ZA 10.1

ZE: Herstellung von Glaskörper

Ereignis A: Glaskörper (1 kg) unbrauchbar mit $p = \frac{1}{N}$,

$N > 1 \in \mathbb{N}$

a) Wie groß ist in Abhängigkeit von N die Wahrscheinlichkeit P_{5a}, dass eine Lieferung von genau N Glaskolben von je 1 kg Gewicht fehlerfrei ist?

$P_{5a} = f(N)$ Lieferung von N Glaskolben (je 1 kg) fehlerfrei (Bernoulli-Experiment)

$$P_{5a} = P(\text{alle fehlerfrei}) = P(\text{keiner fehlerhaft})$$

$$= P_{N,0} = \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N = (1-p)^N$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

$$\underline{P_{5a} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N}$$

ZA 10.1

(b) Es sei $\hat{P}_{5a}$ die Näherung für P_{5a}, die man mit Hilfe der Poissonverteilung erhält. Wie groß muss $N = N_{min}$ mindestens sein, damit $\hat{P}_{5a}$ betragsmäßig um weniger als 0,0179 von P_{5a} abweicht?

$$P_{5a} \approx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Poisson}}}{\hat{P}_{5a}}$$

Bernoulli-Verteilung: $b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Poisson-Verteilung: $b(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $\lambda = np$

(kleines p und großes n)

Ges: $N = N_{min}$ für $|\hat{P}_{5a} - P_{5a}| \overset{!}{<} 0{,}0179$

$$\hat{P}_{5a} = b(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lambda = n \cdot p \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \underset{\substack{\uparrow \\ k=0 \\ n=N \\ p=\frac{1}{N}}}{=} \frac{1^0}{1} e^{-1} = 0{,}368$$

EA 10.1

$\underline{\hat{p}_{5a} = 0{,}368}$

$|0{,}368 - p_{5a}| < 0{,}0179$

1. Fall: $p_{5a} > 0{,}3501$ ← relevant für N_{min}!

2. Fall: $p_{5a} < 0{,}3859$

$p_{5a} > 0{,}3501 \underset{\text{Diagramm}}{\Rightarrow} N_{min} = 11$

$\underline{N_{min} = 11}$

(c) Die Zufallsvariable X bezeichnet die Zahl der unbrauchbaren Glaskolben in einer Lieferung von N Glaskolben. Geben Sie die Standardabweichung von X bei exakter Berechnung der Wahrscheinlichkeiten und bei Verwendung der Poisson-Verteilung an.

X: Anzahl unbrauchbarer Glaskolben in einer Lieferung von N Glaskolben

Binomialverteilung: $\sigma_X^2 = np(1-p)$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\tfrac{1}{N} N \left(1 - \tfrac{1}{N}\right)} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{N}}$$

ZA 10.1

Poissonverteilung: $\sigma_x^2 = 2$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2} = \sqrt{np} = 1$$