实验四  数值积分

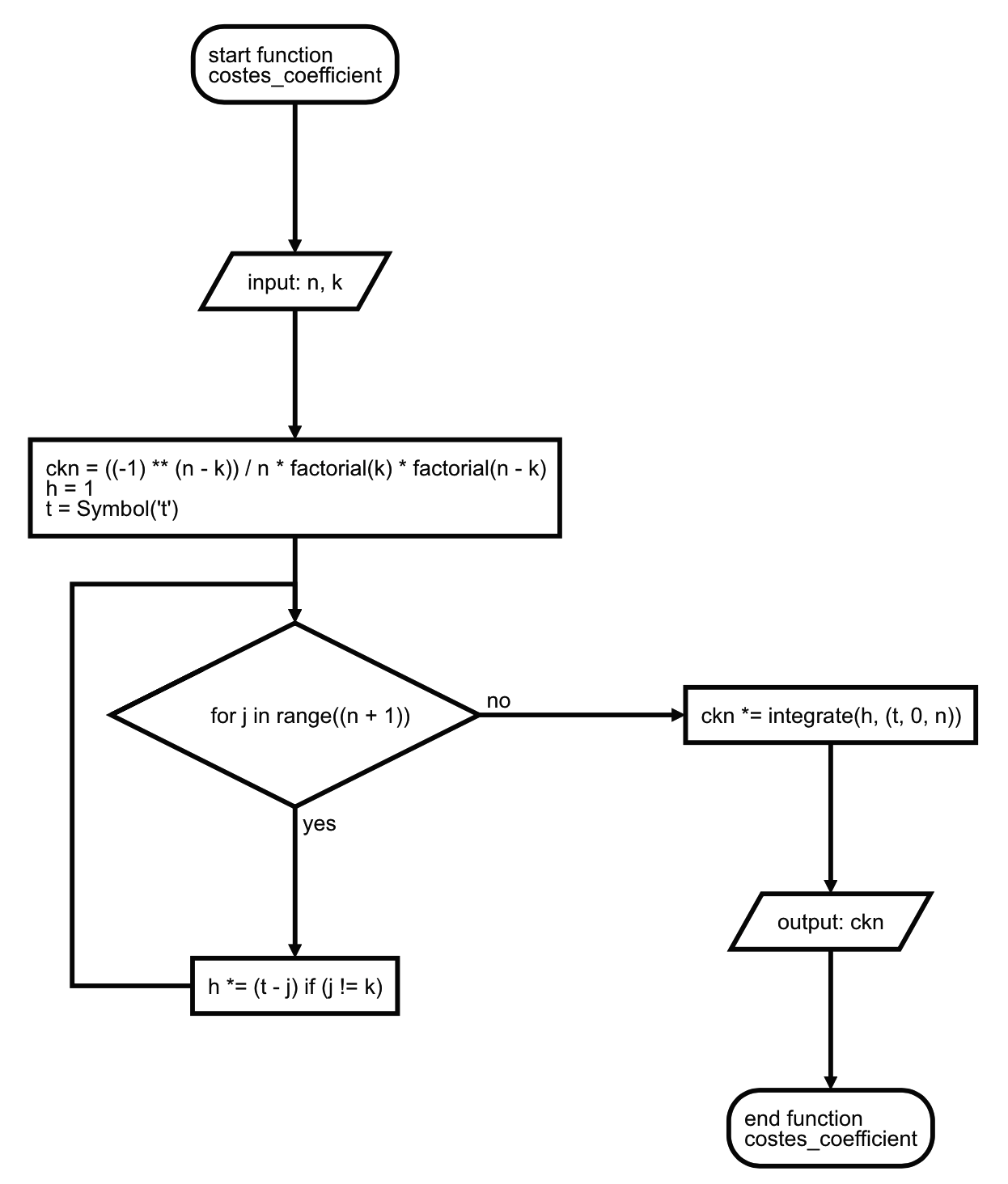
一、实验目的

1. 体会数值积分的基本概念；
2. 掌握低阶的插值型数值积分公式；
3. 掌握区间逐次分半的复化求积方法；
4. 掌握龙贝格算法的基本思路和迭代步骤；

二、实验过程和结果

1. Newton-Cotes 求积公式

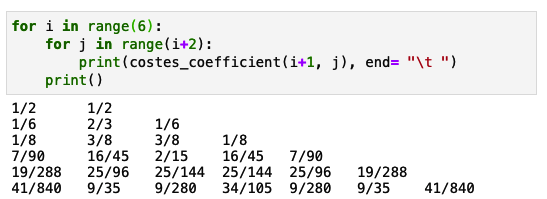
Newton-Cotes 公式求积分是将积分区间 n 等分，得到 n + 1 个点，然后把积分估计为：



【图1】求柯特斯系数

的程序流程图

其中的 为科特斯系数，其计算方法为：

这个算法容易编程实现[[1]](#footnote-1)，如【图1】所示。下面是调用该算法打印出的一张科特斯系数表：

实现了科特斯系数的计算后，通用的 Newton-Cotes 公式也就容易编程实现了[[2]](#footnote-2)：

**def** newton\_cotes\_integral(f, a, b, n):

step = (b - a) / n

xs = [a + i \* step **for** i **in** range(n+1)]

**return** (b - a) \* sum([

costes\_coefficient(n, k) \* f(xs[k])

**for** k **in** range(0, n+1)

])

当 n 为奇数时，这种方法至少有 n 阶代数精度；当 n 为偶数时，至少有 n+1 阶代数精度。

特殊地，当 Newton-Cotes 公式取 ，就是梯形求积公式：

编程实现：

**def** trapezium\_integral(f, a, b):

**return** (b - a) \* (f(a) + f(b)) / 2

取 ，就是辛普森求积公式：

编程实现：

**def** simpson\_integral(f, a, b):

**return** (b - a) \* (f(a) + 4 \* f((a + b) / 2) + f(b)) / 6

1. 复化求积公式

求积区间比较大的时候，如果使用节点数很少的 Newton-Cotes 公式会有较大的截断误差；而分很多节点时， Newton-Cotes 公式不具备数值稳定性，即便可行，科特斯系数的计算需要 级的数作为分母，点数 增多时也会带来计算上的麻烦以及可能的舍入误差。

一种解决的方法是把积分区间分成若干个小的区间，在每个区间上各自用低次的 Newton-Cotes 公式进行计算，最后把所有结果求和。这就得到了复化求积公式。为了避开决定分多少个小区间的问题，可以采用区间逐次半分的算法来实现复化求积。

在具体编程实现[[3]](#footnote-3)：

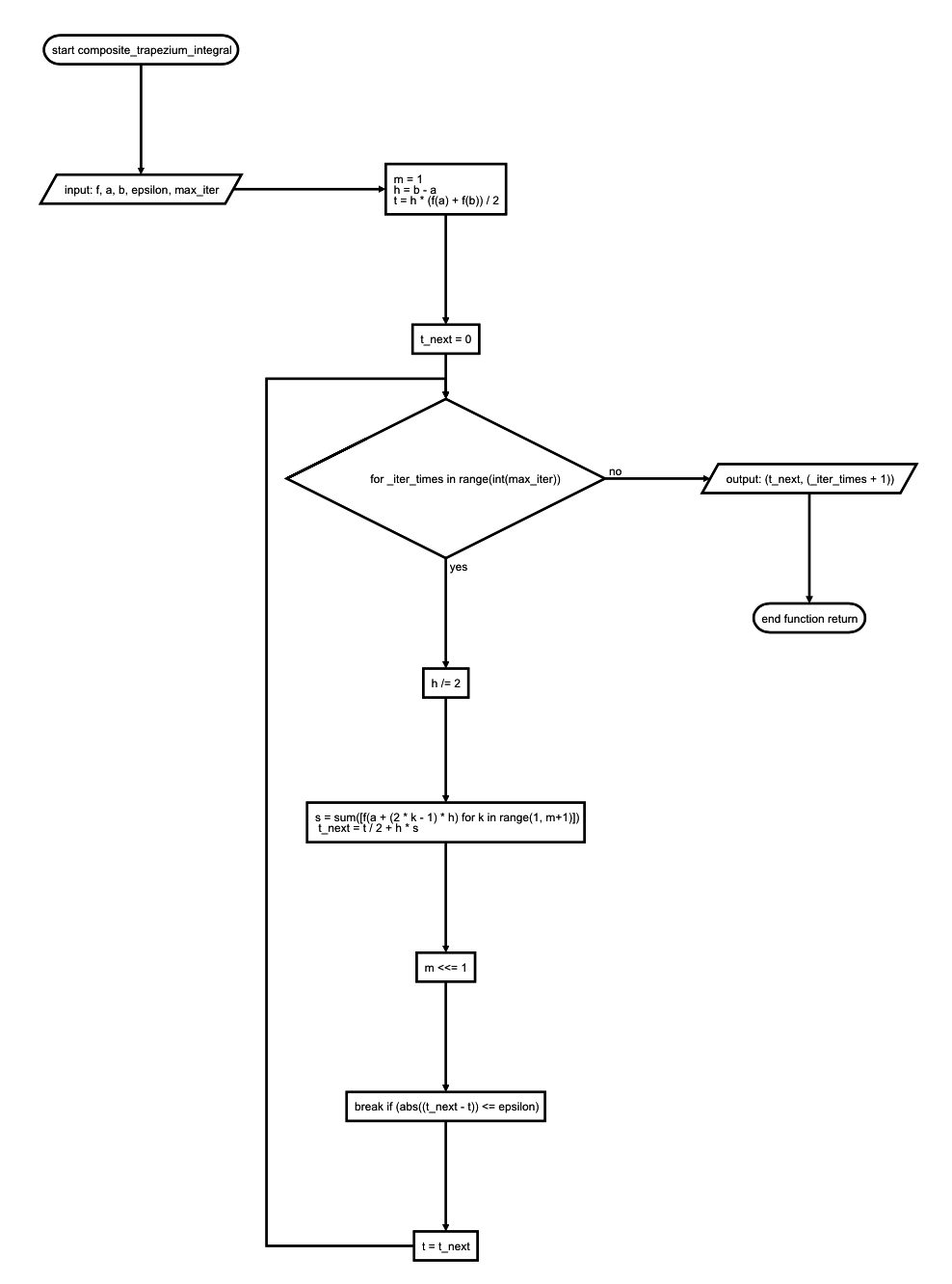
* 复化梯形公式：

composite\_trapezium\_integral(f, a, b, epsilon, max\_iter=10000)

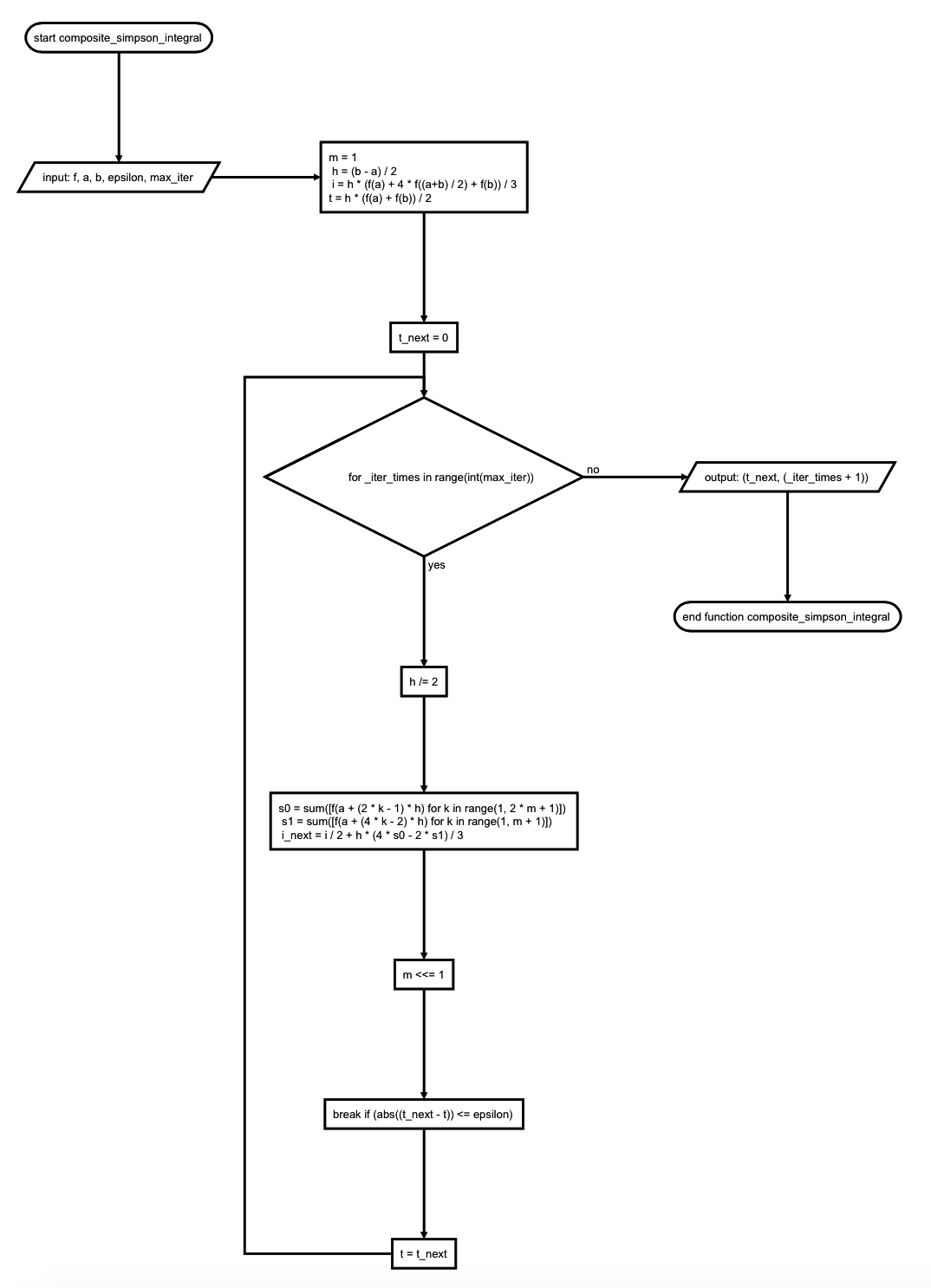
* 复化 Simpson 公式：

composite\_simpson\_integral(f, a, b, epsilon, max\_iter=1e6)

这两个程序（函数）都需要输入要求积的函数 ，求积区间 ，以及目标精度 和最大迭代次数作为参数。运行结束后返回最终得到的积分值 以及迭代次数，当无法在指定最大迭代次数内达到指定精度时，抛出错误。

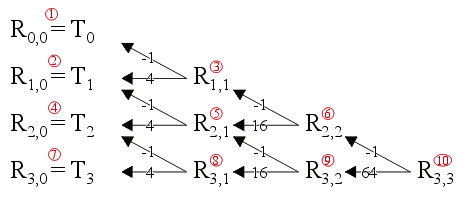


【图2】复化梯形公式程序流程图



【图3】复化Simpson公式程序流程图

1. 龙贝格算法



Copyright ©2005 by Douglas Wilhelm Harder

from [ece.uwaterloo.ca](http://ece.uwaterloo.ca)

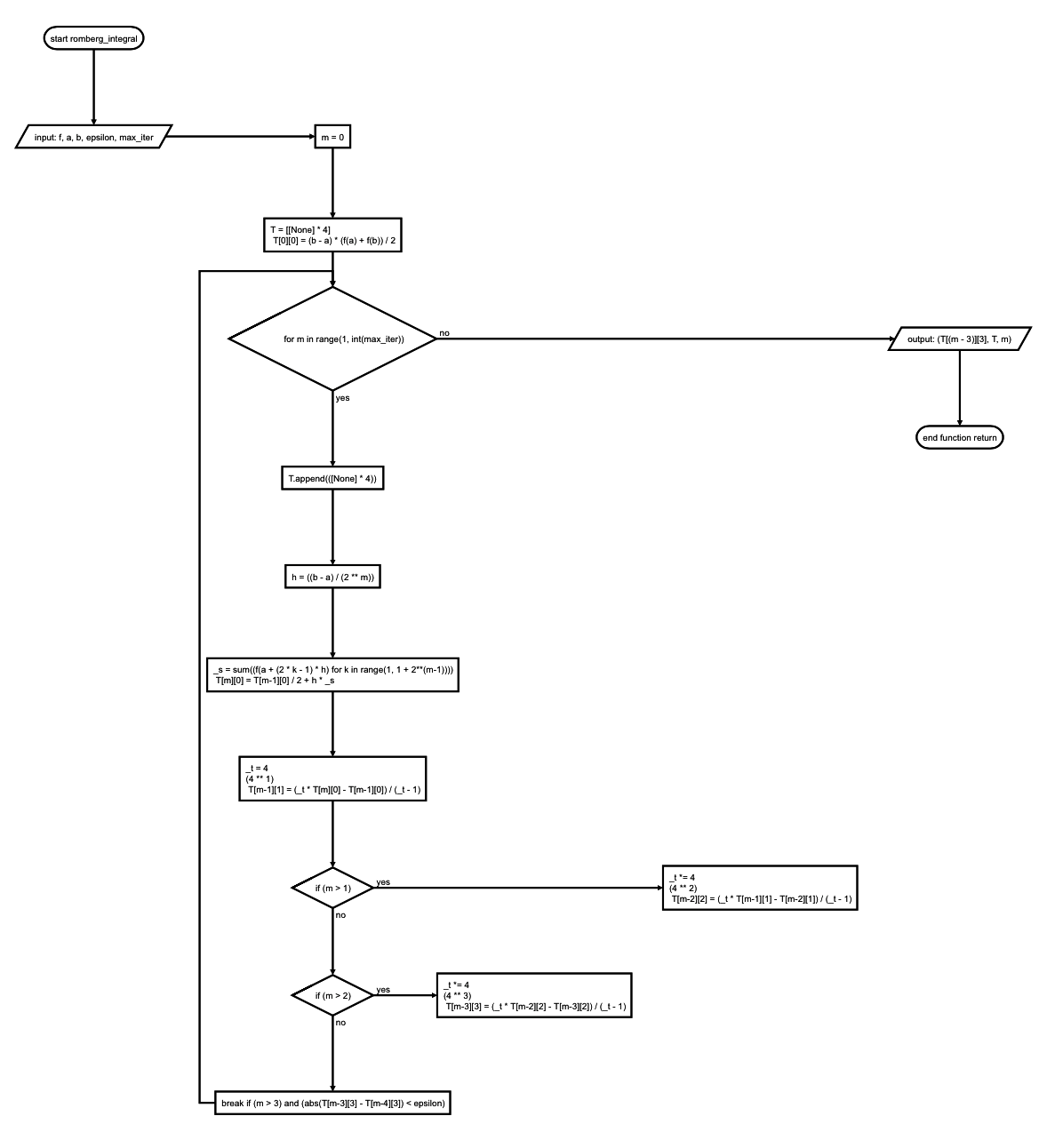
【图4】Romberg计算过程

Romberg 算法是一种收敛速度很快的求积方法。其计算过程是将区间逐次分半，加速得到积分近似值。

【图4】展示了这种 Romberg 计算的过程，其中 。

编程实现[[4]](#footnote-4)：

romberg\_integral(f, a, b,



【图5】Romberg积分程序流程图

epsilon, max\_iter=1e6)

输入参数：

* f: 要求积的函数；
* a, b: 求积区间；
* epsilon: 目标精度，达到则停止，返回积分值；
* max\_iter: 最大迭代次数，超出这个次数迭代不到目标精度，则抛出错误。

返回结果： (result, T, iter)

* result: 最终得到的积分值
* T: 计算过程表
* iter\_times: 迭代次数

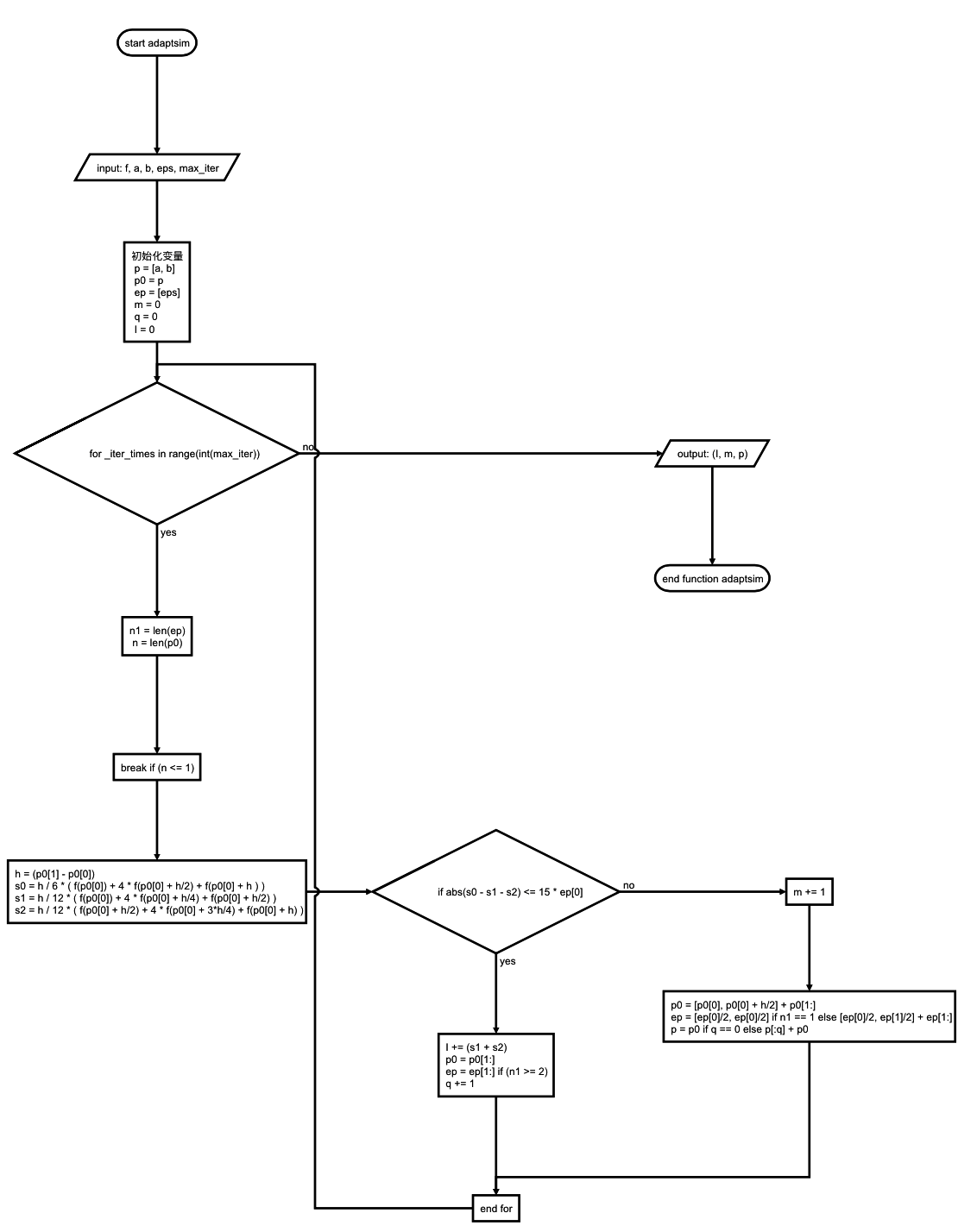
这个实现中有一个小的细节问题。这个算法中的 T 记录下了完整计算过程中的所有值，也就是说，这个算法的空间复杂度为 。如果迭代次数十分大，则这里会不必要地消耗大量内存（虽然一般 Romberg 算法都收敛地很快，基本可以不考虑这个问题）。

为了避免这种内存浪费，我用滑动窗口的方法改写了实现过程，得到一个 romberg\_integral\_sw 函数，这个算法只使用一个滑动窗口来动态储存需要的值，后续计算中不再需要的值将被直接丢弃，这样可以把内存开销控制在 级别。

4. 自适应 Simpson 求积法[[5]](#footnote-5)

使用 Newton-Cotes 系列的方法求积法时的一个问题是，节点的选择。点分得越多，误差越小，但计算量也越大；分得太少，计算上方便，但误差就会增大。通常我们无从得知分成多少段合适，所以引入自适应求积方法，按照被积函数的变化性态来安排节点。

关于“按照被积函数的变化性态来安排节点”，我的理解是，如果求积中的一段曲线如果近似于 Simpson 法“拟合”被积曲线的二次函数，就直接把这一段用 Simpson 法求出来；如果不够近似，就把这个区间分成两半，递归这个过程去求积。我个人更喜欢这种递归实现，代码十分十分清晰简洁，如【图8】所示。



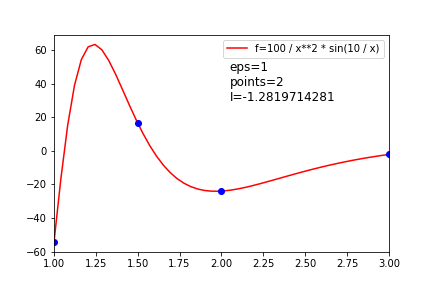
【图6】自适应 Simpson 求积法

程序流程图

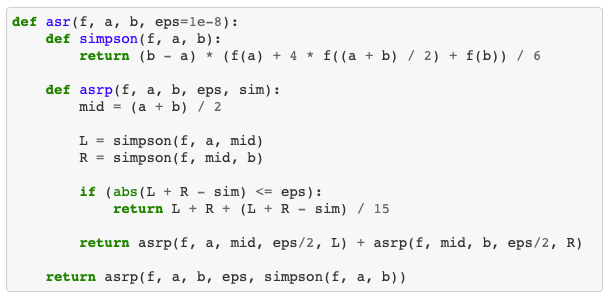
当然也可以用迭代实现自适应 Simpson 求积法（参考课本的实现，程序流程见【图6】）：

adaptsim(f, a, b, eps=1e-8, max\_iter=10000)

用实现的程序计算积分 ，取不同的精度 eps，得到结果如【图7】[[6]](#footnote-6)：

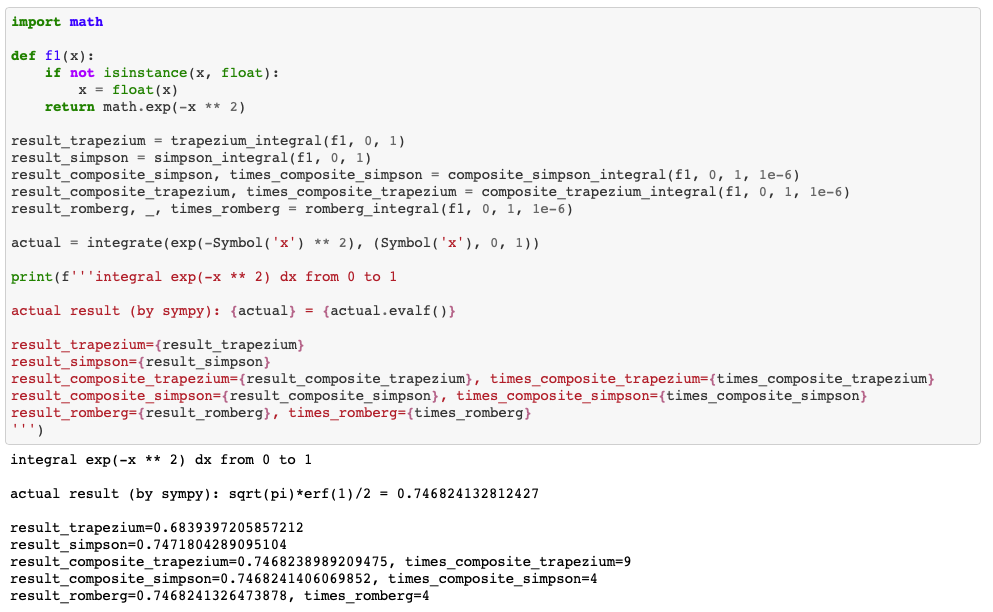


【图7】自适应 Simpson 求积结果（动图）



【图8】自适应 Simpson 的递归实现源码

5. 实验内容题目

1. 计算积分 
2. 计算积分 

三、思考题分析解答

（1） 为什么多节点的Newton-Cotes求积公式不宜使用？

在前文中叙述过，求积区间比较大的时候，如果使用节点数很少的 Newton-Cotes 公式会有较大的截断误差；而分很多节点时， Newton-Cotes 公式不具备数值稳定性，即便可行，科特斯系数的计算需要 级的数作为分母，点数 增多时也会带来计算上的麻烦以及可能的舍入误差。

（2） 简述什么是复化求积方法？

详见前文 [实验内容 2. 复化求积公式](#复化求积公式)。

（3） 简述自适应求积方法，并试着编程实现该方法计算上面4.4节的两个定积分。

详见前文 [实验内容 4. 自适应 Simpson 求积法](#自适应Simpson求积法)。

四、重难点分析

重点：

1. 体会数值积分的基本概念；
2. 掌握低阶的插值型数值积分公式；
3. 掌握区间逐次分半的复化求积方法；
4. 掌握龙贝格算法的基本思路和迭代步骤；

难点：

龙贝格算法的实现、自适应求积方法的实现。

1. 该算法的具体代码实现可以从 <https://github.com/cdfmlr/NumericalAnalysis/blob/master/ex4/src/newton_cotes.py> 获取 [↑](#footnote-ref-1)
2. 实现源文件见：<https://github.com/cdfmlr/NumericalAnalysis/blob/master/ex4/src/newton_cotes.py> [↑](#footnote-ref-2)
3. 源代码见：<https://github.com/cdfmlr/NumericalAnalysis/blob/master/ex4/src/composite.py> [↑](#footnote-ref-3)
4. 具体的代码实现存放在 <https://github.com/cdfmlr/NumericalAnalysis/blob/master/ex4/src/romberg.py> [↑](#footnote-ref-4)
5. 自适应 Simpson 求积法实现源码：<https://github.com/cdfmlr/NumericalAnalysis/blob/master/ex4/src/adaptsim.py> [↑](#footnote-ref-5)
6. 具体的计算、绘图源码：<https://github.com/cdfmlr/NumericalAnalysis/blob/master/ex4/src/ex4.ipynb> [↑](#footnote-ref-6)