

Grundlagen und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Lösungsvorschläge der Zusatzaufgaben Litz

08.12.2017

3.1 $P(A) = \frac{\text{günstige Elementarereignisse}}{\text{mögliche Ereignisse}} = \frac{18}{36} = 0.5$

$$P(B) = \frac{18}{36} = 0.5$$

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

$$P(D) = 1$$

3.2 a) Fehlerwahrscheinlichkeit $\leq 10\%$

$$v = \frac{\text{Dauer Grünphase}}{\text{Dauer Ampelzyklus}} \text{ mit } \epsilon = \pm 0.1$$

gesucht: N_{\min}

Hinweis: Wir wissen nach Lit_15a (3.7):

$$P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) < \frac{P(A) \cdot (1 - P(A))}{N\epsilon^2} \leq \frac{1}{4N\epsilon^2}$$

$$P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4N\epsilon^2}$$

$$\text{Es soll gelten: } P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) \leq 0.1$$

Dies schätzen wir über die Schranke ab:

$$P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4 \cdot N \cdot (0.1)^2} \leq 0.1$$

$$\frac{1}{N} \leq 0.004$$

$$N \geq 250$$

Ab 250 Tagen ist die Aussage also möglich.

b) Gegeben: $N=40$, Wahrscheinlichkeit: 90%

Gesucht: ϵ

Anwendung Bernoulli-Ungleichung:

$$P(|r_N(A) - P(A)| \leq \epsilon) = 90\%$$

Problem: nicht direkt anwendbar! über Gegenereignis:

$$P(|r_N(A) - P(A)| \leq \epsilon) = 1 - P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) = 90\%$$

$$\Leftrightarrow P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) = 1 - 90\% = 0.1$$

$$\Leftrightarrow P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) \leq \frac{1}{4N\epsilon^2} = 0.1$$

$$\Leftrightarrow \epsilon^2 = \frac{10}{4N} = \frac{10}{4 \cdot 40} = \frac{1}{16}$$

$$\epsilon = \pm 0.25$$

- c) Bekannt: Dauer Rotphase = 2* Dauer Grünphase
 $N = 40$ Tage
 $\epsilon = \pm 0.2$

Gesucht: P

$$P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) < \frac{P(A) \cdot (1 - P(A))}{N\epsilon^2}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(|r_N(A) - P(A)| > \epsilon) < \frac{\frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3})}{40 \cdot (0.2)^2} = \frac{\frac{2}{9}}{40 \cdot (0.04)}$$

$$1 - P(|r_N(A) - P(A)| \leq \epsilon) < \frac{5}{36}$$

$$P(|r_N(A) - P(A)| \leq \epsilon) > \frac{31}{36}$$

$$P(|r_N(A) - P(A)| \leq \epsilon) > 81.6\%$$

4.1 a) $P_a = P(A) = r_N(A) = \frac{4}{100000} = 0.0004\%$

b) $P_b = P(F_{\text{Sub}}) = \sum_{i=1}^4 P(F_{\text{Sub}} | Typ_i) * P(Typ_i)$

$$= P(F_{\text{Sub}}|A) * P(A) + P(F_{\text{Sub}}|B) * P(B) + P(F_{\text{Sub}}|C) * P(C) + P(F_{\text{Sub}}|D) * P(D)$$

$$= \frac{11}{100000} * \frac{1}{4} + \frac{0}{100000} * \frac{1}{4} + \frac{3}{100000} * \frac{1}{4} + \frac{5}{100000} * \frac{1}{4}$$

$$= \frac{19}{400000} = 0.0000475 = 0.00475\%$$

c) $P_c = P(F) = P(F|Add) * P(Add) + P(F|Sub) * P(Sub) + P(F|Mul) * P(Mul) + P(F|Div) * P(Div)$

$$= \frac{9+5+4+1}{400000} * \frac{1}{4} + \frac{11+0+5+3}{400000} * \frac{1}{4} + \frac{18}{400000} * \frac{1}{4} + \frac{3+4+7+586}{400000} * \frac{1}{4}$$

$$= \frac{656}{1600000} = 0.00041 = 0.041\%$$

d) Bayes' Form:

$$\begin{aligned}
 P(D/F_{\text{Div}}) &= \frac{P(F_{\text{Div}}/D) \cdot P(D)}{P(F_{\text{Div}}/A) \cdot P(A) + P(F_{\text{Div}}/B) \cdot P(B) + P(F_{\text{Div}}/C) \cdot P(C) + P(F_{\text{Div}}/D) \cdot P(D)} \\
 &= \frac{\frac{586}{100000} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{100000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{100000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{100000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{586}{100000} \cdot \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{586}{600} = 97.67\%
 \end{aligned}$$

e) zu zeigen: $P(F_{\text{Div}}/D) = P(F_{\text{Div}}/\bar{D})$

$$\Rightarrow \frac{586}{100000} \neq \frac{14}{300000}$$

 \Rightarrow stochastisch abhängig

4.2 a) $\int f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$
 $f(x) = ax^2 + bx + c$
 $f'(x) = 2ax + b$

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 \Rightarrow 2a \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + b &= 0 \\
 \Leftrightarrow a \cdot L + b &= 0 \\
 \Leftrightarrow a \cdot L &= -b \\
 \Rightarrow \mathbf{b} &= \mathbf{-a \cdot L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f(L) = c = 2 \cdot f\left(\frac{L}{2}\right) \\
 c &= 2 \cdot \left(a \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{L}{2} + c\right) \\
 c &= 2 \cdot \left(a \cdot \frac{L^2}{4} + b \cdot \frac{L}{2} + c\right) \\
 c &= 2 \cdot \left(a \cdot \frac{L^2}{4} - a \cdot \frac{L^2}{2} + c\right) \\
 c &= 2 \cdot \frac{aL^2}{4} - 2 \cdot \frac{aL^2}{2} + 2c \\
 -c &= \frac{aL^2}{2} - 2 \cdot \frac{aL^2}{2} = -\frac{aL^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{c = \frac{aL^2}{2}}$$

$$\int_0^L f(x) = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}(-aL)x^2 + a \cdot \frac{L^2}{2}x \right]$$

$$= \frac{1}{3}aL^3 + \frac{1}{2}(-a)L^3 + a \cdot \frac{L^3}{2}$$

$$= \frac{1}{3}aL^3$$

$$= \frac{1}{3}aL^3 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow al^3 = 3$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = \frac{3}{L^3}}$$

$$\text{eingesetzt in b: } b = -\left(\frac{3}{L^3}\right) \cdot L = \frac{-3}{L^2}$$

eingesetzt in c: $c = \frac{3}{L^3} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{3}{2L}$
 damit ergibt sich $f(x) = \frac{3}{L^3} \cdot x^2 - \frac{3}{L^2} \cdot x + \frac{3}{2L}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{3}{L^3} \cdot x^2 - \frac{3}{L^2} \cdot x + \frac{3}{2L} \\ &= \left[\frac{x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{3x}{2L} \right] \\ &= \frac{\frac{L}{4}^3}{L^3} - \frac{3 \frac{L}{4}^2}{2L^2} + \frac{3 \frac{L}{4}}{2L} - 0 \\ &= \frac{L^3}{64L^3} - \frac{3L^2}{32L^2} + \frac{3L}{8L} \\ &= \frac{1}{64} - \frac{3}{32} + \frac{5}{8} \\ &= 0.2968 \end{aligned}$$

wegen Symmetrie ist: 1,2,3 $\int_{\frac{3L}{4}}^L f(x)dx = \int_0^{\frac{L}{4}} = 0.2968$

$$\int_{\frac{3L}{4}}^L f(x)dx + \int_0^{\frac{L}{4}} = 0.59375$$

$$P(\text{innen}) = 1 - 0.59375 = 0.40625$$

$$\frac{P(\text{innen})}{P(\text{außen})} = 1.461$$

$$\mathbf{5.1} \quad A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \text{ da } P(A \cap B) = \{2\}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$$

stochastisch abhängig und nicht disjunkt!

$$\mathbf{5.2} \quad \text{a) } P_a = \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 0.9298 = 92.98\%$$

$$\text{b) } P_b = \binom{10}{10} \cdot 0.1^{10} \cdot 0.9^0 = 10^{-10}$$

$$\mathbf{6.1} \quad \text{a) } P_a = 1 - P_{20,0} = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{20} = 0.1821 = 18.21\%$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P_b &= 1 - P_{n,0} = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^n > 0.5 \\ &\Leftrightarrow (0.99)^n < 0.5 \\ &\Leftrightarrow e^{n \ln(0.99)} < 0.5 \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(0.99) < \ln(0.5) \\ &\Leftrightarrow n > 68.97 \\ &\Leftrightarrow n = 69 \end{aligned}$$

c) gesucht: 3 von 5 defekt

$$DDDD\bar{D} = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{17} \cdot \frac{16}{16} = \frac{1}{1140}$$

5 über 3 mögliche Anordnungen: $\binom{5}{3} = 10$

$$P_c = 10 \cdot \frac{1}{1140} = 8.77 \cdot 10^{-3}$$

d) $P_d = P_C$ ist funktionsfähig, d.h. 10 Bauteile müssen funktionsfähig sein

$$P_{10,10} = \binom{10}{10} \cdot 0.99^{10} \cdot 0.01^0 = 0.9044$$

$$e) P_e = P(x > 1) / P(x > 0) = \frac{P((x>1) \cap (x>0))}{P(x>0)}$$

$$= \frac{P(x>1)}{P(x>0)} = \frac{1-P(x \leq 1)}{1-P(x=0)}$$

$$= \frac{1-P_d-P_{10,9}}{1-P_d}$$

$$= \frac{1-0.9044-\binom{10}{9} \cdot 0.99^9 \cdot 0.01^1}{1-0.9044}$$

$$= 0.0444$$

f) weniger als 2 defekt, 0 defekt + 1 defekt

$$P_f = \binom{30}{0} \cdot 0.0956^0 \cdot 0.9044^{30} + \binom{30}{1} \cdot 0.0956^1 \cdot 0.9044^{29}$$

$$= 0.2047$$

7.1 a) $P(\text{Bit falsch empfangen}) = 0.25$

$$P_a = \binom{8}{x} \cdot 0.25^x \cdot 0.75^{8-x}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_{8,x}$	0.1	0.27	0.31	0.21	0.087	0.023	0.0038	0.00037	0.000015

b) $F_Y(0) = P(X = 0) = 0.1$

$$F_Y(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.37$$

$$F_Y(2) = 0.37 + P(X \geq 2) = 1$$

c) $P(X > 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0.63$

$$P(X > 2) = 0.63 - P(X = 2) = 0.32$$

$$P(X > 3) = 0.32 - P(X = 3) = 0.11$$

$$P(X > 4) = 0.11 - P(X = 4) = 0.023$$

→ HD muss 5 sein.

$$\begin{aligned}
 \text{8.1 a) } f_{uR}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{20V} & -5 \leq U_R \leq 15V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 \text{b) } f_p(p) &= \begin{cases} 0 & p < 0W \\ \frac{\sqrt{50\Omega}}{20V \cdot \sqrt{p}} & 0 \leq p < 0.5W \\ \frac{\sqrt{50\Omega}}{40V \cdot \sqrt{p}} & 0.5W \leq p < 4.5W \\ 0 & p \geq 4.5W \end{cases} \\
 \text{c) } f_p(p) &= \begin{cases} 0 & p < 0 \\ \frac{1}{4}\delta(p) & p = 0 \\ \frac{\sqrt{50\Omega}}{40V \cdot \sqrt{p}} & 0 < p < 4.5W \\ 0 & p \geq 4.5W \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{9.1 a) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{100} c \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx = 1 \\
 &= \left[-c \cdot \frac{100}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right)\right] \\
 &= -c \cdot \frac{100}{\pi} [-1 - 1] \\
 &\Rightarrow c = \frac{\pi}{200}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{200} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right) & 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) partielle Integration oder mit geometrischer Überlegung

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{100} x \cdot f_x(x)dx \\
 &= \int_0^{100} x \cdot \frac{\pi}{200} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx \\
 &= \left[-\frac{100}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right) \cdot x \cdot \frac{\pi}{200}\right] - \int_0^{100} \frac{\pi}{200} \cdot \left(\frac{-100}{\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx \\
 &= -\frac{100}{\pi} \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{100}{\pi} \cdot 1 - \int_0^{100} \frac{\pi}{200} \cdot \left(\frac{-100}{\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx \\
 &= \frac{100}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - \int_0^{100} \frac{\pi}{200} \cdot \left(\frac{-100}{\pi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx \\
 &= 50 - \int_0^{100} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx \\
 &= 50 + \frac{1}{2} \int_0^{100} \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx \\
 &= 50 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{100}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right)\right] \\
 &= 50 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{\pi} \cdot 0 - \frac{100}{\pi} \cdot 0\right) = 50
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sigma_x^2 &= E(x^2) - \mu_x^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) - \mu_x^2 \\
 &= \int_0^{100} x^2 \frac{\pi}{200} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right)dx - \mu_x^2 \\
 &= \frac{\pi}{200} \left[\frac{2x}{\frac{\pi}{100}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right) - \left(\frac{x^2}{100} - \frac{2}{\frac{\pi^3}{100^3}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{100}x\right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{200} \left(\left(\frac{100 \cdot 100^2}{\pi} - \frac{2 \cdot 100^3}{\pi^3}\right) - \frac{2 \cdot 100^3}{\pi^3} \right) - 50^2 \\
 &= 2973,58 - 2500 = 473,58 \\
 \sigma_x &= 21.76
 \end{aligned}$$

10.1 a) $p = \frac{1}{N}, n = N$

$$P(\text{alle fehlerfrei}) = P(\text{keine fehlerhaft})$$

$$P_{5a} = \binom{N}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^N \\ = (1-p)^N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

b) Näherung für P_{5a} mittels Poisson:

$$\text{Ges: } \left| \widetilde{P}_{5a} - P_{5a} \right| < 0.0179$$

$$\widetilde{P}_{5a} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$k = 0, n = N, p = \frac{1}{N}$$

$$\rightarrow \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-np}$$

$$= \frac{1^0}{1} \cdot e^{-1}$$

$$= 0.368$$

eingesetzt für \widetilde{P}_{5a} :

$$|0.368 - P_{5a}| \stackrel{!}{<} 0.0179$$

1: $P_{5a} < 0.3859$ ungünstig, siehe Grafik

2: $P_{5a} < -0.3501$ da aber P_{5a} betragsmäßig ist gilt:

$P_{5a} > 0.3501$ hier in Grafik ablesbar

laut Grafik ergibt sich dann für $N_{\min} = 11$

c) Binomialverteilung:

$$\sigma_x^2 = np(1-p)$$

$$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} N \left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{N}}$$

Poissonverteilung:

$$\sigma_x^2 = \lambda$$

$$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\lambda} = \sqrt{np} = 1$$

11.1 a) $P_a = P(\text{Widerstand außerhalb der Toleranz})$

$$= P(R' < 196\Omega) + P(R' > 204\Omega)$$

$$R' = \sigma R + \mu = 2\Omega R + 202\Omega$$

$$P_a = P(2\Omega R + 202\Omega < 196\Omega) + P(2\Omega R + 202\Omega > 204\Omega)$$

$$= P(R < -3) + P(R > 1)$$

$$= F(-3) + 1 - F(1)$$

$$= 1 - \phi(-(-3)) + 1 - \phi(1)$$

$$= 2 - \phi(3) - \phi(1)$$

$$= 2 - 0.9987 - 0.84 = 0.1613 \text{ (Tabelle)}$$

b) $\mu_R = 200\Omega$ bei $P_a = 10\%$
 $R'' = \sigma_b R + 200\Omega$

$$\begin{aligned} P(R'' < 196\Omega) + P(R'' > 204\Omega) &\stackrel{!}{=} 0.1 \\ P(\sigma_b R + 200\Omega < 196\Omega) + P(\sigma_b R + 200\Omega > 204\Omega) &= 0.1 \\ P(R < -\frac{4\Omega}{\sigma_b}) + P(R > -\frac{4\Omega}{\sigma_b}) &= 0.1 \\ \Rightarrow 1 - \phi\left(\frac{4\Omega}{\sigma_b}\right) + 1 - \phi\left(\frac{4\Omega}{\sigma_b}\right) &= 0.1 \\ \Rightarrow \phi\left(\frac{4\Omega}{\sigma_b}\right) &= 0.95 \\ \Rightarrow \left(\frac{4\Omega}{\sigma_b}\right) &= 1.645 \\ \sigma_b &= 2.432 \end{aligned}$$

11.2 $f_x(x)$ Gauß

$$\begin{aligned} \mu_x &= 1V \\ \sigma_x^2 &= 0.25V^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= g(X) = 2X + 1.5V \\ \Rightarrow X &= \frac{1}{2}(y - 1.5V) \\ g'(X) &= 2 \end{aligned}$$

$$f_y(y) = \frac{f_x\left(\frac{1}{2}(y-1.5V)\right)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Gauß: } f_x(x) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \\ \text{in } f_y(y) \text{ eingesetzt: } &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.25V^2} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{((\frac{1}{2}(y-1.5V))-1V)^2}{0.5V^2}} \\ &= \frac{1}{1V \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \frac{(y-\frac{7}{2}V)^2}{0.5V^2}} \\ &= \frac{1}{1V \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\frac{7}{2}V)^2}{2V^2}} \\ \Rightarrow \mu_y &= \frac{7}{2}V \text{ und } \sigma_y = 1V \end{aligned}$$

12.1 System S funktionsfähig

$$(K_1 \cup K_2) \cap K_3$$

Gesucht: $F_T(t)$

$$\begin{aligned} \rightarrow F_T(t) &= P(T \leq t) \text{ laut Aufgabenstellung} \\ &= 1 - (T > t) \\ &= 1 - [P((T_1 > t) \cup (T_2 > t)) \cap P(T_3 > t)] \\ &= 1 - [P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t)] \cdot P(T_3 > t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(T_i > t) &= e^{-\lambda t} \\ F_T(t) &= 1 - [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t}] \cdot e^{-\lambda_3 t} \\ &= 1 - [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}] \cdot e^{-\lambda_3 t} \end{aligned}$$