2021 新七年级暑期辅优第七讲——本讲请关注两个公式的认形

模块一：平方差公式

100

1、平方差公式定义：两数和与这两数差相乘，等于这两个数的平方差．$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$．

（1）a．b 可以表示数，也可以表示式子（单项式和多项式）

（2）有些多项式相乘，表面上不能用公式，但通过适当变形后可以用公式：

如：$(a+b-c)(b-a+c)=[b+(a-c)][b-(a-c)]=b^2-(a-c)^2$

2、平方差公式的特征：

（1）左边是两个二项式相乘，并且这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数．

（2）右边是乘式中两项的平方差．

【例1】 下列多项式乘法中，能用平方差公式计算的是（ B ）

A. $(x+1)(1+x)$　　　　B. $\left(\frac{1}{2}a+b\right)\left(b-\frac{1}{2}a\right)$　$b^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

C. $(-a+b)(a-b)$　　　　D. $(-x-y)(x+y)$

【例2】 计算：

（1）$(3x+5)(3x-5)$；

解：原式 $=9x^2-25$

（2）$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$；

解：原式 $=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}$

（3）$(2x+y)(2x-y)$．

解：原式 $=4x^2-y^2$

【例3】 计算：

（1）$\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}\right)$；

解：原式 $=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{25}$

（2）$(-2x+3y)(-2x-3y)$；

解：原式 $=4x^2-9y^2$

（3）$(-2a-3b)(2a-3b)$．

解：原式 $=9b^2-4a^2$

【例4】 计算：

（1）$(2a-3)(2a+3)(4a^2+9)$；

解：原式 $=(4a^2-9)(4a^2+9)$

$=16a^4-81$

（2）$\left(\frac{1}{2}a+b\right)\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+b^2\right)$．

解：原式 $=\left(\frac{1}{4}a^2-b^2\right)\left(\frac{1}{4}a^2+b^2\right)$

$=\frac{1}{16}a^4-b^4$

【例5】 计算：$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y-\frac{1}{3}z\right)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y-\frac{1}{3}z\right)$.

解：原式 $=-\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y-\frac{1}{3}z\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y+\frac{1}{3}z\right)\right]$

$=-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y\right)^2+\frac{1}{9}z^2$

$=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}xy-\frac{1}{25}y^2+\frac{1}{9}z^2$

【例6】 计算：

（1）$(a+b)(a-b)-(a+3b)(a-3b)$；

解：原式 $=(a^2-b^2)-(a^2-9b^2)$

$=a^2-b^2-a^2+9b^2$

$=8b^2$

（2）$(-2y+x)(2y+x)+(-2x-y)(-2x+y)$；

解：原式 $=x^2-\cancel{4y^2}+4x^2-y^2$

$=5x^2-5y^2$

（3）$\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)-\left(-\frac{1}{3}x-2\right)\left(-\frac{1}{3}x+2\right)$.

解：原式 $=\frac{1}{4}x^4-9-\frac{1}{9}x^2+4$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}x^2-5$

【例7】 计算：$\left[(2a-1)(2a+1)+(a+2)(a-2)-4a^2\right](a^2+5)$.

解：原式 $=[4a^2-1+a^2-4-4a^2](a^2+5)$

$=(a^2-5)(a^2+5)$

$=a^4-25$

【例8】 简便运算：

（1）102×98；

解：原式 $=(100+2)\times(100-2)$

$=10000-4$

$=9996$

（2）30.2×29.8；

解：原式 $=30^2-0.2^2$

$=900-0.04$

$=899.96$

（3）$25\frac{1}{3}\times24\frac{2}{3}$.

解：原式 $=25^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=625-\frac{1}{9}$

$=624\frac{8}{9}$

【例9】 计算:【难度★★★】

(1) $2009\times2007-2008^2$;

解:原式 $=2008^2-1-2008^2$

$=-1$

(2) $\dfrac{2007}{2007^2-2008\times2006}$;

~~解:原式 $=\dfrac{2007}{(2007+1)(2007-1)+1}$~~

解:原式 $=\dfrac{2007}{2007^2-2007^2+1}$

$=2007$

(3) $\dfrac{2007^2}{2008\times2006+1}$.

解:原式 $=\dfrac{2007^2}{(2007+1)(2007-1)+1}$

$=\dfrac{2007^2}{2007^2-1+1}$

$=1$

【例10】 计算:$(1+2)(1+2^2)(1+2^4)\cdots(1+2^{2^n})+1$($n$是正整数).【难度】★★★

解:原式 $=(\cancel{2-1)(1+2)(1+2^2)}(1+2^4)\cdots$

$(2-1)(1+2^2)(1+2^4)\cdots(1+2^{2n})+1$

当2n是n的5乘方时 成立

$=(2^2-1)(1+2^2)\cdots\cdots(1+2^{2n})+1$

$=(2^4-1)(2^4+1)\cdots\ +(1+2^{2n})+1$

$=(2^{2n}-1)(2^{2n}+1)+1$

$=2^{4n}-1+1$

模块二:完全平方公式 $=2^{4n}$ 100

1、完全平方公式定义:两数和(或差)的平方,等于它们的平方和,加上(或减去)它们积的2倍.$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$、$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2、完全平方公式的特征: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(1)左边是两个相同的二项式相乘;

(2)右边是三项式,是左边两项的平方和,加上(这两项相加时)或减去(这两项相减时)这两项乘积的2倍;

(3)公式中的字母可以表示具体的数(正数或负数),也可以表示单项式或多项式等代数式.

【例11】 下列各式中,能用完全平方公式计算的是(C)

A. $(4x-7y)(-7y-4x)$ B. $(-4x-7y)(7x+4y)$

C. $(-4x-7y)(7y+4x)$ D. $(4x-7y)(4x+7y)$

【例12】 下列计算正确的是(C)

A. $(a+b)^2=a^2+b^2$ × B. $(x-y)^2=x^2-2xy-y^2$ ×

C. $(5a+2b)^2=25a^2+4b^2+20ab$ ✓ D. $\left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}n\right)^2=\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{6}mn+\frac{1}{4}n^2$ ×

【例13】 计算:

（1）$(3x+9)^2$；

解:原式$=9x^2+54x+81$

（2）$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$；

解:原式$=\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$

（3）$(-xyz-2)^2$．

解:原式$=x^2y^2z^2+4xyz+4$

【例14】 计算：

（1）$(x-3)(x+4)-(x+3)^2$；

解:原式$=(x^2-3x+4x-12)-(x^2+6x+9)$

$=x^2-x-12-x^2-6x-9$

$=-5x-21$

（2）$(2x+3)^2-(-2x-2)(-2x+2)$；

解:原式$=4x^2+12x+9+(2x+2)(-2x+2)$

$=4x^2+12x+9+4-4x^2$

$=12x+13$

（3）$(2a+1)^2-(2a+1)(2a-1)$．

解:原式$=(4a^2+4a+1)-(4a^2-1)$

$=4a+2$

【例15】 计算：

（1）$\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)^2$；

解:原式$=\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2\right)-\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$

$=-\frac{2}{3}xy$

（2）$\left(-\frac{1}{3}a-\frac{3}{4}b\right)^2-\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b\right)^2$．

解:原式$=\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b\right)^2-\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b\right)^2$

$=0$

【例16】计算：（1）$(9a^2-16b^2)(3a-4b)(3a+4b)$；（2）$\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2\right)$．

解:原式$=(9a^2-16b^2)(9a^2-16b^2)$

$=81a^4-144a^2b^2-144a^2b^2+256b^4$

$=81a^4+256b^4-288a^2b^2$

解:原式$=\left(\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2\right)$

$=\frac{1}{81}a^4-\frac{1}{36}a^2b^2-\frac{1}{36}a^2b^2+\frac{1}{16}b^4$

$=\frac{1}{81}a^4+\frac{1}{16}b^4-\frac{1}{18}a^2b^2$

【例 17】计算：（1）$(-a-2b+c)^2$；（2）$(3x+2y+4)^2$；

解：原式$=a^2+4b^2+c^2+4ab-2ac-4bc$

解：原式$=9x^2+4y^2+16+12xy+16y+$

（3）$(x+y-2)(2-x-y)$.

解：原式$=-(x+y-2)(x+y-2)$

$\cancel{-(x+y-2)^2}$

$=-(x+y-2)^2$

$=-(x^2+y^2+4-4x-4y+2xy)$

$=-x^2-y^2-4+4x+4y-2xy$

【例 18】简便计算：（1）99.8^2；（2）2005^2.

解：原式$=(100-0.2)^2$

$=100^2-2\times0.2\times100+0.2^2$

$=10000-40+0.04$

$=9960.04$

解：原式$=(2000+5)^2$

$=4000000+20000+25$

$=4020025$

【例 19】设$m+n=8,mn=15$，求（1）m^2+n^2；（2）$m-n$.

解：$\because (m+n)^2=64$

又$\because m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

$\because m+n=8$

$mn=15$

$\therefore m^2+n^2=34$

$(m-n)^2=m^2+n^2-2mn$

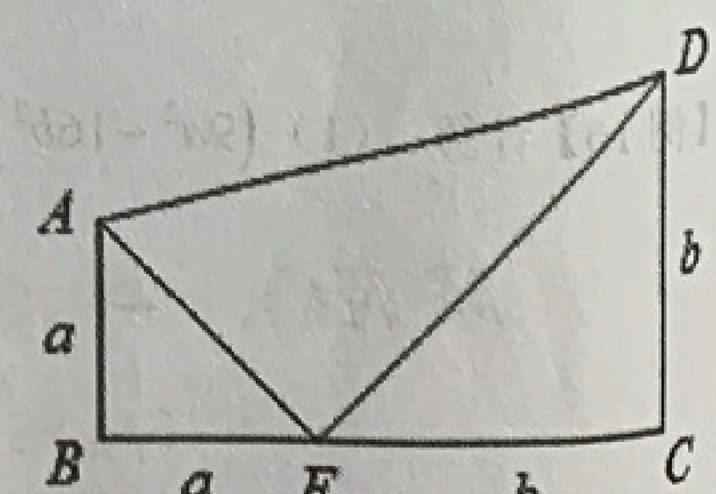
$=34-30$

$=4$

$\therefore m-n=\pm2$

【例 20】如图，已知ΔABE和ΔDCE都为等腰直角三角形，$AB=BE=a$，$DC=EC=b$.

求ΔADE的面积.（用含a、b的代数式表示）



解：

$S_{\triangle ADE}=S_{梯形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle DCE}$

$=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2$

$=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2$

$=ab$

【例 21】已知 $x-\frac{1}{x}=6$，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值．【难度】★★★

解: $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$=(x-\frac{1}{x})^2+2$

$=36+2$

$=38$

【例 21】已知：$|x-2y-1|+x^2+4xy+4y^2=0$，则 $2x+y=$ $\underline{\ \frac{3}{4}\ }$．

$1-\frac{1}{4}$

$\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+4xy+4y^2=0 \end{cases}$

⇓

$(x+2y)^2=0$

$x+2y=0$

$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$

⇓

$2x=1$　$2y=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$　$y=-\frac{1}{4}$

$\therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$

【例 22】已知 x^2-6x+k 是完全平方式，求 k 的值．

x^2-6x+k

$=(x-\sqrt{k})^2$

$=x^2-2\times\sqrt{k}+k$

$2\times\sqrt{k}=6$

$\times\sqrt{k}=3$

$\sqrt{k}=3$，$k=9$

$\therefore k=9$

【例 23】已知 $x^2+y^2+4x-6y+13=0$，x、y 都是有理数，求 x^y 的值．【难度】★★★

$x^2+4x+4+y^2-6y+9=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=0$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

$x^y=(-2)^3=-2^3=-8$

【例 24】已知 $4x^2-kx+16$ 是完全平方式，求 k 的值．【难度】★★★

解: $4x^2-kx+16=(2x)^2-kx+4^2$

$|kx|=2\cdot4\cdot2x=16x$

$k=\pm16$

【例25】甲、乙两家商店在9月份的销售额均为a万元，在10月和11月这两个月中，甲商店的销售额平均每月增长$x\%$，乙商店的销售额平均每月减少$x\%$，11月份甲商店的销售额比乙商店的销售额多多少万元？【难度】★★★

解：

甲 $(1+x\%)^2 a$

乙 $(1-x\%)^2 a$

$(1+x\%)^2 a-(1-x\%)^2 a$

$= \left[(1+x\%)^2-(1-x\%)^2\right]a$

$=(1+x\%+1-x\%)(1+x\%-1+x\%)a$

$=2\cdot 2x\%\cdot a$

$=4x\%\,a$

【例26】已知$x^2+3x+1=0$，求：（1）$x^2+\frac{1}{x^2}$；（2）$x^4+\frac{1}{x^4}$．【难度】★★★

解 $x^2+3x=-1$

$x^2+1=-3x$

$x+\frac{1}{x}=-3$

(1)

$(x+\frac{1}{x})^2=9$

$x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2=9$

$x^2+(\frac{1}{x})^2+2=9$

$x^2+(\frac{1}{x})^2=7$

$\therefore x^2+(\frac{1}{x})^2=7$

(2)

$[x^2+(\frac{1}{x})^2]^2=7^2$

$x^4+(\frac{1}{x})^4+x^2\cdot(\frac{1}{x})^2\cdot 2=49$

$x^4+(\frac{1}{x})^4+2=49$

$x^4+(\frac{1}{x})^4=47$

$\therefore x^4+(\frac{1}{x})^4=47$

9J

作业

【习题1】 下列各式中，能用平方差公式计算的是（ D ）

A. $(a-2b)(a-b)$　　B. $(-a+2b)(a-2b)$

C. $(a+2b)(-a-2b)$　　D. $(-a-2b)(-a+2b)$

【习题2】 计算：

（1）$(2x+5)(2x-5)$；

解：原式$=4x^2-25$

（2）$(1-2a)(1+2a)$；

解：原式$=1^2-4a^2$

$=1-4a^2$

（3）$\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$．

解：原式$=\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2$

【习题3】 计算：

（1）$\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y\right)\left(-\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)$；（2）$(-2a-3b)(2a+3b)$.

解：原式 $=\frac{4}{9}x^2-\frac{9}{25}y^2$

解：原式 $=-(2a+3b)^2$

$=-(4a^2+12ab+9b^2)$

$=-4a^2-12ab-9b^2$

【习题4】 解方程：$5x+6(3x+2)(-2+3x)-54\left(-x-\frac{1}{3}\right)\left(-x+\frac{1}{3}\right)=2$.

解：

$5x+6(9x^2-4)-54(x^2-\frac{1}{9})=2$

$5x+54x^2-24-54x^2+6=2$

$5x-18=2$

$5x=20$

$x=4$

【习题5】 化简求值：$(2b+3a)(3a-2b)-(2b-3a)(2b+3a)$，其中 $a=-1,b=2$.

解：原式 $=(9a^2-4b^2)-(4b^2-9a^2)$

$=18a^2-8b^2$

$=18-8\times2^2$

$=18-32$

$=-14$

【习题6】 计算：

（1）104×96；（2）30.7×29.3；（3）$10\frac{1}{7}\times9\frac{6}{7}$.

解：原式 $=100^2-4^2$

$=10000-16$

$=9984$

解：原式 $=30^2-0.7^2$

$=900-0.49$

$=899.51$

解：原式 $=100-\frac{1}{49}$

$=99\frac{48}{49}$

【习题7】 计算：

（1）$(4m^2-3n^2)^2$；

解：原式 $=16m^4-24m^2n^2+9n^4$

（2）$(x-3y)(x+3y)(x^2-9y^2)$．

解：原式 $=(x^2-9y^2)^2$

$=x^4-18x^2y^2+81y^4$

【习题8】 计算：

（1）$(-x-3y+4)(x+3y-4)$；

解：原式 $=-(x+3y-4)^2$

$=-(x^2+9y^2+16+6xy-8x-24y)$

$=-x^2-9y^2-16-6xy+8x+24y$

（2）$(2x+y+3)(3-2x-y)$．

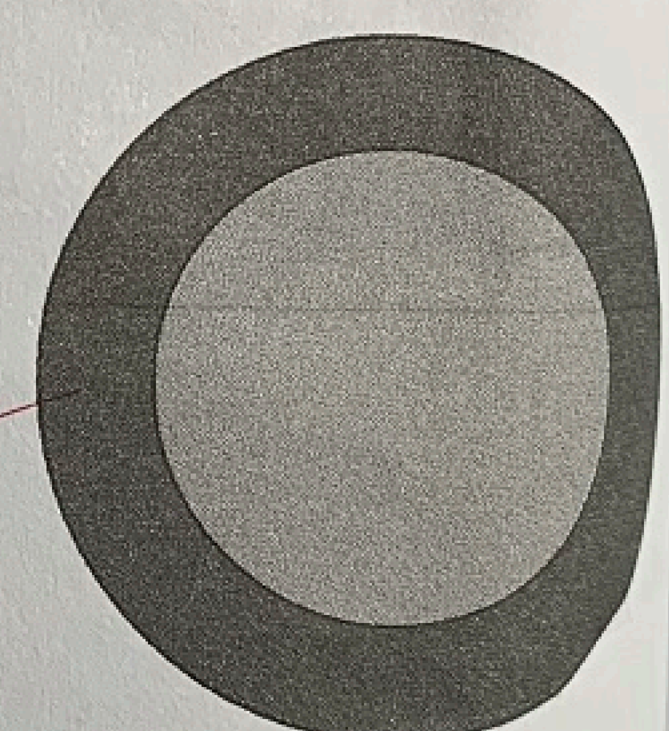
解：原式 $=-(2x+y+3)(2x+y-3)$

$=-[(2x+y)^2-9]$

$=-(4x^2+4xy+y^2)+9$

$=-4x^2-4xy-y^2+9$

【习题9】 如图，是一个机器零件，大圆的半径为 $r+2$，小圆的半径为 $r-2$，求阴影部分的面积．



解：

$S_{大圆}=\pi(r+2)^2$

$S_{小圆}=\pi(r-2)^2$

$\pi(r+2)^2-\pi(r-2)^2$

$=\pi[(r+2)^2-(r-2)^2]$

$\cancel{=\pi[r^2+4r+4-r^2+4r-4]}$

$=\pi[r^2+4r+4-(r^2-4r+4)]$

$=\pi[r^2+4r+4-r^2+4r-4]$

$=8\pi r$

【习题10】 计算：

（1）已知 $2x-y-3=0$，求代数式 $12x^2-12xy+3y^2$ 的值；

解： $2x-y=3$

$12x^2-12xy+3y^2$

$=3(4x^2-4xy+y^2)$

$\cancel{=3[(2x^2}$

$=3(2x-y)^2$

$=3\times3^2$

$=27$

(2) 已知$x=y+4$，求代数式$2x^2-4xy+2y^2-25$的值．【难度】★★★

解: $x-y=4$

$2x^2-4xy+2y^2-25$

$=2(x^2-2xy+y^2)-25$

$=2(x-y)^2-25$

$=32-25$

$=7$

【习题11】 求值：

(1) 已知：$a+b=3$，$ab=1$，求代数式的值：①a^2+b^2；②a^4+b^4．

解:

(1)

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=9-2$

$=7$

(2)

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=7^2-2$

$=47$

(2) 已知：$a-b=5$，$ab=4$，求a^2+b^2的值．【难度】★★★

解:

$a^2+b^2=\cancel{(a+b)^2-2ab}$

$=(a-b)^2+2ab$

$=5^2+8$

$=33$

【习题12】 求值：

（1）已知：$(a-b)^2=8$，$(a+b)^2=2$，求 ab 的值；

解.
$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$
$4ab=2-8$
$4ab=-6$
$ab=-1.5$

（2）已知：$(x-2)^2+(x+3)^2=15$，求 $(2-x)(x+3)$ 的值．【难度】★★★

解.
$\cancel{(2-x)(x+3)}$
$\cancel{=-(x-2)(x+3)}$
$\cancel{=-(x^2+x-6)}$
$\cancel{=-x^2-x+6}$

$\cancel{(x-2)^2+(x+3)^2=15}$
$\cancel{x^2-4x+4+x^2+6x+9=15}$
$\cancel{x^2+2x=2}$

-5

$[(x-2)-(x+3)]^2=(x-2)^2+(x+3)^2-2(x-2)(x+3)$
$[x-2-x-3]^2=15+2(2-x)(x+3)$
$25=15+2(2-x)(x+3)$
$(2-x)(x+3)=5$

【习题13】 已知：$a^2-3a+1=0$，求 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 的值．【难度】★★★

解：
$a^2-3a=-1$
$a^2+1=3a$
$a+\frac{1}{a}=3$
$(a+\frac{1}{a})^2=9$
$a^2+2a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=9$
$a^2+\frac{1}{a^2}+2=9$
$a^2+\frac{1}{a^2}=7$

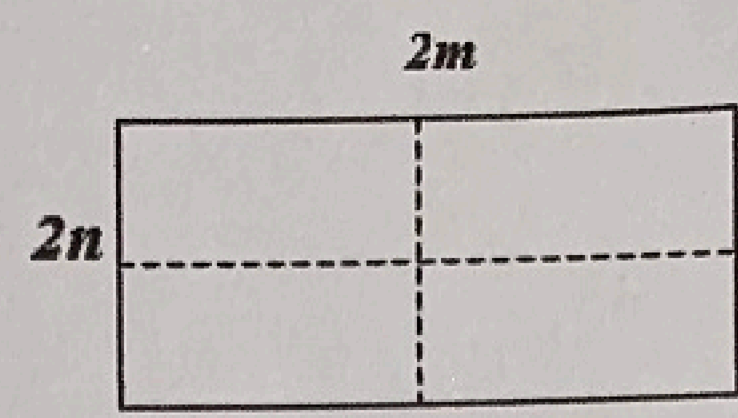
【习题14】 我们把如下左图的一个长为 $2m$，宽为 $2n$ 的长方形，沿图中的虚线剪成四个小长方形，再按如下右图围成较大的正方形．【难度★★★】

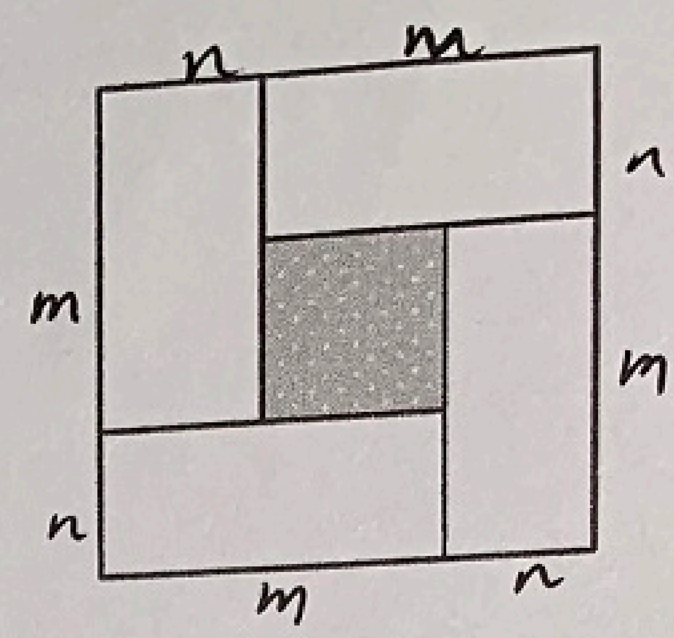
(1) 大正方形的边长是多少？

(2) 中间正方形（阴影部分）的边长是多少？

(3) 用两种不同的方法求阴影部分的面积；

(4) 比较两种方法，你能得到怎样的等量关系？





解：(1) $2(2m+2n)=4(m+n)$

(2) $4(m-n)$

(3) ① $(m-n)^2$

② $(m+n)^2-4mn$

(4) $(m+n)^2-4mn=(m-n)^2$

知识模块三：配方合集

85

1、当 x 取 $-\frac{9}{2}$ 时，多项式 $x^2+9x+100$ 取得最小值是 $\frac{319}{4}$。

$x^2+9x+\frac{81}{4}+\frac{319}{4}$

$(x+\frac{9}{2})^2+\frac{319}{4}$

2、已知 $x^2+y^2+4x-12y+40=0$，求 x^2-4y^2 的值。

解、~~$x^2+4x+4+y^2-12y+36=0$~~ ~~$x=-2\ y=6$~~

~~$(x+2)^2+(y-6)^2=0$~~

$x^2+4x+4+y^2-12y+36=0$

$(x+2)^2+(y-6)^2=0$

$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$

$x^2-4y^2=4-144=-140$

3、已知$x^2+2x+y^2-10y+26=0$，求代数式$x^y+y^{x+2}\cdot x^{x+3}$的值。

解: $x^2+2x+1+y^2-10y+25=0$

~~$(x+1)^2+(y-5)^2=0$~~

~~$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$~~

$x^y+y^{x+2}\cdot x^{x+3}$

$=1^5+5^3\cdot 1^4$

$=1+125$

$=126$

-5

$\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}$

$x^y+y^{x+2}\cdot x^{x+3}=-1^5+5^1\cdot(-1)^2$

$=-1+5$

$=4$

4、一个自然数a恰等于另一自然数b的平方，则称自然数a为完全平方数(如$64=8^2$，64就是一个完全平方数)。若$a=1995^2+1995^2\cdot1996^2+1996^2$；求证：$a$是一个完全平方数.

解:

[illegible]

-X

解 令 ~~$a=k+1$~~ $x=1995$

则 $a=x^2+x^2\cdot(x+1)^2+(x+1)^2$

$=x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2$

$=x^2+x^2\cdot(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)$

$=x^2+x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1$

$=x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1$

$=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1$

$=(x^2+x+1)^2$

$=[x(x+1)+1]^2$

$=(1995\times1996+1)^2$

5、$x^2+y^2+2z^2-2x+4y+4z+7=0$，求$xyz$.

解

[illegible]

~~$x^2-2x+1+y^2+4y+4+2z^2+4z+4=0$~~

~~$(x-1)^2+(y+2)^2+2(z+1)^2=0$~~

~~$\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=-1\end{cases}$~~

~~$xyz=2$~~

6、已知a，b，c，d为正有理数，且满足$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求证：$a=b=c=d$.

解

$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$

-5

$(a^2-b^2)^2+$ ~~$2(a^2b^2)+$~~ $2a^2b^2+(c^2-d^2)^2+2c^2d^2=4abcd$

$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$

$\because (a^2-b^2)^2\geq0$, $(c^2-d^2)^2\geq0$, $(ab-cd)^2\geq0$

$\therefore a^2-b^2=0$, $c^2-d^2=0$, $ab=cd$

$\because a,b,c,d$ 均为有理数

$\therefore a=\pm b$, $c=\pm d$

$a=b$ $c=d$

$\therefore a=b=c=d$

7、已知，$4a^2+4a+b^2-6b+10=0$，则 $a+b$.

解：~~$4a^2+4a+1+b^2-6b+9$~~ $=1$

$4a^2+4a+1+b^2-6b+9=0$

$(2a+1)^2+(b-3)^2=0$

$\begin{cases}2a=-1\\ b=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-0.5\\ b=3\end{cases}$

$a+b=2.5$

95

【作业1】 下列多项式乘法中，能用平方差公式计算的是（ ~~C~~ ） B

-5

A. $(x^2-y)(x+y^2)$ ×

B. $(-a-b)(a-b)$ ✓

C. $(-c^2-d^2)(d^2+c^2)$ ×

D. $(x-y^2)(x^2+y)$ ×

【作业2】 计算：

（1）$\left(-\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}y\right)^2$；

解：原式 $=(\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}y)^2$

$=\frac{1}{25}x^2+\frac{1}{25}xy+\frac{1}{100}y^2$

（2）$\left(cd-\frac{1}{2}\right)^2$.

解：原式 $=c^2d^2-cd+\frac{1}{4}$

【作业3】 用简便方法计算：

（1）403×397；

解：原式 $=400^2-3^2$

$=160000-9$

$=159991$

（2）$29\frac{3}{4}\times30\frac{1}{4}$；

解：原式 $=900-\frac{1}{16}$

$=899\frac{15}{16}$

（3）$99\times101\times10001$；

解：原式 $=(100^2-1^2)\times10001$

$=9999\times10001$

$=10000^2-1^2$

$=100000000-1$

$=99999999$

（4）49^2+52^2.

解：原式 $=50^2-100+1+50^2+100+4$

$=5000+100+5$

$=5105$

【作业4】 计算：

（1）$(2x+y)^2-(2x+y)(2x-y)$；

解：原式 $=(4x^2+4xy+y^2)-(4x^2-y^2)$

$=4x^2+4xy+y^2-4x^2+y^2$

$=4xy+2y^2$

（2）$(-x-y)(x-y)+(x+y)^2$；

解：原式 $=x^2+2xy+y^2-x^2+y^2$

$=2xy+2y^2$

（3）$2(x+y)^2-5(x+y)(x-y)+3(x-y)^2$．

解：原式 $=2x^2+4xy+2y^2-5x^2+5y^2+3x^2-6xy+3y^2$

$=-2xy+10y^2$

【作业5】 计算：

（1）$(2x+y-3z)(2x-y+3z)$；

解：原式 $=$ ~~(2x+(y-3z)~~

$[2x+(y-3z)][2x-(y-3z)]$

$=4x^2-(y-3z)^2$

$=4x^2-y^2+6yz-9z^2$

（2）$(2a-b+1)(2a-b-1)$．

解：原式 $=(2a-b)^2-1^2$

$=4a^2-4ab+b^2-1$

【作业6】 求值：

（1） 已知 $x+y=-6$，$xy=2$，求代数式 $(x-y)^2$ 的值；

解：

~~$(x-y)^2=x^2-2xy$~~

$(x+y)^2=36$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=36-8$

$=28$

（2） 已知 $x+y=-4$，$x-y=8$，求代数式 x^2-y^2 的值；

解:

$\begin{cases} x+y=-4 & ① \\ x-y=8 & ② \end{cases}$

①+②：$2x=4$

$x=2$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}$

x^2-y^2

$=4-36$

$=-32$

（3）已知 $a+b=3$，$a^2+b^2=5$，求 ab 的值.

解:

$(a+b)^2=9$

$=a^2+2ab+b^2$

$a^2+b^2+2ab=9$

$5+2ab=9$

$2ab=4$

$ab=2$

【作业7】 计算：$\left(3x-\frac{3}{4}\right)\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2+\frac{1}{8}\right)$. 【难度】★★★

解:原式=

$3(x-\frac{1}{4})\cdot 2(x+\frac{1}{2})\cdot 2(x^2+\frac{1}{16})$

$=12(x^2-\frac{1}{16})(x^2+\frac{1}{16})$

$=12(x^4-\frac{1}{256})$

$=12x^4-\frac{3}{64}$

【作业8】 已知 $x+y=4$，$xy=1$，求代数式 $(x^2+1)(y^2+1)$ 的值. 【难度】★★★

解: $(x^2+1)(y^2+1)$

$=x^2y^2+x^2+y^2+1$

$=1+16-2+1$

$=16$

【作业9】 不论a取任何整数值，代数式$a^2-8a+1-k$的值总是整数的平方，求k的值.

【难度】★★★

解: $a^2-8a+1-k=(a-b)^2$ $\nearrow$ $a^2-2ab+b^2$

$-8a=-2ab$

$-8=-2b$

$b=4$

$b^2=16$

$1-k=16$

$k=\cancel{15}-15$

【作业10】 试说明不论x,y取何值，代数式$4x^2+9y^2+12x-18y+20$的值总是正数. 【难度】★★★

解:

$4x^2+9y^2+12x-18y+20$

原式$=(2x)^2+12x+9+(3y)^2-18y+9+2$

$=(2x+3)^2+(3y-3)^2+2$

$\because (2x+3)^2\geq 0$, $(3y-3)^2\geq 0$

$\therefore (2x+3)^2+(3y-3)^2+2\geq 2$

$\therefore 4x^2+9y^2+12x-18y+20>0$

2021 田颛新七年级暑期辅优第八讲——整式乘法综合复习，

【整本均为暑期作业】

95

【灵魂两问!!!，不止是技巧型题型，特征型题型的得分要诀：熟识特征】

1、已知$a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，求$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$的值。

解：$\because a+b=x+y=2$，$ax+by=5$

$\therefore (a+b)(x+y)=4$

$ax+ay+bx+by=4$

$(ax+by)+(ay+bx)=4$

$ay+bx=-1$

$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$

$=a^2xy+b^2xy+abx^2+aby^2$

$=ax(ay+bx)+by(bx+ay)$

$=(ay+bx)(ax+by)$

$=-1\cdot 5=-5$

2、已知$a^5-a^4b-a^4+a-b-1=0$，且$2a-3b=1$，则a^3+b^3的值等于多少？

解：$a^5-a^4b-a^4+a-b-1=0$

$(a^5+a)-(a^4b+b)-(a^4+1)=0$

$a(a^4+1)-b(a^4+1)-(a^4+1)=0$

$\because a^4+1\geq 1$

$\therefore a-b-1=0$ 即$a-b=1$

$\because 2a-3b=1$

得$\begin{cases}a-b=1 & ①\\ 2a-3b=1 & ②\end{cases}$

①×2：得 $2a-2b=2$ ③

$\therefore\begin{cases}2a-2b=2 & ③\\ 2a-3b=1 & ②\end{cases}$

③-②得 $b=1$

$\therefore\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

$\therefore a^3+b^3$

$=2^3+1^3$

$=8+1$

$=9$

-5

3、已知x、y为正整数，并且$xy+x+y=71$，$x^2y+xy^2=880$，求x^2+y^2的值。

解：$x^2y+xy^2=880$

$\begin{cases}xy(x+y)=880\\ xy+x+y=71\end{cases}$

令$xy=a$，$x+y=b$

原方程组$=\begin{cases}ab=880 & ①\\ a+b=71 & ②\end{cases}$

由②得，$b=71-a$ ③

把③代入①得 $a(71-a)=880$

$a^2-71a=-880$

$a^2-71a+35.5^2=-880+35.5^2$

$(a-35.5)^2=380.25$

$a-35.5=\pm 19.5$

1° $a-35.5=19.5$

$a=55$

$\therefore\begin{cases}a=55\\ b=16\end{cases}$

$\begin{cases}xy=55\\ x+y=16\end{cases}$

$y=16-x$

$x(16-x)=55$

同上，解得

$\begin{cases}x=5\\ y=11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=11\\ y=5\end{cases}$

2° $a-35.5=-19.5$

$a=16$

$\therefore\begin{cases}a=16\\ b=55\end{cases}$

$\begin{cases}xy=16\\ x+y=55\end{cases}$

（无正整数解）

$\therefore x^2+y^2=25+121$

或$=121+25$

$=146$

$\therefore x^2+y^2=146$

4、计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{2002^2}\right)\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$

解：$(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{2003})(1-\frac{1}{2003})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2001}{2002}\times\frac{2002}{2003}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2003}{2002}\times\frac{2004}{2003}$

$=\frac{1}{2003}\times\frac{2004}{2}$

$=\frac{1002}{2003}$

9、解方程组：$\begin{cases}(x-1)(2y+1)=2(x+1)(y-1)\\ x(2+y)-6=y(x-4)\end{cases}$.

解：$(x-1)(2y+1)=2(x+1)(y-1)$

$\cancel{2xy}+x-2y-1=2\cancel{xy}-2x+2y-2$

$x-2y=2y-2x-1$

$x+2x-2y-2y=-1$

$3x-4y=-1$

$x(2+y)-6=y(x-4)$

$2x+xy-6=xy-4y$

$2x+4y=6$

$\therefore \begin{cases}3x-4y=-1 & ①\\ 2x+4y=6 & ②\end{cases}$

①+②：$5x=5$

$x=1$

把$x=1$代入②，得$y=1$

$\therefore \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

10、如果$x^4+y^4=15, x^2y-xy^2=-3$，那么$x^4-2y^4-3xy^2+x^2y+2xy^2+3y^4$的值.

解：原式$=x^4+y^4+x^2y-xy^2$

$=15-3$

$=12$

11、 已知a、b、m均为正整数，且$(x+a)(x+b)=x^2+mx+15$，则m可能取的值有多少个？

解：$(x+a)(x+b)$

$=x^2+(a+b)x+ab$

$\therefore \begin{cases}a+b=m\\ ab=15\end{cases}$

$15=1\times15=3\times5$

$m=1+15$

$=16$

或 $m=3+5$

$=8$

$\therefore m$可能取的值有2个

12、若$\left(x^2+px-\frac{1}{3}\right)(x^2-3x+q)$的积中不含$x$项与$x^3$项：

（1）求p、q的值.　　（2）求代数式$\left(-2p^2q\right)^2+(3pq)^{-1}+p^{2015}q^{2016}$的值.

解：(1) $(x^2+px-\frac{1}{3})(x^2-3x+q)$

$=x^4-3x^3+qx^2+px^3-3px^2+pqx-\frac{1}{3}x^2+x-\frac{q}{3}$

$=x^4+(p-3)x^3+(q-3p-\frac{1}{3})x^2+(pq+1)x-\frac{1}{3}q$

$\because$不含x项与x^3项

$\therefore p-3=0$　$pq+1=0$

$\therefore \begin{cases}p=3\\ q=-\frac{1}{3}\end{cases}$

(2) 原式$=\left[-2\cdot3^2\cdot(-\frac{1}{3})\right]^2+\left[3\cdot3\cdot(-\frac{1}{3})\right]^{-1}+3^{2015}\cdot(-\frac{1}{3})^{2016}$

$=36-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

$=36$

12、如果$(y^2+ay+3)(y^2-3y+b)$的展开式中不含y^2和y^3项，求代数式：$(-2a)^3(-a+b)\left(a^2-ab+\frac{1}{2}b^2\right)$的值.

解：$(y^2+ay+3)(y^2-3y+b)$

$=$

y^2项 $by^2+3y^2-3ay^2=(b+3-3a)y^2$

y^3项 $-3y^3+ay^3=(-3+a)y^3$

$\therefore \begin{cases} b+3-3a=0 \\ a-3=0 \end{cases}$ $\Rightarrow b+3-9=0$ $\Rightarrow a=3$ $b-6=0$.

$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$

原式$=(-2\times3)^3(-3+6)$

$(\cancel{36}\,9-18+18)$

$=(-6)^3\times3\times$

$=-216\times27$

$=-5832$

13、设x,y,z为实数，且：$(y-z)^2+(x-y)^2+(z-x)^2=(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2+(x+y-2z)^2$，

求$\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$的值.

解：~~原式~~

左边$=2x^2-2xy-2xz+2y^2-2yz+2z^2$

右边$=6x^2-6xy-6xz+6y^2-6yz+6z^2$

$\therefore$ ~~$2x^2-2xy$~~

$2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=6(x^2-y^2+z^2-xy-xz-yz)$

$\therefore x=y=z=0$

原式$=\dfrac{1\times1\times1}{1\times1\times1}=1$

数学幂运拓展算达标测

100

一、解答题（提高题）

1、已知$x^{m+2n}\cdot x^{n-m}=x^9$，求$(-5)^n+9$的值。

解：$m+2n+n-m=9$

$3n=9$

$n=3$

$(-5)^3+9=-125+9=-116$

2、已知$\left[(x^n)^2\right]^3 = x^{18}$，求$n$的值。

解：$x^{6n} = x^{18}$

$6n = 18$

$n = 3$

3、已知$2^{2x+3} - 2^{2x+1} = 192$，求$x$的值。

$4 \cdot 2^{x+1} - 2^{2x+1} = 192$

$3 \cdot 2^{2x+1} = 192$

$2^{2x+1} = 64$

$2x+1 = 6$

$2x = 5$

$x = 2.5$

4、已知$3^m = a, 3^n = b$，分别用a, b表示3^{2m+3n}和3^{m+n}和$3^m + 3^n$。

解：$3^{2m+3n} = 3^{2m} \cdot 3^{3n} = (3^m)^2 \cdot (3^n)^3 = a^2 b^3$

$3^{m+n} = 3^m \cdot 3^n = ab$

$3^m + 3^n = a+b$

5、化简：$9^{m+1} \cdot 81^{m-1}$

解：原式$= 3^{2m+2} \cdot 3^{4m-4}$

$= 3^{2m+2+4m-4}$

$= 3^{6m-2}$

6、比较大小$3^{55}, 4^{44}, 5^{33}$

解：$3^{55} = (3^5)^{11} = 243^{11}$

$4^{44} = (4^4)^{11} = (2^8)^{11} = 256^{11}$

$5^{33} = (5^3)^{11} = 125^{11}$

$\therefore 4^{44} > 3^{55} > 5^{33}$

7、已知：$a^n=2$(n正整数)，求$(a^{2n})^2-(a^3)^{2n}$的值。

解：

原式 $= (a^n)^4-(a^n)^6$

$=2^4-2^6$

$=16-64$

$=-48$

8、已知：$x^n=6, y^n=2$，求$(xy^2)^{2n}$的值。

解：原式 $=$

$x^{2n}y^{4n}$

$=(x^n)^2\cdot(y^n)^4$

$=6^2\times2^4$

$=36\times16$

$=576$

9、已知：$x^{m+n}=57, x^m=19$，求x^{3n}的值。

解：$x^{m+n}=x^m\cdot x^n=19\cdot x^n=57$

$x^n=3$

$x^{3n}=(x^n)^3=3^3=27$

10、已知$3^{x+1}\cdot2^{x+1}=6^{2x-3}$，求$x^2$的值。

解：$6^{x+1}=6^{2x-3}$

$x+1=2x-3$

$x=4$

$\therefore x^2=16$

11、试确定$3^{99}\times7^{100}\times11^{101}$的末位数字是几？并简单说明理由。 7

解：$3^1=3$ $3^2=9$ $3^3=27$ $3^4=81$ $3^5=243$

3，9，7，1

$99\equiv 3 \pmod 4$

∴ 3^{99}的末位数字是1

$7^1=7$ $7^2=49$ $7^3=343$ $7^4=2401$

$7^5=16807$

$100\equiv 0 \pmod 4$

∴ 7^{100}的末尾数字是7

$11^1=11$ $11^2=121$ $11^3=1331$

∴ 11的末尾数字是1

$101\equiv 0 \pmod 1$

∴ $1\times7\times1=7$

平方差公式与完全平方公式自测 85

一、选择题

1. 下列可以用平方差公式计算的是（ B ）

A．$(x-0.2)(0.2-x)$ ×

B．$(-2x-5)(5-2x)$ ✓

C．$(3x-1)(2x+1)$ ×

D．$(-2x-5)(2x+5)$ ×

2. 若$(-7x^2-5y)(______)=49x^4-25y^2$，括号内应填代数式（ C ）

A．$7x^2+5y$ B．$-7x^2-5y$ C．$-7x^2+5y$ D．$7x^2-5y$

3. 下列各式中，计算正确的是（ C ）

A．$(p-q)^2=p^2-q^2$ ×

B．$(a+2b)^2=a^2+2ab+b^2$ ×

C．$(a^2+1)^2=a^4+2a^2+1$ ✓

D．$(-s-t)^2=s^2-2st+t^2$ × $(s+t)^2$

4. $(-m+2n)^2$的运算结果是（ C ） $(2n-m)^2$

A．$m^2+4mn+4n^2$ B．$-m^2-4mn+4n^2$

$4n^2-4mn+m^2$

C．$m^2-4mn+4n^2$ D．$m^2-2mn+4n^2$

5. 计算$(a^4+b^4)(a^2+b^2)(b-a)(a+b)$的结果是（ C ） $(a^6+b^6-a^2b^4-b^2a^4)(b^2-a^2)$

A．a^8-b^8 B．a^6-b^6 C．b^8-a^8 D．b^6-a^6

6. 下列各式计算正确的是（ C ）

A．$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ ×

B．$(a+b-c)^2=a^2+b^2-c^2$ ×

C．$(a+b-c)^2=(-a-b+c)^2$ ✓

D．$(a+b-c)^2=(a-b+c)^2$ ×

-5

7. $\left(3a+\frac{1}{2}\right)^2\left(3a-\frac{1}{2}\right)^2$等于（ ~~B~~ ） C

$\left(9a^2-\frac{1}{4}\right)^2=81a^4-\frac{1}{16}$

A．$9a^2-\frac{1}{4}$ B．$81a^4-\frac{1}{16}$ C．$81a^4-\frac{9}{2}a^2+\frac{1}{16}$ D．$81a^4+\frac{9}{2}a^2+\frac{1}{16}$

8. 如果$(x-y)^2+M=(x+y)^2$，那么M等于（ C ）

A．$2xy$　　B．$-2xy$　　C．$4xy$　　D．$-4xy$

9. 运算结果为$1-2x^2+x^4$的是（ A ）　$(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$

A．$\left(-1+x^2\right)^2$　$(x^2-1)^2$　x^4-2x^2+1　B．$\left(1+x^2\right)^2$　x^4+2x^2+1　C．$\left(-1-x^2\right)^2$　D．$(1-x)^2$　1^2-2x+x^2

10. 已知$a^2-Nab+64b^2$是一个完全平方式，则N等于（ C ）

A．8　B．±8　C．±16　D．±32　$\sqrt{64}=\pm8$　$\cancel{\pm8\times2}=\pm16$　$\pm8\times2$

11. 代数式x^2+2x-2可化为$(x+m)^2+k$形式，其中m,k为常数，则$m+k$的值为（ A ）A．-2

$x^2+2x+1=(x+1)^2-3$

B．-4　C．2　$m=1$　$k=-3$　D．4

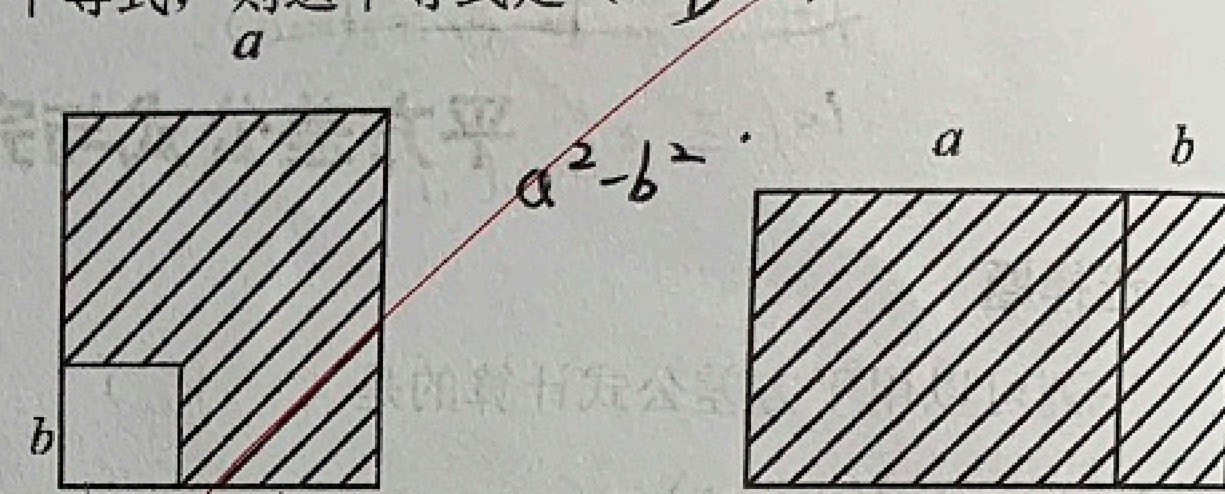
12. 如图，在边长为a的正方形中挖掉一个边长为b的小正方形（$(a>b)$，把余下的部分剪拼成一矩形如图，通过计算两个图形（阴影部分）的面积，验证了一个等式，则这个等式是（ D ）

A．$(a+2b)(a-b)=a^2+ab-2b^2$

B．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C．$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

D．$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$



a^2-b^2

13. 如果a，b，c是$\triangle ABC$三边的长，且$a^2+b^2-ab=c(a+b-c)$，那$\triangle ABC$是（ A ）

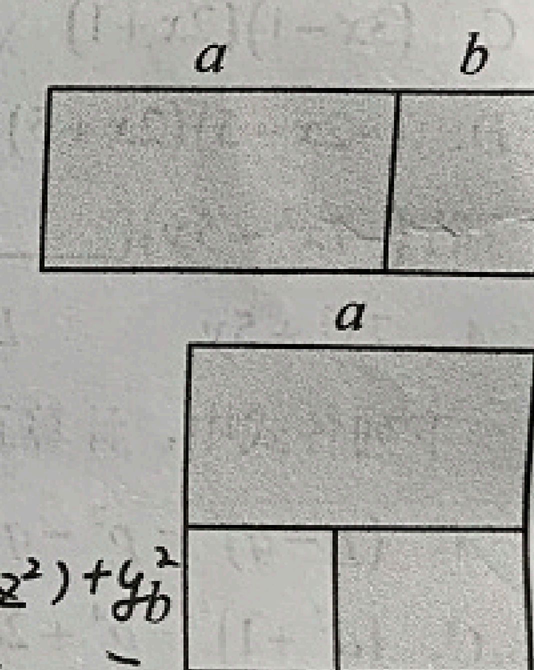
$a^2+b^2-ab=ac+cb-c^2$

A．等边三角形．　B．直角三角形．　C．钝角三角形．　D．形状不确定．

二、填空题

14. 填空：$(\cancel{\quad})\left(-\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}y\right)=-\frac{1}{25}x^2+\frac{4}{9}y^2$．　$\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}y$

15. 如图，从边长为a的正方形内去掉一个边长为b的小正方形，然后将剩余部分拼成一个长方形，上述操作所能验证的公式是$\underline{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$．



$-(2x+y+z)(2x+z-y)=-(2x+z)^2+y^2$

16. 计算：$(2x+y+z)(y-2x-z)=\underline{y^2-4x^2-z^2-4xz}$　$=-(4x^2+4xz+z^2)+y^2$

$=-4x^2-4xz-z^2+y^2$

17. 如果$(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$，那么$a+b$的值是$\underline{\pm4}$．

$(2a+2b)^2-1^2=63$

$(2a+2b)^2=64$

$2a+2b=\pm\sqrt{64}$

$2a+2b=\pm8$

$a+b=\pm4$

18. 计算：$12346^2-12345\times12347$．

解：原式$=12346^2-(12346^2-1)$

$=1$

19. 计算：$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2-100^2$的值是 -5050 .

$= -3-7-11-\cdots-199$

$= -(3+7+\cdots+199)$

$= -\dfrac{(3+199)\times 50}{2}$

$= -202\times 25$

$= -101\times 50$

$= -5050$

20. 已知$(x-ay)(x+ay)=x^2-16y^2$，那么$a=$ ± 4 .

$x^2-a^2y^2$

$a^2=16$

$a=\pm\sqrt{16}$

$a=\pm 4$

21. 已知$a+b=4$，$ab=-3$，则a^3b+ab^3的值是 -66 .

a^3b+ab^3

$=ab(a^2+b^2)$

$=-3[(a+b)^2-2ab]$

$=-3\times[16+6]$

$=-3\times 22$

$=-66$

22. 已知$x(x-1)-(x^2-y)=-2$，求$\dfrac{x^2+y^2}{2}-xy=$ 2 .

$x^2-x-x^2+y=-2$

$y-x=-2$

$x-y=2$

$\dfrac{x^2+y^2}{2}-xy$

$=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2-2xy)$

$=\dfrac{1}{2}(x-y)^2$

$=\dfrac{1}{2}\times 2^2$

$=2$

23. 已知$a+b=3$，$a^2b+ab^2=-30$，则$a^2-ab+b^2+11=$ 50 .

$ab(a+b)=-30$

$3ab=-30$

$ab=-10$

$a^2+b^2-ab+11$

$=a^2+b^2+2ab+11-3ab$

$=(a+b)^2-3ab+11$

$=9+30+11$

$=50$

24. 若$x+\frac{1}{x}=4$，则$x^2+\frac{1}{x^2}=$ <u>14</u>；$x^4+\frac{1}{x^4}=$ <u>194</u>.

$(x+\frac{1}{x})^2=16$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=16$

$x^2+\frac{1}{x^2}=14$

$(x^2+\frac{1}{x^2})^2=196$

$x^4+2+\frac{1}{x^4}=196$

$x^4+\frac{1}{x^4}=194$

25. 已知$a+\frac{1}{a}=5$，则$\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=$ <u>24</u>.

$(a+\frac{1}{a})^2=25$

$a^2+\frac{1}{a^2}=23$

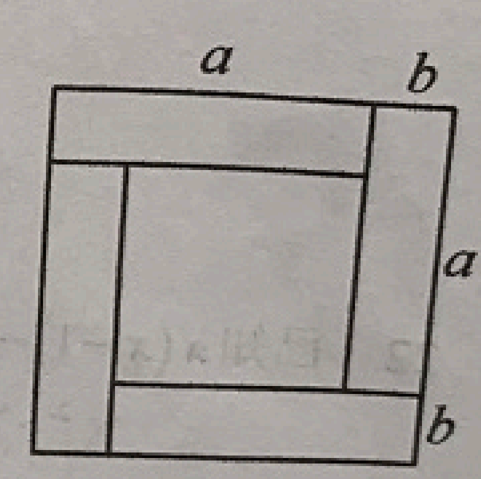
$\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=\cancel{a^2+2}\ a^2+1+\frac{1}{a^2}$

$=a^2+\frac{1}{a^2}+1$

$=23+1$

$=24$

26. 如图，四张全等的矩形纸片拼成的图形，请利用图中空白部分面积的不同表示方法，写出一个关于a、b的恒等式 <u>$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$</u>



27. 如果多项式$x^2+kx+\frac{1}{9}$是一个完全平方式，那么k的值为 <u>$\pm\frac{2}{3}$</u>.

$(x+\frac{1}{3})^2$

$k=2\cdot\pm\sqrt{\frac{1}{9}}$

$k=\pm\frac{2}{3}$

28. 设a，b为有理数，且$a+b=20$，设a^2+b^2的最小值为m，ab的最大值为n，则$m+n=$ <u>200</u>.

$(a+b)^2=400$

$a^2+2ab+b^2=400$

当$a=b$时

a^2+b^2有最小值

ab有最大值

$\begin{cases}a=10\\b=10\end{cases}$

$a^2+b^2=200$

$ab=100$

三、简答题

29. 计算：$\left(x^2y-\frac{1}{2}\right)\left(x^2y+\frac{1}{2}\right)$；

解：原式$=x^4y^2-\frac{1}{4}$

30. 计算：$\left(-\frac{1}{4}x^m+\frac{1}{5}y^n\right)\left(-\frac{1}{4}x^m-\frac{1}{5}y^n\right)$.

解：原式 $=\frac{1}{16}x^{2m}-\frac{1}{25}y^{2n}$

31. $(x+y)(x-y)+(y-z)(y+z)+(z-x)(z+x)$.

解：原式 $=x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2$

$=0$

32. 计算：（1）$(-8a+11b)^2$；（2）$\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y\right)^2$.

（1）解：原式 $=\cancel{64a^2}$ $64a^2-176ab+121b^2$

（2）解：原式 $=\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y\right)^2$

$=\frac{4}{9}x^2+xy+\frac{9}{16}y^2$

33. 计算：$(2x-5)(5-2x)-(2x-5)^2$.

解：原式 $=-(2x-5)^2-(2x-5)^2$

$=-2(2x-5)^2$

$=-2(4x^2-20x+25)$

$=-8x^2+40x\cancel{\;\;}-50$

34. 计算：（1）$(2x+y+z)(2x-y-z)$；

解：原式 $=4x^2-(y+z)^2$

$=4x^2-(y^2+2yz+z^2)$

$=4x^2-y^2-2yz-z^2$

（2）$(t-2)^2(t^2+4)^2(t+2)^2$．

解：原式 $=[(t+2)(t-2)]^2(t^2+4)^2$

$=(t^2-4)^2(t^2+4)^2$

$=[(t^2-4)(t^2+4)]^2$

$=(t^4-16)^2$

$=t^8+256-32t^4$

35. 简便计算：（1）59.8×60.2；

解：原式 $=60^2-0.2^2$

$=3600-0.04$

$=3599.96$

（2）102×98．

解：原式 $=100^2-2^2$

$=9996$

36. 计算：$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$．

解：原式 $=(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{64}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)\cdots(2^{64}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)\cdots(2^{64}+1)$

$=(2^{64}-1)(2^{64}+1)$

$=2^{128}-1$

37. 计算：（1）$(x+3)(x-3)(x^2+9)$；

解：原式 $=(x^2-9)(x^2+9)$

$=x^4-81$

（2）$(2a+3b)(4a+5b)(2a-3b)(5b-4a)$．

解：原式 $=(4a^2-9b^2)(\cancel{25b}\ 25b^2-16a^2)$

$=\cancel{124}\ 100a^2b^2-64a^4-225b^4+144a^2b^2$

$=244a^2b^2-64a^4-225b^4$

38. 计算：（1）$(a-b-c)^2$；（2）$(a+b+c)(a-b-c)$．

解：原式 $=(a-b-c)(a-b-c)$

$= \cancel{\quad}$

$a^2-ab-ac+b^2+bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2-ab-ac+bc$

解：原式 $=a^2-(b+c)^2$

$=a^2-b^2-2bc-c^2$

$=a^2-b^2-c^2-2bc$

解：原式 $=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

39. 计算：$(x+5y-9)(x-5y+9)$．

解：原式 $=x^2-(5y-9)^2$

$=x^2-(25y^2-90y+81)$

$=x^2-25y^2+90y-81$

40.利用乘法公式计算：$\left(-99\frac{1}{2}\right)^2$．

解：原式 $=(100-\frac{1}{2})^2$

$=10000-100+\frac{1}{4}$

$=9900\frac{1}{4}$

40.计算：$38.9^2-77.8\times48.9+48.9^2$．

解：原式 $=\cancel{\quad}$

$38.9^2-38.9\times2\times48.9+48.9^2$

$=(38.9-48.9)^2$

$=(-10)^2$

$=100$

42.解方程：$(1-3x)^2+(2x-1)^2=13(x-1)(x+1)$．

解 $1-6x+9x^2+4x^2-4x+1=13(x^2-1)$

$13x^2-10x+2=\cancel{13(x^2-1)}$ $13x^2-13$

$-10x+2=-13$

$-10x=-15$

$x=1.5$

40. 解不等式：$(3x-4)^2-2(2x-1)(2x+1)\ge(x-1)^2$．

解：$(9x^2-24x+16)-2(4x^2-1)\ge x^2-2x+1$

$9x^2-24x+16-8x^2+2\ge x^2-2x+1$

$9x^2-8x^2-x^2-24x+2x\ge1-16-2$

$-22x\ge-17$

$x\le\frac{17}{22}$

41. 先化简，再求值：$(2a-b)^2-(a+1-b)(a+1+b)+(a+1)^2$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$.

解：$4a^2-4ab+b^2-\cancel{(a+1)^2}+b^2+\cancel{(a+1)^2}$

$=4a^2-4ab+b^2+b^2$

$=4a^2-4ab+2b^2$

$=4\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}\times2+2\times4$

$=1+4+8$

$=13$

42. 若 $4x^2-3(a-2)x+25$ 是完全平方式，求 a 的值.

解：原式 $=4x^2-3x(a-2)+25$

$=4x^2-3ax+6x+25$

$=4x^2+(6-3a)x+25$

$=(2x+5)^2$

1° $6-3a=20$

$3a=-14$

$a=-\frac{14}{3}$

2° $6-3a=-20$

$-3a=-26$

$3a=26$

$a=\frac{26}{3}$

$\therefore a=\frac{26}{3}$ 或 $a=-\frac{14}{3}$

43. 已知 $a=\dfrac{2005\times2007}{2006}$，$b=\dfrac{2006\times2008}{2007}$，$c=\dfrac{2007\times2009}{2008}$，比较三者大小.

解：$a=\dfrac{2006^2-1}{2006}=2006-\dfrac{1}{2006}$

同上

$b=2007-\dfrac{1}{2007}$

$c=2008-\dfrac{1}{2008}$

$\therefore c>b>a$

44. 已知三个数 a，b，c 满足方程 $\begin{cases}b^2+2ac=14 & ①\\ c^2+2ab=29 & ②\\ a^2+2bc=21 & ③\end{cases}$ 求 $a+b+c$.

解：①+②+③：$(a+b+c)^2=64$

$a+b+c=8$

45. x，y，z 为有理数且：$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2+(x+y-2z)^2$

求：$\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值.

解：同13题，原式=-1

解：

四、解答题

46. 如图 1，是一个长为 $2m$，宽为 $2n$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀平均分成四块小长方形， 然后按图 2 的形状拼成一个正方形.

（1）图 2 中阴影部分的面积为 $(m-n)^2$；

（2）观察图 2，请你写出三个代数式 $(m+n)^2$、$(m-n)^2$、mn 之间的等量关系式：

$(m+n)^2-4mn=(m-n)^2$；

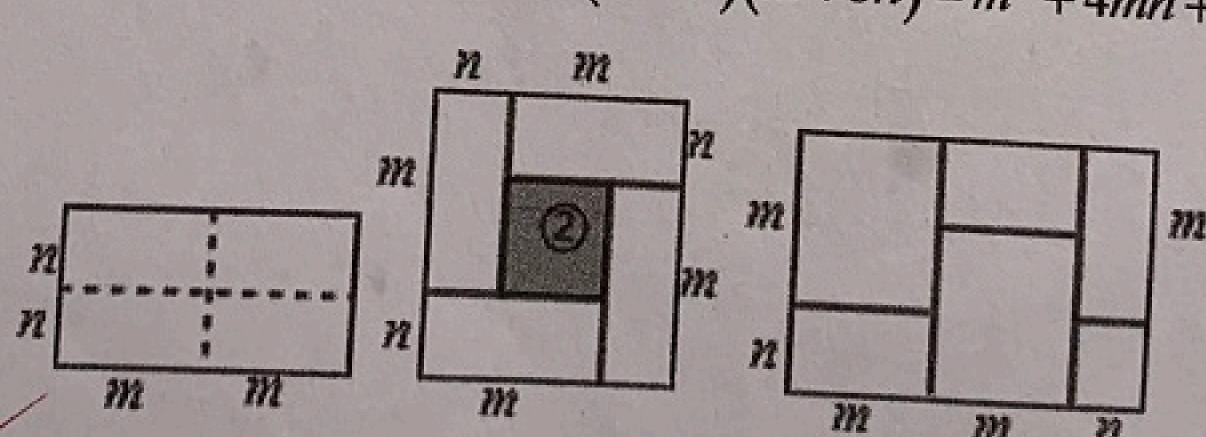
$(x+y)^2=36$　　$36-4\times2.75$ $=36-11$ $=25$　　$(x-y)^2=25$ $x-y=\pm5$

（3）根据（2）中的结论，若 $x+y=-6, xy=2.75$，则 $x-y=$ ±5.

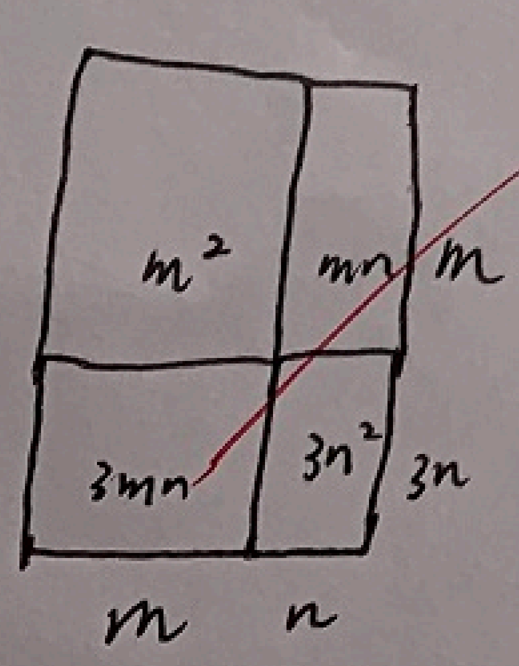
（4）有许多代数恒等式可以用图形的面积来表示．如图 3，它表示了：

$(2m+n)(m+n)=2m^2+3mn+n^2$.

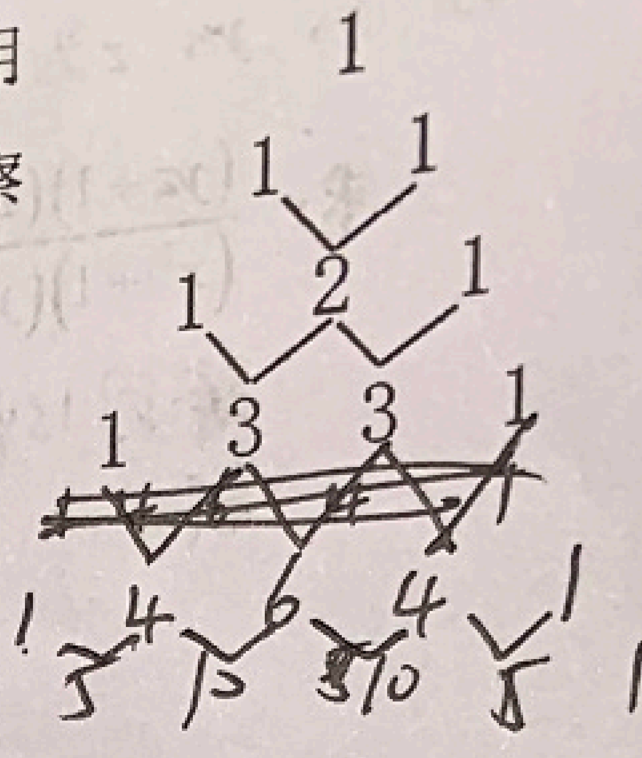
试画出一个几何图形，使它的面积能表示 $(m+n)(m+3n)=m^2+4mn+3n^2$.



① ③



47. 杨辉是我国南宋时著名的数学家，他发现了著名的三角系数表，它的其中一个作用是指导按规律写出形如 $(a+b)^n$（其中 n 为正整数）展开式的系数，请你仔细观察下表中的规律，填出 $(a+b)^4$ 展开式中所缺的系数．



$(a+b)^1=a+b$　　　　$(a-b)^1=a-b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　　　$(a-b)^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　　　$(a-b)^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$

（1）仔细观察右边的图和左边的式子，写出 $(a-b)^3=$ $\underline{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$；

（2）直接在横线上填数字：$(a+b)^4=a^4+\underline{4}\,a^3b+\underline{6}\,a^2b^2+\underline{4}\,ab^3+\underline{1}\,b^4$；

（3）请根据你找到的规律写出下列式子的结果：

$(x-y)^5=$ $x^5-5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4-y^5$

$(2x-y)^5=$ $\underline{32x^5-80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4-y^5}$