

ZA 4.1

	Typ	Anzahl	F_{add}	F_{sub}	F_{mul}	F_{div}
Add: 100 000	A	1	9	10	6	3
Sub: 100 000	B	1	5	0	8	4
Mul: 100 000	C	1	(9)	3	2	7
Div: 100 000	D	1	1	5	2	586

Annahme: $\forall N(A) = P(A) \dots \forall A \in \mathcal{ZV}$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{1a} , dass ein Prozessor vom Typ C bei einer Addition ein falsches Ergebnis liefert?

Ereignis: Ein Prozessor vom Typ C liefert ein falsches Ergebnis bei der Addition

$$P_{1a} = P(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Annahme}}}{=} N(A) = \frac{h_N(A)}{N} = \frac{9}{100000} = 0,004 \%$$

$$P_{1a} = 0,004 \% \quad \left(\hat{=} P(F_{add} / \text{Typ C}) \right)$$

(b) Zufallsexperiment: Mehrere Versuche unter dem selben Bedingungskomplex und mit nicht vorherbarem Ausgang bilden ein Zufallsexperiment

(Laplace-Experiment: Spezielles Zufallsexperiment, für das gilt:

$$LI: \Omega = \{w_1, \dots, w_n\} \quad n \text{ endlich}$$
$$LII: P(w_1) = \dots = P(w_n)$$

ZA 4.1.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{nc} , dass der zufällig ausgewählte Prozessor bei einer zufällig gewählten Rechenoperation ein falsches Ergebnis liefert?

Ereignis F : Zufällig gewählten Prozessor liefert ein falsches Ergebnis bei einer zufällig gewählten Rechenoperation.

$P(F)$ Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Prozessor bei irgendeiner Operation versagt. $\Leftarrow \{A, B, C, D\}$

\uparrow

$\{Add, Sub, Mul, Div\}$

$$P(F) = P(F/Add) \cdot P(Add) + P(F/Sub) \cdot P(Sub) + P(F/Mul) \cdot P(Mul) + P(F/Div) \cdot P(Div)$$

$P(Add)$

$$P(Add) = P(Sub) = P(Mul) = P(Div) = \frac{1}{4}$$

$$P(F/Add) = \frac{9+5+4+1}{4 \cdot 100\,000} = \frac{19}{400\,000}$$

$$P(F/Sub) = \frac{11+0+3+5}{4 \cdot 100\,000} = \frac{19}{400\,000} \quad (\text{Aufg. (b)})$$

$$P(F/Mul) = \frac{6+8+2+7}{4 \cdot 100\,000} = \frac{18}{400\,000}$$

$$P(F/Div) = \frac{3+4+7+586}{4 \cdot 100\,000} = \frac{600}{400\,000}$$

$$P(F) = \frac{656}{1\,600\,000} = 0,041 \%$$

$P(F) = 0,041 \%$

Z4.1

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{1b} , dass der zufällig ausgewählte Prozessor bei einer Subtraktion ein falsches Ergebnis liefert?

ZE: Zufällige Wahl eines Prozessors aus den Typen A, B, C, D

Ereignis F : Zufällig gewählter Prozessor liefert ein
○ falsches Ergebnis bei der Subtraktion

Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit:

$$P_{1b} = P(F_{\text{sub}}) = \sum_{i=1}^4 P(F_{\text{sub}} / \text{Typ}_i) \cdot P(\text{Typ}_i)$$

→ zufällig gewählter Prozessor kann von Typ A, B, C oder D sein

○ Problem: Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bei der Subtraktion

$$= P(F_{\text{sub}}/A) \cdot P(A) + P(F_{\text{sub}}/B) \cdot P(B) + \underbrace{P(F_{\text{sub}}/C)}_{\text{Aufg. 1a)}} \cdot P(C) + P(F_{\text{sub}}/D) \cdot P(D)$$

$$= \frac{11}{100\,000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{0}{100\,000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{100\,000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{100\,000} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{19}{400\,000} \quad (\hat{=} P(F/\text{Sub}))$$

$$\underline{P_{1b} = 0,00475\%}$$

ZAG. 1

(d) Bei einer Division tritt ein Fehler auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(D)$, dass es sich um einen Prozessor vom Typ D handelt?

Ereignis: Zufällig ausgewählter Prozessor ist vom Typ D und ein Fehler tritt bei der Division auf.

$P(D/F_{div})$ Wahrscheinlichkeit, dass D ausgewählt wird
Bedingung: Fehler bei der Division

Bayes'sche Formel:
$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$$

Vollständige Ereignisdiskjunktion A_1, \dots, A_n

$$P(A_i) > 0 \quad \forall i, \quad P(B) > 0$$

$$\begin{aligned} P(D/\bar{F}_{div}) &= \frac{P(\bar{F}_{div}/D) \cdot P(D)}{P(\bar{F}_{div}/A) \cdot P(A) + P(\bar{F}_{div}/B) \cdot P(B) + P(\bar{F}_{div}/C) \cdot P(C) + P(\bar{F}_{div}/D) \cdot P(D)} \\ &= \frac{\frac{586}{100000} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{100000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{100000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{100000} \cdot \frac{1}{4} + \frac{586}{100000} \cdot \frac{1}{4}} \\ &= \frac{586}{600} = 97,67\% \end{aligned}$$

$$\underline{P(D/\bar{F}_{div}) = 97,67\%}$$

ZA 4.1

(*) Sind die Ereignisse "der zufällig ausgewählte Prozessor stammt vom Typ D" und "es tritt ein Fehler bei der Division auf" stochastisch unabhängig?

Ereignis B: Zufällig gewählter Prozessor vom Typ D

Ereignis A: Fehler bei einer Division

Definition: A, B stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

$$P(\text{Fdiv} | \text{Typ D}) \stackrel{!}{=} P(\text{Fdiv} | \overline{\text{Typ D}})$$

$$\frac{586}{100\ 000} \neq \frac{3+4+7}{300\ 000} = \frac{14}{300\ 000}$$

\Rightarrow stochastisch abhängig

Stochastische Unabhängigkeit: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) = P(A|B)$: Wahrscheinlichkeit von Ereignis A ist gleich, egal ob B eingetreten ist, oder nicht.

Disjunkte Ereignisse sind immer stochastisch abhängig!

Bsp: Ereignis A: Bestehen der Klausur

Ereignis B: Lernen für die Klausur