approx 10,4433$
7.	$\approx 3,9 \cdot 10^{22}$	-1	$\approx 109,5625$

Tabelle 2.1: $f_c(z)$ verläuft mit c_1 und c_3 divergent, hingegen ist der Verlauf von $f_c(z)$ mit c_2 beschränkt. Die dick markierten Zahlen sind für eine spätere Erwähnung dieser Tabelle relevant [Eigene Darstellung].

3 Mathematische Betrachtung

Nachdem im vorherigen Kapitel die Grundlagen für die Mandelbrot-Menge erklärt wurden, befasst sich dieses Kapitel mit der mathematischen Betrachtung dieser Menge, indem diese zunächst fachlich korrekt definiert und im Anschluss grafisch analysiert wird.

3.1 Definition

Die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} wird mit der bereits im vorherigen Kapitel vorgestellten, komplexen Iteration $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $z_0 = 0$ und einem variablen Wert für c [Wei18, S.477ff.] definiert. Dabei enthält die Menge alle komplexen Werte für c , mit denen die oben angegebene Iteration beschränkt ist. Mathematisch ist die Menge iterativ wie folgt definiert:

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : |f_c^n(z)| \leq 2\} \quad \text{mit} \quad f_c(z) = z^2 + c; z \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

Wie in der Definition zu sehen, wird der Funktionswert der gegen Unendlich strebenden n -ten Iteration, ausgedrückt durch $f^n(z)$, absolut betrachtet, was bedeutet, dass die Funktion symmetrisch zur reellen Achse ist.

Ebenfalls zu betrachten ist die Einschränkung auf Funktionswerte ≤ 2 , denn für alle Funktionswerte, die sich in der oben genannten Iteration ergeben und > 2 sind, lässt sich das jeweilige c aus der Mandelbrot-Menge ausschließen. Obwohl der gesamte Beweis dessen über den Rahmen dieser Arbeit hinausginge, so soll dennoch angemerkt werden, dass mithilfe der Dreiecksungleichung und vollständiger Induktion unter der Vorausnahme von $|z_n| > 2$ und $|z_n| > |c|$ folgende Ungleichung, die eine divergente Entwicklung repräsentiert, $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ bewiesen werden kann [MH97], wobei sich zusätzlich zeigen lässt, dass für alle Werte von $|c| > 2$ nach spätestens 2 Iterationen gilt: $z_2 = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| > 2$.

Es befinden sich deshalb alle Werte für c als auch somit die grafische Darstellung der Mandelbrot-Menge in einem Kreis, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, mit dem Radius 2 [Vgl. A.4].

3.2 Grafische Analyse

Im Folgenden sollen der grundlegende Aufbau der in einem kartesischen Diagramm entstehenden Formation der Mandelbrot-Menge erörtert als auch eine Erklärung zur Farbbedeutung gegeben werden. Zusätzlich zeigt dieses Unterkapitel mit einer exemplarischen Kartografierung verschiedene, sich wiederholende Bereiche der visuellen Darstellung.

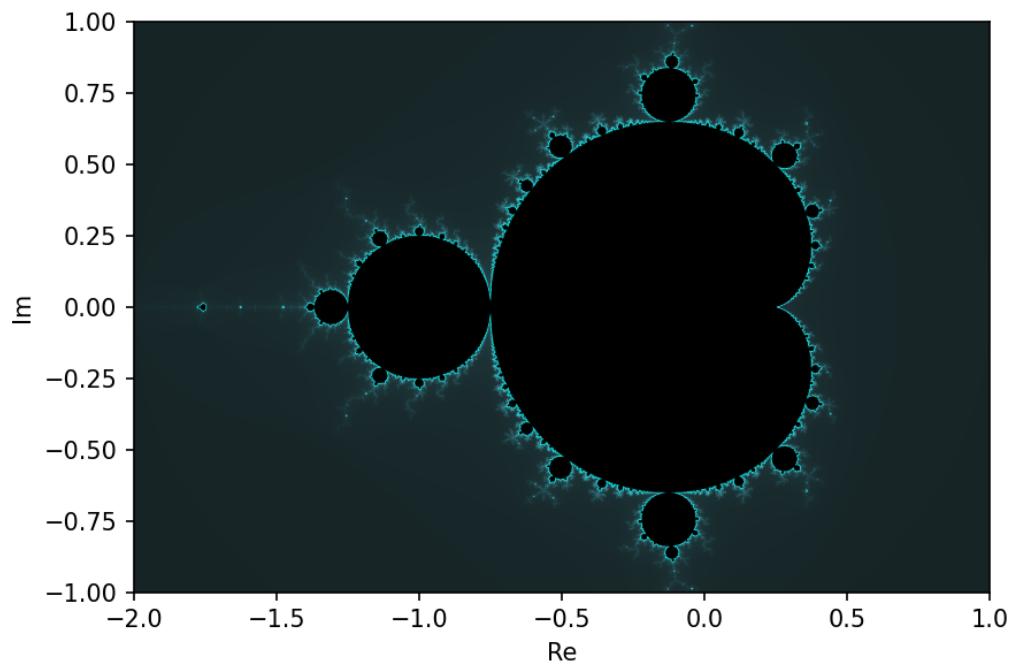


Abbildung 3.1: Exemplarische Darstellung der Mandelbrot-Menge [Eigene Darstellung]⁵.

⁵Generiert durch den Code A.10 mit einer „RESOLUTION“ von 2000 und einer „MAX_ITERATIONS“ von 500.

Die hier zu sehende Grafik entspricht der Darstellung der Mandelbrot-Menge in einer komplexen Zahlenebene und wird aufgrund ihrer Form „Apfelmännchen“ genannt. Die zu sehenden, schwarz gefärbten Pixel repräsentieren einen jeweiligen Wert für c , der sich in der Mandelbrot-Menge befindet.

Auffällig ist bei erster Betrachtung, dass sich neben der großen, einheitlichen Struktur in der Mitte deutlich kleinere, ähnlich aussende Formationen um den eigentlichen Hauptkörper, dem Apfelmännchen, zum Beispiel im negativen Teil der reellen Achse, erkennen lassen. Diese werden Satelliten genannt und existieren aufgrund der Selbstähnlichkeit der Mandelbrot-Menge in unendlicher Stückzahl – und zwar nicht nur für den Hauptkörper, sondern ebenfalls für jeden Satelliten selbst [LP18].

3.2.1 Farbbedeutung

Im Gegensatz zu den ersten grafischen Darstellungen der Mandelbrot-Menge, auf denen, aufgrund ihrer deutlich geringeren Auflösung, kleine Satelliten als Druckfehler gewertet wurden⁶ und die mit ihrem schwarz-weißen Druck lediglich zwischen Werte für c in und außerhalb der Mandelbrot-Menge unterschieden, besitzt die oben dargestellte Figur (3.1) einen Farbverlauf. Dieser, in diesem Fall türkisblaue, Farbgradient gibt an, wie viele Iterationen es benötigte, um festzustellen, ob das jeweilige c außerhalb der Mandelbrot-Menge liegt. Dabei gilt, dass je heller der Pixel ist, desto mehr Iterationen hat es benötigt, um das jeweilige c aus

⁶Dies ist eine recht amüsante Anekdote: Während den frühesten Forschungen, die Benoît Mandelbrot in den 1970er bei IBM anstellte, war das Drucken deutlich mühseliger und aufwendiger, als es heutzutage ist. Deshalb existierte eine ganze Abteilung nur für die Herstellung und Bearbeitung von Drucks, die - da ähnliche Druckfehler damals häufig vorkam - kleine Satelliten am Rande der ersten Darstellungen [A.5] gutgemeint wegretuschierten. Die ersten Bilder, die Herr Mandelbrot also erhielt, verwunderten ihn sehr und er war äußerst aufgebracht, als er von der tolpatschigen Wahrheit erfur [Num19].

\mathbb{M} auszuschließen⁷. Deshalb existiert ein hell erscheinender Rand um die schwarzen Formationen, da für diese Werte, die nicht in \mathbb{M} , dafür jedoch sehr nah an tatsächlichen Werten für \mathbb{M} liegen, viele Iterationen benötigt werden, um diese auszuschließen.

Neben dieser einen, verhältnismäßig simplen und dementsprechend auf den ersten Blick aussagekräftigeren Farbkodierung existiert eine Vielzahl an teils deutlich umfangreicher Algorithmen, mit denen sich eine für das menschliche Auge ansprechendere Farbgestaltung erzielen lässt. Diese werden in der Sektion ?? genauer beschrieben. Eine Reihe an solchen komplexeren Farbverläufen benutzenden Beispielen, auf die im nächsten Unterkapitel Bezug genommen wird, lässt sich in A.6 betrachten.

3.2.2 Exemplarische Kartografierung

Die hingegen von der Farbe unabhängigen, entstehenden Formationen der Mandelbrot-Menge, die teilweise erst bei sehr kleinen Ausschnitten erkennbar sind, sind kartografiert und teilweise, wegen einer gewissen Ähnlichkeit, nach Objekten aus der realen Welt benannt. So bezeichnet man die größte kreisförmige Kardioide oder auch „Knospe“ als „Körper“ (wobei dieser genauer unterteilt werden kann) und die daran angrenzende Kardioide als „Kopf“⁸.

Obwohl man jeden Punkt beziehungsweise jeden Ausschnitt beliebig detailliert analysieren kann, werden aufgrund der Selbstähnlichkeit Elemente mit ähnlichem oder gleichem Aufbau erneut hervorkehren und dementsprechend gleich benannt. Im Folgenden soll beispielhaft ein Ausschnitt des in diesem Video [Bey17] gezeigten „Tal der Seepferdchen“ analysiert werden:

Die Spalte zwischen Kopf und Körper wird „Tal der Seepferdchen“ genannt⁹

⁷Vgl. z.B. dick markierten Werte für $c_1 = 1$ und $c_3 = 0.5$ in Tabelle 2.1. c_1 ließ sich nach der 3. Iteration aus der Mandelbrot-Menge ausschließen, hingegen war dies bei c_3 erst nach der 5. Iteration der Fall.

⁸Vgl. A.7.

⁹Vgl. A.6.1.

[Rob10], da bei Vergrößerung dieses Ausschnitts sich unter anschaulicher Farbkodierung auf der rechten Seite Seepferdchen-ähnliche Formationen erkennen lassen¹⁰. Vergrößert man die Sicht auf das Seepferdchen-Tal stark, so lässt sich, neben weiteren (teils deformierten) Satelliten¹¹, bei genauerer Betrachtung des „Seepferdchenschwanzes“ ein Misiurewicz-Punkt erkennen¹². Dieser Misiurewicz-Punkt zeigt ebenfalls die Selbstähnlichkeit der Mandelbrot-Menge auf, da sich dieser Punkt neben einer Drehung kaum von der eigentlichen Mandelbrot-Menge unterscheidet [Lei89]. Vergrößert man diesen Punkt weiter, so findet man erneut einen im Vergleich zum Apfelmännchen sehr ähnlichen aussehenden Satelliten¹³.

¹⁰Vgl. A.6.2.

¹¹Vgl. A.6.3.

¹²Vgl. A.6.4.

¹³Vgl. A.6.5.

4 Praktische Anwendung

Im Folgenden werden die im letzten Kapitel untersuchten mathematischen Be trachtungen unter Realbedingungen angewandt, indem die dadurch entstehenden Grenzen spezifiziert als auch die konkreten, informationstechnischen Umsetzungen exemplarisch dargestellt werden. Dafür werden zunächst die Funktionsweise als auch die dabei durch die Unterschiede zur reinen Mathematik entstehenden Probleme bei der Bildgenerierung der Mandelbrot-Menge erläutert. Im Anschluss werden verschiedene Herangehensweisen und Algorithmen zur Farbkodierung beispielhaft vorgestellt.

4.1 Korrelation zwischen Informationstechnik und Mathe matik

Die im letzten Kapitel analysierte Abbildung 3.1 wurde, wie in der Beschriftung beschrieben, mit dem Code aus A.10 generiert. Im Vergleich zu den mathematischen Überlegungen ist die informationstechnische Herangehensweise dabei sehr ähnlich:

Grundlegend wird jeder Pixel mit seiner x - und y -Koordinate des zu gene rierenden Ausschnitts einer komplexen Zahl zugeordnet. Dabei entspricht (in der regulären Darstellung) die x -Koordinate dem Realteil a und die y -Koordinate dem Imaginärteil b , sodass eine komplexe Zahl $z = a + bi$ in einem Pixel P durch $x = a$ und $y = b$ ausgedrückt werden kann.

Das naheliegendste Problem, neben vielen ausschließlich informationstechni schen Optimierungsaufgaben, ergibt sich bei der Berechnung, ob es sich beim jeweiligen Pixel beziehungsweise dem jeweiligen c , um ein Element in \mathbb{M} handelt. Denn im Gegensatz zu der mathematischen Betrachtung ist es in der konkreten Umsetzung nicht möglich, die Iterationsanzahl n bei $f^n(z)$ gegen Unendlich kon vergieren zu lassen. Deshalb setzt man einen Grenzwert m an Iterationsdurchläu fen, ab dem, sofern das zu überprüfende c noch nicht aus der Mandelbrot-Menge

ausgeschlossen wurde, dieses als Element von \mathbb{M} angenommen wird.

Folglich bestimmt dieser Wert indirekt die Auflösung beziehungsweise Genauigkeit des zu generierenden Bilds und muss deshalb bei kleineren Ausschnitten besonders hoch sein, da dabei ein Unterschied zwischen komplexen Zahlen ausgemacht werden muss, dessen Werte sich lediglich um geringe Nachkommastellen unterscheiden. Die Auswirkungen dieser Iterationsgrenze sind durch die Bildergalerie A.8, die generierte Bilder der Mandelbrot-Menge mit unterschiedlich (niedrigen) Grenzen darstellt, anschaulich visualisiert.

4.2 Farbkodierung

Um die in der Sektion 3.2.1 erklärten Farben zu kodieren, eignet sich zunächst das HSV (Hue, Saturation, Value) Farbmodell, womit sich grundlegend mithilfe von prozentualen Werten Farben, vor allem jedoch Farbveränderungen hinsichtlich sowohl der Helligkeit als auch der Farbsättigung, erzielen lassen. Die jeweilige Farbe wird anhand des Verhältnisses der benötigten Iterationen n zu der Iterationsgrenze m für jeden zu überprüfenden komplexen Wert c für \mathbb{M} berechnet [Rob22]. Als Beispiel sei Hue mit 186° und Value mit 100% gegeben, woraus sich für jedes c folgendes HSV ergibt: $HSV(186^\circ, \frac{n}{m} \cdot 100\%, 100\%)$.

Diese Farbkodierung ist aufgrund ihrer Simplizität in ihrer beschriebenen Form direkt informationstechnisch umsetzbar, jedoch eignet sich solch eine Herangehensweise aus Performance- beziehungsweise Optimierungsgründen nicht für jede zu überprüfende komplexe Zahl c , wenn es sich bei der Farbzusammenstellung um einen komplexeren Zusammenhang wie in den Elementen der Bildergalerie A.6 handelt. Um dieses Problem zu lösen, erstellt man sogenannte Colormaps (engl.: Farbpaletten), wie zum Beispiel A.9.1 aus den Werten des oberen Beispiels. Für ein jeweiliges c wird mithilfe solcher Farbpaletten eine Farbe erneut anhand dessen Verhältnisses von benötigten Iterationen n zu der Iterationsgrenze m ermittelt; dabei existieren jedoch bereits alle vorkommenden Farben, was

somit die Berechnung des aufwendigeren Farbgenerierungsprozesses¹⁴ von dem Berechnungsprozess der eigentlichen Mandelbrot-Menge entkoppelt. In A.9.2 ist die für alle für die Arbeit generierten Abbildungen benutzte Colormap zu sehen, die im Vergleich zur vorherigen dargestellten Palette mehr als zwei (insgesamt 4) Ankerpunkte¹⁵ besitzt, wobei diese, im Gegensatz zu einer komplexen¹⁶ Colormap [z.B. A.9.3], mit der man visuell anschaulichere Bilder generieren kann, weiterhin recht minimal ist.

¹⁴Also die Auswahl und korrekte Zusammenstellung der Farben einer Farbpalette.

¹⁵Hier: Eindeutige HSV-Farben, die in gewissen Abständen auf einer Palette platziert werden und zwischen denen ein Gradient entsteht.

¹⁶Eine Farbpalette mit vielen Ankerpunkten.

5 Fazit

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass durch die verhältnismäßig simple Gleichung $z_{n+1} = z_n^2 + c$ sich eine riesige Welt der Fraktale eröffnet hat, die durch ihre visuellen Darstellungen mit ihrer atemberaubenden Schönheit nicht nur eine Nische von Mathematikern, sondern seit langem erneut auch die breitere Gesellschaft erreichen und erstaunen konnte. Diese Arbeit hat nicht nur einen grundlegenden Überblick über die Mathematik hinter der Mandelbrot-Menge geliefert, sondern auch eine Erklärung und die damit einhergehenden Komplikationen zur Generierung solcher faszinierenden Bildern dargelegt.

Nichtsdestotrotz ist der abgedeckte Bereich dieser Abhandlung begrenzt; es existieren schließlich unzählige weitere Zusammenhänge zwischen der Mandelbrot-Menge und anderen mathematischen Phänomenen wie Pi oder der Fibonacci-Folge. Es würde sich ebenfalls nicht um eine vollständige Arbeit über die Mandelbrot-Menge handeln, wenn nicht die Julia-Mengen und ihre enge Verknüpfung zu der als übergeordnet zu betrachtenden Mandelbrot-Menge erwähnt werden würde.

Abschließend lässt sich mit Sicherheit sagen, dass man gespannt abwarten kann, welche interessanten Entdeckungen in diesem jungen Gebiet der Mathematik folgen werden.

6 Literatur und Quellen

- [Bey05a] Wolfgang Beyer. *Partial view of the Mandelbrot set. Step 1 of a zoom sequence: Gap between the "head" and the "body" also called the "Seahorse valley"*. 12. Sep. 2005. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandel_zoom_01_head_and_shoulder.jpg (besucht am 30.01.2023).
- [Bey05b] Wolfgang Beyer. *Partial view of the Mandelbrot set. Step 2 of a zoom sequence: On the left double-spirals, on the right "Seahorses"*. 12. Sep. 2005. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandel_zoom_02_seahorse_valley.jpg (besucht am 30.01.2023).
- [Bey05c] Wolfgang Beyer. *Partial view of the Mandelbrot set. Step 3 of a zoom sequence: Seahorse upside down. Its "body" is composed by 25 "spokes" consisting of 2 groups of 12 "spokes" each and one "spoke" connecting to the main cardioid. These 2 groups can be attributed by some kind of metamorphosis to the 2 "fingers" of the upper hand of the Mandelbrot set. Therefore the number of "spokes" increases from one "Seahorse" to the next by 2. The "hub" is a so called Misiurewicz point. Between the upper part of the body and the "tail" a distorted satellite can be recognized.* 12. Sep. 2005. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandel_zoom_03_seahorse.jpg (besucht am 30.01.2023).
- [Bey05d] Wolfgang Beyer. *Partial view of the Mandelbrot set. Step 4 of a zoom sequence: The central endpoint of the "Seahorse tail" is also a Misiurewicz point.* 12. Sep. 2005. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandel_zoom_04_seahorse_tail.jpg (besucht am 30.01.2023).
- [Bey05e] Wolfgang Beyer. *Partial view of the Mandelbrot set. Step 8 of a zoom sequence: Antenna of the satellite. Several satellites of second order can be recognized.* 12. Sep. 2005. URL: <https://de.wikipedia.org/>

- wiki/Datei:Mandel_zoom_08_satellite_antenna.jpg (besucht am 30.01.2023).
- [Bey17] Wolfgang Beyer. *Zoomfahrt in die Mandelbrotmenge*. 16. Juni 2017. URL: <https://www.wolfgangbeyer.de/chaos/mandelzoom.htm> (besucht am 29.01.2023).
- [Elp07] Elphaba. *Command-line depiction of the Mandelbrot set, just like the picture Brooks and Matelski included in their article of 1978 on Kleinian groups*. 2. Feb. 2007. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mandel.png> (besucht am 30.01.2023).
- [Gai97] Raphael Gaillarde. *Benoit Mandelbrot, mathematician, inventor of fractals*. 9. Feb. 1997. URL: <https://www.gettyimages.co.uk/detail/news-photo/benoit-mandelbrot-mathematician-inventor-of-fractals-in-news-photo/110137025> (besucht am 22.01.2023).
- [IBM11] IBM. *Fractal Geometry*. 21. Mai 2011. URL: <https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/> (besucht am 16.01.2023).
- [Lei89] TAN Lei. “Similarity Between the Mandelbrot Set and Julia Sets”. In: *Communications in Mathematical Physics*. 10. Juli 1989, S. 587–617. URL: <https://arxiv.org/pdf/1410.6729v2.pdf> (besucht am 29.01.2023).
- [Lic02] Klaus Lichtenegger. *Komplexe Analysis*. Mai 2002. URL: <https://www.math.tugraz.at/~lichtenegger/kompan.pdf> (besucht am 16.01.2023).
- [LP18] Luna Lomonaco und Carsten Lunde Petersen. “On quasi-conformal (in-) compatibility of satellite copies of the Mandelbrot set”. In: (10. Okt. 2018). URL: <https://arxiv.org/pdf/1505.05422.pdf> (besucht am 29.01.2023).

- [MH97] Robert P. Munafo und Mike Hurley. “Escape Radius, Mu-Ency at MROB”. In: (19. Sep. 1997). URL: <http://mrob.com/pub/muency/escaperadius.html> (besucht am 24.01.2023).
- [MSC16] Arun Mahanta, Hemanta Sarmah und Gautam Choudhury. “MANDELBROT SET, THE MESMERIZING FRACTAL WITH INTEGER DIMENSION”. In: *International Journal of Applied Mathematics and Statistical Sciences* 6 (Dez. 2016), S. 1–18. URL: https://www.researchgate.net/figure/The-Body-B-and-Head-H-of-the-Mandelbrot-Set-The-surface-of-these-two-parts-are-covered_fig6_310798765 (besucht am 29.01.2023).
- [nna] Mike (nnart). *Fractals in Nature*. How Do Fractals Appear in Nature? 10 Outstanding Examples. URL: <https://nnart.org/fractals-in-nature/> (besucht am 16.01.2023).
- [Num19] Numberphile. *What's so special about the Mandelbrot Set?* - Numberphile. 18. Apr. 2019. URL: <https://youtu.be/FFftmWSzgmk?t=602> (besucht am 30.01.2023).
- [Rob10] Munfao Robert P. “Seahorse Valley, Mu-Ency at MROB”. In: (7. Sep. 2010). URL: <http://www.mrob.com/pub/muency/seahorsevalley.html> (besucht am 30.01.2023).
- [Rob22] Munfao Robert P. “Color, Mu-Ency at MROB”. In: (12. Dez. 2022). URL: <http://www.mrob.com/pub/muency/color.html>.
- [Tow17] Maths Town. *Eye of the Universe*. Eye of the Universe - Mandelbrot Fractal Zoom (e1091) (4k 60fps). 28. Aug. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=pCpLWbHVNhk> (besucht am 16.01.2023).
- [Tro] Heinrich Böll Gymnasium Troisdorf. *HBG Logo*. In der Titelseite zu finden. URL: https://www.hbgtroisdorf.de/images/hbg_logo_web.png (besucht am 18.12.2022).

- [Wei18] Edmund Weitz. *Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker: Mit vielen Grafiken und Algorithmen in Python*. 1. Aufl. Springer Spektrum, 8. Aug. 2018. 942 S. ISBN: 978-3-658-21565-1.
- [ZK14] Iris Zink und Hanna Kotarba. *Der kosmische Code*. Der kosmische Code. 28. Sep. 2014. URL: <https://www.zdf.de/dokumentation/terra-x/faszination-universum-der-kosmische-code-mit-harald-lesch-100.html> (besucht am 16.01.2023).

7 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Facharbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle verwendeten Materialien habe ich im Anhang angegeben. Ich erkläre ferner verbindlich, dass ich alle Zitate kenntlich gemacht habe und ihre Herkunft im Anhang angeben habe. Mir ist klar, dass ein Zuwiderhandeln gegen diese Bestimmungen zu einer 0-Punkte Bewertung der Arbeit führt.

Niederkassel, den _____

Unterschrift des Verfassers: _____

A Anhang

A.1:



Abbildung A.1: Benoît Mandelbrot 1997 in Frankreich [Gai97].

A.2:

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\
 &= c(a + bi) + di(a + bi) \\
 &= ac + bci + adi + bdi^2 \\
 &= ac + bci + adi - bd \\
 &= ac - bd + (bc + ad)i
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3:

$$\begin{aligned}
 z_1^2 &= z_1 \cdot z_1 \\
 &= (a + bi) \cdot (a + bi) \\
 &= a \cdot (a + bi) + bi \cdot (a + bi) \\
 &= a^2 + abi + abi - b^2 \\
 &= a^2 - b^2 + 2abi
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

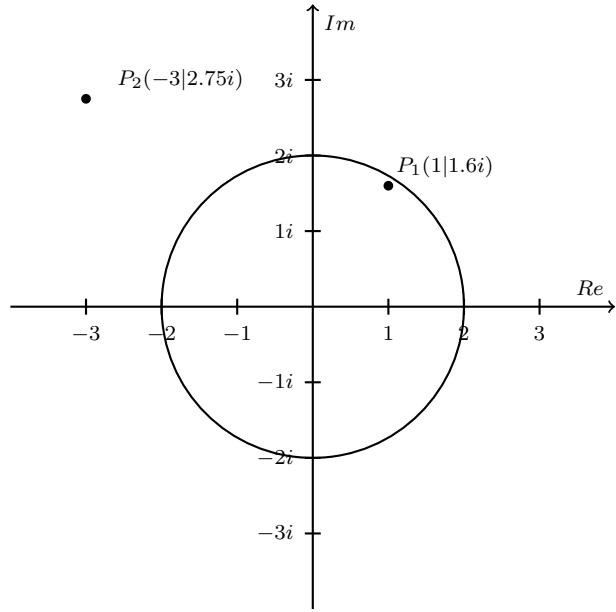
A.4:

Abbildung A.4: Einheitskreis mit dem Radius 2. Zu sehen ist der Punkt P_1 , der im Einheitskreis liegt und Punkt P_2 , der außerhalb des Einheitskreises liegt [Eigene Darstellung].

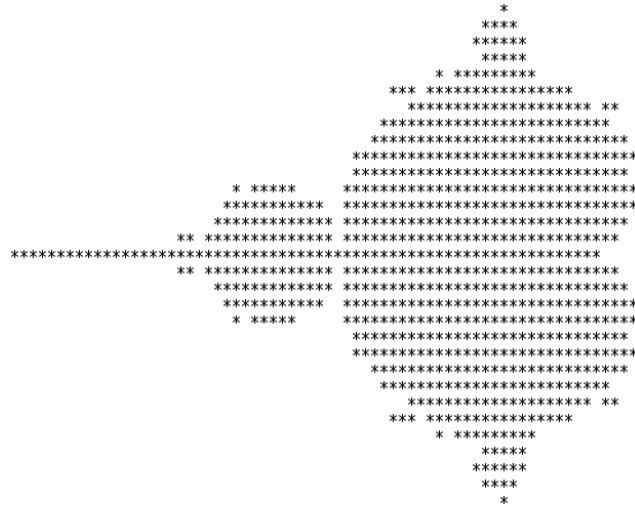
A.5:

Abbildung A.5: Darstellung der ersten Drucks der Mandelbrot-Menge [Elp07].

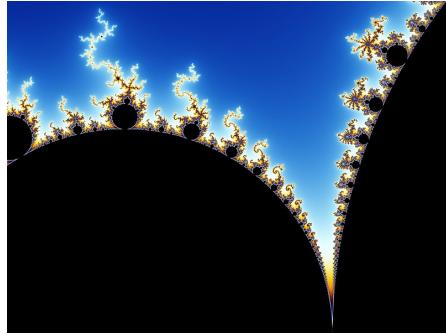
A.6:

Abbildung A.6.1: Spalte zwischen Kopf und Körper [Bey05a].

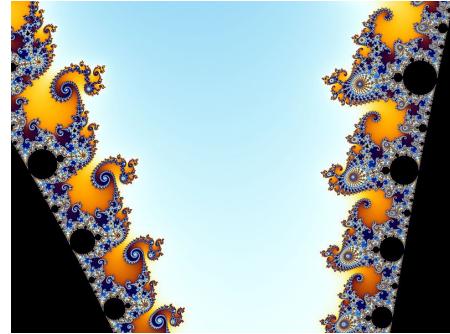


Abbildung A.6.2: „Tal der See-pferdchen,, [Bey05b].

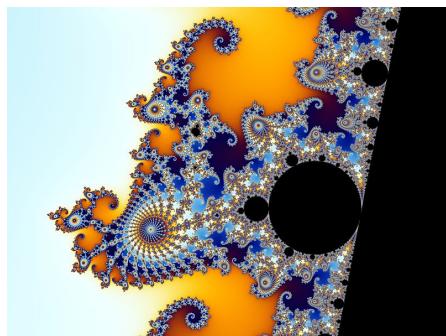


Abbildung A.6.3: Rechts ein deformierter Satellit und links Misiurewicz-Punkt [Bey05c].

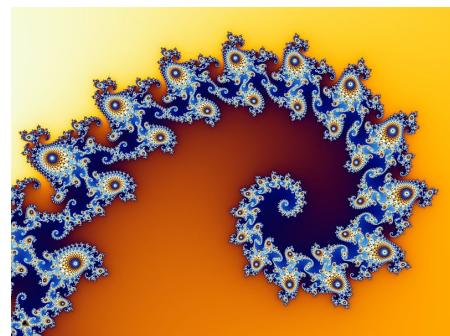


Abbildung A.6.4: Misiurewicz-Punkt [Bey05d].

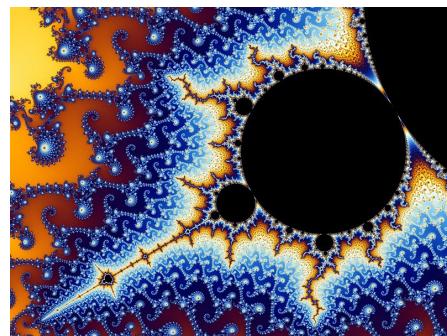


Abbildung A.6.5: Satellit mit ähnlicher Struktur wie das Apfelmännchen [Bey05e].

A.7:

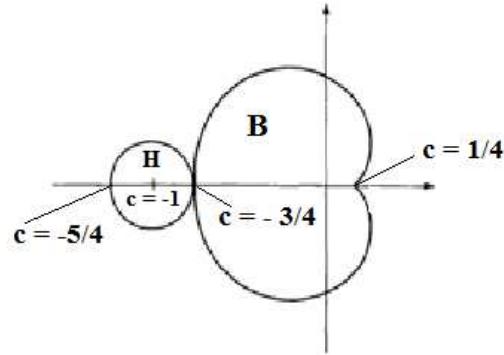


Abbildung A.7: Körper (B) und Kopf (H) der Mandelbrot-Menge [MSC16].

A.8:

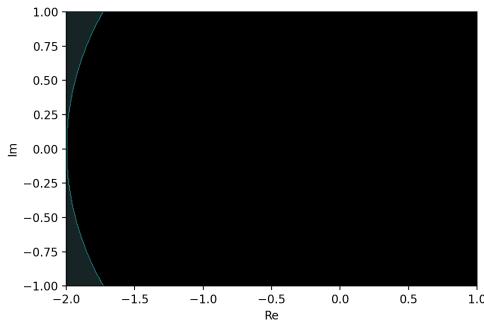


Abbildung A.8.1: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 1 [Eigene Darstellung].

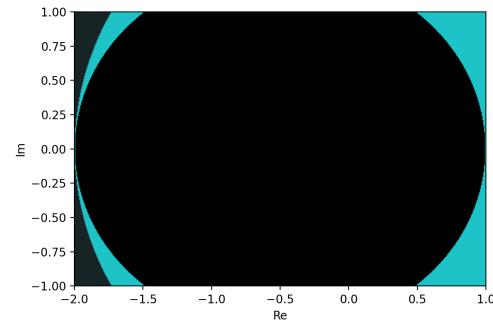


Abbildung A.8.2: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 2 [Eigene Darstellung].

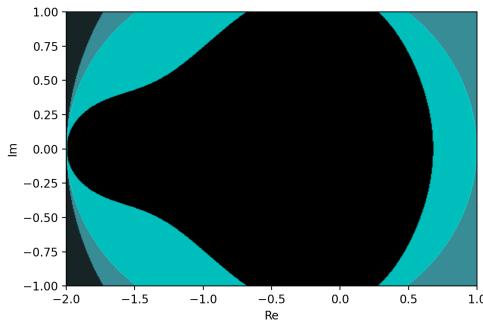


Abbildung A.8.3: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 3 [Eigene Darstellung].

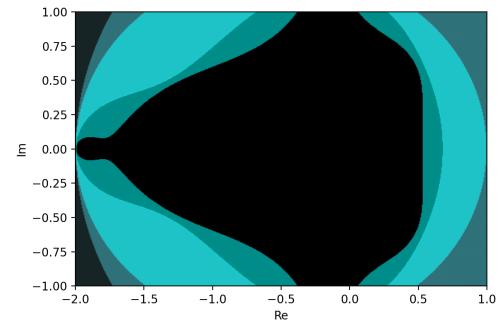


Abbildung A.8.4: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 4 [Eigene Darstellung].

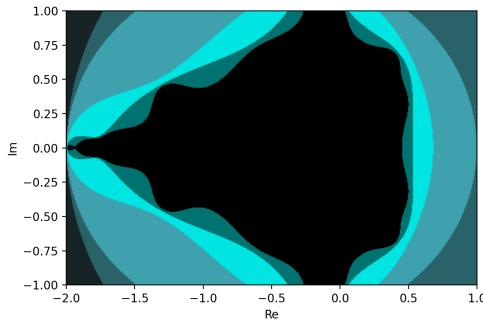


Abbildung A.8.5: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 5 [Eigene Darstellung].

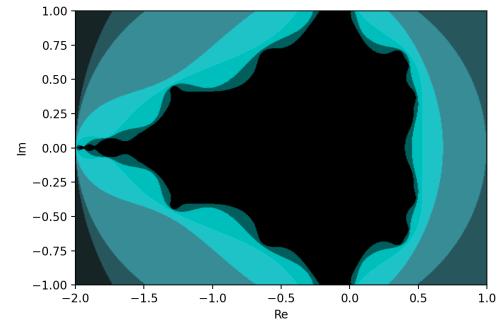


Abbildung A.8.6: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 6 [Eigene Darstellung].

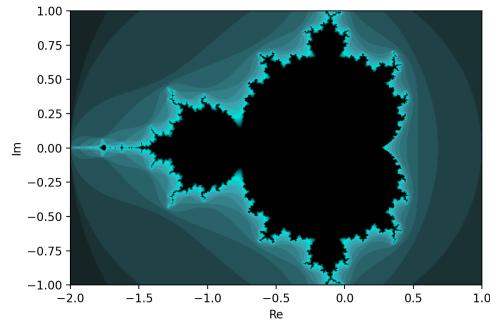


Abbildung A.8.7: Generiertes Bild mit einer Iterationsgrenze von 20 [Eigene Darstellung].

A.9:

Abbildung A.9.1: Simple HSV-Colormap mit einem linearen Farbverlauf [Eigene Darstellung].



Abbildung A.9.2: Komplexe HSV-Colormap mit vier verschiedenen Ankerpunkten [Eigene Darstellung].



Abbildung A.9.3: Komplexe HSV-Colormap mit vielen unterschiedlichen Ankerpunkten [Eigene Darstellung].

A.10:

```

import matplotlib.pyplot as plot
import numpy

def divergent_iterations(real , imaginary , max_iterations):
    c = complex(real , imaginary)
    z = 0.0j

    for iteration in range(max_iterations):
        z = z ** 2 + c
        if abs(z) > 2:
            return iteration

    return max_iterations

def generate_pixel_iterations_map(resolution , max_iterations):
    xs = resolution
    ys = resolution

    pixels = numpy.zeros([xs , ys])

    for x , real in enumerate(numpy.linspace(SCOPE[0] , SCOPE[1] , num=xs)):
        for y , imaginary in enumerate(numpy.linspace(SCOPE[2] , SCOPE[3] , num=ys)):
            pixels[x , y] = divergent_iterations(real , imaginary ,
                                              max_iterations)

    return pixels

def draw_plot(pixels , color_map , size):
    plot.figure(dpi=size)
    plot.imshow(pixels.T, cmap=color_map , interpolation="bilinear",
               extent=SCOPE)
    plot.xlabel("Re")
  
```

```

plot.ylabel("Im")

# This value defines the quality/resolution of the image. For quick
# generations,
# 500 is recommended. For higher quality images, use a value between
# 2000–5000
RESOLUTION = 500
# This value defines the image size. It should be updated accordingly
# with the
# resolution. An image size above 300 should often not be necessary.
IMAGE_SIZE = min(RESOLUTION * 1.25, 300)
# This value defines the scope/detail of the image. Default: [-2, 1,
# -1, 1]
SCOPE = [-2, 1, -1, 1]
# This value should be changed if the scope is not the default.
# Default: 100
MAX_ITERATIONS = 100
# This value changes the color mapping of the generated image. For a
# small
# scope, "twilight" might be interesting. The default value uses
# a custom generated color map
COLOR_MAP = {
    'red': (
        (0.0, 0.09019607843137255, 0.09019607843137255),
        (0.4, 0.24313725490196078, 0.24313725490196078),
        (0.6, 0.0, 0.0),
        (1.0, 0.0, 0.0)
    ),
    'green': (
        (0.0, 0.1411764705882353, 0.1411764705882353),
        (0.4, 0.6313725490196078, 0.6313725490196078),
        (0.6, 0.8980392156862745, 0.8980392156862745),
        (1.0, 0.0, 0.0)
    ),
    'blue': (
        (0.0, 0.14901960784313725, 0.14901960784313725),
        (0.4, 0.6784313725490196, 0.6784313725490196),
        (0.6, 0.8823529411764706, 0.8823529411764706),
        (1.0, 0.0, 0.0)
    )
}

pixels = generate_pixel_iterations_map(RESOLUTION, MAX_ITERATIONS)
draw_plot(pixels, COLOR_MAP, IMAGE_SIZE)
plot.show()

```

Code A.1: Python-Code zur Generierung unter anderem der Abbildung 3.1 [Eigene Darstellung].

Weitere Anhänge und verwendete Webseiten:



How Do Fractals Appear in Nature? 10 Outstanding Examples

Fractals are complex and eye-catching shapes that are composed of parts that appear to be a smaller version of the whole. If you look closely, you'll see examples of these shapes everywhere in natural systems. How do fractals appear in nature?



Simple Intuition About Newton Fractals in 7 Beautiful Examples

Fractal shapes appear in nature as ferns, trees, snowflakes, lightning, plant shapes, river deltas, mountains, clouds, crystals, and in bodily systems like the circulatory and respiratory systems of animals. These examples are self-similar and often look alike when zooming in and out.

These examples are not an exhaustive set and fractal shapes appear commonly in nature. I'll cover each of these cases in detail as well as what causes natural systems to favor fractal shapes. Soon you'll see fractals everywhere around you!

eZoic

report this ad

nnart

nnart is a great resource for anyone who wants to learn more about computer-based art.

I publish helpful articles that are packed with information including guides, FAQs, history, and more! From casual beginners to grizzled veterans, there is a place here for all.

I strive to enable appreciation and exploration of all different types of algorithmic art. I'm always adding articles, new and innovative pieces, and helpful info so check it out today!

eZoic

report this ad

eZoic

report this ad

Why Are Fractals So Common In Nature?

Table of Contents [hide]

- [Why Are Fractals So Common In Nature?](#)
- [Examples of Fractals in Nature](#)
 - [How Is A River A Fractal?](#)
 - [Fractal Coastlines: How Long is the Coast?](#)
 - [Fractals in Snowflakes](#)
 - [Fractal Tree Shapes](#)
 - [Lightning and Other Electrical Fractal Shapes](#)
 - [Want Your Own Fancy Fractal Art? – I've Got You Covered!](#)
 - [Turbulence and Fractal Cloud Shapes](#)
 - [Crystal Formations and Fractal Facets](#)
 - [Fractal Ferns and Plants](#)
 - [Fractal Systems: Respiratory, Nervous, and Circulatory](#)
 - [Mountains and Fractal Landscapes](#)
 - [Fractals and the Fibonacci Sequence in Nature](#)
 - [Natural Fractal Finale](#)
- [References](#)

 ezioic

[report this ad](#)

Fractal shapes are composed from just a few simple rules. For example, a rule might be: 'draw a line that forks into two lines'. On each of the forks, that rule can be repeated forever. As the forks get smaller and smaller, the whole shape might resemble a natural tree. If you are interested in [examples of other fractal drawing patterns](#), check out my post about [how to draw fractal shapes by hand](#)!

So why do plants and other natural shapes follow one of these patterns? The secret comes from DNA. All living organisms originally grow from a small number of cells. These cells grow, copy their DNA, and divide. The instructions for the cell are contained in the DNA and each carries out its instructions during its lifespan. By encoding simple, self-similar, and repeating shapes, the instructions for a complex organ like a circulatory system for delivering blood can be stored in a compact set of instructions.

A second reason natural shapes follow fractal patterns is that they allow for the efficient delivery and transportation of nutrients and resources. Since the shape originates in a large central instance like an artery and flows outward into progressively smaller versions of itself, the nutrients and resources are efficiently spread and delivered to where they are needed.



Some examples of this efficient delivery system include blood vessels, lung airways, root systems delivering water, fern leaves maximizing sun exposure, and river systems like the Nile which flood and deliver sediment to the surrounding farming communities.

Examples of Fractals in Nature

How Is A River A Fractal?

Rivers are often fractal in their shapes on both ends of the river. First, the river is formed from many lakes, streams, and estuaries emptying into one central river that contains water from many source locations. Eventually, the river often empties into an ocean and forms a river delta which also follows a fractal pattern. This is why so many rivers resemble blood vessels and form similar shapes.



A river delta from space showing the fractal pattern

The rivers also distort and deform the landscape that they travel over through erosion and flooding. Often, even after a river has dried up or a flood basin has emptied the distinctive fractal pattern of the river is visible in the landscape. Much of the Columbia River basin in eastern Washington and the Willamette Valley in western Oregon in the United States are the result of glacial floods 15,000 years ago. The river patterns are still visible today!

Fractal Coastlines: How Long is the Coast?

One of the most iconic examples of natural fractals comes from coastlines. In his famous demonstration, Benoit Mandelbrot asked, 'How Long is the Coast of Britain?'. He pointed out that with fractal shapes, the length can be infinitely long.

A coastline with fractal shape at sunset

By using smaller and smaller rulers, the person measuring gets a more accurate – and ever increasing measurement. At the high level you might measure miles of coastline in a straight line, but as the ruler is smaller and smaller each rocky outcropping and nook adds length. If you are interested in [Mandelbrot's works and his studies of fractal shapes, check out my complete list of his books!](#)

Fractals in Snowflakes

Everyone learns as kid (at least in the areas where snow is common) that each snowflake has a unique shape, size, and pattern. This was first photographed by Wilson Bentley and is captured in the iconic children's book *Snowflake Bentley*.

Since the water droplets freeze in a natural crystal pattern, this shape is often fractal and self-similar containing vast variation and intricate detail. The snowflake pattern repeats itself at a smaller scale and the crystal can hold its shape efficiently.

A snowflake with fractal shape

The shape begins in a central location where the water freezes and as it expands outward the fractal pattern forms. For artificial patterns, this idea is captured by the Koch Snowflake. You can [learn to draw the Koch Snowflake in my complete guide on fractal drawings!](#)



Fractal Tree Shapes

The shape of a tree is essentially one big fractal. Starting at the trunk, the tree branches into smaller and smaller branches that grow twigs and offshoots of their own. Each branch also has its own branches that twist and turn into many limbs.

Tree branches forming fractal shapes

This shape efficiently distributes water to the leaves and maximizes the area that the leaves can use to harness sunlight. As the tree grows bigger and bigger, the fractal shape repeats and allows the tree to grow to many sizes using the same natural design.

Lightning and Other Electrical Fractal Shapes

Lightning and electricity often form fractal shapes and for the same reasons as rivers. As water flows from a high spot to a low point, it meets resistance in the landscape. It follows the path of least resistance as it flows and the river forms self-similar branches.



Lightning with the classic Lichtenberg fractal pattern

As lightning travels from a place of high potential to one of low potential, it also follows the path of least resistance and forms branching patterns. The current causes spreading or branching into tree-like formations as electrons travel through the material over time.

Want Your Own Fancy Fractal Art? – I've
Got You Covered!

Discover the most eye-popping artwork, clothing, and dog



Privacy - Terms

beds. Stop wasting time searching for less exciting alternatives! Impress your friends and loved ones while supporting the site in the process

Explore the Etsy Shop **E**

Find Fractal Fun!

A Lichtenberg figure is an electric discharge pattern in branching form which appears on the surface or internally in insulating materials. Often, the electrical discharge in someone who is struck by lightning can leave a scar or tattoo called a Lichtenberg figure, which creates a fractal pattern. This pattern is also visible in Fractal Wood Burning (or Lichtenberg Burning) and electricity is used to burn a beautiful pattern in a wooden item.

Want to know more about this exciting area of artwork that uses fractal patterns for woodworking? [Check out my post about the invention of Fractal wood burning!](#)

Turbulence and Fractal Cloud Shapes

In the atmosphere, the heating and cooling of different areas by the sun causes there to be a heat differential between different parts of the atmosphere. As the differential returns to equilibrium, air flows from the hot spots to the cool, causing wind and other air currents.

These turbulent currents are often chaotic and unpredictable. The air also contains varying levels of moisture, and condensation happens spontaneously forming clouds. Just like other natural systems, clouds can appear self-similar where one small area of the cloud resembles the larger cloud. This self-similarity sometimes gives cloud systems a fractal shape.

Clouds in the sky forming a fractal pattern

Clouds have distinctive shapes due to their fractal nature. In a 1985 paper, Shaun Lovejoy and Benoit Mandelbrot showed that the fractal dimension of clouds could be measured by recording the size of clouds at different scales. [\[1\]](#)

With the aid of satellite images, Lovejoy observed geographical regions of sizes ranging from 1 km to 3000 km. Areas with cloud cover differ from clear regions. These areas were mapped and observed to find out if cloud shapes are fractals. Between 1 and 1000 km, the fractal dimension of 1.35 was obtained.

Crystal Formations and Fractal Facets

Crystals formed from minerals in the Earth are created under intense pressure and produce beautiful and often valuable shapes and patterns. Just like the formation of the ice crystal in a snowflake, mineral crystals are formed based on imperfections and form unique shapes.

A crystal formation with a fractal pattern

The crystal lattice (like in a diamond) is formed from a perfect grid of atoms which are locked into place by intense pressure. When there is an imperfection in the lattice, there is a resistance to the material just like water splitting in a river. The crystal pattern splits into two 'branches' and forms smaller crystals that are self-similar to the whole.

Fractal Ferns and Plants

Ferns are the iconic example of natural fractals. The self-similar branching can be easily seen in a clean and repeating pattern that expresses itself at different sizes and scales. The same can be seen in other plants like broccoli, cauliflower, pineapples, and cabbages.

Plants displaying a fractal pattern

Just like with trees and other natural systems, the fractal shape allows for the efficient delivery and distribution of nutrients. The shape allows the plant to operate at different scales and maximizes the surface area that the leaves can utilize to harvest and process sunlight. In addition, it allows the plant to grow from simple instructions.

Fractal Systems: Respiratory, Nervous, and Circulatory

In the bodies of animals many complex organ systems are shaped like fractals. Three common examples include the respiratory, nervous, and circulatory systems. The systems all contain a central trunk like a tree – arteries, the spine, and the wind pipe before branching into smaller and self similar components. These components include blood vessels, major nerves, and the various branches of the lungs.

These systems form fractal shapes for similar reasons – just like with plants the shapes allow for the efficient distribution of resources and nutrients while allowing the system to operate on many different scales and sizes.

Mountains and Fractal Landscapes

Mountains and landscapes often form self-similar and fractal patterns. This is due to the fluids like water and wind causing erosion of the softer and lighter materials while the harder rocks and minerals of the

mountain remain. The mountain range can also exhibit a fractal pattern on the larger scale as the smaller hills and outcroppings resemble the large peaks.

Mountains forming a fractal landscape

Mandelbrot studied fractal landscapes in his definitive work *The Fractal Geometry of Nature*. In the first instances where computer algorithms were used to generate realistic looking landscapes, fractal algorithms were utilized. You can read all about the development in [my guide to Mandelbrot's complete works!](#)

Fractals and the Fibonacci Sequence in Nature

Plants that exhibit fractal patterns often also contain the Fibonacci sequence in the patterns of their leaves or flowers.

In 1202, the great Italian Mathematician Fibonacci aka Leonardo Bonacci or Leonardo of Pisa, popularized the Indo-Arabic numeral system in the west through his book *Liber Abaci* (Book of Calculation). The book introduced Europe to the idea of the sequence of Fibonacci numbers. The Fibonacci sequence contains a series of numbers in which each number is the sum of the two numbers preceding it. The Fibonacci series includes: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, and so on forever.

The Fibonacci sequence plays a fundamental role in phyllotaxis, a study of the arrangement of seeds, leaves, branches, flowers, and fruits of plants, aiming to identify the existence of regular recursive patterns and recurrent structures and forms. This self-similar and repeating recursive pattern produces the fractal shape.

A plant spiral with the classic Fibonacci pattern

Sir D'Arcy Wentworth Thompson was a Scottish biologist and mathematician who observed that plants have a curious preference for certain numbers and spiral geometries, which are also closely related. Fibonacci series can be found in spirals formed by individual flowers in composite clusters of little flowers that seem like one big flower but are multiple smaller flowers clustered together called inflorescences. Examples include daisies, cauliflower, broccoli, and sunflowers. In sunflowers, we can see individual flowers arranged along the curved lines, which rotate clockwise and anticlockwise.

Johannes Kepler, a 17th Century mathematician, German astronomer, natural philosopher, astrologer, and writer on music, noted that in many trees, leaves are aligned in a pattern that includes two Fibonacci series of numbers. Beginning from any leaf, after one, two, three, or five turns of the spiral, there will always be a leaf aligned with first and, based on the species, it will be second, third, fifth, eighth, or the thirteenth leaf. [2]

An example can be seen in several petals of flowers. Most have 3 petals like Lilies and Irises, 5 like Parnassia, Roses, or 8 like Cosmea. Daisies have 13, Chicory have 21, and some species of Asteraceae have 34, 55, or 89



petals. These numbers are all part of Fibonacci's sequence.

Natural Fractal Finale

In natural systems it is clear that fractals form a foundation and critical function to a wide variety of phenomena, plant species, and animals. Hopefully you now have a greater appreciation of all the fractal patterns that surround us in our day-to-day lives. Nature leverages these patterns for a large number of different uses and applications.

Get Notified When We Publish Similar Articles

Your Email (required)

(Required) It's OK to add me to your email list.

Sign Up

References

1. Lovejoy, Shaun, and Benoit B. Mandelbrot. "Fractal properties of rain, and a fractal model." *Tellus A* 37.3 (1985): 209-232.
2. Mamombe, Lovemore. "On the analysis of the Fibonacci numbers: Critique to Kepler." *International Journal of Mathematics Trends and Technology* 29.2 (2016): 62-9.

Fractals

- < Can You Sell Maps Made in Wonderdraft?
- > Can a Neural Network Output an Image?

Leave a Comment

You must be [logged in](#) to post a comment.

© NNART, LLC 2023

[Terms and Conditions](#)

[Privacy Policy](#)



Privacy - Terms

Der kosmische Code

Welche Macht haben Zahlen über uns?



Harald Lesch erzählt in "Faszination Universum" eine uralte Legende. Sie zeigt, welche Macht Zahlen haben können - wenn man sie nur machen lässt.

28.09.2014

Video leider nicht mehr verfügbar



Mehr von Terra X

Regelmäßige Muster, Formen, Wiederkehr des Gleichen - in der Natur stoßen wir ständig darauf: Blattadern sind symmetrisch angeordnet, Blüten harmonisch aufgebaut. Liegt all dem ein mathematisches Regelwerk zugrunde? Auf der Suche nach dem Schlüssel findet man Hinweise auf einen Code, der über alles auf der Erde – und darüber hinaus – zu herrschen scheint. Können wir diesen kosmischen Code entschlüsseln? In der zweiten Folge von "Faszination Universum" sucht Harald Lesch nach Antworten. Er deckt auf, wo die Macht der Zahlen endet und die Berechenbarkeit des Kosmos an Grenzen stößt.



Terra X

Mandelbrot und der Code des Lebens (1/14)

Viele Strukturen in der Natur sind so harmonisch und regelmäßig, dass man kaum glauben kann, sie seien zufällig entstanden. Liegt ihnen ein mathematisches Regelwerk, ein bestimmender Code zugr... ➤



Unbehagen aus, sie gilt als Unglückszahl. Schon die alten Babylonier hatten ein gespaltenes Verhältnis zur 13: Ihre Astronomen, die den Himmel studierten, beschrieben 13 Sternzeichen. Warum wir heute nur noch zwölf von ihnen kennen, ist eine Geschichte, die viel über Bedeutung und Macht von Zahlen verrät.

Zahlen in der Kulturgeschichte

Wie kamen die Zahlen überhaupt in die Welt? Sie sind uns nicht in die Wiege gelegt. Bis heute gibt es Völker, die keine Wörter für Zahlen in ihrer Sprache haben, zum Beispiel die Aborigines in Australien. Forscher fanden heraus, dass die Ureinwohner Australiens nur Begriffe für „eins“ und „viele“ verwenden. Andererseits verfügen sie über ein umfangreiches Repertoire an Bräuchen und bewahren so Mythen und Legenden in ihrer Symbolik. Ganze Landschaften beschreiben die Aborigines in Zeichnungen und Tänzen – eine wichtige Überlebensstrategie, um sich in der weiten, kargen Landschaft zu orientieren und die Wege zu Wasser- und Nahrungsquellen im Gedächtnis zu behalten. Zahlen brauchten die Aborigines aber über Jahrtausende nicht, denn sie betrieben in ihrer Geschichte nie Landwirtschaft und errichteten keine großen Siedlungen. Andere Kulturen hingegen erkannten früh den Nutzwert der Zahlen und des Zählens.

Bilder am Himmel

Was ist an den Tierkreiszeichen besonders?

Das Sternzeichen Schlangenträger

Im Takt des Mondes

Die praktische Zwölf

Vor etwa 10.000 Jahren begann der Mensch in Vorderasien größere Herden zu halten. Zählen war nützlich, um das Eigentum zu überschauen. Noch größere Bedeutung erhielten die Zahlen, als die Sumerer die ersten größeren Siedlungen errichteten. Die Menschen spezialisierten sich auf unterschiedliche Tätigkeiten, die Arbeitsteilung führte zu regem Handel. Man tauschte und feilschte, schätzte Mengen und Wertigkeiten gegeneinander ab. Die Sumerer entwickelten auch die ersten Symbole für Zahlen und schrieben sie in Keilschrift nieder. Im alten Ägypten wurde dann das Rechnen vor etwa 5000 Jahren zur notwendigen Kulturtechnik: Beamten vermaßen die Felder der Bauern und dokumentierten die Berechnungen der Flächen auf Papyrusrollen. Im antiken Griechenland entwickelte sich die Kulturtechnik des Rechnens allmählich zur reinen Wissenschaft. Aus dem praktischen Zählen und Rechnen wurde Philosophie. Ein mathematisches Rätsel allerdings ließ damals viele verzweifeln – es steht bis heute sprichwörtlich für eine unlösbare Aufgabe: Wie lässt sich die Fläche eines Kreises exakt durch ein Quadrat darstellen?

Die Quadratur des Kreises 1/4

Die Quadratur des Kreises 2/4

Die Quadratur des Kreises 3/4

Die Quadratur des Kreises 4/4

Mathematik als Instrument der Naturwissenschaften

Trotz solcher Krisen entwickelte sich die Mathematik zu einem immer mächtigeren Instrument. Sie war das Werkzeug, das über Jahrhunderte geltende Weltbilder zu Fall brachte. So trat gegen Ende des 16. Jahrhunderts der junge Johannes Kepler den Kampf gegen das vorherrschende Bild vom Lauf der Sterne und Planeten an. Seine einzige Waffe war die Mathematik. Schließlich formulierte er drei Gesetze der Planetenbewegung und trotzte dem Kosmos damit einen Teil seines Codes ab. Bis heute haben die Keplerschen

Ist Mathematik also die Sprache der Natur? Wohnt sie allen Lebewesen inne? Verfügen auch Tiere über elementare mathematische Fähigkeiten? Bei Bienen wollen Forscher Indizien dafür gefunden haben. Die Insekten gelten als besonders klug, sie verfügen über ein komplexes Kommunikationssystem, bei dem sie ihren Artgenossen mit Tänzen Richtung und Entfernung von Futterquellen übermitteln. Um zu testen, ob Bienen neben diesem gemeinsamen Code auch ein ihnen fremdes Zeichensystem verstehen können, führten sie einen Versuch durch: Eine Biene sieht am Eingang einer Röhre ein Schild mit mehreren Punkten. Nur in Richtung des Wegweisers mit der gleichen Anzahl an Punkten gelangt sie zur Belohnung. Die Biene muss sich also die Zahl der Punkte merken und sie später wiedererkennen. Das Ergebnis: Auch wenn die Anzahl und sogar die Gestalt der Symbole variierten, konnten die „Versuchsbienen“ die Aufgabe richtig erfüllen. Das zeigt, dass Bienen zumindest kleine Zahlenmengen unterscheiden können.

Nachbildung der Natur

Betrachtet man die regelmäßige, sechseckige Struktur der Bienenwaben, liegt der Gedanke nah, dass sich tatsächlich ein mathematisches Regelwerk hinter allen Erscheinungen der Natur verbergen könnte. Der französische Mathematiker Benoît Mandelbrot war in den 1970er-Jahren davon überzeugt. Er glaubte, ein grundlegendes Prinzip erkannt zu haben: Strukturen in der Natur verzweigen sich oft zu immer feineren Unterstrukturen, die sich im Wesentlichen nur durch ihre Größe unterscheiden. Die Natur wiederholt sich selbst, so seine These. Für Mandelbrot war das der Schlüssel zum Code des Lebens.

Das Prinzip der Wiederholung oder Selbstähnlichkeit in der Natur lässt sich auch nutzen, um die Natur für menschliche Zwecke nachzubilden. Im Film bringt die neue Technik den Durchbruch für aufwendige Computeranimation. Landschaftsüberflüge waren einst nur wagemutigen Kameraleuten und Abenteurern vorbehalten. Das hat sich geändert, seit Computeringenieure begonnen haben, digitale Welten zu erschaffen. Früher musste man für bewegte Fantasielandschaften in Trickfilmen jedes Bild einzeln zeichnen. Auf diese Weise einen Überflug über eine Landschaft zu erzeugen war eine Sisyphusarbeit. Dank Mandelbrots Prinzip der Wiederholung können Computer heutzutage diese Aufgabe übernehmen. So lassen sich beispielsweise Gebirgsdarstellungen immer und immer wieder in ähnliche, nur kleinere Dreiecke unterteilen. Wie durch Zauberhand entsteht eine realistisch anmutende Berglandschaft, über die man hinwegfliegen kann. Bis heute werden Landschaften in Animationsfilmen nach dem Prinzip der Wiederholung gestaltet.

Sendungsinformationen



nach oben

Mehr ZDF

- ZDFapps
- Smart TV
- ZDFtext
- Livestreams
- Sendungen A-Z
- TV-Programm

Partner

ZDF woanders

- ZDF YouTube
- ZDF Facebook
- ZDF Twitter
- ZDF Instagram

Service

- Tickets
- Zuschauerservice
- Kontakt zum ZDF
- Sitemap
- Hilfe

Das ZDF

- ZDF Unternehmen
- Karriere
- Presseportal
- Werbefernsehen
- Mainzelmännchen

Color

Robert P. Munafo, 2022 Dec 12.

For the purpose of this discussion there are two types of color drawing situations.

"Limited color" refers to the situation where there is some rather small number N of colors available (typically 256 or less) and you specify which color to use by giving a single number from 1 to N .

"Full color" refers to the situation where you specify the color to use by giving three separate numbers, specifying the color in terms of some kind of three-dimensional color space (like red-green-blue, or hue-saturation-luminance)

Limited Color

When working in limited color it is typical to pick a color from 1 to N based on the number of [escape iterations](#) of the [point](#). If the number of iterations is less than N it can be used directly. If it is bigger than N you can pick a fixed "overflow" value, or use (iterations modulo N), which has the effect of cycling through the colors as many times as needed to cover all the possible iteration values.

Full Color

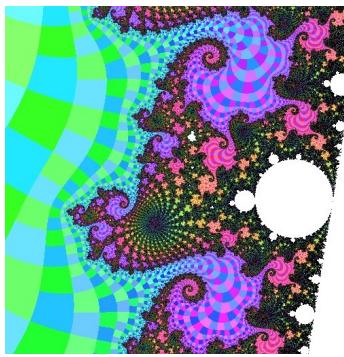
The best approach when working in full color is to treat your available colors as a two-dimensional or three-dimensional space and plot each pixel with a color that combines different attributes of the iterated point, using dimensions in the color space. There are lots of possibilities; here are two examples:

Two dimensions of color, two attributes of point
use hue to show [Escape Iterations](#)
use brightness to show [Distance Estimate](#)

Three dimensions of color, three attributes of point
use hue to show [Continuous Dwell](#)
use saturation to show final point's [Angle](#)
use brightness to show final point's [Radius](#)

Both of these will produce fairly stunning results and of course there are dozens of other possible combinations.

One of the best ways to color the Mandelbrot Set uses the [HSV](#) color space. Use the [Distance Estimator](#) function for V. Use [Escape-Iterations](#) for H, with a somewhat different hue when the final point's [Angle](#) is between 0 and pi. Make S alternate between 1.0 and 0.67, to show odd and even values of [Escape-Iterations](#). The result is stunning:



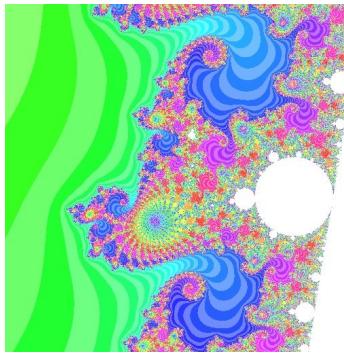
An HSV rendering

(as used in [Color MANDELZOOM](#) and its successors)

It is much better to use the hue/saturation/brightness system rather than something like red/green/blue, because of the psychology and physiology of human vision. Most good graphics environments provide a function that converts from HSV to RGB; if your's doesn't, look it up in a book like Graphics Gems or Fundamentals of Interactive Computer Graphics.

For each dimension you want to translate the attribute to the dimension in such a way that you use the whole range, and use it evenly. For example, hue is expressed as an angle on the color wheel. To convert iterations to hue, I would recommend some sort of logarithmic function, so if it takes 20 iterations to go around the wheel the first time, it takes another 40 to go around the second time, then 80, then 160 and so on. Then, to preserve the appearance of stripes at all iterations, you could add 20 degrees to the angle if the iteration is odd. The resulting formula would look like this:

```
hue = (360 * log2(iterations)) modulo 360
if (iterations mod 2 = 1)
    hue = (hue + 20) modulo 360
```



Hue based on iterations

Algorithm Used in the Mu-Ency Illustrations

Most of the JPG and PNG images used to illustrate the Mu-Ency articles are colored using an algorithm similar to the following:

```
using a fairly large escape radius (such as 1000),
iterate to determine D using the continuous dwell method
(see also escape-iterations)
set dwell = floor(D)
set finalrad = D - floor(D)
(The floor function gives the integer part of D)

compute angle of final coordinate of iteration and call it finalang
(if the escape radius is big enough, this is also a fractional part
of the external angle)

compute distance estimate
set dscale = log2(distance_estimate / pixel_spacing)

if dwell exceeds iterations limit,
```

```

skip all the following and plot a white point
comment
Convert the scaled distance estimate to a brightness (called
"value" in the HSV color space) from 0.0 to 1.0 in 8 intervals.

if dscale > 0
value = 1.0
else if dscale > -8
value = (8 + dscale)/8
else
value = 0

comment
Apply logarithmic scaling to the dwell. The big number "100000"
should be chosen to be bigger than any iterations limit you'll
ever use.
P = log(dwells)/log(100000)

comment
The following re-maps the range 0.0...1.0 onto an "angle"
and "radius" on the color wheel. This color wheel has white in the
center, pastel hues close to the center, and vivid colors around the
edge of the wheel. In order to gain maximum use of all the available
colors, we compute an angle and radius in a way that places the
resulting points equally far apart from one another. The use
of square root means that the radius increases more slowly as we
move away from the center. Note also that the angle will be multiplied
by a constant below, so we'll end up going around the wheel multiple
times.

if (P < 0.5) {
P = 1.0 - 1.5*P
angle = 1 - P
radius = sqrt(P)
} else {
P = 1.5*P - 0.5
angle = P
radius = sqrt(P)
}

comment
The following makes every other "stripe" a bit lighter
if dwell is odd {
value = 0.85 * value
radius = 0.667 * radius
}

comment
The following breaks the stripes up into "squares" that make the
external angles evident. Combined with the previous "stripe"
operation, this gives the image a checkerboard-like appearance
if finalang > π {
angle = angle + 0.02
}

comment
The following turns each "square" into a rainbow-like gradient
angle = angle + 0.0001 * finalrad

comment
The following causes it to use 10 full rainbows to cover the range
from 1 to 100000 (or whichever big number was used in the first step
of calculating P)
hue = angle * 10.0
hue = hue - floor(hue)

saturation = radius - floor(radius)

comment
hue is now in the range 0.0...1.0. This represents a full circle
(normally 0...2π)

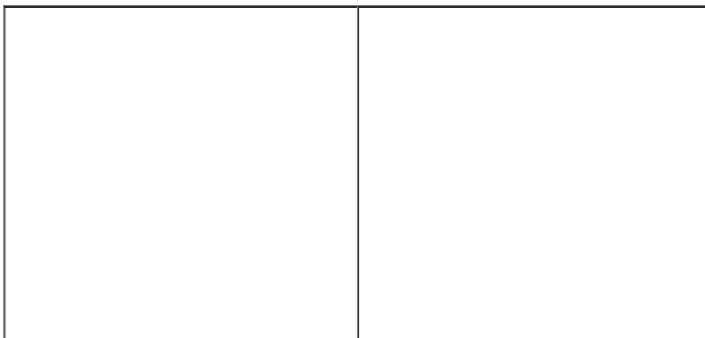
convert (hue, saturation, value) to (red, green, blue)
using standard HSV to RGB mapping

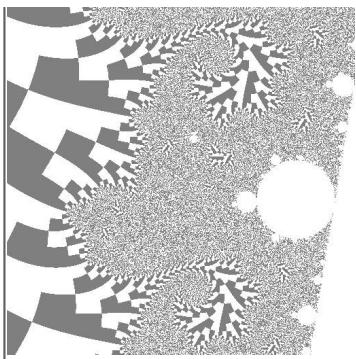
```

The intended benefits of this algorithm are:

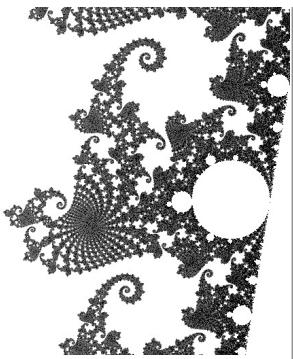
- Always show all of the detail in an image, with lots of contrast
- Always show the dwell bands and binary decomposition
- Does not vary with zooming in and out or with changing the iterations (dwell) limit (in other words, an enlarged portion of any image always matches a recomputed version of just that portion)
- Use a color wheel that is rebalanced to match the human psychovisual color primaries (which gives what I consider aesthetically pleasing colors)
- Makes efficient use of the 3-D color space (for example by compensating for less information-carrying ability at low brightness values)
- Shows multiple hues, except when that would preclude any of the above

More Examples

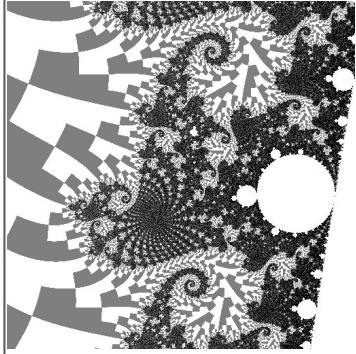




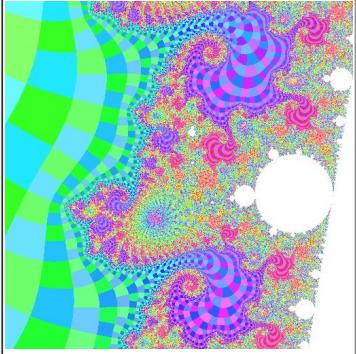
Showing external angle only



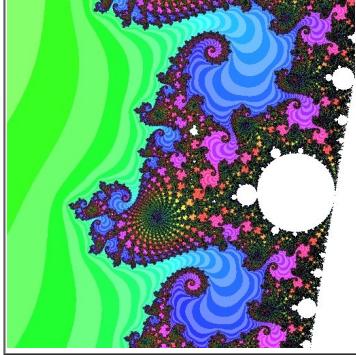
Showing filaments only



Showing filaments and external angle



Showing dwell and external angle



Showing dwell and filaments

See also [algorithms](#), [dithering](#), [palette](#), [representation functions](#).

revisions: 20100907 oldest on record; 20101213 fix a couple typos; add "intended benefits" 20221212 Add illustrations

From the Mandelbrot Set Glossary and Encyclopedia, by Robert Munafo, (c) 1987-2022. [Mu-ency index](#)

Robert Munafo's home pages on [FAWS](#) © 1996-2022 Robert P. Munafo. [about](#) [contact](#)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Details [here](#).
This page was written in the "embarrassingly readable" markup language [RHTF](#), and was last updated on 2022 Dec 13.  s.27

Escape Radius

Robert P. Munafo, 1997 Nov 19.

The escape radius is a parameter used in iterating a point under the Mandelbrot Set and Julia Set functions. It is the radius of a circle on the Complex Plane used as a boundary to determine when iteration can stop. The circle is centered at the origin, and has a radius of at least 2.0. As soon as the iteration yields a value that falls outside the circle, iteration can stop and it has been determined that the point that was iterated is not a member of the Mandelbrot Set.

The reason for having an escape radius is to prevent iteration from going on forever. The Mandelbrot iteration is supposed to terminate when the iteration becomes unbounded, i.e. goes off to infinity. It is fairly straightforward to show that if a point ends up outside a radius of 2.0 then the iteration will go off to infinity.

Here is the proof:

% need to translate into Mu Ency terminology, try to simplify a bit, eliminate terms "induction" and "triangle inequality"

Original USENET article:

-----R-P-M-----N-e-w-s-b-l-i-n-k-----

Xref: world sci.math:34837
Path: world!eff!sol.ctr.columbia.edu!zaphod.mps.ohio-state.edu!uwm.edu!biosci!agate!usenet.ins.cwru.edu!math26647.math.cwru.edu!user
From: mgh3@po.cwru.edu (mike hurley)
Newsgroups: sci.math
Subject: Re: Mandelbrot question
Message-ID: <mgh3-260493142114@math26647.math.cwru.edu>
Date: 26 Apr 93 18:58:27 GMT
References: <1993Apr26.173119.1002@eurom.rhein-main.de>
Followup-To: sci.math
Organization: case western reserve u
Lines: 43
NNTP-Posting-Host: math26647.math.cwru.edu

In article <1993Apr26.173119.1002@eurom.rhein-main.de>, hein@eurom.rhein-main.de (Hein Roehrig) wrote:

> [View Source](#)

>
> I currently am working on a (high school) report concerning the mandelbrot
> set. In one book (The Emperor's New Mind by Penrose) I learned that the
> series is guaranteed to be unbounded if the absolute value of one of its
> elements surpasses $1+\sqrt{2}$. Can anybody explain me why?
>
> Thanks in advance for any advice, including book tips!
>
> Hein
> ----
> eurom: Free Multiline Unix BBS
> Frankfurt/Main,Germany

The sequence generated by $f(z) = z^2 + c$ beginning with 0 begins
 $0, c, c^2 + c, \dots$
 Call these terms z_0, z_1, z_2, \dots

In fact this sequence will be unbounded if any of its terms has magnitude larger than 2.

The main idea is that if the magnitude $|z|$ is bigger than both 2 and the magnitude $|c|$, then $|f(z)|/|z| > |z| - 1 > 1$, so that by induction the sequence of magnitudes will grow geometrically.

To establish the inequality, note that

Establish the inequality, note that
 $|f(z)| = |z^2 + c|$
 $\geq |z|^2 - |c|$ [triangle inequality]
 $= |z| - (|c|/|z|)$
 $> |z| - 1$ [$|z| > |c|$]
 > 1 [$|z| > 2$]

If $|c| \leq 2$ and $|z_n| > 2$ then certainly $z = z_n$ satisfies these hypotheses, so the sequence is unbounded.

If $|c| > 2$ then $|c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c| > 2$
so that $z=z_2$ satisfies the hypotheses of the argument above.

mike hurley mgh3@po.cwru.edu

Acknowledgments

Proof that 2.0 is sufficient: Mike Hurley (mgh3@po.cwru.edu)

From the Mandelbrot Set Glossary and Encyclopedia, by Robert Munafo, (c) 1987-2022. Mu-ency index

Robert Munafo's home pages on AWS © 1996-2022 Robert P. Munafo. [about](#) [contact](#)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Details [here](#).

This page was written in the "embarrassingly readable" markup language [RHTF](#), and was last updated on 2022 Mar 28. [Ys.27](#)

Fractal Geometry

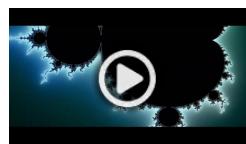
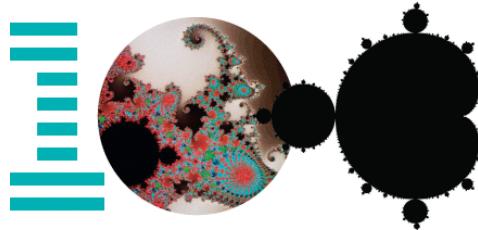
Overview

[Transforming the World](#)

[Cultural Impacts](#)

[The Team](#)

[In Their Words](#)



Fractal geometry in *They Were There*

Learn more about Benoit Mandelbrot and fractal geometry in the IBM Centennial film, *They Were There*. (Beginning at 26:55)

THE PASSING OF A MAVERICK



01 / 05

On October 14, 2010, the scientific community lost a great colleague, visionary and friend as Benoit Mandelbrot passed away at the age of 85 in Cambridge, Massachusetts. Dr. Mandelbrot is survived by his wife Aliette; two sons, Laurent and Didier; and three grandchildren.

MANDELBROT SAID

"In the whole of science, the whole of mathematics, smoothness was everything. What I did was to open up roughness for investigation."



01 / 05

Geometry. Its principles are taught to young students across the world. The Pythagorean theorem. Surface area and volume. Pi. This classical, or Euclidean, geometry is perfectly suited for the world that humans have created. But if one considers the structures that are present in nature, that which are beyond the realm of smooth human construction, many of these rules disappear. Clouds are not perfect spheres, mountains are not symmetric cones, and lightning does not travel in a straight line. Nature is rough, and until very recently this roughness was impossible to measure. The discovery of fractal geometry has made it possible to mathematically explore the kinds of rough irregularities that exist in nature.

In 1961, Benoit Mandelbrot was working as a research scientist at the Thomas J. Watson Research Center in Yorktown Heights, NY. A bright young academic who had yet to find his professional niche, Mandelbrot was exactly the kind of intellectual maverick IBM had become known for recruiting. The task was simple enough: IBM was involved in transmitting computer data over phone lines, but a kind of white noise kept disturbing the flow of information—breaking the signal—and IBM looked to Mandelbrot to provide a new perspective on the problem.

Since he was a boy, Mandelbrot had always thought visually, so instead of using the established analytical techniques, he instinctually looked at the white noise in terms of the shapes it generated—an early form of IBM's now-renowned data visualization practices. A graph of the turbulence quickly revealed a peculiar characteristic. Regardless of the scale of the graph, whether it represented data over the course of one day or one hour or one second, the pattern of disturbance was surprisingly similar. There was a larger structure at work.

The problem was familiar to Mandelbrot, and he recalled the advice his mathematician uncle, Szolem Mandelbrojt, had given him years ago in France—an attempt to make something of the obscure theories of iteration established by French mathematicians Pierre Fatou and Gaston Julia. Their work intrigued mathematicians around the world and revolved around the simplest of equations: $z = z^2 + c$. With a variable of z and parameter of c , this equation maps values on the complex plane—where the x-axis measures the real part of complex number and the y-axis measures the *imaginary* part (i) of a complex number.

At the time of the advice, Mandelbrot couldn't find any breakthrough, but the intellectual freedom he found at IBM allowed him to fully engage this new project. In 1980, building on the technology and talent of IBM, Mandelbrot used high-powered computers to iterate the equation, or use the equation's first output as its next input. With these computers, Mandelbrot crunched and manipulated the numbers a thousand times over, a million times over, and graphed the outputs.

The result was an awkwardly shaped bug-like formation, and it was perplexing to say the least. But as Mandelbrot looked closer, he saw the detailed edges of this formation held smaller, repeating versions of the larger bug-like

formation. What's more, every smaller version held more complex detail than the previous version. These structures were not exactly alike, but the general shape was strikingly similar, it was only the details that differed. The specificity of these details, it turned out, was limited only to the power of the machine computing the equation, and similar shapes could continue on forever—revealing more and more detail, on an infinite scale. This was a definite geometry, there were rules and parameters to this roughness, but it was a form of geometry previously unidentified by the scientific community.



Mandelbrot set zoom
Watch for the repeating structures contained in the Mandelbrot set.

Instantly, Mandelbrot knew he was onto something. He saw unquestionably organic structures in the details of this shape and quickly published his findings. This shape and structure, later known as the Mandelbrot set, was an extraordinarily complex and beautiful example of a “fractal” object, fractal being the name coined by Mandelbrot in 1975 to describe such repeating or self-similar mathematical patterns. But it wasn’t until his 1982 book, *The Fractal Geometry of Nature*, that Mandelbrot would receive public attention and widespread legitimacy. In this book, Mandelbrot highlighted the many occurrences of fractal objects in nature. The most basic example he gave was a tree. Each split in a tree—from trunk to limb to branch and so forth—was remarkably similar, he noted, yet with subtle differences that provided increasing detail, complexity and insight into the inner-workings of the tree as a whole. True to his academic roots, Mandelbrot went beyond identifying these natural instances and presented the sound mathematical theories and principles upon which his newly coined “fractal geometry” was based.

What emerged was a geometry of the cosmos—one that broke all Euclidean laws of the man-made world and deferred to the properties of the natural world. If one identified an essential structure in nature, Mandelbrot claimed, the concepts of fractal geometry could be applied to understand its component parts and make postulations about what it will become in the future. This new way of viewing our surroundings, this new perception of reality, has since led to a number of remarkable discoveries about the worlds of nature and man, and has shown that they are not as disconnected as once thought.

Take biology, for example. Fractal patterns have appeared in almost all of the physiological processes within our bodies. For ages, the human heart was believed to beat in a regular, linear fashion, but recent studies have shown that the true rhythm of a healthy heart fluctuates radically in a distinctively fractal pattern. Blood is also distributed throughout the body in a fractal manner. Researchers in Toronto are using ultrasound imaging to identify the fractal characteristics of blood flows in both healthy and diseased kidneys. The hope is to measure the fractal dimensions of these blood flows and use mathematical models to detect cancerous cell formations sooner than ever before. In the fractal approach, doctors won’t need sharper medical images or more powerful machines to see these minuscule pre-cancerous structures. Math, rather than microscopes, will provide the earliest detection.

Biology and healthcare are only some of the latest applications of fractal geometry. The developments arising from the Mandelbrot set have been as diverse as the alluring shapes it generates. Fractal-based antennas that pick up the widest range of known frequencies are now used in many wireless devices. Graphic design and image editing programs use fractals to create beautifully complex landscapes and life-like special effects. And fractal statistical analyses of forests can measure and quantify how much carbon dioxide the world can safely process.

Today, we have merely scratched the surface of what fractal geometry can teach us. Weather patterns, stock market price variations and galaxy clusters have all proven to be fractal in nature, but what will we do with this insight? Where will the rabbit hole take us? The possibilities, like the Mandelbrot set, are infinite.

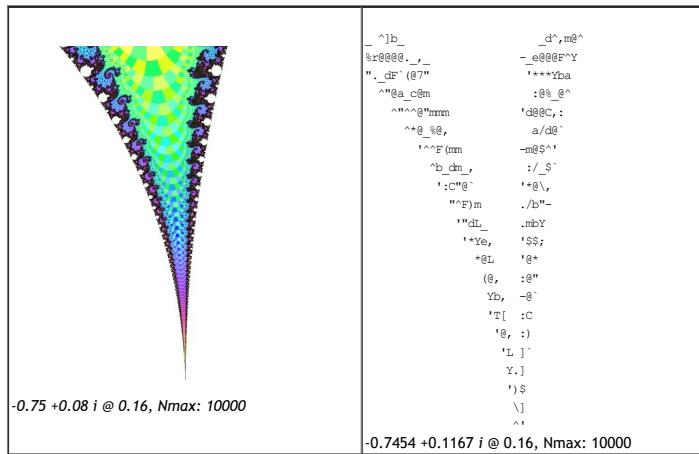
Benoit Mandelbrot was an intellectual jack-of-all-trades. While he will always be known for his discovery of fractal geometry, Mandelbrot should also be recognized for bridging the gap between art and mathematics, and showing that these two worlds are not mutually exclusive. His creative approach to complex problem solving has inspired peers, colleagues and students alike, and instilled in IBM a strong belief in the power of perspective. Decades after his discovery of the Mandelbrot set, data visualization continues to provide fresh and unexpected insights into some of the world's most difficult problems by altering our perspective, challenging our preconceptions and revealing connections previously invisible to the eye.

Transforming the World →

Seahorse Valley

Robert P. Munafo, 2010 Sep 7.

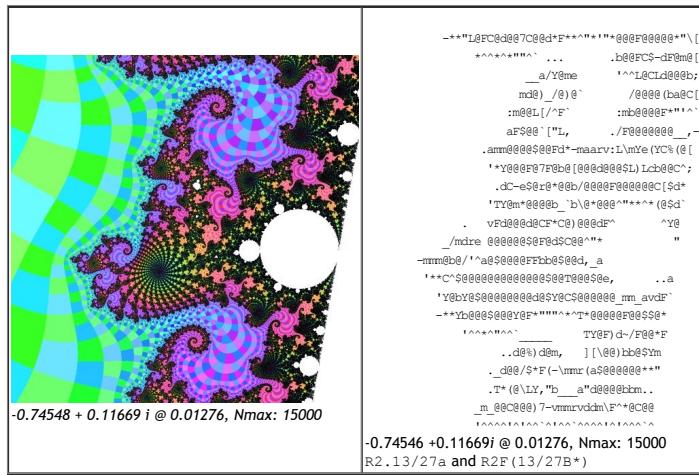
Colloquial name for the cusps between R2a and R2.1/2a, particularly the upper one, R2.C(1/2-). See R2.C(1/2).



The upper Seahorse valley is shown in the picture. The right side, those parts attached to the continent seed, is part of the Shoulder, and the left side is part of the Head.

Seahorse Valley zoom sequence

The following zoom sequence is a permanent part of the Mandelbrot set culture. It goes back at least as far as the 1985 [Scientific American](#) article, and probably originates with [Peitgen and Richter](#). (These images do not show the same [mu-unit](#) and [filaments](#) as the article, and the colors and aspect ratios of the frames differ as well.)



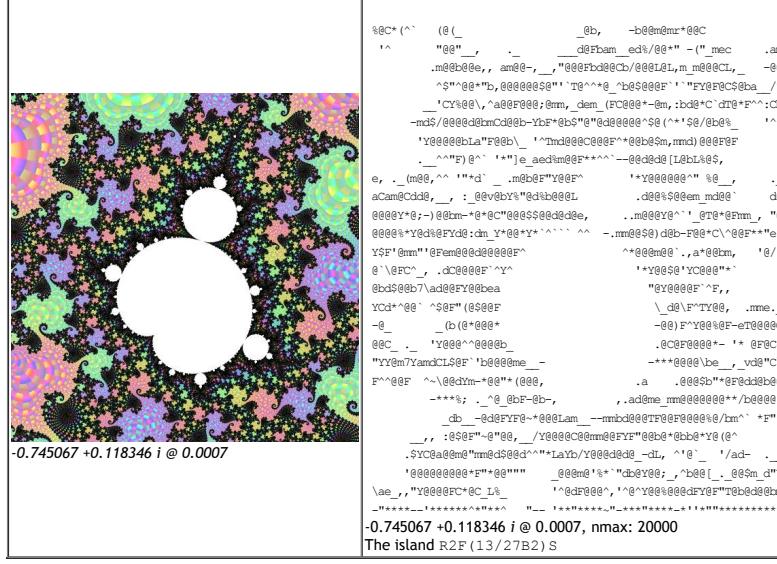
(Page 18, figure a) One of the mu-atoms, R2.13/27a, and its attached filaments.

The largest complete **mu-atom** in this image is R2.13/27a. The image shows the first iteration with

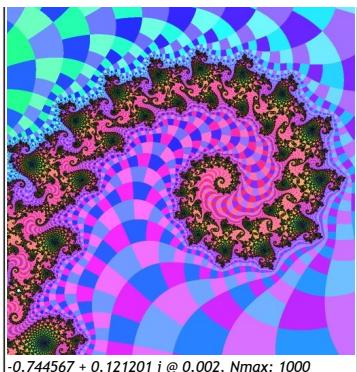
There is one large peacock eye, the point at its center is the branch point R2F (13/27B*). On the west side of the valley we find double spirals in place of the peacock eyes.

On the west side of the valley we find double spirals in place of the peacock eyes. The largest visible island is R2E(13/27B2) S and the branch ending in a spiral is 1.

The largest visible island is R2F(13/27B2)S and the branch ending in a spiral is R2F(13/27B2).



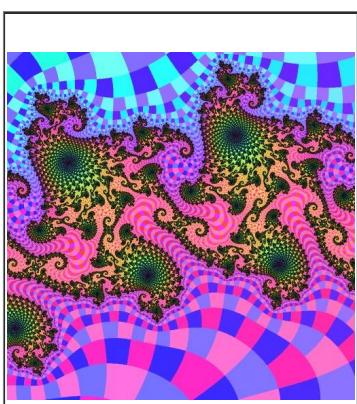
This is the largest visible [island](#) in the previous image; its R2-name is R2F(13/27B2)S. It has [period](#) 29 and is the 335th [largest_island](#) in the whole Mandelbrot set.



$-0.744567 + 0.121201 i$ @ 0.002 , $N_{max} = 1000$

-0.744538 +0.121200 i @ 0.002, Nmax: 1000
Solve time = 0.116 (0.077 s)

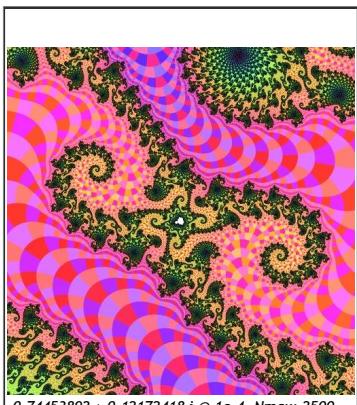
(Page 18, figure b) This spiral feature is called a tail or Shepherd crook. The prominent spiral tip is R2F (13/27B2) {FS[2]ES[0]}~



$-0.7445366 + 0.1217208 i$ @ $5e-4$, Nmax: 1500

-0.7445398 ±0.1217238i @ 0.0005, Nmax: 1500

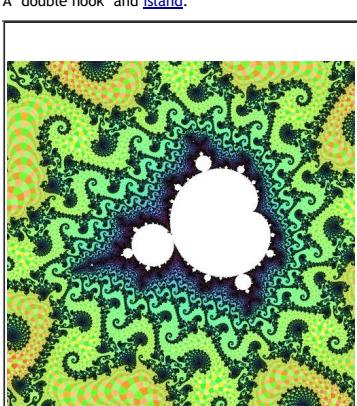
Here we see several patterns resembling the center of a sunflower or a peacock-feather "eye".



-0.74453892 + 0.12172418 i @ 1e-4, Nmax: 2500

/\\$mc@t;#beAf:t:d\Fe.,, ^* " * @@@@e-L d\dc,
~~~~~ ^~~~~~ ^~~~ ^~~~ |~~~~~|~~~~~|`

ANSWER



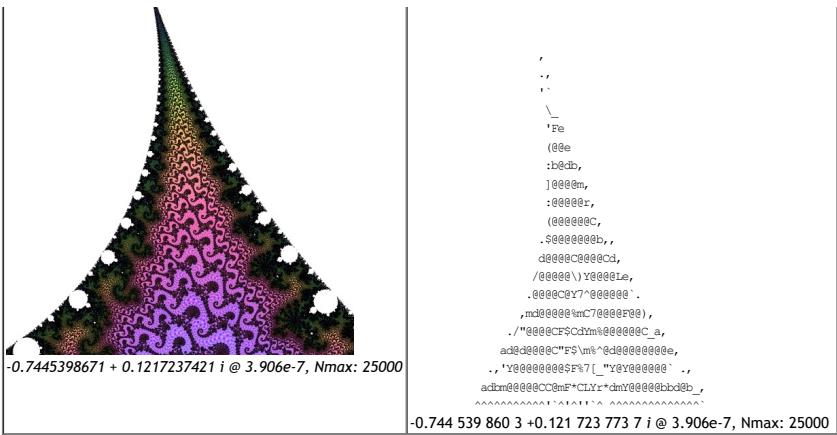
-0.744539761 + 0.121724001 i @ 6.25e-6, Nmax: 10000

10000 C@Ld" (d@\_ \_-\_- e,\_ '00b, ]@\*`\_@\* - @@@@@@-

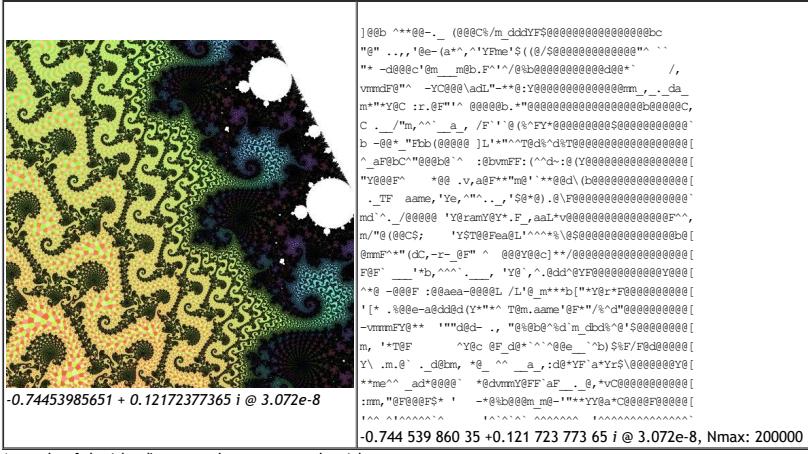
-0.744539859 +0.121723774 i @ 6.25e-6 Nmax: 10000

0.744 939 837 16.121 725 7747 @ 8.25e-6, Nmax: 10000

This island has [period](#) 43 and is 7 steps away from the period-29 island shown above (which is R2F(13/27B2)S).



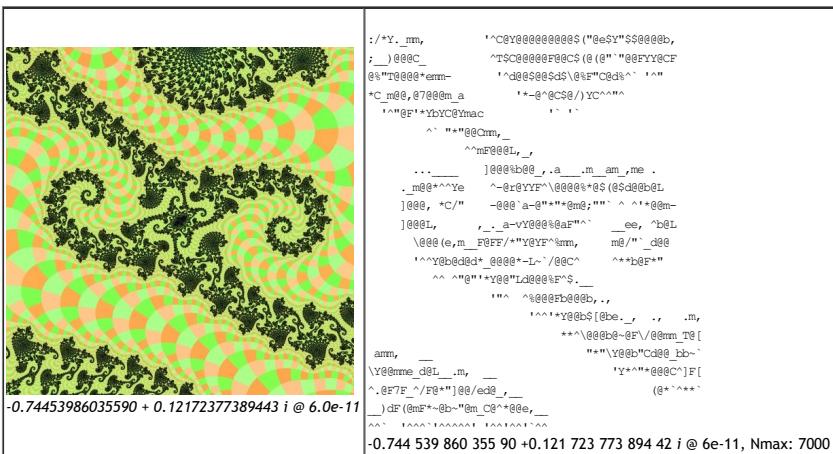
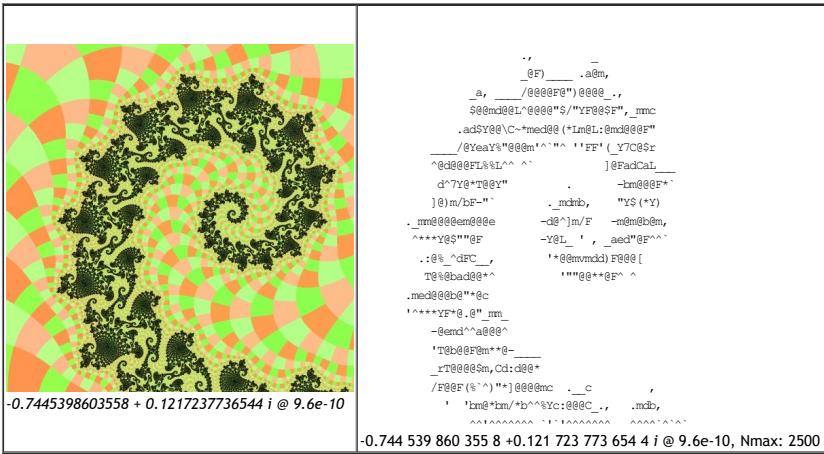
The south half of the island's own seahorse valley. The name of this cusp is R2F(13/27B2) {FS[2]FS[0]}x7S.C(1/2)+



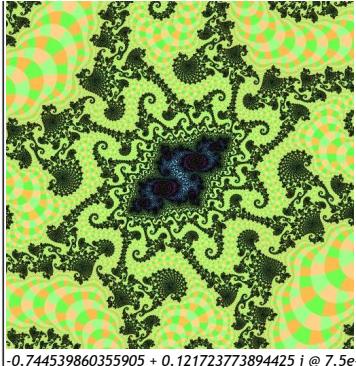
A couple of the island's own seahorses are on the right.

The filaments on the left are all part of R2F(13/27B2) but are *not* part of the island's mu-unit.

We will now zoom in to the filaments on the left, and find one of its "double-hook" features.

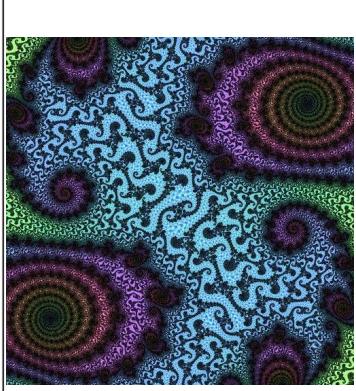


At the center of this double hook, instead of another island, we find an [Embedded Julia set](#).



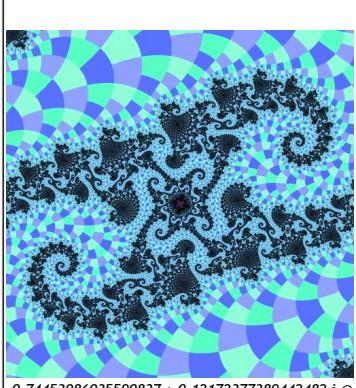
-0.744539860355905 + 0.121723773894425 i @ 7.5e-12

## The embedded Julia set.



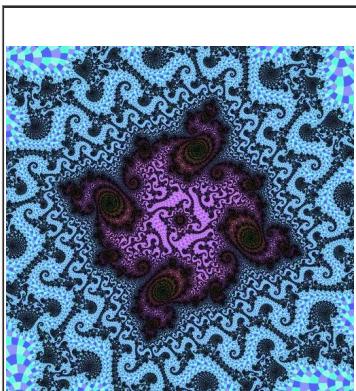
$$-0.7445398603559061 + 0.1217237738944253 i @ 9.375e-13$$

Inside the embedded Julia set. There are two large features that look like peacock-eyes; on closer inspection they appear to be double spirals



-0.7445398603559083 / + 0.1217237389442482 i @ 8e-

Within the EJS is this double-hook

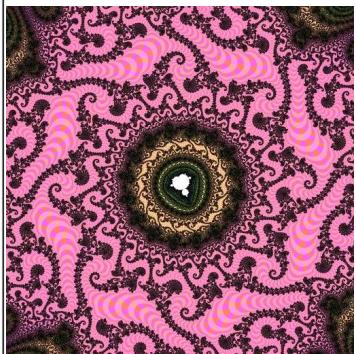


$$-0.744539860355908380 + 0.121723773894424824 i @ 6.0e-15$$



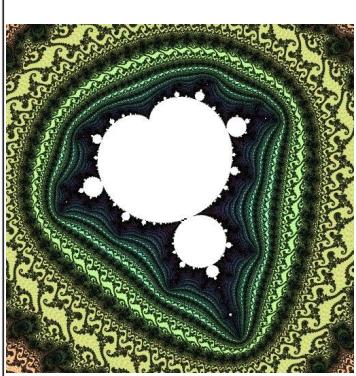
-0.7445398603559083806 + 0.1217237738944248242 i @ 7.5e-16

### The nucleolus.



$$-0.74453986035590838081 + 0.12172377389442482421 i @ 9.375e-17$$

-0.74453986035590838011 + 0.12172377389442482241 i 9.375e-17, Nmax: 50000



$-0.74453986035590838012 + 0.12172377389442482241 i$  @  $1.172e-17$

-0.74453986035590838011 +0.12172377389442482241 i @ 1.172e-17, Nmax: 250000

This island has period 1312.

# Seahore Valley Islands

Here are the first few islands in the sequence R2F(N/2N+1B2)S:

| Rank | R2-Name      | period | Area of Island | Coordinates                      |
|------|--------------|--------|----------------|----------------------------------|
| 6    | R2F(1/3B2)S  | 5      | 1.7621(15)e-5  | -0.04332 + 0.98630i @ 0.01259    |
| 10   | R2F(2/5B2)S  | 7      | 9.9155(63)e-6  | -0.530101 + 0.668180i @ 0.009447 |
| 16   | R2F(3/7B2)S  | 9      | 5.5912(42)e-6  | -0.650450 + 0.478065i @ 0.007094 |
| 18   | R2F(4/9B2)S  | 11     | 3.1257(30)e-6  | -0.694716 + 0.368453i @ 0.005304 |
| 32   | R2F(5/11B2)S | 13     | 1.7841(16)e-6  | -0.715175 + 0.298825i @ 0.004007 |
| 48   | R2F(6/13B2)S | 15     | 1.05522(65)e-6 | -0.726129 + 0.251068i @ 0.003082 |
| 72   | R2F(7/15B2)S | 17     | 6.4982(45)e-7  | -0.732630 + 0.216394i @ 0.002418 |
| 102  | R2F(8/17B2)S | 19     | 4.1631(34)e-7  | -0.736790 + 0.190113i @ 0.001936 |
| 127  | R2F(9/19B2)S | 21     | 2.7639(27)e-7  | -0.739610 + 0.169522i @ 0.001577 |

## Computing $\pi$ in Seahorse Valley

An approximation to the mathematical constant  $\pi$  ("pi") can be calculated in the following way:

$$\pi \cong \varepsilon \text{Dwell}(-3/4 + \varepsilon) \pm \varepsilon$$

where  $\varepsilon$  ("epsilon") is a very small value, like 0.0001. For example, `Dwell(-3/4+0.01i)` is 315, giving the approximation  $\pi \approx 3.15$ . The following results were computed using [107-bit precision](#):

| $C$              | Dwell( $C$ ) |
|------------------|--------------|
| $-3/4 + 1.0$     | 3            |
| $-3/4 + 0.1$     | 33           |
| $-3/4 + 0.01$    | 315          |
| $-3/4 + 0.001$   | 3143         |
| $-3/4 + 10^{-4}$ | 31417        |

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| -3/4 + 10 <sup>-5</sup>  | 314160     |
| -3/4 + 10 <sup>-6</sup>  | 3141593    |
| -3/4 + 10 <sup>-7</sup>  | 31415927   |
| -3/4 + 10 <sup>-8</sup>  | 314159266  |
| -3/4 + 10 <sup>-9</sup>  | 3141592655 |
| -3/4 + 10 <sup>-10</sup> | 3141592657 |

Dwell(C) is the number of iterations for the normal Mandelbrot iteration to "escape" with a normal "escape radius" of 2.0; see [Escape-Iterations](#). The numbers (3, 33, 315, 3143, ...) are Sloane's integer sequence [A097486](#) (which I have corrected and extended) The sequence is calculated easily in any language that handles floating-point complex values. Here I am using PARI/GP, and the first long line of input should all be typed as a single line:

```
? A097486(n) = local(a, c, z); c = 0.1^n*I - 0.75; z = 0; a = 0; while(abs(z) < 2.0, { z = z^2+c; a = a+1 } ); a
? A097486(0)
%1 = 3
? A097486(1)
%2 = 33
? A097486(2)
%3 = 315
? A097486(3)
%4 = 3143
? A097486(4)
%5 = 31417
? A097486(5)
%6 = 314160
? A097486(6)
%7 = 3141593
? A097486(7)
%8 = 31415927
? A097486(8)
%9 = 314159266
```

---

revisions: 20080216 oldest on record; 20091105 add list of sequence R2F( $N/2N+1B2$ ) S islands; 20091220 add {pi} calculation section; 20091221 add list of {pi} values; 20100107 add PARI/GP code; 20100907 optimize view nmax values; 20100919 add many notes, links and R2-names in descriptions; 20100922 add [double spirals](#) link

---

From the Mandelbrot Set Glossary and Encyclopedia, by Robert Munafo, (c) 1987-2022. [Mu-ency index](#)

Robert Munafo's home pages on [AWS](#) © 1996-2022 Robert P. Munafo. [about](#) [contact](#)  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Details [here](#).  
This page was written in the "embarrassingly readable" markup language [RHTF](#), and was last updated on 2012 Mar 16. 