Grundlagen und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Lösungsvorschläge der Zusatzaufgaben Litz

08.12.2017

3.1 $P(A) = \frac{\text{günstige Elementarereignisse}}{\text{mögliche Ereignisse}} = \frac{18}{36} = 0.5$
$P(B) = \frac{18}{36} = 0.5$
$P(C) = \frac{11}{36}$
$P(D) = 1$

3.2 a) Fehlerwahrscheinlichkeit $\leq 10\%$

$v = \frac{\text{Dauer Grünphase}}{\text{Dauer Ampelzyklus}}$ mit $\epsilon = \pm 0.1$

gesucht: N_{min}

Hinweis: Wir wissen nach Lit_15a (3.7):

$P(|r_{\text{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) < \frac{P(A)\cdot(1-P(A))}{N\epsilon^2} \leq \frac{1}{4N\epsilon^2}$

$P(|r_{\text{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4N\epsilon^2}$

Es soll gelten: $P(|r_{\text{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) \leq 0.1$

Dies schätzen wir über die Schranke ab:

$P(|r_{\text{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4\cdot N\cdot(0.1)^2} \leq 0.1$

$\frac{1}{N} \leq 0.004$

$N \geq 250$

Ab 250 Tagen ist die Aussage also möglich.

b) Gegeben: N=40, Wahrscheinlichkeit: 90%

Gesucht: ϵ

Anwendung Bernoulli-Ungleichung:
$P(|r_{\text{N}}(A) - P(A)| \leq \epsilon) = 90\%$

Problem: nicht direkt anwendbar! über Gegenereignis:
$P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| \leq \epsilon) = 1 - P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) = 90\%$

$\Leftrightarrow P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) = 1 - 90\% = 0.1$

$\Leftrightarrow P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4N\epsilon^2} = 0.1$

$\Leftrightarrow \epsilon^2 = \frac{10}{4N} = \frac{10}{4 \cdot 40} = \frac{1}{16}$

$\epsilon = \pm 0.25$

c) Bekannt: Dauer Rotphase $= 2*$ Dauer Grünphase
N$=$ 40 Tage
$\epsilon = \pm 0.2$

Gesucht: P

$P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) < \frac{P(A) \cdot (1 - P(A))}{N\epsilon^2}$
$P(A) = \frac{1}{3}$

$P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| > \epsilon) < \frac{\frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3})}{40 \cdot (0.2)^2} = \frac{\frac{2}{9}}{40 \cdot (0.04)}$

$1 - P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| \leq \epsilon) < \frac{5}{36}$

$P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| \leq \epsilon) > \frac{31}{36}$

$P(|r_{\mathsf{N}}(A) - P(A)| \leq \epsilon) > 81.6\%$

4.1 a) $P_{\mathsf{a}} = P(A) = r_{\mathsf{N}}(A) = \frac{4}{100000} = 0.0004\%$

b) $P_{\mathsf{b}} = P(F_{\mathsf{Sub}}) = \sum_{i=1}^{4} P(F_{\mathsf{Sub}}\,|Typ_{\mathsf{i}}) * P(Typ_{\mathsf{i}})$

$= P(F_{\mathsf{Sub}}|A) * P(A) + P(F_{\mathsf{Sub}}|B) * P(B) + P(F_{\mathsf{Sub}}|C) * P(C) + P(F_{\mathsf{Sub}}|D) * P(D)$

$= \frac{11}{100000} * \frac{1}{4} + \frac{0}{100000} * \frac{1}{4} + \frac{3}{100000} * \frac{1}{4} + \frac{5}{100000} * \frac{1}{4}$

$= \frac{19}{400000} = 0.0000475 = 0.00475\%$

c) $P_{\mathsf{c}} = P(F) = P(F|Add) * P(Add) + P(F|Sub) * P(Sub) + P(F|Mul) * P(Mul) + P(F|Div) * P(Div)$

$= \frac{9+5+4+1}{400000} * \frac{1}{4} + \frac{11+0+5+3}{400000} * \frac{1}{4} + \frac{18}{400000} * \frac{1}{4} + \frac{3+4+7+586}{400000} * \frac{1}{4}$

$= \frac{656}{1600000} = 0.00041 = 0.041\%$

d) Bayes' Form:
$P(D/F_{\mathsf{Div}}) = \frac{P(F_{\mathsf{Div}}/D)\cdot P(D)}{P(F_{\mathsf{Div}}/A)\cdot P(A)+P(F_{\mathsf{Div}}/B)\cdot P(B)+P(F_{\mathsf{Div}}/C)\cdot P(C)+P(F_{\mathsf{Div}}/D)\cdot P(D)}$

$= \frac{\frac{586}{100000}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{100000}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{100000}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{100000}\cdot\frac{1}{4}+\frac{586}{100000}\cdot\frac{1}{4}}$

$= \frac{586}{600} = 97.67\%$

e) zu zeigen: $P(F_{\mathsf{Div}}/D) = P(F_{\mathsf{Div}}/\bar{D})$

$\Rightarrow \frac{586}{100000} \neq \frac{14}{300000}$

$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

4.2 a) $\int f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$

$f'(\frac{L}{2}) = 0$
$\Rightarrow 2a\cdot(\frac{L}{2}) + b = 0$
$\Leftrightarrow a\cdot L + b = 0$
$\Leftrightarrow a\cdot L = -b$
$\Rightarrow \boldsymbol{b = -a\cdot L}$

$f(0) = f(L) = c = 2\cdot f(\frac{L}{2})$
$c = 2\cdot(a\cdot(\frac{L}{2})^2 + b\cdot\frac{L}{2} + c)$
$c = 2\cdot(a\cdot\frac{L^2}{4} + b\cdot\frac{L}{2} + c)$
$c = 2\cdot(a\cdot\frac{L^2}{4} - a\cdot\frac{L^2}{2} + c)$
$c = 2\cdot\frac{aL^2}{4} - 2\cdot\frac{aL^2}{2} + 2c)$
$-c = \frac{aL^2}{2} - 2\cdot\frac{aL^2}{2} = -\frac{aL^2}{2}$

$\boldsymbol{c = \frac{aL^2}{2}}$

$\int_0^L f(x) = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}(-aL)x^2 + a\cdot\frac{L^2}{2}x\right]$

$= \frac{1}{3}aL^3 + \frac{1}{2}(-a)L^3 + a\cdot\frac{L^3}{2}$

$= \frac{1}{3}aL^3$

$= \frac{1}{3}aL^3 \stackrel{!}{=} 1$

$\Leftrightarrow al^3 = 3$

$\Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{3}{L^3}}$

eingesetzt in b: $b = -(\frac{3}{L^3})\cdot L = \frac{-3}{L^2}$

eingesetzt in c: $c = \frac{3}{L^3} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{3}{2L}$
damit ergibt sich $f(x) = \frac{3}{L^3} \cdot x^2 - \frac{3}{L^2} \cdot x + \frac{3}{2L}$

b) $\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{3}{L^3} \cdot x^2 - \frac{3}{L^2} \cdot x + \frac{3}{2L}$

$= [\frac{x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{3x}{2L}]$

$= \frac{\frac{L}{4}^3}{L^3} - \frac{3\frac{L}{4}^2}{2L^2} + \frac{3\frac{L}{4}}{2L} - 0$

$= \frac{L^3}{64L^3} - \frac{3L^2}{32L^2} + \frac{3L}{8L}$

$= \frac{1}{64} - \frac{3}{32} + \frac{5}{8}$

$= 0.2968$

wegen Symmetrie ist: 1,2,3 $\int_{\frac{3L}{4}}^{L} f(x)dx = \int_0^{\frac{L}{4}} = 0.2968$

$\int_{\frac{3L}{4}}^{L} f(x)dx + \int_0^{\frac{L}{4}} = 0.59375$

$P(\text{innen}) = 1 - 0.59375 = 0.40625$

$\frac{P(\text{innen})}{P(\text{außen})} = 1.461$

5.1 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, da P(A \cap B) = \{2\}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$

stochastisch abhängig und nicht disjunkt!

5.2 a) $P_\text{a} = \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 0.9298 = 92.98\%$

b) $P_\text{b} = \binom{10}{10} \cdot 0.1^{10} \cdot 0.9^0 = 10^{\text{-}10}$

6.1 a) $P_\text{a} = 1 - P_{20,0} = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{20} = 0.1821 = 18.21\%$

b) $P_\text{b} = 1 - P_{\text{n, }0} = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^\text{n} > 0.5$
$\Leftrightarrow (0.99)^\text{n} < 0.5$
$\Leftrightarrow e^{\text{nln}(0.99)} < 0.5$
$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0.99) < \ln(0.5)$
$\Leftrightarrow n > 68.97$
$\Leftrightarrow n = 69$

c) gesucht: 3 von 5 defekt

$DDD\bar{D}\bar{D} = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{17} \cdot \frac{16}{16} = \frac{1}{1140}$

5 über 3 mögliche Anordnungen: $\binom{5}{3} = 10$

$P_{\mathsf{c}} = 10 \cdot \frac{1}{1140} = 8.77 \cdot 10^{-3}$

d) P_{d} = PC ist funktionsfähig, d.h. 10 Bauteile müssen funktionsfähig sein

$P_{10,10} = \binom{10}{10} \cdot 0.99^{10} \cdot 0.01^{0} = 0.9044$

e) $P_{\mathsf{e}} = P(x > 1)/P(x > 0) = \frac{P((x>1)\cap(x>0))}{P(x>0)}$

$= \frac{P(x>1)}{P(x>0)} = \frac{1-P(x\leq 1)}{1-P(x=0)}$

$= \frac{1-P_{\mathsf{d}}-P_{10,9}}{1-P_{\mathsf{d}}}$

$= \frac{1-0.9044-\binom{10}{9}\cdot 0.99^{9}\cdot 0.01^{1}}{1-0.9044}$

$= 0.0444$

f) weniger als 2 defekt, 0 defekt + 1 defekt

$P_{\mathsf{f}} = \binom{30}{0} \cdot 0.0956^{0} \cdot 0.9044^{30} + \binom{30}{1} \cdot 0.0956^{1} \cdot 0.9044^{29}$
$= 0.2047$

7.1 a) P(Bit falsch empfangen)$= 0.25$

$P_{\mathsf{a}} = \binom{8}{x} \cdot 0.25^{x} \cdot 0.75^{8-x}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_{8,x}$	0.1	0.27	0.31	0.21	0.087	0.023	0.0038	0.00037	0.000015

b) $F_{\mathsf{y}}(0) = P(X = 0) = 0.1$

$F_{\mathsf{y}}(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.37$

$F_{\mathsf{y}}(2) = 0.37 + P(X \geq 2) = 1$

c) $P(X > 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0.63$
$P(X > 2) = 0.63 - P(X = 2) = 0.32$
$P(X > 3) = 0.32 - P(X = 3) = 0.11$
$P(X > 4) = 0.11 - P(X = 4) = 0.023$
$\rightarrow$ HD muss 5 sein.

8.1 a) $f_{\mathsf{uR}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{20V} & -5 \leq U_{\mathsf{R}} \leq 15V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f_{\mathsf{p}}(p) = \begin{cases} 0 & p < 0W \\ \frac{\sqrt{50\Omega}}{20V \cdot \sqrt{p}} & 0 \leq p < 0.5W \\ \frac{\sqrt{50\Omega}}{40V \cdot \sqrt{p}} & 0.5W \leq p < 4.5W \\ 0 & p \geq 4.5W \end{cases}$

c) $f_{\mathsf{p}}(p) = \begin{cases} 0 & p < 0 \\ \frac{1}{4}\delta(p) & p = 0 \\ \frac{\sqrt{50\Omega}}{40V \cdot \sqrt{p}} & 0 < p < 4.5W \\ 0 & p \geq 4.5W \end{cases}$

9.1 a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^{100} c \cdot sin(\tfrac{\pi}{100}x)dx = 1$$
$$= [-c \cdot \tfrac{100}{\pi} \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x)]$$
$$= -c \cdot \tfrac{100}{\pi}[-1-1]$$
$$\Rightarrow c = \tfrac{\pi}{200}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{200} \cdot sin(\frac{\pi}{100}x) & 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

b) partielle Itegration oder mit geometrischer Überlegung

$$\int_0^{100} x \cdot f_{\mathsf{x}}(x)dx$$
$$\int_0^{100} x \cdot \tfrac{\pi}{200} \cdot sin(\tfrac{\pi}{100}x)dx$$
$$= [-\tfrac{100}{\pi} \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x) \cdot x \cdot \tfrac{\pi}{200}] - \int_0^{100} \tfrac{\pi}{200} \cdot (\tfrac{-100}{\pi}) \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x)dx$$
$$= -\tfrac{100}{\pi} \cdot (-1) \cdot \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{-100}{\pi} \cdot 1 - \int_0^{100} \tfrac{\pi}{200} \cdot (\tfrac{-100}{\pi}) \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x)dx$$
$$= \tfrac{100}{\pi} \cdot \tfrac{\pi}{2} + 0 - \int_0^{100} \tfrac{\pi}{200} \cdot (\tfrac{-100}{\pi}) \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x)dx$$
$$= 50 - \int_0^{100} (-\tfrac{1}{2}) \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x)dx$$
$$= 50 + \tfrac{1}{2}\int_0^{100} cos(\tfrac{\pi}{100}x)dx$$
$$= 50 + \tfrac{1}{2} \cdot [\tfrac{100}{\pi} \cdot sin(\tfrac{\pi}{100}x)]$$
$$= 50 + \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{100}{\pi} \cdot 0 - \tfrac{100}{\pi} \cdot 0) = 50$$

c) $\sigma_{\mathsf{x}}{}^2 = E(x^2) - \mu_{\mathsf{x}}{}^2)$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathsf{x}}(x) - \mu_{\mathsf{x}}{}^2$$
$$= \int_0^{100} x^2 \tfrac{\pi}{200} \cdot sin(\tfrac{\pi}{100}x)dx - \mu_{\mathsf{x}}{}^2$$
$$= \tfrac{\pi}{200}[\tfrac{2x}{\frac{\pi^2}{100^2}} \cdot sin(\tfrac{\pi}{100}x) - (\tfrac{x^2}{\frac{\pi}{100}} - \tfrac{2}{\frac{\pi^3}{100^3}}) \cdot cos(\tfrac{\pi}{100}x)]$$
$$= \tfrac{\pi}{200}((\tfrac{100 \cdot 100^2}{\pi} - \tfrac{2 \cdot 100^3}{\pi^3}) - \tfrac{2 \cdot 100^3}{\pi^3}) - 50^2$$
$$= 2973,58 - 2500 = 473.58$$
$$\sigma_{\mathsf{x}} = 21.76$$

10.1 a) $p = \frac{1}{N}, n = N$

P(alle fehlerfrei)= P(keine fehlerhaft)

$P_{5a} = \binom{N}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^N$
$= (1-p)^N = (1 - \frac{1}{N})^N$

b) Näherung für P_{5a} mittels Poisson:

Ges: $\left|\widetilde{P_{5a}} - P_{5a}\right| < 0.0179$

$\widetilde{P_{5a}} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
$\lambda = n \cdot p$
$k = 0, n = N, p = \frac{1}{N}$
$\rightarrow \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-np}$
$= \frac{1^0}{1} \cdot e^{-1}$
$= 0.368$

eingesetzt für $\widetilde{P_{5a}}$:

$|0.368 - P_{5a}| \overset{!}{<} 0.0179$

1: $P_{5a} < 0.3859$ *ungünstig, siehe Grafik*
2: $P_{5a} < -0.3501$ *da aber* P_{5a} *betragsmäßig ist gilt:*
$P_{5a} > 0.3501$ *hier in Grafik ablesbar*

laut Grafik ergibt sich dann für $N_{min} = 11$

c) Binomialverteilung:
${\sigma_x}^2 = np(1-p)$
$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} N (1 - \frac{1}{N})} = \sqrt{1 - \frac{1}{N}}$

Poissonverteilung:
${\sigma_x}^2 = \lambda$
$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\lambda} = \sqrt{np} = 1$

11.1 a) $P_a = P(\text{Widerstand außerhalb der Toleranz})$
$= P(R' < 196\Omega) + P(R' > 204\Omega)$
$R' = \sigma R + \mu = 2\Omega R + 202\Omega$

$P_a = P(2\Omega R + 202\Omega < 196\Omega) + P(2\Omega R + 202\Omega > 204\Omega)$
$= P(R < -3) + P(R > 1)$
$= F(-3) + 1 - F(1)$
$= 1 - \phi(-(-3)) + 1 - \phi(1)$
$= 2 - \phi(3) - \phi(1)$
$= 2 - 0.9987 - 0.84 = 0.1613$ (Tabelle)

b) $\mu_R = 200\Omega$ bei $P_a = 10\%$
$R'' = \sigma_b R + 200\Omega$

$P(R'' < 196\Omega) + P(R'' > 204\Omega) \stackrel{!}{=} 0.1$
$P(\sigma_b R + 200\Omega < 196\Omega) + P(\sigma_b + 200\Omega > 204\Omega) = 0.1$
$P(R < -\frac{4\Omega}{\sigma_b}) + P(R > -\frac{4\Omega}{\sigma_b}) = 0.1$
$\Rightarrow 1 - \phi(\frac{4\Omega}{\sigma_b}) + 1 - \phi(\frac{4\Omega}{\sigma_b}) = 0.1$
$\Rightarrow \phi(\frac{4\Omega}{\sigma_b}) = 0.95$
$\Rightarrow (\frac{4\Omega}{\sigma_b}) = 1.645$
$\sigma_b = 2.432$

11.2 $f_x(x)$ Gauß
$\mu_x = 1V$
${\sigma_x}^2 = 0.25V^2$

$Y = g(X) = 2X + 1.5V$
$\Rightarrow X = \frac{1}{2}(y - 1.5V)$
$g'(X) = 2$

$f_y(y) = \frac{f_x(\frac{1}{2}(y-1.5V))}{2}$

Gauß: $f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x+\mu_x)^2}{2{\sigma_x}^2}}$

in $f_y(y)$ eingesetzt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.25V^2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-((\frac{1}{2}(y-1.5V))-1V)^2}{0.5V^2}}$
$= \frac{1}{1V\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\frac{(y-\frac{7}{2}V)^2}{0.5V^2}}$
$= \frac{1}{1V\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\frac{7}{2}V)^2}{2V^2}}$
$\Rightarrow \mu_y = \frac{7}{2}V$ und $\sigma_y = 1V$

12.1 System S funktionsfähig
$(K_1 \cup K_2) \cap K_3$

Gesucht: $F_T(t)$ Verteilungsfunktion der Lebensdauer T des Gesamtsystems
Bekannt: Für Exponentialverteilung gilt: Die Zuverlässigkeitsfunktion $R(t)$ ist definiert mit $R(t) = 1 - F_T(t) = e^{-\lambda t}$
Bei Parallelschaltungen gilt: $R_{ges}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - R_i(t)]$
(Zuverlässigkeit des Systems ist gegeben über die Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass alle Komponenten gleichzeitig ausfallen)
Bei Serienschaltungen gilt: $R_{ges}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$
(Zuverlässigkeit des Systems ist gegeben über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass eine Komponente ausfällt)

$\rightarrow F_T(t) = 1 - R_{ges}(t)$

$R_{ges}(t) = R_{12}(t) \cdot R_3(t)$ (Serienschaltung)
$R_{12}(t) = 1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t))$ (Parallelschaltung)
$R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$
$R_{ges}(t) = [1 - (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t})]e^{-\lambda_3 t}$
$F_T(t) = 1 - [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t}] \cdot e^{-\lambda_3 t}$

Alternativ:
$F_T(t) = 1 - P(T > t)$
$F_T(t) = 1 - [P((T_1 > t) \cup (T_2 > t)) \cap P(T_3 > t)]$
(Entspricht dem Gegenereignis zu K1 oder K2 fällt nicht aus und K3 fällt nicht aus)
$F_T(t) = 1 - [P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - P(T_1 > 1) \cdot P(T_2 > t)] \cdot P(T_3 > t)$
(Vereinigungsmenge = Menge1 + Menge2 - Schnittmenge)
$P(T_i > t) = e^{-\lambda t}$
$F_T(t) = 1 - [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t}] \cdot e^{-\lambda_3 t}$
$F_T(t) = 1 - [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}] \cdot e^{-\lambda_3 t}$