ZA 3.2

Auf der Fahrt zur Universität müssen sie jeden Morgen eine Ampelkreuzung überqueren. Der Zeitpunkt, zu dem sie an der Ampel eintreffen ist dabei zufällig. Sie wollen herausfinden, wie lang die Grünphase im Verhältnis zur Rotphase dauert (die Gelbphasen werden dabei der Rotphase zugeschlagen), und schreiben dazu jeden Tag mit, ob sie an der Ampel halten mussten oder nicht.

Zufallsexperiment: Überqueren einer Ampel an verschiedenen Tagen zu zufälligen Zeitpunkten.

Gesucht: Dauer der Grünphase im Verhältnis zur Rotphase

Tagebuch:

Ampel	grün	grün	rot	rot	grün	rot	
Tag	1	2	3	4	5	6	...
Halten	$\bar{H}$	$\bar{H}$	H	H	$\bar{H}$	H	

⇒ relative Häufigkeit

Ereignis A: Ampel ist Rot

Ereignis B: Ampel ist Grün

Versuche: Anzahl der Tage

$$r_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}, \quad r_n(B) = \frac{h_n(B)}{n}$$

ZA 3.2

a) Nach wievielen Tagen können Sie mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von höchstens 10 % sicher sein, dass sie das Verhältnis v der Dauer von Grünphase und der Dauer des gesamten Ampelzyklus mit einer Abweichung von höchstens $\pm 0{,}1$ bestimmen können?

Geg: Fehlerwahrscheinlichkeit $\leq 10\,\%$

$$v = \frac{\text{Dauer der Grünphase}}{\text{Dauer des Ampelzyklus}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \pm 0{,}1$$

$v \mathrel{\hat{=}} P(A)$ (Statistische Wahrscheinlichkeit nach Laplace)

Ges: N_{min}

Bernoulli-Ungleichung:

$$P\big(|\underbrace{r_N(A)}_{\text{relative Häufigkeit}} - \overbrace{P(A)}^{\text{statistische Wahrscheinlichkeit}}| > \varepsilon\big) < \frac{P(A)(1-P(A))}{N\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

N: Anzahl der Tage, ε: Abweichung

hier: $r_N(A)$ relative Häufigkeit

$\hat{=}$ Ergebnis der Strichliste nach

N Tagen (Näherungswert, für $N \to \infty$ zu realem Wert)

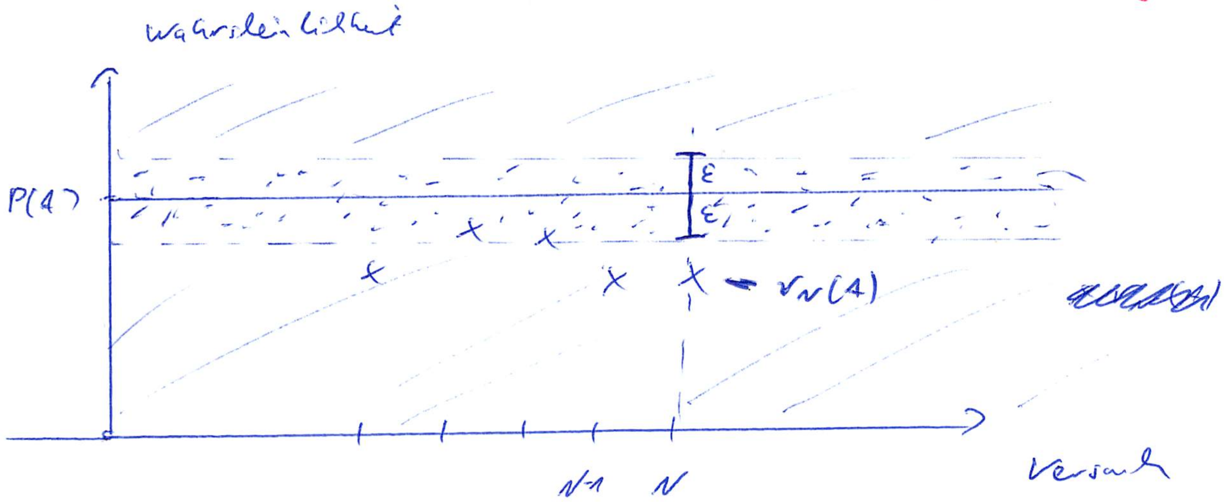
$$P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2} \overset{!}{\leq} 10\,\%$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4N\varepsilon^2} \leq 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{1}{4 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}1)^2} = 250$$

ZA 3.2

Bernoulli - Ungleichung



$P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon)$ Fehlerwahrscheinlichkeit

"Wahrscheinlichkeit, dass $r_N(A)$ außerhalb des Bandes um $P(A)$ liegt" nach dem N-ten Versuch"

$P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon) = 1 - P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon)$

Wahrscheinlichkeit für Lage innerhalb des Toleranzbereichs

"Wahrscheinlichkeit, dass $r_N(A)$ innerhalb des Toleranzbandes um $P(A)$ liegt" nach dem N-ten Versuch"

ZA 3.2

$N_{min} = 250$ Tage

Ab 250 Tagen ist die Aussage möglich!

b) In welchem Toleranzbereich um den wahren Wert wird der von Ihnen ermittelte Wert mit 90%-igen Wahrscheinlichkeit nach 40 Tagen liegen?

Gegeben: $N = 40$ Tage

Wahrscheinlichkeit $= 90\,\%$

Gesucht: ε

Toleranzbereich: $|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon$

$$-\varepsilon \leq r_N(A) - P(A) \leq +\varepsilon$$

Bernoulli-Ungleichung: $P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon) = 90\,\%$

Problem: nicht direkt anwendbar!

Lösung: Argumentation über Gegenereignis!

$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \iff P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon) = 1 - P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) = 90\,\%$$

$\Rightarrow P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$\Rightarrow P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4N\varepsilon^2} = 0{,}1$

$\Rightarrow$ $$\varepsilon^2 = \frac{1}{4 \cdot 40 \cdot 0{,}1} = \frac{1}{16}$$

$\Rightarrow$ $$\underline{\varepsilon = \pm 0{,}25}$$

ZA3.2

c) Sie erfahren, dass an dieser Ampel die Rotphase genau doppelt so lang ist wie die Grünphase. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens, dass der von Ihnen nach 40 Tagen ermittelte Wert keinen größeren Fehler als $\pm 0{,}2$ aufweist?

Geg: Dauer Rotphase = 2x Dauer Grünphase

$N = 40$ Tage

$\varepsilon = \pm 0{,}2$

Ges: Mindestwahrscheinlichkeit, so dass $|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon$

$P(A) = 1/3$

Bernoulli-Ungleichung: $P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) < \frac{P(A)(1-P(A))}{N\varepsilon^2}$

$\Rightarrow P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) < \frac{1/3\,(1-1/3)}{40 \cdot (0{,}2)^2} = \frac{5}{36}$

Gegenereignis: $P(|r_N(A) - P(A)| > \varepsilon) = 1 - P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon)$

$\Rightarrow 1 - P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon) < \frac{5}{36}$

$\Rightarrow P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon) > 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36} = 0{,}8611$

$\underline{P(|r_N(A) - P(A)| \leq \varepsilon) > 86{,}11\,\%}$