ZA 4.2

(a) Bestimmen Sie den Wahrscheinlichkeitsbelag $f(x)$ in Abhängigkeit von L, wenn $f(x)$ für $0 \leq x \leq L$ ein Polynom zweiten Grades mit Minimum bei $x = L/2$ und $f(0) = 2 \cdot f(L/2)$ darstellt.

Reißstelle x

Wahrscheinlichkeitsbelag $f(x)$

Gegeben: $x = 0$: $f(0) = 2 \cdot f(L/2)$ (I)

$L/2$: f_{min} (II)

Gesucht: $f(x)$ für $0 \leq x \leq L$

Polynom zweiten Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(I) $\Rightarrow f(0) = c = 2\left(a\frac{L^2}{4} + b\frac{L}{2} + c\right)$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}aL^2 - bL$ (1)

(II) $f'(x) = 2ax + b$

Minimum bei $L/2 \Rightarrow f'(L/2) \overset{!}{=} 0$

$2a\,L/2 + b = 0$

$\Rightarrow b = -aL$ (2)

ZA 4.2

(III) $f(x)$ Wahrscheinlichkeitsbelag: $\int\limits_{\forall w \in \Omega} f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^L (ax^2+bx+c)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^2 + cx\right]_0^L \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{3}aL^3 + \tfrac{1}{2}bL^2 + cL = 1 \quad (3)$$

(2) in (1): $c = -\tfrac{1}{2}aL^2 + aL^2 = \tfrac{1}{2}aL^2 \quad (4)$

(2), (4) in (3): $\tfrac{1}{3}aL^3 + \tfrac{1}{2}L^2(-aL) + L\tfrac{1}{2}aL^2 = 1$

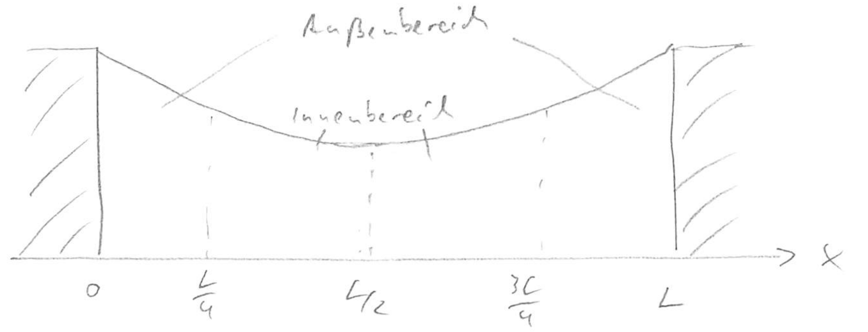
$$\Rightarrow \tfrac{1}{3}aL^3 = 1 \quad \Rightarrow a = \frac{3}{L^3}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{L^2} \quad \Rightarrow c = \frac{3}{2L}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{L^3}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{3}{4L}$$

(b) Um welchen Faktor k größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Risspunkt innerhalb der äußeren Brückenhälfte $(x < \frac{L}{4}; x > \frac{3L}{4})$ auftritt, gegenüber der Wahrscheinlichkeit, dass er im inneren Brückenbereich $(\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4})$ auftritt?

ZA 4.2



Reißstelle: $\frac{3L}{4} < x < \frac{L}{4}$ (außen)

$\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$ (innen)

$$\underbrace{P\left(x<\frac{L}{4}\right) \overset{\text{disjunkt}}{+} P\left(x>\frac{3L}{4}\right)}_{\text{außen}} = k\ \underbrace{P\left(\frac{L}{4}<x<\frac{3L}{4}\right)}_{\text{innen}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{P\left(x<\frac{L}{4}\right)+P\left(x>\frac{3L}{4}\right)}{P\left(\frac{L}{4}<x<\frac{3L}{4}\right)}$$

Symmetrie: $P\left(x<\frac{L}{4}\right) = P\left(x>\frac{3L}{4}\right)$

Gegenereignis: $P\left(\frac{L}{4}<x<\frac{3L}{4}\right) = 1-\left(P\left(x<\frac{L}{4}\right)+P\left(x>\frac{3L}{4}\right)\right)$

$$\Rightarrow k = \frac{2P\left(x<\frac{L}{4}\right)}{1-2P\left(x<\frac{L}{4}\right)}$$

$$P\left(x<\frac{L}{4}\right) = \int_0^{L/4} \frac{3}{L^3}\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+\frac{3}{4L}\,dx = \frac{19}{64}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\cdot\frac{19}{64}}{1-2\cdot\frac{19}{64}} = \frac{19}{13} = 1{,}46$$

$\underline{k = 1{,}46}$

P(außen) = 1,46 · P(innen)