ZA 14.1

(a) Für welche Verbunddichtefunktion(en) sind die Zufallsvariable X und Y stochastisch unabhängig?

stochastische Unabhängigkeit $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

Bild 1 $\quad f_{XY_1}(x,y) = \frac{1}{4}\Big[\delta(x-1)\delta(y-1) + \delta(x-1)\delta(y+1) + \delta(x+1)\delta(y+1) +$

$\delta(x+1)\delta(y-1)\Big]$

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x+1) + \frac{1}{4}\delta(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)$$

$$f_{Y_1}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\delta(y-1) + \frac{1}{2}\delta(y+1)$$

$$f_{X_1}(x)\cdot f_{Y_1}(y) = \left(\frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)\right)\left(\frac{1}{2}\delta(y-1) + \frac{1}{2}\delta(y+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\delta(x-1)\delta(y-1) + \delta(x-1)\delta(y+1) + \delta(x+1)\delta(y-1) +$$

$$\delta(x+1)\delta(y+1)\Big] \stackrel{!}{=} f_{XY}(x,y)$$

$\Rightarrow$ X und Y stochastisch unabhängig

Z 1 14.1

Bild 2 $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}\Big[\delta(x-1)\delta(y) + \delta(x)\delta(y-1) + \delta(x)\delta(y+1) +$

$\delta(x+1)\delta(y)\Big]$

$$f_{X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \frac{1}{4}\{\delta(x-1) + \delta(x) + \delta(x) + \delta(x+1)\}$$

$$= \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x)$$

$$f_{Y_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \frac{1}{4}\big[\delta(y) + \delta(y-1) + \delta(y+1) + \delta(y)\big]$$

$$= \frac{1}{4}\delta(y-1) + \frac{1}{4}\delta(y+1) + \frac{1}{2}\delta(y)$$

$$f_{X_2}(x)\cdot f_{Y_2}(y) = \left(\frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x)\right)\left(\frac{1}{4}\delta(y-1) + \frac{1}{4}\delta(y+1) + \frac{1}{2}\delta(y)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\delta(x-1)\delta(y-1) + \frac{1}{16}\delta(x-1)\delta(y+1) + \ldots$$

$$\neq f_{XY}(x,y)$$

$\Rightarrow$ X und Y stochastisch abhängig

ZA 14.1

(b) Ermitteln Sie für beide Verbunddichtefunktionen den zugehörigen Korellationskoeffizienten r_{xy1} bzw. r_{xy2}

Bild 1:

stochastisch unabhängig $\Rightarrow$ $C_{xy1} = 0$

$$\Rightarrow \quad r_{xy1} = \frac{C_{xy1}}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

Bild 2

$C_{xy2} = E(X \cdot Y) - \mu_x \mu_y$ $\qquad E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$

$E(XY) = 0$ (mindestens eine ZV immer gleich 0)

$\mu_x = \mu_y = 0$ (Symmetrie)

$\Rightarrow C_{xy} = 0 \quad \Rightarrow r_{xy2} = 0$ (unkorelliert)

(c) Geben Sie die Werte der Verbundverteilungsfunktionen $F_{xy1}(x,y)$ und $F_{xy2}(x,y)$ an den Stellen $(x=0, y=-0{,}5)$ und $(x=0{,}5, y=0{,}5)$ an.

ZA 14.1

Bild 1

$F_{XY1}(0,-0{,}5) = P(X \leq 0, Y \leq -0{,}5)$

$= P(X=-1, Y=-1) = \frac{1}{4}$

$F_{XY1}(0{,}5, 0{,}5) = P(X \leq 0{,}5, Y \leq 0{,}5)$

$= P(X=-1, Y=-1) = 1/4$

Bild 2

$F_{XY2}(0,-0{,}5) = P(X \leq 0, Y \leq -0{,}5)$

$= P(X=0, Y=-1) = 1/4$

$F_{XY2}(0{,}5, 0{,}5) = P(X \leq 0{,}5, Y \leq 0{,}5)$

$= P(X=0, Y=-1) + P(X=-1, Y=0)$

$= 1/4 + 1/4 = 1/2$

(d) Skizzieren Sie für $f_{XY2}(x,y)$ die Randverteilungsfunktion $F_{X2}(x)$ $\qquad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$

$$F_{X2}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X2}(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4}\left[\delta(\tau-1) + \delta(\tau+1) - 2\delta(\tau)\right] d\tau$$

ZA 14.1

$$= \begin{cases} 0 , & x < -1 \\ 1/4 , & -1 \leq x < 0 \\ 3/4 , & 0 \leq x < 1 \\ 1 , & x \geq 1 \end{cases}$$