

Zusatzaufgabe 14.2

①

Verbundnormalverteilung: $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{16\pi} e^{-\frac{x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 40}{32}}$

a) Randdichtefunktion $f_x(x)$:

Brady: $-x^2 - 4y^2 - 4x + 2y - 40 = -(x+2)^2 + 4 - 4(y-3)^2 + 36 - 40$
 $= -(x+2)^2 - 4(y-3)^2$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{16\pi} e^{-\left[\frac{(x+2)^2}{32} + \frac{4(y-3)^2}{32}\right]} \\ &= \frac{1}{16\pi} e^{-\frac{(x+2)^2}{32}} \cdot e^{-\frac{(y-3)^2}{8}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{2 \cdot 4^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-3)^2}{2 \cdot 2^2}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} e^{-\frac{(x+2)^2}{2 \cdot 4^2}}}_{f_x(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(y-3)^2}{2 \cdot 2^2}}}_{f_y(y)} \end{aligned}$$

$\sigma_x = 4$
 $\mu_x = -2$

$\sigma_y = 2$
 $\mu_y = 3$

$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} e^{-\frac{(x+2)^2}{2 \cdot 4^2}}$

b) $P(-0,4 \leq x \leq 2,8, -0,8 \leq y \leq 5,4) = P(-0,4 \leq x \leq 2,8) \cdot P(-0,8 \leq y \leq 5,4)$

Transformation: $X = \sigma_x \cdot Z_n + \mu_x$
 $= 4 \cdot Z_n - 2$

$Y = \sigma_y \cdot Z_n + \mu_y$
 $= 2 \cdot Z_n + 3$

$P(-0,4 \leq x \leq 2,8) = P(-0,4 \leq 4Z_n - 2 \leq 2,8) \quad P(-0,8 \leq y \leq 5,4) = P(-0,8 \leq 2Z_n + 3 \leq 5,4)$

$= P(0,4 \leq Z_n \leq 1,2)$

$= P(-1,9 \leq Z_n \leq 1,2)$

$= \Phi(1,2) - \Phi(0,4)$

$= \Phi(1,2) - 1 + \Phi(1,9)$

$= 0,8849 - 0,6554$

$= 0,8849 - 1 + 0,9713$

$= 0,2295$

$P_b = 0,1965 = 19,65\%$

Tabelle 11.2
S. 127