

Sistemas de Comunicación

- Comunicaciones Digitales -

- QAM -

Ph.D. Cristian Guarnizo Lemus

cristianguarnizo@itm.edu.co

Contenido

1. Probabilidad de error y Tasa de errores de Bits (BER)

1. Definiciones conceptuales

Probabilidad de error $P(e)$: es la expectativa teórica que determinado sistema tenga una tasa de errores.

Tasas de errores de bits (BER): es un registro empírico (histórico) del funcionamiento real del sistema en cuanto a errores.

1. Definiciones conceptuales

Si un sistema tiene una $P(e)$ de 10^{-5} quiere decir que en el pasado hubo un bit erróneo en cada 100.000 bits transmitidos.

Para evaluar el desempeño de un sistema se comparan la tasa de error de bits y la probabilidad esperada de error.

1. Definiciones matemáticas

La potencia de la portadora se puede expresar en watts o en dBm, así

$$C_{(\text{dBm})} = 10 \log \left(\frac{C_{(\text{watts})}}{0.001} \right)$$

1. Definiciones matemáticas

La **potencia del ruido** térmico se describe con la ecuación

$$N = KTB \text{ (watts)}$$

K = constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} Joules por kelvin)

T = temperatura (kelvin)

B = ancho de banda (hertz)

En dBm

$$N_{\text{(dBm)}} = 10 \log \left(\frac{KTB}{0.001} \right)$$

1. Definiciones matemáticas

La ecuación de la relación de potencia de portadora a ruido es

$$\frac{C}{N} = \frac{C}{KTB}$$

C = potencia portadora (watts)

N = potencia de ruido (watts)

En dB

$$\begin{aligned}\frac{C}{N}(\text{dB}) &= 10\log\left(\frac{C}{N}\right) \\ &= C_{(\text{dBm})} - N_{(\text{dBm})}\end{aligned}$$

1. Definiciones matemáticas

La energía por bit se define

$$E_b = CT_b \text{ [J/bit]}$$

E_b = energía de un solo bit (joules por bit)

T_b = tiempo de un solo bit (segundos)

C = potencia de la portadora (watts)

En dBJ

$$E_{b(\text{dBJ})} = 10\log(E_b)$$

1. Definiciones matemáticas

La energía también se puede expresar

$$E_b = \frac{C}{f_b} \text{ [J/bit]}$$

f_b = frecuencia de bits.

En dBJ

$$E_{b(\text{dBJ})} = 10\log(C) - 10\log(f_b)$$

1. Definiciones matemáticas

La densidad de potencia del ruido es la potencia del ruido normalizada a un ancho de banda de 1 Hz.

$$N_0 = \frac{N}{B} \text{ [W/Hz]}$$

N = potencia del ruido térmico (watts)

B = Ancho de banda (hertz).

En dBm

$$N_{0(\text{dBm})} = 10\log\left(\frac{N}{0.001}\right) - 10\log(B)$$

1. Definiciones matemáticas

Al combinar las ecuaciones se obtiene

$$N_0 = \frac{N}{B} = \frac{KTB}{B} = KT$$

En dBm

$$N_{0(\text{dBm})} = 10\log\left(\frac{K}{0.001}\right) + 10\log(T)$$

1. Definiciones matemáticas

La relación de energía por bit a densidad de potencia de ruido se usa para comparar dos o mas sistemas digitales de modulación (FSK, PSK, QAM).

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{C / f_b}{N / B} = \frac{C}{N} \times \frac{B}{f_b}$$

E_b / N_0 = relación de energía por bit a densidad de potencia

C / N = relación de potencia de portadora a ruido

B / f_b = relación de ancho de banda de ruido a frecuencia de bits

1. Definiciones matemáticas

Expresada en dB

$$\begin{aligned}\frac{E_b}{N_0} \text{ (dB)} &= 10\log\left(\frac{C}{N}\right) + 10\log\left(\frac{B}{f_b}\right) \\ &= 10\log(E_b) - 10\log(N_0)\end{aligned}$$

1. Definiciones matemáticas

Ejemplo (Tomasi, 12-2): Determinar, para un sistema QPSK y los parámetros dados:

- a) La potencia de portadora, en dBm.
- b) La potencia de ruido en dBm.
- c) La densidad de potencia de ruido, en dBm.
- d) La energía por bit, en dBJ.
- e) La relación de potencia de portador a ruido, en dB.
- f) La relación E_b/N_0 .

$$C = 10^{-12} \text{ [W]}, N = 1.2 \times 10^{-14} \text{ [W]}, f_b = 60 \text{ kbps}, B = 120 \text{ kHz}$$

1. Definiciones matemáticas

Ejemplo (Tomasi, 12-2): Determinar, para un sistema QPSK y los parámetros dados:

a) La potencia de portadora, en dBm.

$$C = 10\log\left(\frac{C}{0.001}\right) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{0.001}\right) = -90 \text{ dBm}$$

b) La potencia del ruido, en dBm.

$$N = 10\log\left(\frac{N}{0.001}\right) = 10\log\left(\frac{1.2 \times 10^{-14}}{0.001}\right) = -109.2 \text{ dBm}$$

1. Definiciones matemáticas

Ejemplo (Tomasi, 12-2): Determinar, para un sistema QPSK y los parámetros dados:

c) La densidad de potencia de ruido, en dBm.

$$\begin{aligned} N_{0(\text{dBm})} &= 10\log\left(\frac{N}{0.001}\right) - 10\log(B) \\ &= -109.2 \text{ dBm} - 10\log(120k) = -160 \text{ dBm} \end{aligned}$$

d) La energía por bit.

$$E_b = 10\log\left(\frac{C}{f_b}\right) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{60\text{kbps}}\right) = -167.8 \text{ dBJ}$$

1. Definiciones matemáticas

Ejemplo (Tomasi, 12-2): Determinar, para un sistema QPSK y los parámetros dados:

e) La relación de potencias de portadora a ruido

$$\frac{C}{N} = 10\log\left(\frac{C}{N}\right) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{1.2 \times 10^{-14}}\right) = 19.2 \text{ dB}$$

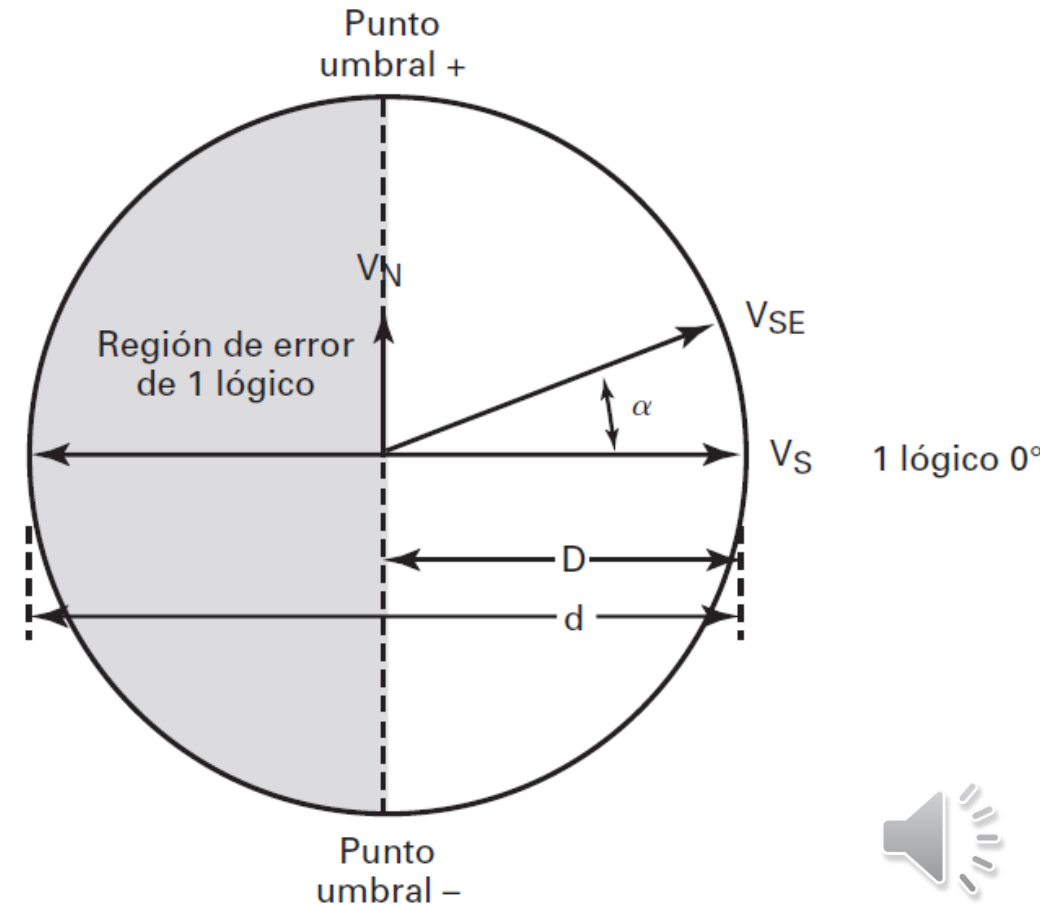
f) La relación de energía por bit a densidad de ruido

$$\frac{E_b}{N_0} = 10\log\left(\frac{C}{N}\right) + 10\log\left(\frac{B}{f_b}\right) = 19.2 + 10\log\left(\frac{120\text{kHz}}{60\text{kbps}}\right) = 22.2 \text{ dB}$$

2. Errores en PSK

Los errores de bits se relacionan con la distancia entre los puntos de un diagrama de estado-espacio de señal. Para BPSK:

Para producir un error se requiere que el error del ruido sea lo suficiente para generar un ángulo de $\pm 90^\circ$.



2. Errores en PSK

En general, para los sistemas PSK, la fórmula general para los puntos umbral es (desplazamientos de fase)

$$TP = \pm \frac{\pi}{M}$$

La formula general para la máxima distancia entre puntos de señalización esta dada por

$$\sin(\theta) = \sin\left(\frac{360^\circ}{2M}\right) = \frac{d/2}{D}$$

d = distancia entre errores, D = máxima amplitud de la señal.

2. Errores en PSK

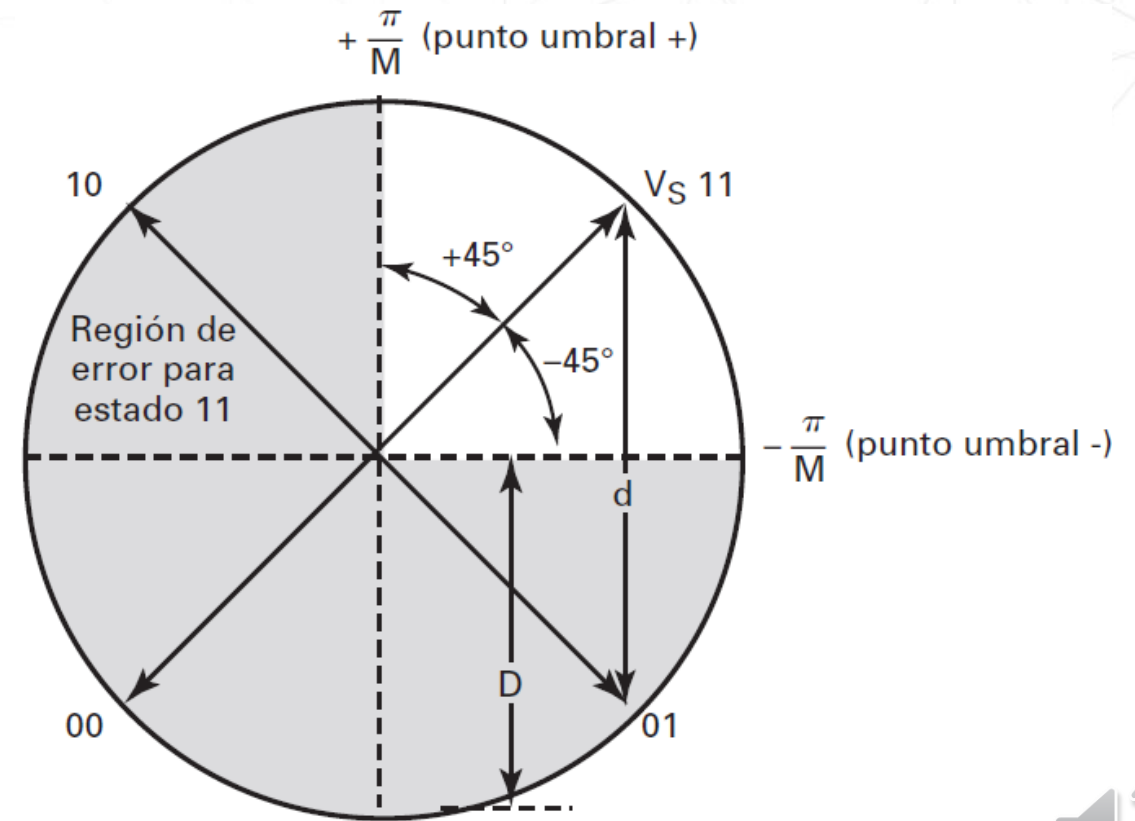
Despejando para d se obtiene

$$d = \left(2 \sin \frac{180^\circ}{M} \right) \times D$$

2. Errores en QPSK

Se puede observar que en QPSK solo se pueden tolerar desplazamientos de fase de $\pm 45^\circ$.

$$\begin{aligned} d &= \left(2 \sin \frac{180^\circ}{4} \right) \times D \\ &= (2 \sin(45^\circ)) \times D \\ &= \sqrt{2} D \end{aligned}$$



2. Errores en PSK

Ejercicio: Cual es el desplazamiento máximo de fase en 8-PSK y 16-PSK. Cual es valor de la distancia entre errores.

$$d_{8\text{PSK}} = \left(2 \sin \frac{180^\circ}{8} \right) \times D \quad d_{16\text{PSK}} = \left(2 \sin \frac{180^\circ}{16} \right) \times D$$

$$d_{8\text{PSK}} = (2 \sin(22.5^\circ)) \times D \quad d_{16\text{PSK}} = (2 \sin(11.25^\circ)) \times D$$

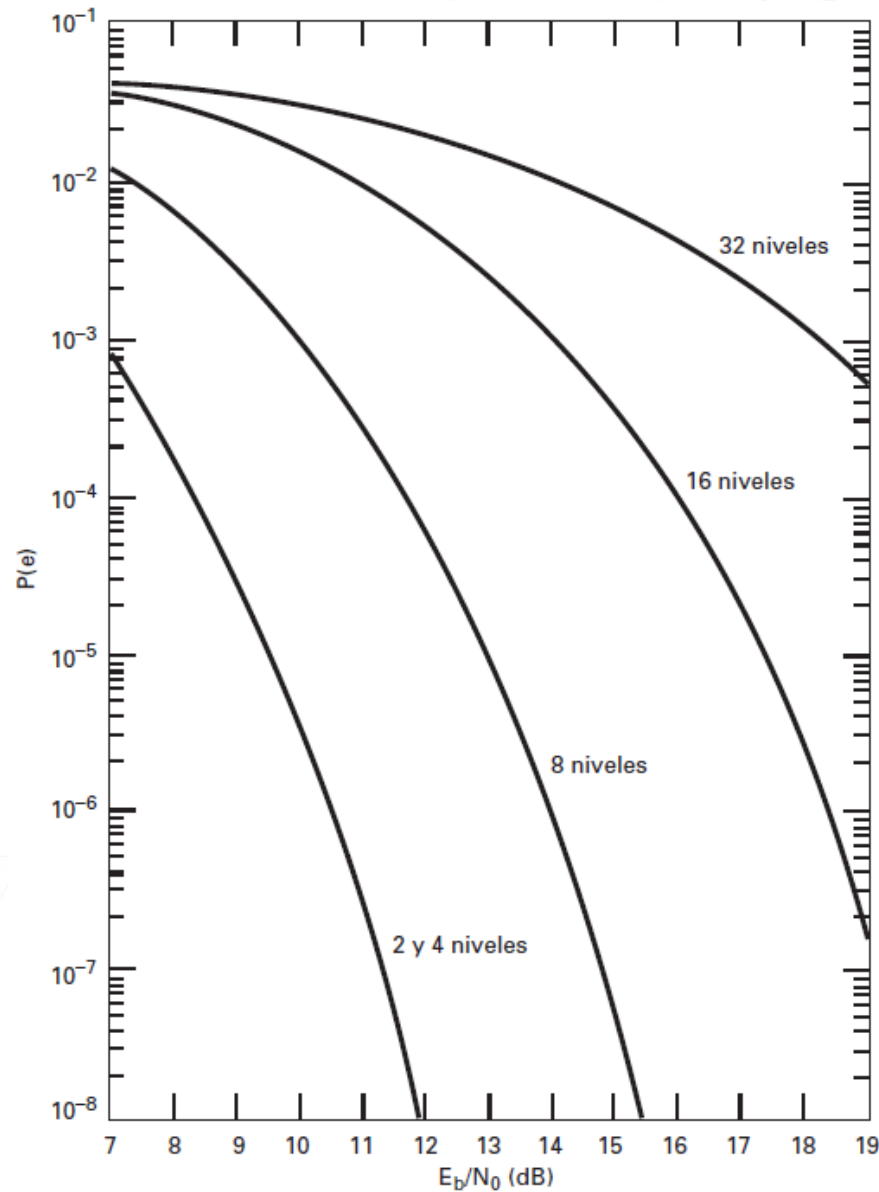
2. Errores en PSK - Probabilidad

La ecuación general de la probabilidad de error de bit, para un sistema PSK M -fásico es

$$P(e) = \frac{1}{\log_2(M)} \text{erf}(z)$$

$$z = \sin(\pi/M) \sqrt{\log_2(M)} \sqrt{E_b/N_0}$$

2. Errores en PSK - Probabilidad

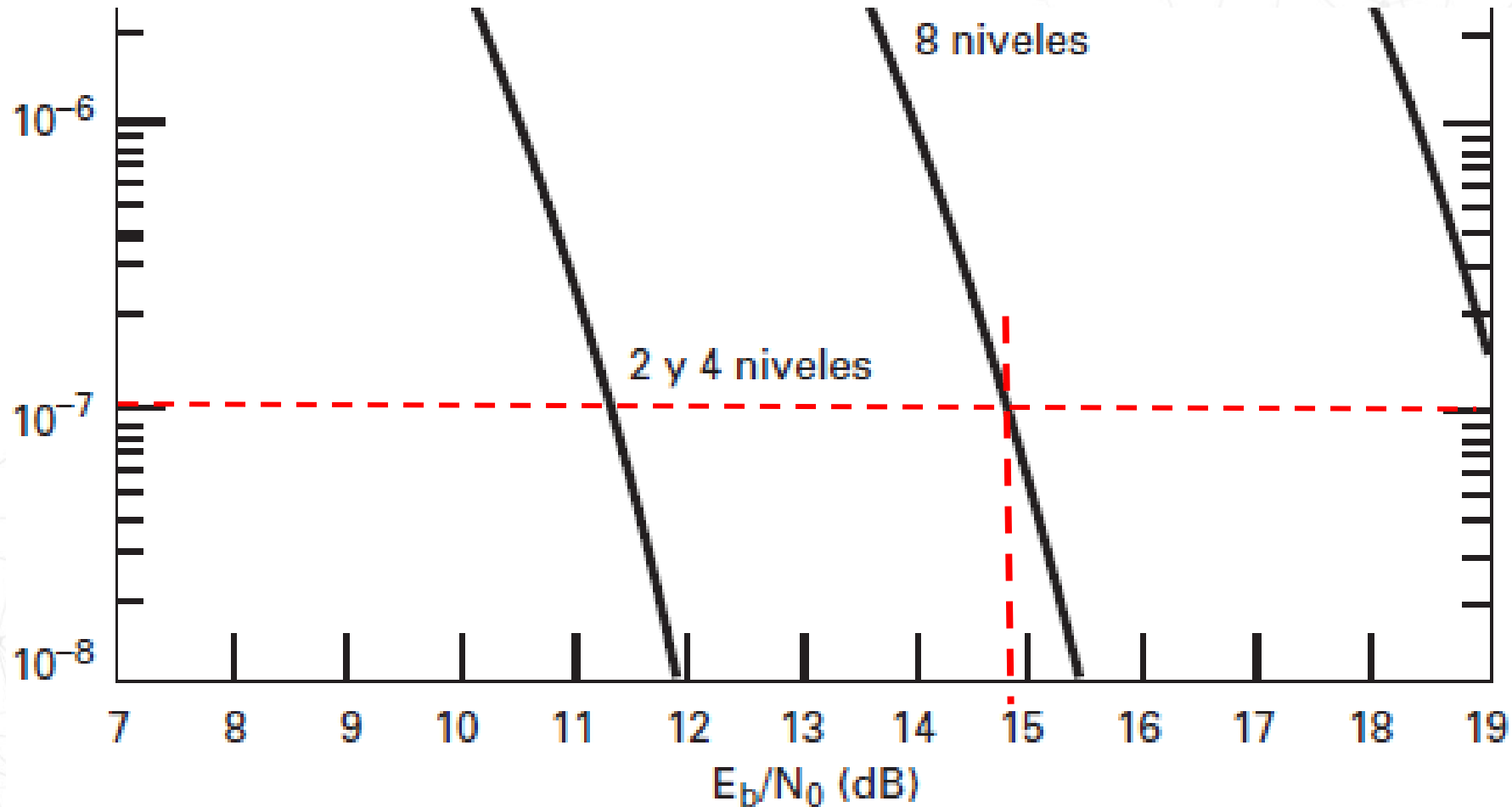


2. Errores en PSK - Probabilidad

Ejemplo (Tomasi, 12-13): Calcular el ancho mínimo de banda necesario para alcanzar una $P(e) = 10^{-7}$ para 8-PSK trabajando a 10Mbps con una relación de potencia de portadora a ruido de 11.7 dB.

A partir de la figura se observa que para lograr la $P(e)$, se requiere una relación E_b/N_0 de 14.7dB.

2. Errores en PSK - Probabilidad



2. Errores en PSK - Probabilidad

Ejemplo (Tomasi, 12-13): Calcular el ancho mínimo de banda necesario para alcanzar una $P(e) = 10^{-7}$ para 8-PSK trabajando a 10Mbps con una relación de potencia de portadora a ruido de 11.7 dB.

$$\frac{E_b}{N_0} \text{ (dB)} = 10\log\left(\frac{C}{N}\right) + 10\log\left(\frac{B}{f_b}\right)$$

$$10\log\left(\frac{B}{f_b}\right) = \frac{E_b}{N_0} \text{ (dB)} - 10\log\left(\frac{C}{N}\right)$$

2. Errores en PSK - Probabilidad

Ejemplo (Tomasi, 12-13): Calcular el ancho mínimo de banda necesario para alcanzar una $P(e) = 10^{-7}$ para 8-PSK trabajando a 10Mbps con una relación de potencia de portadora a ruido de 11.7 dB.

$$\frac{B}{f_b}(\text{dB}) = \frac{E_b}{N_0}(\text{dB}) - \frac{C}{N}(\text{dB}) = 14.7 - 11.7 = 3\text{dB}$$

$$\frac{B}{f_b} = 10^{(0.3)} = 2$$

$$B = 2f_b = 2 \times 10\text{Mbps} = 20\text{MHz}$$

3. Errores en QAM

Para sistemas M-arios mayores de 4, la QAM es mejor que la PSK. La ecuación general de la distancia entre puntos adyacentes de señalización para un sistema QAM con L niveles en cada eje es

$$d = \frac{\sqrt{2}}{L - 1} \times D$$

3. Errores en QAM - Probabilidad

La ecuación general de la probabilidad de error de bit, en un sistema QAM de L niveles es

$$P(e) = \frac{1}{\log_2(L)} \left(\frac{L-1}{L} \right) \text{erfc}(z)$$

$$z = \frac{\sqrt{\log_2(L)}}{L-1} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$

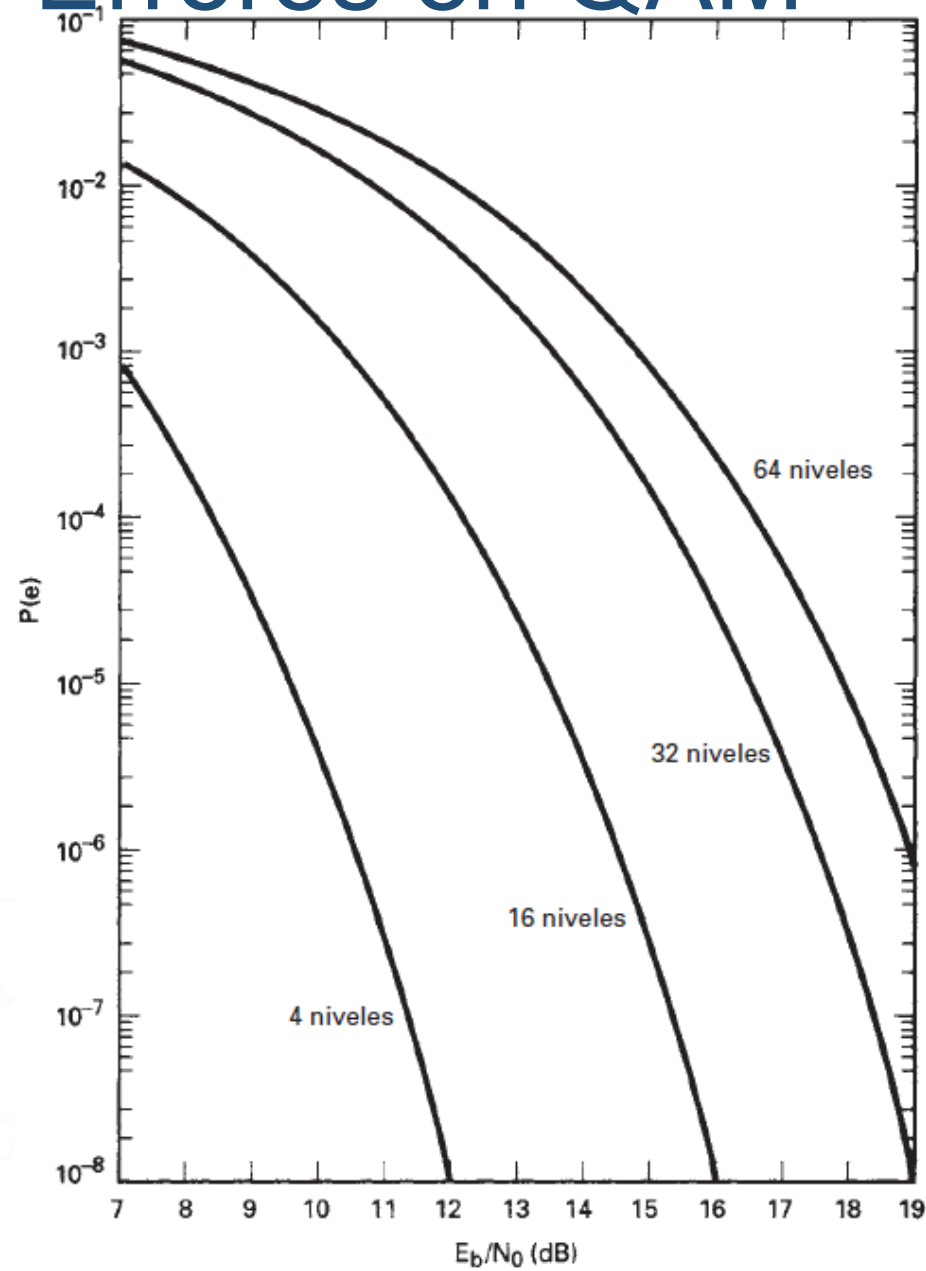
3. Errores en QAM - Probabilidad

TABLA 12-2 Comparación de presencia de errores en diversos esquemas de modulación digital (BER = 10^{-6} de probabilidad de error)

Técnica de modulación	Relación C/N (dB)	Relación E_b/N_0 (dB)
BPSK	10.6	10.6
QPSK	13.6	10.6
4-QAM	13.6	10.6
8-QAM	17.6	10.6
8-PSK	18.5	14
16-PSK	24.3	18.3
16-QAM	20.5	14.5
32-QAM	24.4	17.4
64-QAM	26.6	18.8



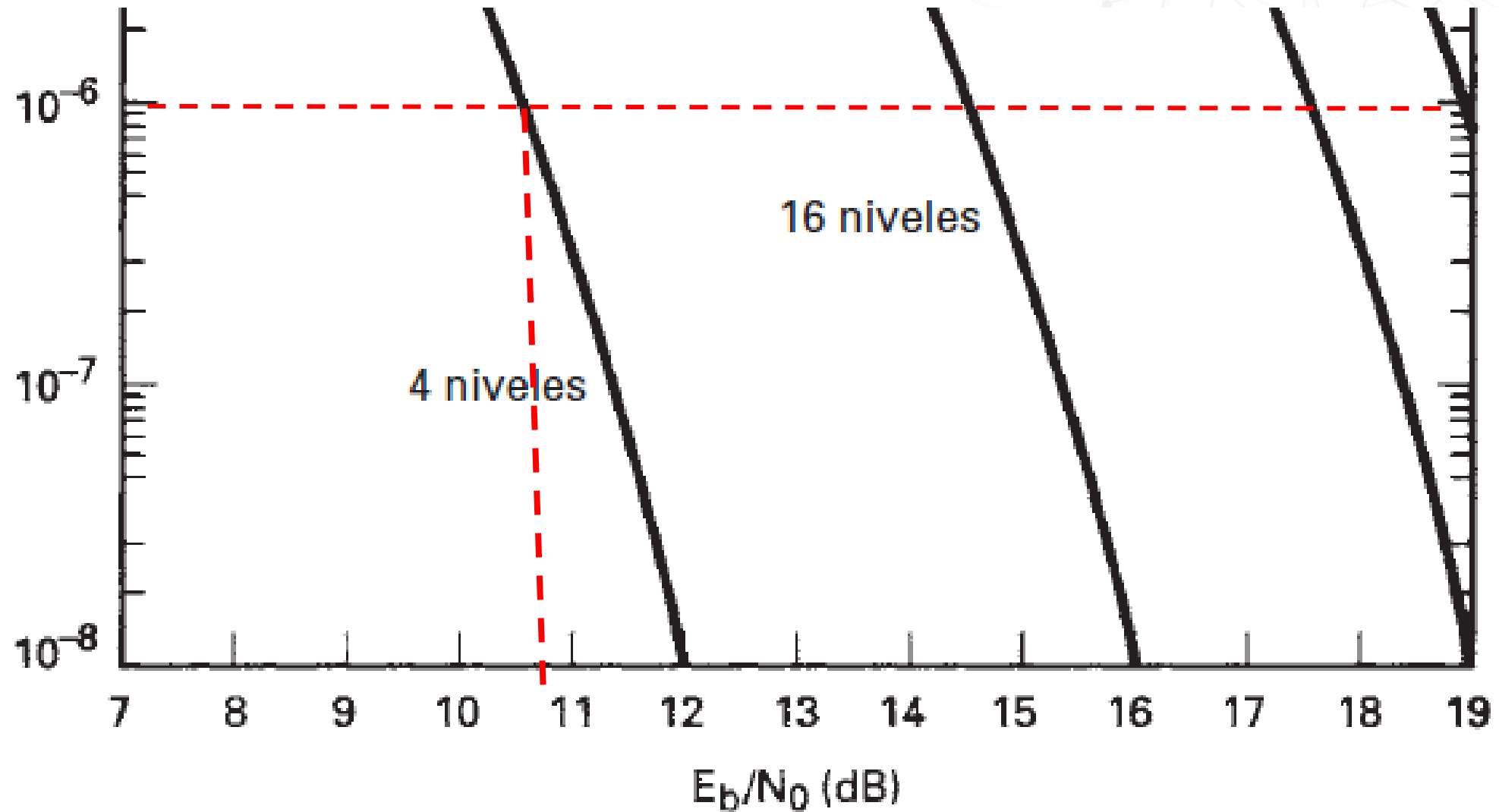
3. Errores en QAM



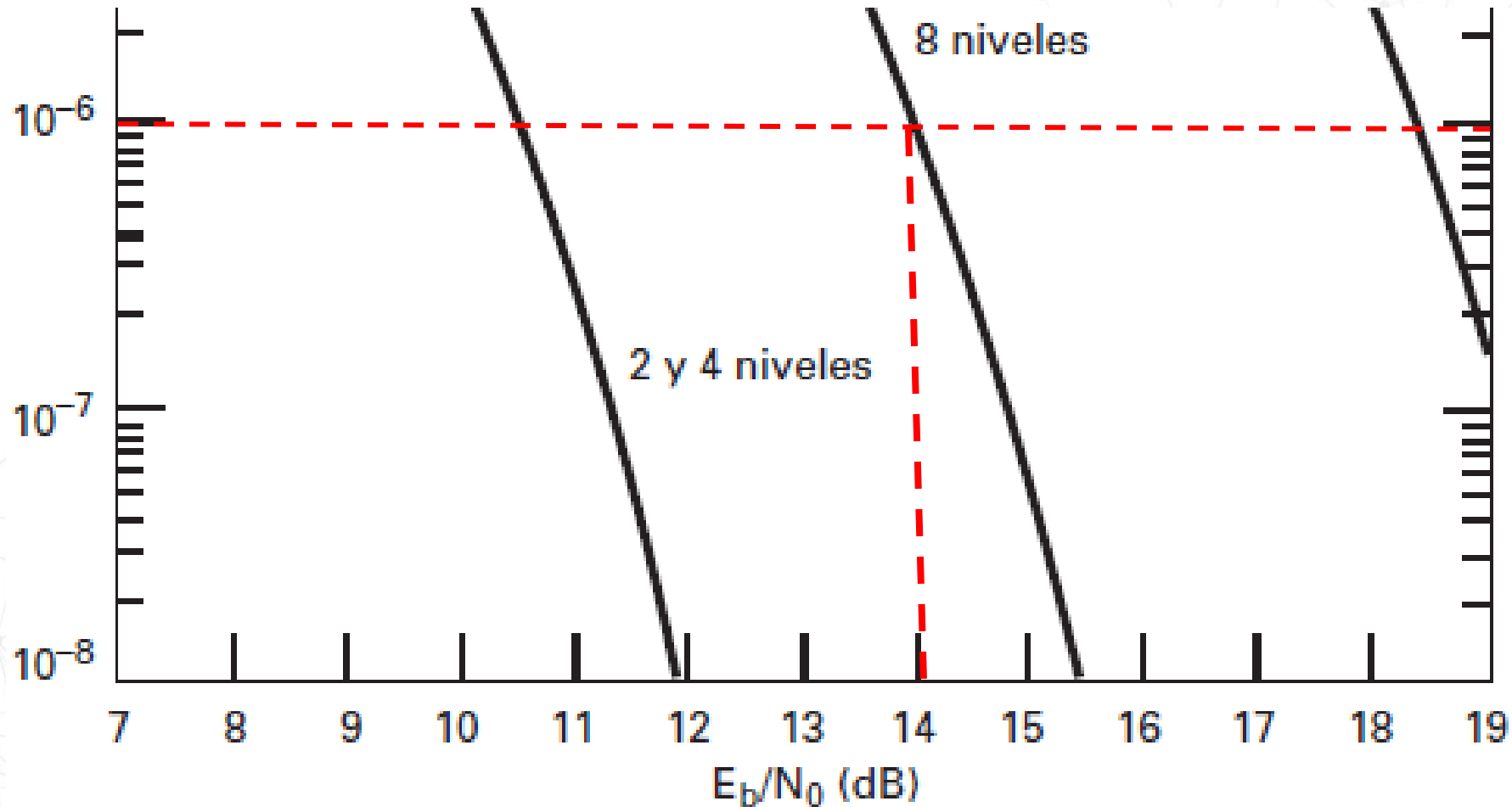
3. Errores en QAM - Probabilidad

Ejemplo (Tomasi, 12-14): Cual sistema requiere la máxima relación E_b/N_0 para obtener una $P(e) = 10^{-6}$, un sistema QAM de 4 niveles o uno 8-PSK?

Errores en QAM



Errores en PSK



3. Errores en QAM - Probabilidad

Ejemplo (Tomasi, 12-14): Cual sistema requiere la máxima relación E_b/N_0 para obtener una $P(e) = 10^{-6}$, un sistema QAM de 4 niveles o uno 8-PSK?

Solución: De acuerdo a las figuras anteriores, para QAM de 4 niveles $E_b/N_0 = 10.6\text{dB}$. Mientras que para 8-PSK, $E_b/N_0 = 14\text{dB}$. Entonces para lograr una $P(e) = 10^{-6}$, un sistema QAM necesitaría la relación E_b/N_0 3.4dB menor.

Bibliografía

–TOMASÍ, Wayne. (2003) Sistemas de Comunicaciones Electrónicas. 4ª ed. Prentice Hall.