1. La fdp conjunta de las variables aleatorias X y Y es

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 2$$

   (a) Encontrar la fdp marginales, $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

   (b) Encontrar las fdp condicionales, $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

   (c) Encontrar $E\{X|Y=1\}$ y $E\{X|Y=0.5\}$.

   (d) Son X y Y estadisticamente independientes?

   (e) Encontrar ρ_{XY}.

2. X y Y tienen una fdp Gaussiana bivariada dada por

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) =& \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \right.\right. \\ & \left.\left. - \frac{2\rho\left(x-\mu_X\right)\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\} \end{aligned}$$

   (a) Demuestre que los marginales son fdp Gaussianas.

   (b) Encuentre la fdp condicional $f_{X|Y}(x|y)$. Demuestre que esta fdp condicional tiene una media

$$E\{X|Y=y\} = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)$$

   y una varianza

$$\sigma_X^2(1-\rho^2).$$

3. La función de distribución de una variable aleatoria Gaussiana, se puede definir como

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right),$$

   con

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}\,t.$$

   Asumir que x es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y 1. Demostrar por simulación de computador que al evaluar

$$\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(x) = \sqrt{2}\sigma\operatorname{erf}^{-1}(2x-1) + \mu$$

   con $\sigma = 1$, $\mu = 0$ y 10^6 muestras de x, se obtienen muestras de una distribución normal con media cero y varianza uno. Analizar y explicar por qué ocurre esto.