

Zusatzaufgabe 7.1

Um die Störsicherheit bei der Datenübertragung zu erhöhen und Übertragungsfehler zu erkennen, kann man die Daten in geeigneter Weise codieren. Will man beispielsweise bei der Übertragung eines Datenworts sicher das Kippen eines einzelnen Bits erkennen können, verwendet man eine Codierung, bei der sich alle gültigen Codeworte in mindestens 2 Bit voneinander unterscheiden. Man sagt dann, dass der Code die Hamming-Distanz (HD) von 2 hat. Allerdings lässt sich dadurch weniger Nutzinformation übertragen, da z. B. in einem 8-Bit-Wort die Hälfte der 2^8 möglichen Bitmuster zu ungültigen Codeworten wird. Kippen bei der Übertragung 2 oder mehr Bits, lässt sich das in diesem Fall nicht mehr sicher erkennen. Man kann jedoch Codes mit größerer Hamming-Distanz verwenden, wobei jeweils das Kippen von bis zu $(HD - 1)$ Bit als Fehler erkannt wird.

Im Folgenden wird die Übertragung von 8-Bit-Worten betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Bit richtig empfangen wird, beträgt 0,75.

- Ermitteln Sie die Dichtefunktion $f_X(x)$, wobei X die Zahl der fehlerhaft übertragenen Bits beim einmaligen Übertragen eines Datenworts ist.
- Es wird ein Code mit der Hamming-Distanz $HD = 2$ verwendet. Die Zufallsvariable Y ist folgendermaßen definiert:

$$Y = \begin{cases} 0 & , \text{ falls ein Wort fehlerfrei übertragen wird} \\ 1 & , \text{ falls ein Übertragungsfehler auftritt, der erkannt wird} \\ 2 & , \text{ falls ein nicht erkennbarer Übertragungsfehler auftritt} \end{cases}$$

Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ an.

- Wie groß muss die Hamming-Distanz gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen unerkannten Übertragungsfehler kleiner als 0,1 ist?