## ZA 17 1

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_T(t)$ der Lebensdauer $T$ des Gesamtsystems $S$.

$K_1, K_2, K_3$ stochastisch unabhängig

Lebensdauern: $K_1 \to T_1$, $K_2 \to T_2$, $K_3 \to T_3$

Exponentialverteilung:

$$MTBF_1 = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$MTBF_2 = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$MTBF_3 = \frac{1}{\lambda_3}$$

System $S$ funktionsfähig: $(K_1 \cup K_2) \cap K_3$

Ges: $F_T(t)$

$$\Rightarrow F_T(t) = P(T \leq t)$$

(Hinweis 1 Gegenereignis)

$$= 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - \left[ P((T_1 > t) \cup (T_2 > t)) \cap P(T_3 > t) \right]$$

(stoch. unabh.) $\rightarrow$

$$= 1 - \left[ P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - P(T_1 > t) P(T_2 > t) \right] P(T_3 > t)$$

$$P(T_i > t) = 1 - F_{T_i}(t)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(\tau)\, d\tau$$

## ZA 12.1

$$= \int_t^{\infty} f_{T_i}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_t^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau$$

Exponentialverteilung

$f_{T_i}(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$

$$= \left[ -e^{-\lambda_i \tau} \right]_t^{\infty} = e^{-\lambda_i t}$$

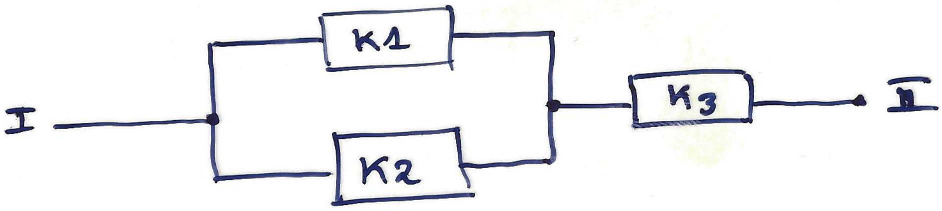
$$\Rightarrow \quad P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t}$$

$$\Rightarrow \quad F_T(t) = 1 - \left[ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \right] e^{-\lambda_3 t}$$

$$F_T(t) = 1 - \left[ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} \right] e^{-\lambda_3 t}$$

# Zusatzaufgabe 12.1






→ $K_1, K_2, K_3$ stochastisch unabhängig → $(K_1 \cup K_2) \cap K_3$

→ System S funktionsfähig ⇔ in mindestens ein Pfad zwischen I und II alle Komponenten funktionieren

→ Lebensdauer : $K_1$ — $T_1$
$K_2$ — $T_2$
$K_3$ → $T_3$

→ Exponentialverteilung mit : $MTBF_1 = \frac{1}{\alpha_1}$
$MTBF_2 = \frac{1}{\alpha_2}$
$MTBF_3 = \frac{1}{\alpha_3}$

Gesucht : Verteilungsfunktion $F_T(t)$ der Lebensdauer $T$ des Gesamtsystems S

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$
$$= 1 - P(T > t)$$

Hinweis + Gegenereignis

$$= 1 - \left[ P\left( (T_1 > t) \cup (T_2 > t) \right) \cap (T_3 > t) \right)$$
$$= 1 - \left[ P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - \underbrace{P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t)}_{P[(T_1 > t) \cap (T_2 > t)]} \right] \cdot P(T_3 > t)$$

stoch. Unabhängigkeit

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$$F_T(t) = 1 - \left[ P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \right] \cdot P(T_3 > t)$$

$$P(T_i > t) = 1 - F_{T_i}(t) =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(z)\,dz$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_i}(z)\,dz}_{=1} - \int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(z)\,d(z) \qquad = \cancel{\int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(z)\,dz} + \int_{t}^{+\infty} f_{T_i}(z)\,dz - \cancel{\int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(z)\,d(z)}$$

$$= \int_{t}^{\infty} f_{T_i}(z)\,dz$$

$$= \int_{t}^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i z}\,dz$$

Exponentialverteilung: $f_{T_i}(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ $\quad \lambda > 0,\ t \geq 0$ $\quad$ (12.2) FS

$$= \left[ -e^{-\lambda_i z} \right]_{t}^{\infty}$$

$$= 0 - (-e^{-\lambda_i t}) = e^{-\lambda_i t}$$

$$\Rightarrow \quad P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t}$$

$$\Rightarrow \quad F_T(t) = 1 - \left[ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \right] e^{-\lambda_3 t}$$

$$\boxed{F_T(t) = 1 - \left[ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} \right] \cdot e^{-\lambda_3 t}}$$