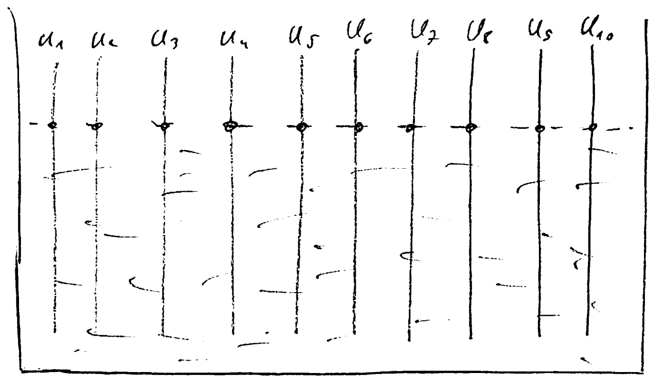
ZA 5.2

Gegeben: 10 Überwachungseinrichtungen $U_1 \ldots U_{10}$

U_i, $\forall i$ stochastisch unabhängig



Ereignis A_i: Überwachungseinrichtung U_i spricht an im Auslösefall

$P(A_i) = 0{,}9 \qquad i = 1, \ldots 10 \qquad\qquad P(A_i) = p, \; P(\bar{A}_i) = 1 - p$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_a, dass bei einem Auslösefall höchstens 2 der 10 Überwachungseinrichtungen nicht ansprechen?

Höchstens 2 $\Rightarrow$ 0, 1, 2 sprechen nicht an im Auslösefall

$\Rightarrow$ 10, 9, 8 von 10 sprechen an im Auslösefall

$P_a = P_{10,8} + P_{10,9} + P_{10,10}$ (Bernoulli-Experiment)

Ansatz: $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(B_{n,k}) \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Kommentar: Wahrscheinlichkeit $p_{n,k}$, dass das Ereignis A mit $P(A) = p$ in einem Bernoulli-Experiment vom Umfang n genau k mal eintritt.

$$P_a = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2 + \binom{10}{9} p^9 (1-p)^1 + \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0$$

$$= \frac{10!}{8!\,2!}\, 0{,}9^8\, 0{,}1^2 + \frac{10!}{9!\,1!}\, 0{,}9^9 \cdot 0{,}1 + \frac{10!}{10!\,0!}\, 0{,}9^{10} \cdot 1$$

ZA 5. 2

$P_a = 0,1937 + 0,3874 + 0,3487 = 0,9298$

$\underline{P_a = 92,98\,\%}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_b, dass bei einem Auslösefall keine der 10 Überwachungseinrichtungen anspricht?

P_b: Wahrscheinlichkeit, dass keine der Überwachungseinrichtungen im Auslösefall anspricht.

$P_b = P_{10,0} = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot (1-0,9)^{10} = 10^{-10}$

Bernoulli-Experiment:

→ n-malige Durchführung des gleichen Experiments

→ mögliche Ausgänge $A, \bar{A}$

→ n Einzelexperimente vollständig stochastisch unabhängig

$\Omega^{(i)} = A^{(i)} \cup \bar{A}^{(i)}, \quad i = 1 \ldots n$

$P(A^{(i)}) = P(A) = p$

Wahrscheinlichkeit $P(B_{n,k}) = p_{n,k}$ das A bei n-maliger Durchführung k-mal eintritt.

ZA 5.2

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1$$ $\Rightarrow$ Binomialverteilung