Teoría de Probabilidad - Variable Aleatoria Discreta

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Definición

- Una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el conjunto de salidas $\lambda \in S$, y cuyo rango es la recta real $\mathbb{R}$.
- Para cada salida $\lambda \in S$, la variable aleatoria asigna un número, $X(\lambda)$ tal que
  1. El conjunto $\{\lambda : X(\lambda) \leq x\}$ es un evento para todo $x \in \mathbb{R}$.
  2. Las probabilidades de los eventos $\{\lambda : X(\lambda) = -\infty\}$ y $\{\lambda : X(\lambda) = \infty\}$ es igual a cero, esto es
  $$P(X = \infty) = P(X = -\infty) = 0.$$
  3. La variable aleatoria X induce una medida de probabilidad sobre la recta real como sigue
  $$P(X = x) = P\{\lambda : X(\lambda) = x\}, P(X \leq x) = P\{\lambda : X(\lambda) \leq x\},$$
  $$P(x_1 < X \leq x_2) = P\{\lambda : x_1 < X(\lambda) \leq x_2\}.$$
  4. Para todo efecto práctico se puede asumir que una variable aleatoria es una función que mapea el espacio muestral a la recta real, $X : S \to \mathbb{R}$.

Contenido

Función de distribución

- La probabilidad $P(X \leq x)$ también se denota como $F_X(x)$, que se conoce como la función de distribución de la variable aleatoria X.
- La función de distribución tiene las siguientes propiedades
  1. $F_X(x = -\infty) = 0$.
  2. $F_X(x = \infty) = 1$.
  3. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ si $x_1 < x_2$.
  4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Función de distribución conjunta

- La probabilidad $P(A \cap B)$ se definió anteriormente como la probabilidad de ocurrencia conjunta de los dos eventos A y B.
- Si el evento A es el evento $(X \leq x)$ y el evento B es el evento $(Y \leq y)$, la probabilidad conjunta se conoce como la *función de distribución conjunta* de las variables aleatorias X y Y,

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left[(X \leq x) \cap (Y \leq y)\right].$$

- A partir de esta definición se derivan los siguientes resultados

$$F_{X,Y}(-\infty,-\infty) = 0, \quad F_{X,Y}(-\infty,y) = 0, \quad F_{X,Y}(\infty,y) = F_Y(y)$$
$$F_{X,Y}(x,-\infty) = 0, \quad F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1, \quad F_{X,Y}(x,\infty) = F_X(x).$$

Contenido

Variables aleatorias discretas y continuas

- Una variable aleatoria puede ser discreta o continua.
- Una *variable aleatoria discreta* toma valores de un número contable de valores diferentes.
- Ejemplos incluyen el número de llamadas telefónicas que recibe una oficina en un intervalo finito de tiempo ó el puntaje de un estudiante en un examen.
- Una *variable aleatoria continua* puede asumir cualquier valor dentro de uno o más intervalos de la recta real.
- El tiempo exacto en que se escribe una llamada telefónica es un ejemplo de una variable aleatoria continua.

Contenido

Función de probabilidad de masa

- Una variable aleatoria discreta está caracterizada por un conjunto permitido de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ junto con las probabilidades que la variable aleatoria tome esos valores.

- La probabilidad de $X = x_i$ se denota como $P(X = x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, y se conoce como la *función de probabilidad de masa*.

Propiedades de la función de probabilidad de masa

Las siguientes son algunas propiedades de la función de probabilidad de masa

1. $P(X = x_i) \geq 0,\ i = 1, \ldots, n.$
2. $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$
3. $P(X \leq x) = F_X(x) = \sum_{\forall x_j \leq x} P(X = x_i).$
4. $P(X = x_i) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} [F_X(x_i) - F_x(x_i - \epsilon)]$

Propiedades de la función de probabilidad de masa

Ejemplo: Sea el experimento que consiste en lanzar dos monedas justas, y sea X el número de caras obtenidas. Entonces la función de probabilidad de masa (PMF) es

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 1/4 & \text{if } x = 0 \text{ o } x = 2 \\ 1/2 & \text{if } x = 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Cual es la probabilidad que al menos una sea cara?

Dos variables aleatorias

- Considérese dos variables aleatorias X y Y que toman valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

- Estas dos variables aleatorias pueden caracterizarse por una función de masa de probabilidad conjunta $P(X = x_i, Y = y_j)$ que da la probabilidad que $X = x_i$ y $Y = y_j$.

Funciones de masa de prob. conj., marg. y cond.

- **Conjunta**

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} P(X = x_i, Y = y_j).$$

- **Marginal**

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j).$$

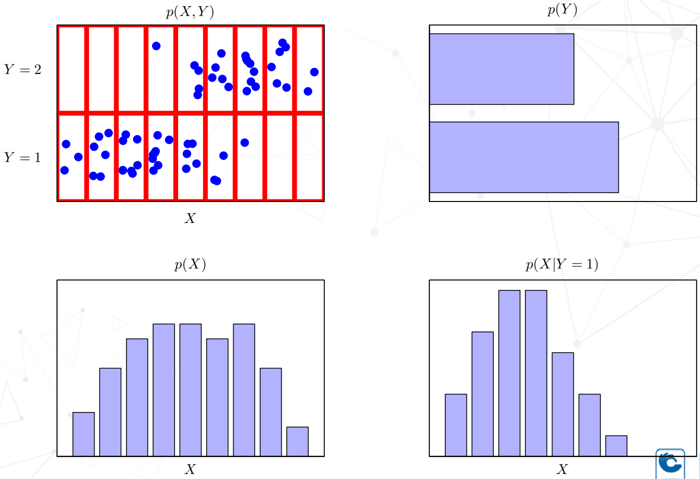
- **Condicional**

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}, \text{ con } P(Y = y_j) \neq 0.$$

- **Teorema de Bayes**

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(Y = y_j | X = x_i) P(X = x_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(Y = y_j | X = x_i) P(X = x_i)}.$$

Ejemplo de dos Variables Discretas



Independencia estadística

Dos variables aleatorias discretas son *independientes estadísticamente* si

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \; i = 1, \ldots, n. \; j = 1, \ldots, m.$$

Contenido

Uniforme y Bernoulli

- **Función probabilidad de masa uniforme.** Se dice que una variable aleatoria X sigue una función de probabilidad de masa uniforme cuando

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

- **Función de probabilidad de masa para Bernoulli.**
  - Se emplea para modelar variables aleatorias binarias $X = \{0, 1\}$.
  - La función de probabilidad de masa esta dada como

$$P(X = 1) = \rho, \quad P(X = 0) = 1 - \rho.$$

Se resume en

$$P(X = k) = \rho^k (1 - \rho)^{1-k}.$$

Binomial

- **Función de probabilidad de masa binomial.**
  - Sea ρ la probabilidad de que un evento A ocurra, a partir de un experimento aleatorio E.
  - Si el experimento se repite n veces y las n salidas son independientes, sea X la variable aleatoria que representa el número de veces que A ocurre en las n repeticiones.
  - La probabilidad de que el evento A ocurra k veces está dada por la función de probabilidad de masa

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\rho^k(1-\rho)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

donde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Poisson

- Sea emplea para modelar eventos como el número de llamadas telefónicas recibidas por una oficina y el número de electrones que emite un cátodo encandilado.
- El número de eventos en un intervalo de tiempo de longitud T sigue una función de probabilidad de masa de Poisson de la forma

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

donde $\lambda = \lambda' T$.

Multinomial

- Suponga un experimento aleatorio que se repite n veces.
- La salida de cada repetición del experimento corresponde a uno de k posibles eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente excluyentes y exhaustivos.
- Sea p_i la probabilidad de que la salida del experimento sea A_i.
- Asumamos que p_i permanece constante a lo largo de las n repeticiones.
- Sea X_i la variable aleatoria que indica el número de veces que el experimento termina en el evento A_i. Luego,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k},$$

donde $\sum x_i = n$, $\sum p_i = 1$ y cada x_i puede tomar cualquier valor entero entre 0 y n.

Contenido

Preliminares

- La descripción más detallada posible de una variable aleatoria está dada por su función de masa de probabilidad.

- En algunas ocasiones es mejor describir la variable aleatoria usando un conjunto de números característicos o de medidas, que son representativos de la función de masa de probabilidad.

- Esto números se conocen como *valores esperados* o *promedios estadísticos*.

Valor esperado y primeros momentos estadísticos

- El valor esperado o promedio de una función $g(X)$ de una variable aleatoria discreta X está definida como

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(X = x_i).$$

- Dos valores esperados o momentos de la variable aleatoria X, que se usan con frecuencia en la práctica son su media μ_X y su varianza σ_X^2,

$$E\{X\} = \mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i),$$

$$E\left\{(X - \mu_x)^2\right\} = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 P(X = x_i).$$

- La raíz cuadrada de la varianza se conoce como la *desviación estándar*.

- Ejemplo: Considere la función de masa de probabilidad de masa que se obtiene al lanzar dos monedas, donde en cada lanzamiento la probabilidad de obtener cara es 3/4:

$$P(X=k)=\begin{cases}(1/4)^2 & \text{if } k=0\\ 2\cdot(1/4)\cdot(3/4) & \text{if } k=1\\ (3/4)^2 & \text{if } k=2\end{cases}$$

  Calcular la media de la v.a. / Res: $3/2$.

- Ejercicio: calcular la varianza.

Valor esperado y primeros momentos estadísticos

- Ejemplo: Sea X una variable aleatoria y sea

$$Y = aX + b,$$

donde a y b son escalares conocidos. Entonces

$$E\{Y\} = aE\{X\} + b, \quad \mathrm{var}(Y) = a^2\,\mathrm{var}(X).$$

Valor esperado de dos variables aleatorias

- El valor esperado de una función de dos variables aleatorias se define como

$$E\left\{g(X,Y)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_i) P(X = x_i, Y = y_j).$$

- Un valor esperado útil, que entrega una medida de la dependencia entre dos variables aleatorias X y Y es el coeficiente de correlación

$$\rho_{XY} = \frac{E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Ortogonalidad de variables aleatorias

Se dice que dos variables aleatorias X y Y son ortogonales si

$$E\{XY\} = 0.$$

Valores esperados condicionales

- Las relaciones entre dos variables aleatorias se describen algunas veces a través de valores esperados condicionales.
- Los valores esperados condicionales se definen como

$$E\{g(X,Y)|Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{n}g(x_i,y_j)P(X=x_i|Y=y_j),$$

$$E\{g(X,Y)|X=x_i\}=\sum_{j=1}^{m}g(x_i,y_j)P(Y=y_j|X=x_i).$$

- Uno de los valores esperados condicionales más importantes es la media condicional definida como

$$E\{X|Y=y_j\}=\mu_{X|Y=y_j}=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i|Y=y_j).$$

Referencias

- Basado en las presentaciones del Prof. Mauricio A. Álvarez, del curso “Procesos Estocásticos”.
- D.P. Bertsekas et al. “Introduction to Probability”, 2002.