ZA 6.1

(a) Der Kunde entnimmt der Warenlieferung eine Stichprobe von 20 Bauelementen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{6a}, dass die Stichprobe mindestens ein defektes Teil enthält?

ZE: Entnahme einer Stichprobe von 20 Bauelementen

Ereignis A: Bauelement defekt $P(A) = p = 1\% = 0{,}01$

Stichprobe $n = 20$

P_{6a}: Mindestens ein defektes Teil

Gegenereignis $\overline{P_{6a}} = 1 - P_{6a}$: Kein defektes Teil

Bernoulli-Experiment: $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$P_{6a} = 1 - \overline{P_{6a}} = 1 - P_{20,0} = 1 - \binom{20}{0} 0{,}01^0 (1-0{,}01)^{20}$$

$$= 0{,}1821$$

$\underline{P_{6a} = 18{,}21\,\%}$

(b) Wie groß muss der Umfang n_{min} der Stichprobe mindestens sein, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0,5 mindestens ein defektes Teil enthält?

ZA 6.1

Ges: n_{min} bei $P_{6a} > 0,5$

$P_{6a} = 1 - \bar{P}_{6a} > 0,5$ $\qquad (x^n = e^{n \ln x})$

$\Rightarrow 1 - P_{n,0} > 0,5$ $\qquad$ ($\bar{P}_{6a}$: kein defekten Teil)

$\Rightarrow 1 - \binom{n}{0} 0,01^0 (1-0,01)^n > 0,5$

$\Rightarrow 1 - 0,99^n > 0,5$

$\Rightarrow 0,99^n < 0,5$

$\Rightarrow n \ln 0,99 = \ln 0,5$

$\Rightarrow n > \frac{\ln 0,5}{\ln 0,99} \approx 68,96$

$n_{min} = 69$

(c) Eine Stichprobe mit 20 Bauelementen enthalte 3 defekte Bauelemente. Dieser Stichprobe werden zufällig 5 Bauelemente entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{6c}, dass unter diesen 5 Bauelementen alle 3 defekten sind?

ZE: Entnahme von 5 Bauelementen aus 20

Bekannt: 3 defekte $D \Rightarrow \frac{3}{20} = 15\%$ $\qquad$ (Ziehen ohne

17 OK $\quad \bar{D} \Rightarrow \frac{17}{20} = 85\%$ $\qquad$ zurücklegen)

ZA. 6.1

Gesucht: 3 von 5 defekt

$$D\,D\,D\,\bar{D}\,\bar{D} \rightarrow \frac{3}{20}\cdot\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{17}\cdot\frac{16}{16} = \frac{6}{6840}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\bar{D}\,\bar{D}\,D\,D\,D} \rightarrow \frac{17}{20}\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{16} = \frac{6}{6840}$$

3 in 5 mögliche Anordnungen:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$$

(Bernoulli: Gleiche Wahrscheinlichkeit!!!)

$$\Rightarrow P_{6c} = 10\cdot\frac{6}{6840} = \frac{1}{114}$$

$P_{6c} = 0{,}88\,\%$

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{6d}, dass ein produzierter PC funktionsfähig ist.

ZE: 10 Bauelemente in PC verbaut

Bedingung: Alle 10 Bauelemente fehlerfrei

Gesucht P_{6d}: PC ist funktionsfähig

$P_{6d} = P(10 \text{ von } 10 \text{ Bauelementen fehlerfrei})$

$P(\text{fehlerfrei}) = p = 1 - p(\text{fehlerbehaftet}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$$P_{6d} = P_{10,10} = \binom{10}{10}\,0{,}99^{10}\,0{,}01^{0} = 0{,}9044$$

$P_{6d} = 90{,}44\,\%$

ZA 6.1

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{6e}, dass ein nicht funktionsfähiger PC mehr als eines der defekten Bauelemente enthält?

Ges: P(Mehr als ein defektes Bauelement / PC nicht funktionsfähig)

X: Anzahl fehlerhafte Bauelemente

$$P_{6e} = P((X>1)/(X>0)) = \frac{P((X>1)\cap(X>0))}{P(X>0)}$$

$$= \frac{P(X>1)}{P(X>0)} = \frac{1-P(X\leq 1)}{1-P(X\leq 0)} = \frac{1-P(X=0)-P(X=1)}{1-P(X=0)}$$

$$= \frac{1-P_{6c}-P_{10,1}}{1-P_{6c}} = \frac{1-0{,}9044-\binom{10}{1}0{,}01^1\,0{,}99^9}{1-0{,}9044} = \frac{0{,}0042}{0{,}0956}$$

$$= 0{,}0439 \qquad \underline{P_{6e} = 4{,}39\,\%}$$

(f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit P_{6f} sind von 30 hergestellten PCs weniger als 2 nicht funktionsfähig?

Ges: P(weniger als 2 nicht funktionsfähig) = P_{6f}

$n = 30$ PCs

$P(\text{Ein PC defekt}) = p = 1 - P_{6d} = 1 - 0{,}9044 = 0{,}0956$

$$P_{6f} = \underbrace{P_{30,0}}_{\text{0 PCs defekt}} + \underbrace{P_{30,1}}_{\text{1 PC defekt}} = \binom{30}{0}p^0(1-p)^{30} + \binom{30}{1}p^1(1-p)^{29}$$

ZA 6.1

$$P_{Gf} = \binom{30}{0} p^0 (1-p)^{30} + \binom{30}{1} p^1 (1-p)^{29}$$

$$= 0{,}9044^{30} + 30 \cdot 0{,}0956 \cdot 0{,}9044^{29}$$

$$= 0{,}2047$$

$$\underline{P_{Gf} = 20{,}47\ \%}$$