Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038

TUYỂN CHỌN
CÁC BÀI HÌNH HỌC HAY
LUYỆN THI VÀO LỚP 10 THPT

Tài liệu sưu tầm, ngày 8 tháng 12 năm 2020

Bài 1. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 2R = 10cm$. Gọi C là trung điểm OA, Qua C kẻ dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ MB, H là giao điểm AK và MN. Chứng minh:

a) Tứ giác $BHCK$ nội tiếp, $AMON$ là hình thoi

b) $AK.AH = R^2$ và tính diện tích hình quạt tao bởi OM, OB và cung MB

c) Trên KN lấy I sao cho $KI = KM$, chứng minh $NI = KB$

d) Tìm vị trí điểm K để chu vi tam giác MKB lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Vì K nằm trên đường tròn tâm $(O;OA)$ nên $\widehat{AKB} = 90° \Rightarrow \widehat{HKB} = 90°(H \in AK)$

MN vuông góc AB (gt) nên $\widehat{MCB} = 90° \Rightarrow \widehat{HCB} = 90°(H \in MN)$

Mà $\widehat{HCB}; \widehat{HKB}$ là 2 góc đối nhau $\widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 90° + 90° = 180°$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCK$ nội tiếp (dhnb)

+) Xét (O) MN là dây cung, AB là đường kính

Mà MN vuông góc AB tại C (gt)

Nên C là trung điểm MN (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Mà C là trung điểm OA (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMON$ là hình bình hành (dhnb)

Mà MN vuông góc OA (gt)

$\Rightarrow$ Nên $AMON$ là hình thoi (đpcm)

b) Xét ΔAHC và ΔABK có:

$\widehat{A}$ là góc chung

$\widehat{ACH} = \widehat{AKB} = 90°$

$\Rightarrow \Delta$AHC $\backsim \Delta$ABK (g-g)

$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AK} \Rightarrow AH.AK = AB.AC = 2R.\frac{1}{2}R = R^2$ (đpcm)

Theo a) $AMON$ là hình thoi nên $AM = MO = OA = R$

Ta có tam giác AMO đều $\Rightarrow \widehat{AMO} = 60° \Rightarrow \widehat{MOB} = 120°$ (tc kề bù)

*) $S_{MOB} = \frac{120\pi R^2}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$

Mà $2R = 10cm$ nên $R = 5cm$. Do đó $S_{MOB} = \frac{25\pi}{3}$

c) Dễ dàng chứng minh $MB = NB \Rightarrow$ Tam giác MNB cân (đ/n)

Mà $\widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 60°$

$\widehat{NMI} = \widehat{KMB} + \widehat{IMB} = \widehat{NMB} = 60°$

$\widehat{KMB} + \widehat{IMB} = \widehat{KMI} = 60°$

$\widehat{NMB} = \widehat{MAO}$ (cùng phụ với $\widehat{MBA}$)

Mà $\widehat{MAO} = 60^o$ (tam giác AMO đều)

$\Rightarrow$ Tam giác MNB đều (tam giác cân có 1 góc $60°$) (1)

Chứng minh tương tự ta có tam giác MKI cân

Mà $\widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 60°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NM)

Nên tam giác MIK đều.(2)

Từ 1 và 2 ta có: $\widehat{NMI} + \widehat{IMB} = \widehat{NMB} = 60°$

$\widehat{KMB} + \widehat{IMB} = \widehat{KMI} = 60°$

Nên ta có: $\widehat{NMI} = \widehat{KMB}$ (cùng cộng với $\widehat{IMB}$ bằng $60°$)

Xét ΔMNI và ΔMBK có:

+) $MI = MK$ (ΔMIK đều)

+) $\widehat{NMI} = \widehat{KMB}$ (cmt)

+) $MN = MB$ (ΔNMB đều)

$\Rightarrow NI = BK$ (2 cạnh tương ứng)

d) Chu vi của ΔMKB = $MK + KB + MB$

Mà $KB = NI$; $MK = KI$

$P_{MKB} = MK + KB + MB = KI + NI + MB = NK + MB$

Mà MB cố định

Nên P_{MKB} lớn nhất khi NK lớn nhất

Mà NK là dây cung lớn nhất khi NK là đường kính

Khi đó N, O, K thẳng hàng.

Vậy K là điểm chính giữa cung MB.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB. Bán kính $OC \perp AB$. Điểm E thuộc đoạn OC. Tia AE cắt nửa đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D. Chứng minh:

a)Tứ giác $OEMB$ nội tiếp và ΔMDE cân

b)Gọi BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC và tìm vị trí của E để $MA = 2MB$

c)Cho $\widehat{ABE} = 30^0$ tính $S_{quat}MOB$ và chứng minh khi E di chuyển trên OC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a)Tứ giác $OEMB$ nội tiếp và ΔMDE cân

* Tứ giác $OEMB$ có:

$\widehat{EOB} + \widehat{EMB} = 180^\circ$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow OEMB$ là tứ giác nội tiếp

* Vì tứ giác $OEMB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{OBM}$ (tính chất góc ngoài tứ giác nội tiếp)

Lại có: $\widehat{OBM} = \widehat{EMD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{EMD}\left(= \widehat{OBM}\right) \Rightarrow \Delta DEM$ cân tại D (ĐPCM)

b)Gọi BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC và tìm vị trí của E để $MA = 2MB$

* có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔAMB và ΔKOB có:

$\widehat{AMB} = \widehat{KOB}\left(= 90^\circ\right)$

$\widehat{ABK}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta KOB\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BM}{BO} \Rightarrow BM.BK = AB.BO = 2R.R = 2R^2$ (không đổi)

* Với $MA = 2MB$

Vì ΔAMB vuông tại M nên $\tan\widehat{MAB} = \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan\widehat{MAB} = \tan\widehat{EAO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{OE}{AO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow EO = \dfrac{R}{2}$

Vậy để $MA = 2MB$ thì E là trung điểm của OC.

c)Cho $\widehat{ABE}=30^0$ tính $S_{quat}MOB$ và chứng minh khi E di chuyển trên OC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME thuộc một đường thẳng cố định.

* Ta thấy OK là đường trung trực của đoạn AB.

Mà $E\in OK\Rightarrow EA=EB\Rightarrow \Delta EAB$ cân tại E.

$\Rightarrow \widehat{EAB}=\widehat{EBA}=30^\circ\Rightarrow \widehat{MOB}=2.\widehat{EAB}=60^\circ$ (quan hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung MB).

$\Rightarrow S_{quat}MOB=\dfrac{60.\pi.R^2}{360}=\dfrac{\pi.R^2}{6}$

* Nối C với B; gọi H là trung điểm của CE, I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCEM

$\Rightarrow \Delta CIE$ cân tại I.

Do IH là đường trung tuyến nên IH đồng thời là đường cao, đường phân giác

$\Rightarrow IH\perp CE;\widehat{CIH}=\dfrac{\widehat{CIE}}{2}=\widehat{CME}$

Lại có $\widehat{CME}=\widehat{CBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

$\Rightarrow \widehat{CIH}=\widehat{CBA}\left(=\widehat{CME}\right)$

$\Rightarrow \widehat{HCI}=\widehat{OCB}$ (Vì $IH\perp CE;OB\perp CO$)

$\Rightarrow C,I,B$ thẳng hàng

$\Rightarrow I$ chuyển động trên đường thẳng CB cố định

(ĐPCM)

Bài 3. Cho ΔABC đều nội tiếp $(O;R)$ kẻ đường kính AD cắt BC tại H. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ AC. Hạ $BK\perp AM$ tại K, BK cắt CM tại E, $R=6cm$. Chứng minh:

a)Tứ giác $ABHK$ nội tiếp và ΔMBE cân

b)Tứ giác $BOCD$ là hình thoi và gọi BE cắt (O) tại N và tính $S_{quat}MON$

c)Tìm vị trí của M để chu vi ΔMBE lớn nhất và tìm quỹ tích điểm E khi M di chuyển trên cung nhỏ AC.

Hướng dẫn

a)Tứ giác $ABHK$ nội tiếp và ΔMBE cân.

* Vì $AB = AC$(ΔABC đều) và $OB = OC\,(= R) \Rightarrow AO$ là đường trung trực của đoạn BC

$\Rightarrow AO \perp BC$ tại $H \Rightarrow \widehat{AHB} = 90°$

Xét tứ giác $AKHB$ có: $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90°$

Mà hai góc này ở vị trí kề nhau hoặc đối nhau.

$\Rightarrow ABHK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AB.

* Có $A, M, C, B \in (O) \Rightarrow AMCB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ABC} = 60°$

Lại có $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60° \Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{KMB}\,(= 60°) \Rightarrow MK$ là đường phân giác cũng là đường cao của $\Delta MBE \Rightarrow \Delta MBE$ cân tại M

(ĐPCM)

b)Tứ giác $BOCD$ là hình thoi và gọi BE cắt (O) tại N và tính $S_{quat}MON$

* Có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120°$ (quan hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

ΔBOC cân tại O có OH là đường cao đồng thời là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{BOH} = \frac{1}{2}.\widehat{BOC} = 60°$

Lại có $\widehat{BDA} = \widehat{BCA} = 60°$

$\Rightarrow \Delta BOD$ đều $\Rightarrow OB = BD = OD = R$

Chứng minh tương tự $OC = CD = OD = R$

Ta được $OB = BD = OC = CD = R \Rightarrow OBDC$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết).

* Có ΔBKM vuông tại $K \Rightarrow \widehat{KBM} + \widehat{KMB} = 90° \Rightarrow \widehat{KBM} + 60° = 90° \Rightarrow \widehat{KBM} = 30°$

Lại có $\widehat{NOM} = 2.\widehat{NBM} = 2.30° = 60°$

$\Rightarrow S_{quat} MON = \dfrac{60.\pi.R^2}{360} = \dfrac{\pi.R^2}{6}$

c)Tìm vị trí của M để chu vi ΔMBE lớn nhất và tìm quỹ tích điểm E khi M di chuyển trên cung nhỏ AC.

* Gọi P là chu vi ΔMBE

$P = MB + ME + BE = 2.(MB + BK)$

* Có ΔBKM vuông tại $K \Rightarrow BK = MB.\sin\widehat{BMK} = MB.\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.MB$

$\Rightarrow P = (2 + \sqrt{3}).MB$

Để P lớn nhất thì MB lớn nhất

$\Leftrightarrow MB$ là đường kính của $(O) \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$ nhỏ

* Nối A với E

Vì AM là đường trung trực của đoạn BE nên $AE = AB$

Do AB không đổi, điểm A cố định nên E thuộc đường tròn cố định (A, AB)

Giới hạn:

Kẻ đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC cắt (A, AB) tại P.

Lấy điểm Q đối xứng với C qua A.

Khi $M \equiv C \Rightarrow E \equiv P$

Khi $M \equiv A \Rightarrow E \equiv Q$

Vậy khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì E di chuyển trên cung nhỏ PQ của đường tròn (A, AB)

Bài 4. Cho (O,R) có đường kính BC, A là điểm chính giữa cung BC, lấy M là trung điểm BO, kẻ $ME \perp AB$ tại E, kẻ $MF \perp AC$ tại F. Chứng minh:

a)Năm điểm A,E,M,O,F thuộc một đường tròn và $BE.BA = BO.BM$

b)Kẻ tiếp tuyến của (O) tại A cắt MF tại K chứng minh $ME = KF$ và kẻ đường kính AD, kẻ ME cắt DC tại H, tia NM cắt (O) tại D. Chứng minh $\Delta MDH = \Delta FEM$

c)Chứng minh khi M di chuyển trên BC thì MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Năm điểm A,E,M,O,F thuộc một đường tròn và $BE.BA = BO.BM$

* Do $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = \widehat{AFM} = 90° \Rightarrow E,O,F$ cùng thuộc đường tròn đường kính AM

Hay n**ăm điểm** A,E,M,O,F **thuộc một đường tròn** đường kính AM

* Xét ΔBEM và ΔBOA có:

$\widehat{BEM} = \widehat{AOB}(=90°)$

$\widehat{ABO}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta BEM \backsim \Delta BOA(g-g) \Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BA = BM.BO$

b) Kẻ tiếp tuyến của (O) tại A cắt MF tại K chứng minh $ME = KF$ và kẻ đường kính AD, kẻ ME cắt DC tại H. Chứng minh $\Delta MDH = \Delta FEM$

*** Vì** A là điểm chính giữa cung BC, BC là đường kính $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ nhỏ = $90°$

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{EBM} = 45° \\ \widehat{KAF} = 45° \end{cases} \Rightarrow \Delta EBM, \Delta FAK$ vuông cân $\Rightarrow EM = EB; FA = FK$

Lại có tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow ME = FA$

Suy ra $ME = KF$

***Chứng minh tương tự trên ta có:** $ME = DH$

$\widehat{ACD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \parallel CD$ (cùng vuông góc với AC)

Mà $HE \perp AB(GT) \Rightarrow HE \perp CD \Rightarrow \widehat{MHC} = 90°$

$\Rightarrow MHCF$ là tứ giác có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

Mặt khác CM là tia phân giác của $\widehat{ACD} \Rightarrow MHCF$ là hình vuông $\Rightarrow MF = MH$

* Xét ΔMDH và ΔFEM có:

$ME = DH$ (CMT)

$MF = MH(CMT)$

$\widehat{FME} = \widehat{MHD}(= 90°)$

$\Rightarrow \Delta MDH = \Delta FEM(2cgv)$

c) Chứng minh khi M di chuyển trên BC thì MN luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề sai)

Bài 5. Cho đoạn thẳng MP, lấy điểm N bất kì nằm giữa M và P. Vẽ (O) đường kính NP. Lấy H là trung điểm MN. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với MN. Kẻ tiếp tuyến HQ với (O) tại Q. Tia PQ cắt d tại K. Chứng minh:

a) Tứ giác $KHNQ$ nội tiếp và $\widehat{NPQ} = \widehat{HKN}$.

b) $\widehat{MKP} = 90°$ và $PQ.PK = PN.PH$.

c) $HQ^2 + PQ.PK = PH^2$ và cho $\widehat{HKN} = 30°$, $R = 6$ cm. Tính diện tích hình quạt NOQ.

d) Lấy I là trung điểm KN. Chứng minh chu vi đường tròn ngoại tiếp ΔQOI không đổi khi N di chuyển trên MP.

Hướng dẫn

a) Vì $Q \in (O)$ đường kính $NP \Rightarrow \widehat{NQP} = 90° \Rightarrow \widehat{NQK} = 90°$

Xét tứ giác $KHNQ$ có $\widehat{KHN}$ và $\widehat{KQN}$ là hai góc đối

mà $\widehat{KHN} + \widehat{KQN} = 90° + 90° = 180°$

Suy ra tứ giác $KHNQ$ nội tiếp (dhnb)

Vì $KHNQ$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{HKN} = \widehat{HQN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{NH}$) (1)

Xét (O) có: $\widehat{NPQ}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{NQ}$

$\widehat{HQN}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{NQ}$

$\Rightarrow \widehat{NPQ} = \widehat{HQN}$ ($= \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NQ}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{NPQ} = \widehat{HKN}$ (đpcm).

b) Xét ΔKHM và ΔKHN có: KH chung; $\widehat{KHM} = \widehat{KHN} = 90°$; $MH = HN$ (gt)

$\Rightarrow \Delta KHM = \Delta KHN$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{HKN}$ (hai góc tương ứng)

mà $\widehat{HKN} = \widehat{NPQ}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{NPQ}$

Xét ΔKHP vuông tại $H \Rightarrow \widehat{NPQ} + \widehat{HKP} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{HKM} + \widehat{HKP} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{MKP} = 90°$

Xét ΔPQN và ΔPHK có:

Chung $\hat{P}$; $\widehat{PQN} = \widehat{PHK} = 90°$

$\Rightarrow \Delta PQN$ " ΔPHK (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{PQ}{PH} = \dfrac{PN}{PK}$ (các cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow PQ.PK = PN.PH$ (đpcm).

c) Xét ΔHQN và ΔHPQ có:

Chung $\widehat{QHP}$; $\widehat{HQN} = \widehat{HPQ}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta HQN$ " HPQ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{HQ}{HP} = \dfrac{HN}{HQ}$ (các cặp cạnh tương ứng0

$\Rightarrow HQ^2 = HN.HP$

Ta có: $HQ^2 + PQ.PK$

$= HN.HP + PN.PH$ (cmt)

$= PH.(HN + PN) = PH^2$

Xét (O) có: $\widehat{NPQ}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{NQ}$

$\widehat{NOQ}$ là góc ở tâm chắn $\overset{\frown}{NQ}$

$\Rightarrow \widehat{NOQ} = 2.\widehat{NPQ}$

$\Rightarrow \widehat{NOQ} = 2.\widehat{HKN} = 2.30° = 60°$

$S_{NOQ} = \dfrac{\pi.6^2.60°}{360°} = 6\pi$ (cm^2)

d) HI là đường trung bình của ΔNMK

$\Rightarrow HI // MK$ (tính chất đường trung bình tam giác)

$\Rightarrow \widehat{NIH} = \widehat{NKM}$ (hai góc đồng vị)

OI là đường trung bình của ΔNKP

$\Rightarrow OI // KP$

$\Rightarrow \widehat{NIO} = \widehat{NKP}$ (hai góc đồng vị)

Do đó: $\widehat{NIH} + \widehat{NIO} = \widehat{NKM} + \widehat{NKP}$

$\Rightarrow \widehat{HIO} = \widehat{MKP}$

mà $\widehat{MKP} = 90° \Rightarrow \widehat{HIO} = 90°$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính HO

Vì HQ là tiếp tuyến của (O) tại $Q \Rightarrow \widehat{HQO} = 90°$

$\Rightarrow O$; Q thuộc đường tròn đường kính HO

Do đó: ΔQIO nội tiếp đường tròn đường kính $HO = \dfrac{MP}{2}$ có chu vi đường tròn không đổi và bằng $\dfrac{MP.\pi}{2}$ khi N di chuyển trên MP.

Bài 6. Cho $(O;R)$ với dây BC cố định (BC không đi qua O). Điểm A thuộc cung lớn CB. Đường phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D, các tiếp tuyến tại C và D của (O) cắt nhau tại E, tia CD cắt AB tại K, đường thẳng AD cắt CE tại I. Gọi AD cắt BC tại M

a) Chứng minh: $BC//DE$ và bốn điểm A, K, I, C thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AB.AC = AM.AD$ và chứng minh $AB.AC = AM^2 + MB.MC$

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$, $R = 6cm$ tính l_{BC} cung nhỏ BC.

Hướng dẫn

Chứng minh

a) Chứng minh: $BC//DE$ và bốn điểm A, K, I, C thuộc một đường tròn.

* Có $\widehat{CDE} = \widehat{CAD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{CAD} = \widehat{DAB}(GT)$

$\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{BCD}$

Mà hai góc này ở vị trí sole trong

Suy ra $BC \parallel DE$

Cách khác: $\widehat{CAD}=\widehat{DAB}(GT)$ suy ra $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow BD=CD$ suy ra OD là đường trung trực của BC.

Suy ra BC vuông góc với OD. Mà DE vuông góc với OD (tiếp tuyến) nên suy ra BC//DE.

* Có $\widehat{AKC}=\frac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{AC}-\text{sđ } \overset{\frown}{BD})$ (góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn)

$\widehat{AIC}=\frac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{AC}-\text{sđ } \overset{\frown}{CD})$ (góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn)

Mà $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}\left(\widehat{BAD}=\widehat{CAD}\right)$

$\Rightarrow \widehat{AKC}=\widehat{AIC}$

$\Rightarrow K,I$ là hai đỉnh kề nhau nhìn đoạn AC dưới hai góc bằng nhau

$\Rightarrow AKIC$ là tứ giác nội tiếp (Cách khác là chứng minh tương tự như vậy cho góc KAI và góc KCI).

Hay A,K,I,C thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AB.AC=AM.AD$ **và chứng minh** $AB.AC=AM^2+MB.MC$

* Xét ΔABM và ΔADC có:

$\widehat{ABM}=\widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{MAB}=\widehat{CAD}(GT)$

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ADC(g-g)\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow AB.AC=AM.AD(1)$

* Xét ΔABM và ΔCDM có:

$\widehat{ABM}=\widehat{MDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{AMB}=\widehat{DMC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta CDM(g-g)\Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{BM}{DM}\Rightarrow MB.MC=AM.DM(2)$

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow AB.AC=AM.AD=AM(AM+MD)$

$\Rightarrow AB.AC=AM^2+AM.MD$

$\Rightarrow AB.AC=AM^2+MB.MC$ (ĐPCM)

c) Cho $BC=R\sqrt{3}$**,** $R=6cm$ **tính** l_{BC} **cung nhỏ** BC**.**

Gọi giao điểm của BC và OD là H

Vì D là điểm chính giữa cung BC nhỏ

$\Rightarrow OD\perp BC$ tại H; $HB=HC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$

Vì ΔOHB vuông tại H nên $\sin\widehat{BOH}=\dfrac{BH}{OB}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2.R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{BOH}=60^\circ\Rightarrow\widehat{BOC}=120^\circ$

$l_{\overset{\frown}{BC}}=\dfrac{\pi.R.120}{180}=\dfrac{2\pi.R}{3}\approx\dfrac{2.3,14.6}{3}=12,56(cm)$

Bài 7. Cho (O,R) với dây BC cố định (BC không đi qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Điểm E thuộc cung lớn BC, AE cắt BC tại D, kẻ $CH\perp AE$ tại H, gọi AO cắt BC tại I, CH cắt (O) tại K.

a) Chứng minh: Bốn điểm A,H,I,C thuộc một đường tròn và tích $AD.AE$ không đổi khi E di chuyển trên cung lớn BC.

b) Chứng minh $IH // BE$ và cho sđ $KE=100^\circ$, $R=6cm$. Tính độ dài cung BAC.

c) Chứng minh: BA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBED.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Bốn điểm A,H,I,C thuộc một đường tròn và tích $AD.AE$ không đổi khi E di chuyển trên cung lớn BC

Ta có: $CH\perp AE\Rightarrow\widehat{CHA}=90^\circ$

Vì A là điểm chính giữa cung BC nên $OA\perp BC\Rightarrow\widehat{AIC}=90^\circ$

Xét tứ giác $AHIC$ có $\widehat{AHC}=\widehat{AIC}=90^\circ$

Suy ra hai điểm H,I cùng nhìn cạnh AC dưới 1 góc vuông.

Do đó tứ giác $AHIC$ nội tiếp đường tròn hay bốn điểm A,H,I,C thuộc một đường tròn.

Vì A là điểm chính giữa cung BC nên $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ và A cố định.

Xét ΔADC và ΔACE có:

$\widehat{DAC}$ chung; $\widehat{ACD}=\widehat{AEC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta ACE(g.g) \Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AE} \Rightarrow AD.AE=AC^2$

Mà AC cố định, Do đó tích $AD.AE$ không đổi khi E di chuyển trên cung lớn BC.

b) Chứng minh $IH // BE$ và cho sđ $KE=100°$, $R=6cm$. Tính độ dài cung BAC.

Vì tứ giác $AHIC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{DHI}=\widehat{ACI}$.

Xét (O) có $\widehat{ACI}=\widehat{BED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Do đó $\widehat{DHI}=\widehat{BED}$, mà hai góc ở vị trí so le trong

Nên $IH // BE$

(Ý 2 phần b chưa làm được)

c) Chứng minh: BA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBED.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBED.

Ta có

$\widehat{BDE}=\dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AC}+sd\,\overset{\frown}{BE}\right), \widehat{ACE}=\dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AB}+sd\,\overset{\frown}{BE}\right)$

Mà $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$, Do đó $\widehat{ACE}=\widehat{BDE}$

Xét (J) có $\widehat{BDE}=\dfrac{1}{2}\widehat{BJE}$ suy ra $\widehat{ACE}=\dfrac{1}{2}\widehat{BJE}$

Vì $BJ=CJ$ nên ΔBJE cân tại $J \Rightarrow \widehat{EBJ}=\dfrac{180°-\widehat{BJE}}{2}=90°-\widehat{ACE}$

Xét (O) có: $\widehat{ACE}+\widehat{ABE}=180°$

Hay $\widehat{ACE}+\widehat{EBJ}+\widehat{ABJ}=180° \Rightarrow \widehat{ABJ}+90°=180°$

$\Rightarrow \widehat{ABJ}=90° \Rightarrow AB \perp BJ$

Do đó BA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBED.

Bài 8. Cho (O), dây cung BC $(O \notin BC)$. Điểm A thuộc cung nhỏ BC, (A khác B và C, độ dài AB khác AC). Kẻ đường kính AA' của (O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC, Hai điểm E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AA'.

a) Chứng minh: Bốn điểm A, B, D, E thuộc một đường tròn và $BD.AC = AD.AC$.

b) Chứng minh: $DF // BA$ và DE vuông góc với AC.

c) Cho $\widehat{ACB}=30°; R=6cm$. Tính $S_{quat}BOA$ và chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) $\widehat{BDA}=\widehat{BEA}=90°$ nên $A,\ B,\ D,\ E$ thuộc một đường tròn.

b)Tương tự câu a) suy ra A,D,F,C thuộc một đường tròn.

Ta có $\widehat{DFA}=\widehat{DCA}=\widehat{BA'A}$ suy ra $DF\,//\,BA$.

* $A,\ B,\ D,\ E$ thuộc một đường tròn nên $\widehat{ABE}=\widehat{ADE}$.

Mà $\widehat{ABE}=\widehat{BA'A}$ (cùng phụ $\widehat{BAE}$.)

Nên $\widehat{ADE}=\widehat{BA'A}=\widehat{DCA}$, Suy ra DE vuông góc với AC.

c) $\widehat{ACB}=30°=\widehat{BA'A}\Rightarrow\widehat{BOA'}=120°$

$\Rightarrow S_{quat}BOA=\dfrac{\pi.6^2.120}{360}=12\pi\left(cm^2\right)$.

* Gọi $I,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ BA,\ AC$. Suy ra I cố định vì BC cố định.

+ Vì $PD\ =\ PE$ nên tam giác PDE cân tại P , mà $PI\,//\,AC, DE\perp AC$ nên $DE\perp PI$ hay PI là đường trung trực của DE (1)

+ Chứng minh tương tự ta có QI là trung trực của DF (2)

Từ (1), (2) suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là I, một điểm cố định.

Bài 9. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) tại điểm C và cắt đường tròn (O') tại E. Đường thẳng AO' cắt (O) tại điểm D và cắt đường tròn (O') tại F.

a) Chứng minh: C,B,F thẳng hàng và tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD.AF=AE.AC$ và AB,CD,EF đồng quy.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: C,B,F thẳng hàng và tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AC nên $\widehat{ABC}=90°$

Vì ΔABF nội tiếp đường tròn đường kính AF nên $\widehat{ABF}=90°$

Suy ra, C và F cùng thuộc đường vuông góc với AB tại B

Do đó, C, B, F thẳng hàng.

Có: $\widehat{CDA}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

$\widehat{AEF}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O')

$\Rightarrow \widehat{CDA}=\widehat{AEF}$ Mà 2 góc cùng nhìn cạnh CF

Nên tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: $AD.AF=AE.AC$ và AB,CD,EF đồng quy.

Xét ΔCDA và ΔFEA có:

$\widehat{CDA}=\widehat{AEF}$ (cmt)

$\widehat{DAC}=\widehat{EAF}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta FEA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AF} \Rightarrow AD.AF=AC.AE$

Gọi giao điểm của CD và EF là I

Xét ΔICF có : CE, FD là đường cao

Mà $CE \cap FD=\{A\}$

Nên A là trực tâm của ΔICF

Lại có, $AB \perp CF \Rightarrow IB \perp CF$

Hay AB,CD,EF đồng quy tại I.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C thuộc (O) (C không trùng A, B), M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Các đường thẳng AM và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC, BM cắt nhau tại K.

a) Chứng minh: ΔABI cân, tứ giác $MICK$ nội tiếp.

b) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$ và $NI \perp MO$.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔBIK cắt đường tròn $(B;BA)$ tại D (D không trùng với I). Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: ΔABI cân, tứ giác $MICK$ nội tiếp.

* Xét (O) có: $sđ\,\overset{\frown}{AM} = sđ\,\overset{\frown}{MC}$ (M là điểm chính giữa cung AC)

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{IBM}$ (hệ quả góc nội tiếp)

Và $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow BM \perp AI, AC \perp BI$

Trong ΔABI có BM vừa là đường cao ($BM \perp AI$) vừa là đường phân giác ($\widehat{ABM} = \widehat{IBM}$)

Do đó ΔABI cân tại B.

* Xét tứ giác $MICK$ có: $\widehat{KMI} = 90°$ ($BM \perp AI$); $\widehat{KCI} = 90°$ ($AC \perp BI$)

$\Rightarrow \widehat{KMI} + \widehat{KCI} = 90° + 90° = 180°$ (hai góc có đỉnh đối nhau trong tứ giác $MICK$)

Vậy tứ giác $MICK$ nội tiếp.

b) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$ và $NI \perp MO$.

* Xét ΔABN và ΔIBN có:

$AB = BI$ (do ΔABI cân tại B)

$\widehat{ABN} = \widehat{IBN}$ (cmt)

BN chung

Do đó $\Delta ABN = \Delta IBN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NIB}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{NAB} = 90°$ nên $\widehat{NIB} = 90°$ $\Rightarrow NI \perp BI$

Ta có: $NI \perp BI$ (cmt) mà $I \in (B;BA)$ (do $BI = BA$)

Vậy NI là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$.

* Xét ΔABI có M là trung điểm của AI, O là trung điểm của AB

$\Rightarrow MO$ là đường trung bình của ΔABI

$\Rightarrow MO // BI$ mà $NI \perp BI$ (cmt)

Vậy $NI \perp MO$.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔBIK cắt đường tròn $(B;BA)$ tại D (D không trùng với I). Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng

Ta có: $\widehat{IDK} = \widehat{IBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IK của đường tròn ngoại tiếp ΔIBK).

Mà $\widehat{IDA} = \frac{1}{2}\widehat{IBA} = \widehat{IBM}$ ($\widehat{IDA}$ và $\widehat{IBA}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$ của $(B;BA)$, BN là tia phân giác của $\widehat{IBA}$).

Do đó: $\widehat{IDK} = \widehat{IDA}$ nên hai tia DK và DA trùng nhau.

$\Rightarrow$ D, K, A thẳng hàng mà C, K, A thẳng hàng nên D, K, A, C thẳng hàng.

Vậy ba điểm A, C, D thẳng hàng.

Bài 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ $(AB < CD)$. Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AB; DP cắt AB tại E và cắt CB tại K; CP cắt AB tại F và cắt DA tại I.

a) Chứng minh tứ giác $CKID$; $CDFE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $IK // AB$ và $AP^2 = PE.PD = PF.PC$.

c) Chứng minh AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $CKID$; $CDFE$ nội tiếp.

Ta có:

$\widehat{CKD}=\dfrac{sd\overset{\frown}{CD}-sd\overset{\frown}{BP}}{2}$; $\widehat{CID}=\dfrac{sd\overset{\frown}{CD}-sd\overset{\frown}{AP}}{2}$

Mà $\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{AP}$

$\Rightarrow \widehat{CKD}=\widehat{CID}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CKID$ nội tiếp.

Ta có:

$\widehat{BFC}=\dfrac{sd\overset{\frown}{CB}+sd\overset{\frown}{PA}}{2}\Rightarrow \widehat{BFC}=\dfrac{sd\overset{\frown}{CB}+sd\overset{\frown}{PB}}{2}=\dfrac{sd\overset{\frown}{PC}}{2}$

$\widehat{EDC}=\dfrac{sd\overset{\frown}{PC}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BFC}=\widehat{EDC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CFED$ nội tiếp.

b) Chứng minh $IK // AB$ và $AP^2=PE.PD=PF.PC.$

Ta có tứ giác $CKID$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KIC}=\widehat{KDC}$

Mà $\widehat{BFC}=\widehat{EDC}\Rightarrow \widehat{KIC}=\widehat{BFC}\Rightarrow IK // AB$

Ta có: $\widehat{PEA}=\dfrac{sd\overset{\frown}{BD}+sd\overset{\frown}{PA}}{2}\Rightarrow \widehat{PEA}=\dfrac{sd\overset{\frown}{BD}+sd\overset{\frown}{PB}}{2}=\dfrac{sd\overset{\frown}{PD}}{2}$

Mà $\widehat{PAD}=\dfrac{sd\overset{\frown}{PD}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{PEA}=\widehat{PAD}$

$\Rightarrow \Delta PEA \backsim \Delta PDA\ (g-g)$

$\Rightarrow AP^2=PE.PD$

Chứng minh tương tự ta được $BP^2=PF.PC$

Mà $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{BP}\Rightarrow AP=BP\Rightarrow AP^2=PE.PD=PF.PC$

c) Chứng minh AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED.

Trên nửa mặt phẳng bờ EA chứa điểm P, vẽ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED

$\Rightarrow \widehat{xAE}=\widehat{ADE}$

Mà $\widehat{PAE}=\widehat{ADE}$

$\Rightarrow Ax\equiv AP$

$\Rightarrow AP$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAED

Bài 12. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa cung AB (K khác M và B), AK cắt MO tại I. Gọi H là hình chiếu của M lên AK.

a) Chứng minh tứ giác $OIKB$, $AMHO$ nội tiếp.

b) Chứng minh ΔHMK cân và $AM^2 = AI.AK$.

c) Chứng minh $\widehat{HOK} = \widehat{MAK}$ và cho $\widehat{MIK} = 60^o, R = 6cm$. Tính $S_{quat}KOB$.

d) Xác định vị trí điểm K để chu vi tam giác OPK lớn nhất (P là hình chiếu của K lên AB).

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $OIKB$, $AMHO$ nội tiếp.

Ta có M là điểm chính giữa cung AB $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông cân tại $M \Rightarrow MO \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 90^o$ Hay $\widehat{IOB} = 90^o$

Ta có $\widehat{AKB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) Hay $\widehat{IKB} = 90^o$

Tứ giác $OIKB$ có $\widehat{IOB} + \widehat{IKB} = 180^o \Rightarrow OIKB$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMHO$ có $\widehat{AOM} = 90^o$ (chứng minh trên)

$\widehat{AHM} = 90^o$ (H là hình chiếu của M lên AK)

Tứ giác $AMHO$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh ΔHMK cân và $AM^2 = AI.AK$.

Ta có $\widehat{AKM} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

mà $\widehat{ABM} = 45^o$ (ΔAMB vuông cân tại M -cmt)

$\Rightarrow \widehat{AKM} = 45^o \Rightarrow \widehat{HKM} = 45^o$

Xét ΔHMK vuông tại H có $\widehat{HKM} = 45^o$ nên ΔHMK cân.

Xét ΔAMB vuông tại M, MO là đường cao có: $AM^2 = AO.AB$ (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Ta có $\Delta AOI \backsim \Delta AKB(g-g) \Rightarrow \dfrac{AO}{AK} = \dfrac{AI}{AB} \Rightarrow AO.AB = AI.AK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM^2 = AI.AK$

c) Chứng minh $\widehat{HOK} = \widehat{MAK}$ và cho $\widehat{MIK} = 60^o, R = 6cm$. Tính $S_{quat}KOB$.

$\Delta OMH = \Delta OKH\ (c-c-c) \Rightarrow \widehat{MOH} = \widehat{KOH}$

Mặt khác $\widehat{MAH} = \widehat{MOH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MH)

$\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{HOK} \Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{HOK}$

Ta có: $\widehat{MIK} = \widehat{AIO} = 60^o$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{IAO} = 30^o$ (vì phụ với $\widehat{AIO}$) $\Rightarrow \widehat{KAB} = 30^o$

Ta có: $\widehat{KOB} = 2\widehat{KAB}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung KB) $\Rightarrow \widehat{KOB} = 60^o$

$S_{quat}KOB = \dfrac{\pi.6^2.60^o}{360^o} = 6\pi(cm^2)$

d) Xác định vị trí điểm K để chu vi tam giác OPK lớn nhất (P là hình chiếu của K lên AB).

Ta có ΔOPK vuông tại $P \Rightarrow PO^2 + PK^2 = OK^2 = R^2$ (định lí Py-ta-go)

Chu vi $\Delta OPK : OK + PO + PK$

Ta có $OK + PO + PK \le OK + \sqrt{2(PO^2 + PK^2)} = R + \sqrt{2.\mathrm{R}^2} = \left(1+\sqrt{2}\right)R$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PO = PK$

$\Rightarrow \Delta OPK$ vuông cân tại $P \Rightarrow \widehat{KOP} = 45^o \Rightarrow K$ nằm chính giữa cung MB.

Bài 13. Cho $(O),(I)$ tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng d tiếp xúc với $(O),(I)$ lần lượt tại B,C. Gọi tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt BC tại M, tia BA cắt (I) tại D, CA cắt (O) tại E.

a) Chứng minh tứ giác $BMAO$ nội tiếp và ΔABC vuông.

b) Chứng minh $\widehat{OMI} = 90°$ và cho $OA = 9cm, AI = 4cm$. Tính BC.

c) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường trong đường kính OI và $S_{\Delta AED} = S_{\Delta ABC}$.

Hướng dẫn

a) + Tứ giác $BMAO$ có:

$\widehat{MBO} = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{MAO} = 90°$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{MBO} + \widehat{MAO} = 180°$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMAO$ nội tiếp.

+ Trong đường tròn (O) ta có $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Trong đường tròn (I) ta có $MA = MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow MA = MB = MC = \frac{1}{2}BC$

Tam giác ABC có đường trung tuyến AM ứng với cạnh huyền BC và bằng nửa cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có :

MO là tia phân giác $\widehat{BMA}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

MI là tia phân giác $\widehat{AMC}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{OMI} = 90°$.

Mà $MA \perp OI$ (tính chất tiếp tuyến)

Theo hệ thực lượng trong tam giác vuông ta có :

$MA^2 = OA.AI = 9.4 = 36cm$.

$\Rightarrow MA = 6cm$.

Mà $MA = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2.MA = 2.6 = 12cm$.

c) + Gọi đường tròn đường kính OI là (K)

Tam giác OMI vuông tại M và đường trung tuyến MK nên $MK = MO = MI$ (1)

MK là đường trung bình của hình thang $BOIC$ nên $MK // BO \Rightarrow MK \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OI.

+ $\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{BAE} = 90° \Rightarrow BE$ là đường kính của (O)

$\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{CAD} = 90° \Rightarrow CD$ là đường kính của (I).

Ta có :

$\Delta BAO \backsim \Delta DAI\,(g-g) \Rightarrow \frac{BA}{DA} = \frac{OB}{ID}$

$\Delta AEO \backsim \Delta ACI\,(g-g) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{OE}{IC}$

$\Rightarrow \frac{BA}{DA} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow BA.AC = AD.AE$

Vậy $\dfrac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AE.AD}{\frac{1}{2}.BA.AC}=1\Rightarrow S_{\Delta AED}=S_{\Delta ABC}$

Bài 14. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính BD. Kéo dài AB và CD cắt nhau tại E; CB và DA cắt nhau tại F. Góc $ABC>90^0$.

a) Chứng minh: $ACEF$ là tứ giác nội tiếp và $BD\perp EF$.

b) Chứng minh: $BA.BE=BC.BF$ và BD cắt FE tại G, chứng minh B là tâm đường tròn nội tiếp

c) Cho góc $\widehat{ABC}=135^0$. Tính AC theo BD.

Hướng dẫn

Chứng minh

a) Chứng minh: $ACEF$ **là tứ giác nội tiếp và** $BD\perp EF$ **.**

* Có $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{FAE}=\widehat{FCE}=90°$

$\Rightarrow A,C$ là hai đỉnh kề nhau nhìn đoạn FE dưới hai góc bằng nhau

$\Rightarrow ACEF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính EF.

* Xét ΔFED có: EA,FC là hai đường cao ; $EA\cap FC=\{B\}\Rightarrow B$ là trực tâm của ΔFED

$\Rightarrow DB\perp FE$ (ĐPCM)

b) Chứng minh: $BA.BE=BC.BF$ **và** ***BD*** **cắt** ***FE*** **tại** ***G*****, chứng minh** B **là tâm đường tròn nội tiếp** ΔACG **.**

* Xét ΔABF và ΔCBE có:

$\widehat{AFB}=\widehat{CEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{ABF}=\widehat{CBE}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta CBE\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{CB}=\dfrac{BF}{BE} \Rightarrow BA.BE=BF.BC$

* Vì $DB \perp FE \Rightarrow \widehat{BGE}=90^\circ$

Xét tứ giác $EGBC$ có $\widehat{BGE}+\widehat{BCE}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $EGBC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{GCB}=\widehat{GEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Lại có $\widehat{GEB}=\widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{GCB}=\widehat{ACB}\left(=\widehat{GEB}\right) \Rightarrow CB$ là tia phân giác của $\widehat{GCA}$

Chứng minh tương tự AB là tia phân giác của $\widehat{GAC}$

Vì $AB \cap CB=\{B\} \Rightarrow B$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG

c) Cho góc $\widehat{ABC}=135^0$. Tính AC theo BD.

Gọi O là tâm đường tròn đường kính BD.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADC}+\widehat{ABC}=180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC}=45^\circ \Rightarrow \widehat{AOC}=2.45^\circ=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AOC$ vuông cân tại O

$\Rightarrow AC=\dfrac{AO}{\sin \widehat{CAO}}=\dfrac{R}{\sin 45^\circ}=R\sqrt{2}$

Mà $BD=2R \Rightarrow AC=\dfrac{BD\sqrt{2}}{2}$

Bài 15. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm C trên đường tròn sao cho $CA=CB$. Gọi M là trung điểm của dây AC; nối BM cắt cung AC tại E; AE và BC kéo dài cắt nhau tại D.

a) Chứng minh: Tứ giác $DEMC$ nội tiếp và $DE.DA=DC.DB$

b) Chứng minh: Tứ giác $COMD$ là hình bình hành và kẻ $EF \perp AC$. Tính tỉ số $\dfrac{MF}{EF}$

c) Cho $MO=3cm$. Tính $S_{quat}COD$ và $AE.AD+BM.BE=AB^2$

d) Vẽ đường tròn tâm E bán kính EA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N; EF cắt AN tại I, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K; BE cắt AN tại H chứng minh tứ giác $BHIK$ nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $DEMC$ nội tiếp và $DE.DA = DC.DB$

Ta có: $\widehat{AEB} = 90^0$, $\widehat{ACB} = 90^0$ là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Xét tứ giác $DEMC$ có:

$\widehat{MED} = 90^0$ và $\widehat{MCD} = 90^0$

Suy ra tứ giác $DEMC$ nội tiếp.

Xét ΔACD và ΔBED có $\widehat{DAC} = \widehat{DBE}$ (hai góc chắn cùng 1 cung)

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{BED} = 90^0$

Vậy ΔACD và ΔBED đồng dạng. Suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DE}{DB} \Rightarrow DE.DA = DC.DB$.

b) Chứng minh: Tứ giác $COMD$ là hình bình hành. Tính tỉ số $\dfrac{MF}{EF}$

Xét ΔABD có $\begin{cases} AC \perp BD \\ BE \perp AD \end{cases} \Rightarrow DM \perp AB$

Mà $CO \perp AB$. Suy ra $DM \parallel CO$

Xét ΔABC có $AM = MC$ và $AO = OB$. Suy ra $OM \parallel BC \Rightarrow OM \parallel DC$

Xét tứ giác $COMD$ có $DM \parallel CO$ và $OM \parallel DC$, Vậy tứ giác $COMD$ là hành bình hành.

Ta có $\begin{cases} EF \perp AC \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MBC}$ (hai góc so le trong)

Xét ΔAEM và ΔEFM có $\widehat{MEF} = \widehat{MBC}$ và $\widehat{AEM} = \widehat{EFM} = 90^0$

Suy ra ΔAEM và ΔEFM đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{MF}{EF} = \dfrac{ME}{AE}$

c) Cho $MO = 3cm$. Tính $S_{quat}COD$ và $AE.AD + BM.BE = AB^2$

d) Chứng minh tứ giác $BHIK$ nội tiếp được đường tròn.

Bài 16. Cho $(O;R)$ tiếp xúc trong với $(I;r)$ tại M với $R \geq 2r$. Đường kính AB của (O) tiếp xúc với (I) tại N. MA, MB cắt (I) tại C, D.

a) Chứng minh: $CD // AB$ và MN là phân giác của $\widehat{AMB}$

b) MN cắt (O) tại K. Chứng minh $KA = KB$ và tích $KM.KN$ không đổi.

c) Cho $R = 6cm$. Tính S_{AOC} và gọi CN cắt KB tại P, DN cắt AK tại Q. Tìm M để chu vi ΔNPQ nhỏ nhất?

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $CD // AB$ và MN là phân giác của $\widehat{AMB}$

Ta có $\widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CMD} = 90°$

Xét ΔCMD có $\widehat{CMD} = 90°$ (cmt) suy ra ΔCMD nội tiếp đường tròn (I) đường kính CD.

Xét ΔBOM có $OB = OM = R$ $\Rightarrow \Delta BOM$ cân tại O nên $\widehat{OBM} = \widehat{OMB}$

Xét ΔMDI có $ID = IM = r$ $\Rightarrow \Delta MDI$ cân tại I nên $\widehat{IDM} = \widehat{IMD}$

mà $\widehat{IMD} = \widehat{OMB}$ suy ra: $\widehat{OBM} = \widehat{IDM}$

Do 2 góc $\widehat{OBM}; \widehat{IDM}$ ở vị trí đồng vị nên $CD // AB$ (đpcm)

Vì $CD // AB$ (cmt) mà $IN \perp AB$ (do AB là tiếp tuyến của đường tròn (I)) $\Rightarrow CD \perp IN$

Do đó N là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CD}$ $\Rightarrow \overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{DN} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{DMN}$ hay $\widehat{AMN} = \widehat{BMN}$

Vậy MN là phân giác của $\widehat{AMB}$ (đpcm)

b) MN cắt (O) tại K. Chứng minh $KA = KB$ và tích $KM.KN$ không đổi.

Vì $\widehat{AMN} = \widehat{BMN}$ (cmt) nên $\widehat{AMK} = \widehat{BMK}$ $\Rightarrow \overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK} \Rightarrow AK = BK$ (đpcm)

Xét ΔBMN và ΔBND có: $\widehat{MBN}$ chung

$\widehat{BND} = \widehat{BMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DN}$)

Suy ra: $\Delta BMN \backsim \Delta BND$ (g.g)

$\Rightarrow BN^2 = BD.BM$ (1)

Xét (O) có: $\widehat{BKM} = \widehat{BAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$)

Xét (I) có: $\widehat{DNM} = \widehat{DCM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DM}$)

mà $\widehat{DCM} = \widehat{BAM}$ (2 góc đồng vị)

Suy ra: $\widehat{BKM} = \widehat{DNM}$

Xét ΔBKM và ΔDNM có: $\widehat{BMK}$ chung

$\widehat{BKM} = \widehat{DNM}$ (cmt)

Suy ra: $\Delta BKM \backsim \Delta DNM$ (g.g)

$\Rightarrow BD.BM = KN.KM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $KN.KM = BN^2$

Do AB không đổi, điểm N cố định (vì N là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CD}$) nên BN không đổi $\Rightarrow BN^2$ không đổi

Vậy $KN.KM$ không đổi (đpcm)

c) Cho $R = 6cm$. Tính S_{AOC} và gọi CN cắt KB tại P, DN cắt AK tại Q. Tìm M để chu vi ΔNPQ nhỏ nhất?

Bài 17.Bài 17. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB. Từ A kẻ $Ax \perp MN$, I là trung điểm của MN. Tia BI cắt Ax tại C.

a) Chứng minh: $OI // Ax$ và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.

b) Chứng minh: C là trực tâm của ΔAMN và $\widehat{ACO} = 90°$.

c) Cho $AB = 2R$, $AM.AN = 3R^2$, $AN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $OI // Ax$ và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.

Do I là trung điểm của $MN \Rightarrow OI \perp MN$, mặt khác: $Ax \perp MN \Rightarrow OI // Ax \Rightarrow OI // AC$

mà O là trung điểm của AB

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC, lại có I là trung điểm của MN (giả thiết)

$\Rightarrow BMCN$ là hình bình hành (vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

b) Chứng minh: C là trực tâm của ΔAMN và $\widehat{ACO} = 90°$.

Ta có: $\widehat{BNA} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BN \perp AN$.

Theo chứng minh trên $BMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow MC // BN \Rightarrow MC \perp AN$, mặt khác:

$AD \perp MN \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác ΔAMN.

Ta lại có: H là trung điểm của OB, I là trung điểm của $CB \Rightarrow IH$ là đường trung bình của

$\Delta OBC \Rightarrow IH // OC$, mà $MN \perp Ax \Rightarrow IH \perp Ax \Rightarrow OC \perp Ax \Rightarrow \widehat{ACO} = 90°$.

c) Cho $AB = 2R,\ AM.AN = 3R^2,\ AN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN.

Ta có: $AM.AN = 3R^2,\ AN = R\sqrt{3} \Rightarrow AM = AN = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta AMN$ cân đỉnh A (1)

+ Xét ΔABN vuông tại N có: $AB = 2R,\ AN = R\sqrt{3} \Rightarrow BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R$.

+ $\sin\widehat{ABN} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ABN} = 60°$.

+ $\widehat{ABN} = \widehat{AMN}$ (góc nội tiếp chắn cung AN) $\Rightarrow \widehat{AMN} = 60°$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AMN$ đều $\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AD.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{AN^2 - ND^2}.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{3R^2 - \dfrac{3R^2}{4}}.R\sqrt{3} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

(D là trung điểm MN).

$\Rightarrow$ diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN là:

$$S = S_{(O)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Bài 18. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây MN đi qua trung điểm H của OB, I là trung điểm MN. Từ A kẻ $Ax \perp MN$ tại K. Tia BI cắt Ax tại C, Ax cắt tiếp tuyến tại B của (O) ở Q.

a) Chứng minh:Tứ giác $BHKQ$ nội tiếp và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.

b) Chứng minh : C là trực tâm ΔAMN và tìm quỹ tích điểm C khi cát tuyến MN quay xung quanh H.

c) Cho $AB = 2R,\ AM.AN = 3R^2;\ AN = R\sqrt{3}$.

Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN với $R = 3$ cm.

Hướng dẫn

a) Chứng minh:Tứ giác $BHKQ$ nội tiếp và tứ giác $BMCN$ là hình bình hành.

Vì $Ax \perp MN$ tại K. nên $AQ \perp MN$ tại $K \Rightarrow \widehat{QKN} = 90°$

hay $\widehat{QKH} = 90°$.

Vì BQ là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow BQ \perp AB$ tại B

$\Rightarrow \widehat{QBH} = 90^0 \left(H \in AB\right)$

Xét tứ giác $BHKQ$ có : $\widehat{QKH} + \widehat{QBH} = 90° + 90° = 180^0$

$\Rightarrow$ $BHKQ$ là tứ giác nội tiếp.

Xét (O) có : I là trung điểm của dây cung MN

$\Rightarrow OI \perp MN$ tại I mà $AC \perp MN$ nên $AC \ // \ OI$.

Xét ΔABC:

O là trung điểm của AB (do AB là đường kính của (O))

$OI \ // \ AC \left(I \in BC\right)$

nên I là trung điểm của BC (định lí về đường trung bình trong tam giác).

Xét tứ giác $BMCN$ có :

I là trung điểm của BC và MN

Do đó $BMCN$ là hình bình hành. (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường là hbh).

b) C là trực tâm ΔAMN và tìm quỹ tích điểm C khi cát tuyến MN quay xung quanh H.

$\widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắnu nửa đường tròn) $\Rightarrow AM \perp BM$

mà $BM \ // \ CN$ (do $BMCN$ là hình bình hành.)

nên $NC \perp AM$

$\Rightarrow$ NC là đường cao của ΔAMN (1)

Lại có : AK là đường cao của ΔAMN (2)

$NC \cap AK = \{C\}$ (3)

Từ (1) và (2)(3) suy ra C là trực tâm ΔAMN,

+) Chứng minh : IH là đường trung bình của $\Delta OBC \Rightarrow IH \ // \ OC \Rightarrow MN \ // \ OC$

mà $MN \perp AQ$ nên $OC \perp AQ \Rightarrow \widehat{ACO} = 90°$ với $A; O$ cố định .

Do đó quỹ tích điểm C khi cát tuyến MN quay xung quanh H là đường tròn $\left(O'; \dfrac{AO}{2}\right)$.

c) Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN với $R = 3$ cm.

Ta có :

$AM.AN = 3R^2$; $AN = R\sqrt{3} \Rightarrow AM = AN = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta AMN$ cân đỉnh A.

+) Xét ΔABM vuông tại có M : $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R$

+) $\cos\widehat{ABM} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABM} = 60°$

+) Xét (O) có : $\widehat{ABM} = \widehat{ANM} = 60°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

mà ΔAMN cân đỉnh A.

nên ΔAMN đều $\Rightarrow AM = AN = MN = R\sqrt{3}$.

+) Ta có : AK là đường cao của ΔAMN đều $\Rightarrow K$ là trung điểm của MN

$\Rightarrow MK = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

+) $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AK.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{AM^2 - MK^2}.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{3R^2 - \dfrac{3R^2}{4}}.R\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

+) Gọi S là diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔAMN , ta có :

$S = S_{(O)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \dfrac{\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right).3^2}{4} \approx 16,6$ (đvdt) .

Bài 19. Cho $\frac{1}{2}(O)$ đường kính $AB = 2R$, kẻ tiếp tuyến Bx với (O). Gọi C, D là các điểm nằm trên (O). Các tia AC, AD cắt Bx tại E, F (F nằm giữa B; E).

a) Chứng minh: $\Delta ABF \sim \Delta BDF$ và tứ giác $CEFD$ nội tiếp.

b) Chứng minh: Khi C, D di động thì tích $AC.AE = AD.AF$ và không đổi

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $\Delta ABF \sim \Delta BDF$ và tứ giác $CEFD$ nội tiếp.

* Có $\widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BDF} = 90°$ (kề bù)

Xét ΔABF và ΔBDF có:

$\widehat{ABF} = \widehat{BDF} (= 90°)$

$\widehat{BAF}$ (góc chung)

$\Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta BDF (g-g)$

* Vì $A, C, D, B \in \frac{1}{2}(O) \Rightarrow ACDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{DBA}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Mà $\widehat{DBA} = \widehat{DFB}$ (cùng phụ với $\widehat{DBF}$)

$\Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{DFB} \left(= \widehat{DBA}\right)$

Suy ra tứ giác $CEFD$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối)

b) Chứng minh: Khi C, D di động thì tích $AC.AE = AD.AF$ và không đổi

* Xét ΔABF vuông tại B, đường cao BD.

$\Rightarrow AD.AF = AB^2$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao)

Chứng minh tương tự $AC.AE = AB^2$

$\Rightarrow AC.AE = AD.AF = AB^2 = 4R^2$ (không đổi) (ĐPCM)

Bài 20: Cho ΔABC nội tiếp (O).Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I và cắt (O) tại M

a) Chứng minh: $OM \perp BC$ và $MC^2 = MI.MA$

b) Kẻ đường kính MN.Các tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C, B, Q thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $OM \perp BC$ **và** $MC^2 = MI.MA$

* Vì AM là tia phân giác $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM} \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC.

$\Rightarrow OM \perp BC$

Xét ΔMCI và ΔMAC có:

$\widehat{MAC} = \widehat{MCI}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

$\widehat{AMC}$ (góc chung)

$\Rightarrow \Delta MCI \backsim \Delta MAC\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MI}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA.MI$

b) Kẻ đường kính MN.Các tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C, B, Q thuộc một đường tròn.

Có $\widehat{NAM} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AM \perp AN$ tại A

Vì AM là phân giác trong tại A của $\Delta ABC \Rightarrow AN$ là phân giác ngoài tại A của ΔABC

Do BP là phân giác trong tại B của ΔABC

$AN \cap BP = \{P\} \Rightarrow CP$ là phân giác ngoài tại C của ΔABC

$\Rightarrow CP \perp CQ$ (vì CQ là tia phân giác trong tại C của ΔABC)

$\Rightarrow \widehat{QCP} = 90°$

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{QBP} = 90°$

$\Rightarrow B, C$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn QP dưới góc $90°$

$\Rightarrow QBCP$ là tứ giác nội tiếp

Vậy bốn điểm P, C, B, Q thuộc một đường tròn.

Bài 20. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn $(O;R)$, đường kính $AA' \perp BC$ tại H, có $BC = 6cm, AH = 4cm$. Kẻ đường kính CC', kẻ $AK \perp CC'$

a) Tính R?

b) Tứ giác $CAC'A', AKHC$ là hình gì? Tại sao?

c) Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài ΔABC ?

Hướng dẫn

a) Tính R?

Ta có ΔABC cân, $AH \perp BC \Rightarrow BH = HC = BC : 2 = 3cm$

$\widehat{ABA'} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên $\Delta ABA'$ vuông tại A. Áp dụng hệ thức lượng ta có $BH^2 = AH.HA'$

$\Rightarrow HA' = BH^2 : AH = 3^2 : 4 = 2,25cm \Rightarrow AA' = 4 + 2,25 = 6,25 \Rightarrow R = 6,25 : 2 = 3,125cm$.

b) Tứ giác $CAC'A', AKHC$ là hình gì? Tại sao?

ta có $OA = OA' = OC = OC' = R \Rightarrow$ tứ giác $AC'A'C$ là hình chữ nhật

Xét tứ giác $AKHC$ có $\widehat{AKC} = \widehat{AHC} = 90° \Rightarrow$ tứ giác $AKHC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HKC} = \widehat{HAC} = \widehat{A'C'C} \Rightarrow KH // A'C'$.

Mà $A'C' // AC \Rightarrow KH // AC \Rightarrow$ tứ giác $AKHC$ là hình thang, do tứ giác $AKHC$ nội tiếp nên tứ giác $AKHC$ là hình thang cân.

c) Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài ΔABC ?

ta có $S_{(O)} = \pi R^2 = \pi.3,125^2 = \frac{625}{64}\pi\,(cm^2)$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.6.4 = 12cm^2$

Diện tích hình tròn (O) bên ngoài tam giác ΔABC là

$\frac{625}{64}\pi - 12 \approx 18,664cm^2$

Bài 21. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB, vẽ dây cung CD vuông góc với AO tại điểm Q.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm S, SC cắt (O) tại điểm thứ hai là M, AM cắt CD tại I.

a) Chứng minh : tứ giác $QBMI$ nội tiếp. $\Delta SMA \backsim \Delta SBC$.

b) Gọi H là giao điểm của MA và BC, K là giao điểm của $MD; AB$. Chứng minh: $KH // CD$ và $OK.OS = R^2$

c) Cho $\widehat{MAB} = 20°; \widehat{MSA} = 40°$, tính $S_{quat}CBDO$; $R = 6cm$

Hướng dẫn

a) Chứng minh : tứ giác $QBMI$ nội tiếp. $\Delta SMA \backsim \Delta SBC$.

Xét $(O;R)$, đường kính $AB \perp CD = \{Q\}$ (gt) $\widehat{IQB} = 90°$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Xét $(O;R)$, đường kính AB, $M \in (O) \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $QIMB$: $\widehat{IQM} + \widehat{IMB} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối diện nhau $\Rightarrow$ tứ giác $QIMB$ nội tiếp đường tròn.

* $\Delta SMA \backsim \Delta SBC$

Xét (O): $\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \frac{sd\,\overset{\frown}{MB}}{2}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$)

Xét ΔSMA và ΔSBC:

$\widehat{MCB} = \widehat{MAB}$ (cmt)

$\widehat{CSB}$ chung

$\Rightarrow \Delta SMA \backsim \Delta SBC$ (g.g)

b) Chứng minh : $KH // CD$ và $OK.OS = R^2$

Xét $(O;R)$, đường kính $AB \perp CD = \{Q\}$ (gt) $\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AC} = sd\,\overset{\frown}{AD}$ (liên hệ giữa dây và cung)

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau) hay $\widehat{HMK} = \widehat{HBK}$

Xét tứ giác $HKBM$ có $\widehat{HMK} = \widehat{HBK}$ (cmt) mà 2 góc ở 2 đỉnh liên tiếp cùng chắn cung HK

$\Rightarrow tgHMBK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HMB} + \widehat{HKB} = 180°$ mà $\widehat{HMB} = 90° \Rightarrow \widehat{HKB} = 90°$

$\Rightarrow HK \perp OB$

Mà $CD \perp AB(gt) \Rightarrow HK // CD$ (từ vuông góc đến song song)

Nối $O;M$, kẻ tiếp tuyến $Mx, Mx \cap AB = \{P\}$

Ta có $\widehat{CMx} = \widehat{SMP}$ (2 góc đối đỉnh)

Vì $CD // HK(cmt) \Rightarrow \widehat{CDM} = \widehat{HKM}$ (2 góc đồng vị)

Xét $(O): \widehat{CDM} = \widehat{CMx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung $\overset{\frown}{CM}$)

Suy ra $\widehat{HKM} = \widehat{PMS} \Rightarrow \widehat{HKM} + 90° = \widehat{PMS} + 90°$

$\Rightarrow \widehat{HKM} + \widehat{QKH} = \widehat{PMS} + \widehat{OMP} \Rightarrow \widehat{OKM} = \widehat{KMS}$

Xét ΔOKM và ΔOMS :

$\widehat{OKM} = \widehat{OMS}$ (cmt)

$\widehat{MOS}$ chung

$\Rightarrow \Delta OKM \backsim \Delta OMS$ (g.g) $\Rightarrow OS.OK = OM^2 = R^2$

c) Cho $\widehat{MAB} = 20°; \widehat{MSA} = 40°$, tính $S_{quat}CBDO;\ R = 6cm$

Xét $(O): \widehat{MCB} = \widehat{MAB} = 20°$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$)

XÉT ΔCBS : $\widehat{CBS} = \widehat{BCS} + \hat{S} = 20° + 40° = 60°$ (tính chất góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \Delta CBO$ đều $\Rightarrow \widehat{COB} = 60° \Rightarrow \widehat{COD} = 120°$

$\Rightarrow S_{quat}\widehat{CBD} = \dfrac{\pi R^2 n}{360^0} = \dfrac{\pi.36.120}{360} = 108.\pi \approx 339,12(dvdt)$

Bài 22. Cho đường tròn (O,R) đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O). Trên Ax lấy điểm M sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ tiếp tuyến MB với (O), tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D, OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E. Gọi K là giao điểm của MC với (O).

a) Chứng minh: Tứ giác $AMBO$ nội tiếp và tích $IO.IM = \dfrac{AB^2}{4}$.

b) Chứng minh: $AOBE$ là hình thoi và $\widehat{MIK} = \widehat{ACM}$.

c) Chứng minh: $OD \perp MC$ và cho $R = 6\,cm$, tính $S_{quat}AOK$.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $AMBO$ có:

MA là tiếp tuyến của (O) tại $A \Rightarrow MA \perp OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 90°$.

MB là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow MB \perp OB \Rightarrow \widehat{OBM} = 90°$.

Xét tứ giác $AMBO$ có $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180°$ mà hai góc ở hai đỉnh đối nhau

Vậy tứ giác $AMBO$ nội tiếp.

* Ta có: MA, MB lần lượt là tiếp tuyến của (O) từ M . Khi đó :

OM là tia phân giác của các góc $\widehat{AOB}$

Mà ΔABO cân tại O $\Rightarrow MO \perp AB$ và I là trung điểm của AB

Xét tam giác vuông AMO tại A có : AI là đường cao nên áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được :

$IO.IM = AI^2$

Lại có $AI = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow IO.IM = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow IO.IM = \dfrac{AB^2}{4}$

Vậy $IO.IM = \frac{AB^2}{4}$

b) Xét tam giác vuông AOM có :

$OE = R, OM = 2R \Rightarrow E$ là trung điểm của OM $\Rightarrow AE = EO = R$

Xét tam giác vuông BOM có :

$OE = R, OM = 2R \Rightarrow E$ là trung điểm của OM $\Rightarrow BE = EO = R$

Vậy tứ giác $AOBE$ có: $AO = OB = BE = EA = R$.

Vậy $AOBE$ là hình thoi.

* Gọi N là giao điểm còn lại của đường thẳng MO và (O), khi đó $EKCN$ nội tiếp

$\Rightarrow MK.MC = ME.MN = ME.(ME + EN) = R.(R + 2R) = 3R^2$

Lại có: $MI.MO = \frac{3}{2}R.2R = 3R^2$

$\Rightarrow MK.MC = MO.MI \Rightarrow \frac{MK}{MO} = \frac{MI}{MC}$

Xét ΔMIK & ΔMCO có:

$\widehat{M}$ chung

$\frac{MK}{MO} = \frac{MI}{MC}$

$\Rightarrow \Delta MIK \backsim \Delta MCO (c.g.c) \Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MCO} = \widehat{MCA}$

Vậy $\widehat{MIK} = \widehat{ACM}$

c) Gọi H là giao điểm của OD và MC

Xét tam giác ΔMAO & ΔACD:

$\widehat{MAO} = \widehat{ACD} = 90°$

$\widehat{AMO} = \widehat{CAD} = 30°$

$\Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta ACD (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{AC} = \frac{OC}{CD} \Rightarrow \frac{MA}{OC} = \frac{AC}{CD}$

Xét ΔMAC & ΔOCD

$\widehat{MAC} = \widehat{OCD} = 90°$

$\frac{MA}{OC} = \frac{AC}{CD}$

$\Delta MAC \backsim \Delta OCD (c.g.c) \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ODC} = 90° - \widehat{DOC}$

$\Rightarrow \widehat{MCA} + \widehat{DOC} = 90° \Rightarrow \widehat{OHC} = 90°$. Vậy $OD \perp MC$

Bài 23. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với (O), Trên Ax lấy điểm M sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ tiếp tuyến MB với (O),tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D,OM cắt AB tại I,cắt cung nhỏ AB tại E. Gọi K là giao điểm của MC với (O)

a) Chứng minh: Tứ giác $OICD$ nội tiếp và tích $AB.AD$ không đổi

b) Chứng minh: Tứ giác $AOBE$ là hình thoi và $\widehat{MIK} = \widehat{OCM}$

c) Cho $R = 6cm$ tính độ dài cung nhỏ AK và chứng minh $OD \perp MC$

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác OIDC nội tiếp và tích AB.AD không đổi.

Ta có: $\widehat{OCD} = 90^0$ (CD là tiếp tuyến) (1)

* Có ΔAOB cân tại O và OM là pg của $\widehat{AOB}$

(Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$\Rightarrow AB \perp OM \Rightarrow \widehat{OID} = 90^0$ (2)

Suy ra:Tứ giác OIDC nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)

Ta có: ΔDCA vuông tại C

BC là đường cao của ΔDCA ($\widehat{CBA}$ góc nội tiếp chắn nữa đường tròn)

$\Rightarrow CA^2 = AB.AD$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

Độ dài cạnh AC không đổi.

$\Rightarrow AB.AD$ không đổi.

b) Chứng minh: Tứ giác AOBE là hình thoi và $\widehat{MIK} = \widehat{OCM}$.

Ta có: $OE = EM = \dfrac{OM}{2}$ (vì OM = 2R)

$\Rightarrow OA = OE = AE$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) (1)

Mà $AE = EB$ (vì sđ$\overset{\frown}{AE}$ = sđ$\overset{\frown}{EB}$ sđ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: Tứ giác AOBE là hình thoi. (đpcm)

Ta có: $AM^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác)

$MB^2 = MK.MC$ (vì $\Delta MKB \backsim \Delta MBC(g-g)$)

$MA = MB$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Suy ra:

$MI.MO = MK.MC \Rightarrow \dfrac{MI}{MC} = \dfrac{MK}{MO}$ và $\widehat{IMK}$ chung

$\Rightarrow \Delta MIK \sim \Delta MCO(cgc) \Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MCO}$

c) Cho R = 6cm tính độ dài cung nhỏ AK và chứng minh $OD \perp MC$.

Ta có: $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}cm$

Ta có: $CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{7}cm$

$\Rightarrow \sin\widehat{ACM} = \dfrac{AM}{CM} \Rightarrow \widehat{ACM} = 41^0 \Rightarrow \widehat{AOK} = 82^0$

$l_{\overset{\frown}{AK}} = \dfrac{3,14.6.82^0}{180^0} = 8,58(cm)$

Ta có: Tứ giác OCKI và OIDC nội tiếp (CM ở a)

Suy ra: O, I, K, D, C cùng thuộc đường tròn tâm (O')

OD là đường kính $(\widehat{OID} = \widehat{OCD} = 90^0)$

Ta có: (O) và (O') có CK là dây chung

Mà OD là đường nối tâm

Suy ra: $OD \perp CK$ (đpcm)

Bài 24. Cho $(O;R)$, đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, sao cho $AP > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) tại M. Gọi OP cắt MA tại Q. Đường vuông góc với AB tại O cắt BM tại N

a) Chứng minh tứ giác $APMO$ nội tiếp và chứng minh $OA^2 = OP.OQ$.

b) Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành và gọi PM cắt ON tại I. Chứng minh ΔPOI cân.

c) Gọi PN cắt OM tại J, AN cắt OP tại K. Chứng minh ba điểm $I; J; K$ thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $APMO$ có:

$\widehat{PAO} + \widehat{PMO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $APMO$ nội tiếp

+) Xét (O) có tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại M cắt nhau tại P

$$\Rightarrow \begin{cases} PM = PA \\ PO \text{ là tia phân giác của } \widehat{APO} \end{cases}$$

Xét ΔPAM có $PM = PA$ nên ΔPAM cân

Có PO là tia phân giác của $\widehat{APO}$

$\Rightarrow PO$ đồng thời là đường cao

$\Rightarrow PO \perp AM$ mà $PO \cap AM = \{Q\}$

$\Rightarrow PQ \perp AM$ hay $AQ \perp PM$

Xét ΔAPO vuông tại A có đường cao AQ

Áp dụng hệ thức liên quan đến đường cao $\Rightarrow OA^2 = OP.OQ$ (đpcm)

b) Xét (O) có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow AM \perp MB$

Mà $AM \perp PO(cmt) \Rightarrow PO // MB$ hay $PO // NB \Rightarrow \widehat{AOP} = \widehat{OBN}$ (so le trong)

Xét ΔAPO và ΔONB có:

$AO = OB(= R)$

$\widehat{PAO} = \widehat{NOB}(= 90^0)$

$\widehat{AOP} = \widehat{OBN}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta APO = \Delta ONB(g.c.g) \Rightarrow PO = NB$ (hai cạnh tương ứng)

Xét tứ giác $OBNP$ có:

$$\left.\begin{matrix} PO // NB \\ PO = NB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OBNP \text{ là hình bình hành}$$

Vì $OBNP$ là hình bình hành $\Rightarrow PN // OB$

Mà $ON \perp OB \Rightarrow ON \perp PN \Rightarrow \widehat{PNO} = 90^0$

Xét tứ giác $PNMO$ có: $\widehat{PNO} = \widehat{PMO} = 90^0$

Mà hai góc ở vị trí kề nhau cùng nhìn cạnh PO dưới hai góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $PNMO$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{PON} = \widehat{PMN}$ (hai góc nội tiếp cùng nhìn cạnh PN)

Mà $\widehat{PMN} = \widehat{MPO}$ $(vì\ NM\ //\ OP)$

$\Rightarrow \widehat{PON} = \widehat{MPO}$ hay $\widehat{POI} = \widehat{IPO}$

$\Rightarrow \Delta OPI$ cân tại I (đpcm)

c) Xét tứ giác $APNO$ có:

$\widehat{PAO} = \widehat{AON} = \widehat{PNO} = 90^0$

Tứ giác $APNO$ là hình chữ nhật

Mà $PO \cap AN = \{K\}$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của PO

Xét ΔOPI cân tại I

Có K là trung điểm của PO

$\Rightarrow IK$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow IK$ đồng thời là đường cao $\Rightarrow IK \perp PO \quad (1)$

Xét ΔJPO có

$$\left.\begin{array}{l} ON \perp PJ \\ PM \perp OJ \\ ON \cap PM = \{I\} \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ là trực tâm của } \Delta JPO$$

$\Rightarrow JI \perp PO \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm $I;\ J;\ K$ thẳng hàng

Bài 25. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Gọi I là giao điểm của MO với AC

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMCO, AKNH$ là tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $AM^2 = MK.MB = MO.MI$; $\widehat{KAC} = \widehat{OMB}$

c) Cho $\widehat{OMC} = 30°$, $R = 6\ cm$. Tính $S_{quat}BOC$; N là trung điểm của CH.

Hướng dẫn

a) + Xét (O) có MA là tiếp tuyến của (O) tại A (gt) $\Rightarrow MA \perp AB$ hay $\widehat{MAO} = 90°$

MC là tiếp tuyến của (O) tại C (gt) $\Rightarrow MC \perp CO$ hay $\widehat{MCO} = 90°$

Xét tứ giác $MAOC$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 90° + 90° = 180°$

Mà $\widehat{MAO}, \widehat{MCO}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $MAOC$ là tứ giác nội tiếp (đpcm).

+ Nối A với K.

Xét đường tròn (O) có ΔAKB nội tiếp (O) đường kính AB

$\Rightarrow \Delta AKB \perp K$ hay $\widehat{AKB} = 90°$ (t/c)

Xét tứ giác $AKNH$ có $\widehat{AKN} + \widehat{AHN} = 90° + 90° = 180°$

Mà $\widehat{AKN}, \widehat{AHN}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKNH$ nội tiếp (đpcm).

b) + Theo câu (a) ta có $\Delta AKB \perp K$ nên $AK \perp KB$ tại K hay $AK \perp MB$ (do $K \in MB$)

$\Rightarrow AK$ là đường cao trong ΔMAB.

+ Xét ΔMAB vuông tại A có AK là đường cao (cmt)

$\Rightarrow MA^2 = MK.MB$ (hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông). (1)

+ Ta có MA, MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A, C (gt)

$\Rightarrow MA = MC$ (t/c)

Mà $OA = OC$ ($A, C \in (O)$)

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AC (t/c) $\Rightarrow MO \perp AC$ tại I, khi đó AI là đường cao của ΔMAO

+ Xét ΔMAO vuông tại A có AI là đường cao (cmt)

$\Rightarrow MA^2 = MO.MI$ (hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA^2 = MK.MB = MO.MI$ (đpcm)

+ Xét tứ giác $MAIK$ có $\widehat{MKA} = \widehat{MIA} = 90°$

Mà $\widehat{MKA}, \widehat{MIA}$ cùng chắn cung MA

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAIK$ nội tiếp (dhnb) $\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{IMK}$ (2 góc cùng chắn cung IK)

hay $\widehat{KAC} = \widehat{OMB}$ (đpcm).

c) + Có tứ giác $MAOC$ nội tiếp (cm câu (a))

$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OMC}$ (2 góc cùng chắn cung OC), mà $\widehat{MOC} = 30°$ (gt) $\widehat{OAC} = 30°$

+ Ta có ΔOBC cân tại O (vì $OC = OB$),mà $\widehat{OBC} = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ đều $\Rightarrow \widehat{BOC} = 60°$ hay $n = 60°$

Khi đó ta có $S_{quat\ BOC} = \dfrac{\pi R^2 n}{360°} = \dfrac{\pi.6^2.60°}{360°} = 6\pi \approx 113,04\ (cm^2)$

+ Kéo dài BC cắt AM tại E .Khi đó $\Delta ACE \perp C$ ($E \in BC$)

Mà $MA = MC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$ (t/c)

Lại có, $\widehat{MAC} + \widehat{MEC} = 90°$ (vì $\Delta EAC \perp C$)

$\widehat{MCA} + \widehat{MCE} = \widehat{ACE} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MEC} \Rightarrow \Delta MCE$ cân tại M $\Rightarrow MC = ME$, mà $MA = MC$ (cmt) nên $MA = ME$ (3)

+ Xét ΔMAB có NH // AM (cùng vuông góc với AB)

Áp dụng hệ quả của định lý Talet ta có: $\dfrac{NH}{MA} = \dfrac{BN}{BM}$ (4)

+Tương tự trong ΔMBE có CN // ME ($E \in AM, N \in CH$)

Áp dụng hệ quả của định lý Talet ta có $\dfrac{CN}{ME} = \dfrac{BN}{BM}$ (5)

Từ (3) ,(4) và (5) suy ra $NH = CN$ hay N là trung điểm của CH (đpcm).

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF với nửa đường tròn (O) (F là tiếp điểm), tia AF cắt tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O) tại D (tia tiếp tuyến Bx nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O)). Gọi H là giao điểm của BF với DO; K là giao điểm thứ hai của DC với nửa đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác $BDFO$ nội tiếp; $AO.AB = AF.AD$;

b) Chứng minh $\widehat{BDH} = \widehat{BKH}$; $\widehat{DHK} = \widehat{DCO}$;

c) Cho $\widehat{KHF} = 30^0, R = 15cm.$ Tính $S_{quat}BOK$. Kẻ $OM \perp BC$ (M thuộc đoạn thẳng AD). Chứng minh $\frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$

Hướng dẫn

a) Ta có: BD, AF lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B, F (gt)

$\Rightarrow BD \perp AB$, $OF \perp AD$

$\Rightarrow \widehat{DBO} = 90°$, $\widehat{OFD} = 90°$

Xét tứ giác $BDFO$ có: $\widehat{DBO} + \widehat{OFD} = 180°$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDFO$ nội tiếp (dhnb)

Xét ΔAOF và ΔADB có:

$\widehat{BAD} chung$

$\widehat{OFA} = \widehat{OBD}$

Vậy $\Delta AOF \backsim \Delta ADB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AO}{AD}$ (tsđd) $\Rightarrow AO.AB = AF.AD$

b) Ta có $DB = DF$ (DB và DF là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D)

$\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BF

Ta lại có: $OB = OF = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BF

$\Rightarrow OD$ là đường trung trực của đoạn thẳng BF

$\Rightarrow OD \perp BF$ => $\widehat{DHB} = 90°$

Mặt khác ΔBKC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC nên $\widehat{BKC} = 90°$ hay $\widehat{DKB} = 90°$

+ Xét tứ giác $DKHB$ có: $\widehat{DKB} = \widehat{DHB} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DKHB$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{BKH}$.(hai góc cùng chắn cung BH)

*) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DKHB$ có:

$\widehat{DBH}, \widehat{DHK}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DK}$

$\Rightarrow \widehat{DBK} = \widehat{DHK}$ (hq) (1)

+) Xét (O) có:

$\widehat{DBK}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BK}$

$\widehat{BCK}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BK}$

$\Rightarrow \widehat{DBK} = \widehat{BCK}$ (hq) (2)

$\Rightarrow$ Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DHK} = \widehat{DCO}$

c) Ta có $\widehat{KHF} = 30° => \widehat{KHD} = 60° \Rightarrow \widehat{KBD} = 60° \Rightarrow \widehat{KBO} = 30°$

Xét ΔOBK có: $OB = OK = R$

$\Rightarrow \Delta OBK$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{KBO} = \widehat{BKO} = 30° => \widehat{BOK} = 120°$

$\Rightarrow S_{quat} BOK = \dfrac{\pi Rn}{360} = \dfrac{\pi.15.120}{360} = 15,7$

*) $DB \perp BC$ (gt), $OM \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow DB \,//\, OM$ (quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song)

Ta có: $\widehat{BDO} = \widehat{ODF}$ (DB và DF là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D)

$\widehat{BDO} = \widehat{DOM}$ ($DB \,//\, OM$)

$\Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{MOD}$

$\Rightarrow \Delta MDO$ cân tại M => $MD = MO$

Ta có: $DB \,//\, OM$ (cmt)

$$\frac{BD}{OM} = \frac{AD}{AM} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{AD}{AM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{AM + MD}{AM} \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = 1 + \frac{DM}{AM} \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$$

Bài 27. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF với nửa đường tròn (O) (F là tiếp điểm), tia AF cắt tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O) tại D (tia tiếp tuyến Bx nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O)). Gọi H là giao điểm của BF với DO; K là giao điểm thứ hai của DC với nửa đường tròn (O), I là trung điểm của CK.

a) Chứng minh tứ giác $BDIO$ nội tiếp; $OH.OD = \dfrac{BC^2}{4}$;

b) Chứng minh $\widehat{DHK} = \widehat{BCD}$. Kẻ $OM \perp BC$. Chứng minh $AM.DB - DM^2 = MD.AM$

c) Cho $\widehat{KHF} = 30^0, R = 15cm.$ Tính độ dài cung nhỏ BK.

Hướng dẫn

*) Chứng minh tứ giác $BDIO$ nội tiếp

Xét (O), ta có $OI \perp KC$ (vì đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó) $\Rightarrow \widehat{DIO} = 90^0$

$Dx \perp BC$ (Dx là tiếp tuyến của (O)) $\widehat{DBC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DBO} + \widehat{DIO} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ tứ giác $BDIO$ nội tiếp (vì tổng 2 góc đối bằng $180°$) (đpcm).

*) Chứng minh $OH.OD = \dfrac{BC^2}{4}$

Ta có: $BD = DF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ D thuộc đường trung trực của BF (1)

$OD = OF = R \Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của BF (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ OD là đường trung trực của BF $\Rightarrow$ $DO \perp BF$

Xét ΔDBO $\left(\widehat{DBO} = 90^0; BH \perp OD\right)$, áp dụng hệ thức lương trong tam giác ta có: $OB^2 = OH.OD$ mà

$OB = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow OB^2 = \dfrac{BC^2}{4}$ $OH.OD = \dfrac{BC^2}{4}$ (đpcm)

b) Chứng minh $AM.DB - DM^2 = MD.AM$

Ta có: $\widehat{BKC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BKD} = 90°$

$\widehat{DHB} = 90°$ (vì $DO \perp BF$) $\Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BHD}$

$\Rightarrow$ tứ giác $DKHB$ nội tiếp (vì có 2 đỉnh nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{DHK} = \widehat{DBK}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DK}$)

Ta lại có $\widehat{DBK} = \widehat{BCD}$ (cùng phụ với $\widehat{KBC}$) $\Rightarrow \widehat{DHK} = \widehat{BCD}$ (đpcm).

Ta có: $DM^2 + MD.AM = MD(DM + AM) = MD.DA$

Ta có: $\widehat{BFC}=\widehat{BHO}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CF\perp BF$ mà $OD\perp BF$ (cmt)

$\Rightarrow CF\ //\ DO$ nên theo định lý Ta let ta có: $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{AO}{OB}$ (vì $OC=OB$)

Ta lại có: $OM\perp BC; BD\perp BC\Rightarrow OM\ //\ BD$

$\Rightarrow \dfrac{AO}{BO}=\dfrac{AM}{DM}\Rightarrow \dfrac{AD}{DF}=\dfrac{AM}{DM}\Rightarrow \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AM}{DM}$ (vì $BD=DF$)

$\Rightarrow MD.DA=AM.DB\Rightarrow AM.DB=DM^2+MD.AM\Rightarrow AM.DB-DM^2=MD.AM$ (đpcm).

c) Ta có $DO\perp BF$ tại $O\Rightarrow \widehat{DHK}+\widehat{KHF}=90^\circ$ mà $\widehat{KHF}=30^\circ\Rightarrow \widehat{DHK}=60^\circ$

Ta có tứ giác $DBHK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DBK}=\widehat{DHK}=60^\circ$

Mà $\widehat{DBK}=\dfrac{sd\,\overset{\frown}{BK}}{2}\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{BK}=120^\circ$

Độ dài cung $BK=\dfrac{\overset{\frown}{BK}.2\pi R}{360^\circ}=\dfrac{120^\circ.2\pi.15}{360^\circ}=10\pi$ (cm)

Vậy độ dài cung $BK=10\pi$ (cm)

Bài 28. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB=2R$ và tiếp tuyến Ax cùng phía với với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax $(AM>AB)$ kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm) AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh: $AMCO$ nội tiếp một đường tròn; $MC^2=ME.MO$

b) Chứng minh: $\widehat{ADE}=\widehat{ACO}$; $\widehat{DOB}=\widehat{DEB}$

c) Cho $\widehat{DEM}=30^0$. Tính S_{qu^1t} AOD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $AMCO$ nội tiếp một đường tròn

Ta có AM, CM là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O

$\Rightarrow AM\perp AO, MC\perp OC$ (tính chất)

$\Rightarrow \widehat{OAM}=\widehat{MCO}=90^0$

Xét $AMCO$ có: $\widehat{OAM}=\widehat{MCO}=90^0+90^0=180^0$ (mà hai góc ở vị trí đối nhau)

Vậy tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

*) Chứng minh: $MC^2=ME.MO$

+) Xét nửa (O) có AM, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau

tại $M \Rightarrow OM$ là tia phân giác của $\widehat{AOC}$

mà ΔAOC cân tại O $(OC = OA = R)$

OM đồng thời là đường cao $OM \perp AC$ tại E

+) Xét ΔMCO vuông tại $C\left(\widehat{MCO} = 90^0, cmt\right)$,đường cao CE, có:

$MC^2 = ME.MO$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

b) *) Chứng minh: $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

+) Theo câu a ta có: ΔAOC cân tại $O \Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ (tính chất) (1)

+) Xét (O) ta có: $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ADM} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{ANB}$)

Xét $AMDC$ có: $\widehat{AEM} = \widehat{MDA} = 90^0$ $\Rightarrow$ hai đỉnh $\Rightarrow D, E$ liên tiếp cùng nhìn cạnh AM dưới một góc vuông không đổi $\Rightarrow$tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CAO}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACO}$

*) Chứng minh: $\widehat{DOB} = \widehat{DEB}$

+) Xét ΔMAB vuông tại $A\left(\widehat{MCO} = 90^0, cmt\right)$,đường cao AD, có:

$MA^2 = MD.MB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà : $MC^2 = ME.MO$ (theo câu a) và $MA = MC$ (MA, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M)

$\Rightarrow MD.MB = ME.MO \Rightarrow \dfrac{MD}{MO} = \dfrac{ME}{MB}$

Xét ΔMDE và ΔMOB, có: ΔDME ; $\dfrac{MD}{MO} = \dfrac{ME}{MB}$

$\Rightarrow \Delta MDE \backsim \Delta MOB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MOB}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{MDE} + \widehat{EDB} = 180^0$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EDB} + \widehat{MOB} = 180^0$ hay $\widehat{EDB} + \widehat{EOB} = 180^0$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $DEOB$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{DEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

c) Cho $\widehat{DEM} = 30^0$. Tính S_{qu^1t} AOD.

Theo câu trên ta có: tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{DAM} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{DAO} = 90^0 - 30^0 = 60^0$ (phụ với $\widehat{DAM} = 30^0$)

Lại có ΔAOD cân tại $O\left(OA = OD = R\right) \Rightarrow \widehat{DOA} = 180^0 - 60^0.2 = 60^0$

$\Rightarrow S_{quatAOD} = \dfrac{\pi R^2.n}{360^0} = \dfrac{\pi.12^2.60^0}{360^0} = 24\pi$ (đơn vị diện tích)

Bài 29. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > AB$, MB cắt đường tròn (O) tại N $(N \neq B)$. Qua trung điểm P của đoạn AM dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt BM tại Q. OQ cắt AN tại E.

a) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O), tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn và $OE.OQ = \dfrac{AB^2}{4}$

c) Gọi C là điểm trên cung lớn NB của đường tròn (O) $(C \neq N; C \neq B)$. Chứng minh: $\widehat{BCN} = \widehat{OQN}$; Cho $\widehat{AMB} = 30^0, R = 12cm$. Tính $S_{quatAON}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O),

Xét (O) ta có: $\widehat{ANB} = 90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{ANB}$)

$\Rightarrow \Delta ANM$ vuông tại N có NP là trung tuyến (P là Trung điểm của AM ,gt)

$\Rightarrow NP = PA = PM = \dfrac{AM}{2}$ (tính chất)

Xét ΔAPO và ΔNPO:

$PA = NP; OA = ON (= R)$; OP : cạnh chung

$\Rightarrow \Delta APO = \Delta NOP$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{ANO} = 90^0$

$\Rightarrow ON \perp NP$ tại N mà $N \in (O)$

Vậy PN là tiếp tuyến của đường tròn (O)

*) Chứng minh tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn.

Xét $APNO$ có: $\widehat{PAO} + \widehat{PNO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $APNO$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

b) *) Chứng minh tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn.

+) Xét ΔAMB có:

P là trung điểm của AM ; $PQ//AB(\perp AB)$ $\Rightarrow Q$ là trung điểm của MB

Mà O là trung điểm của $AB \Rightarrow QO$ là đường trung bình

$\Rightarrow QO//AM \Rightarrow OQ \perp AB \Rightarrow \widehat{AOQ} = 90^0$

$\Rightarrow APOQO$ là hình chữ nhật

Vậy tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn.

*) Chứng minh: $OE.OQ = \dfrac{AB^2}{4}$

Gọi $\{H\} = AN \cap PO$

+) Xét (O) có AP, PN là hai tiếp tuyến cắt nhau

tại $P \Rightarrow OP$ là tia phân giác của $\widehat{APN}$

mà ΔAON cân tại O

OP đồng thời là đường cao $OP \perp AN$ tại H

+) Xét ΔAOP vuông tại A ,đường cao AH , có:

$$AO^2 = OH.OP = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} \quad (1)$$

+) Lại có $\Delta OHE \backsim OQP(g.g)$

$$\frac{OH}{OQ} = \frac{OE}{OP} \Rightarrow OH.OP = OE.OQ \quad (2)$$

Từ (1) và(2) ta có: $OE.OQ = \dfrac{AB^2}{4}$

c) Chứng minh: $\widehat{BCN} = \widehat{OQN}$;

Ta có:

+) Tứ giác $APNO$ nội tiếp đường trơn (chứng minh trên)

+) Tứ giác $APQN$ nội tiếp đường trơn (chứng minh trên)

$\Rightarrow A, P, Q, N, O$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{OQN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ON) hay $\widehat{BAN} = \widehat{OQN}$ (3)

Lại có: Trong (O): $\widehat{BAN} = \widehat{BCN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BN) (4)

Từ (3) và (4) ta có: $\widehat{BCN} = \widehat{OQN}$

*) Tính $S_{quatAON}$

Xét ΔAMB vuông tại A có: $\widehat{AMB} + \widehat{ABM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ABM} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

Xét ΔANB vuông tại N có: $\widehat{NAB}+\widehat{ABN}=90^0 \Rightarrow \widehat{ABM}=90^0-60^0=30^0$

Xét ΔAON cân tại O có: $\widehat{AON}=180^0-2\widehat{OAN}=180^0-2.30^0=120^0$

$\Rightarrow S_{quatAON}=\dfrac{\pi R^2.n}{360^0}=\dfrac{\pi.12^2.120^0}{360^0}=48\pi$ (đơn vị diện tích)

Bài 30. Cho đường tròn (O), từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B,C là các tiếp điểm)

OA cắt BC tại E.

1. Chứng minh:tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $BC\perp OA$.

2. Chứng minh: $OB^2=OE.OA; BA.BE=AE.BO$.

3. Gọi I là trung điểm của BE, đường thẳng qua I và vuông góc với OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F. Chứng minh I là trung điểm của FD.

4. Chứng minh: F là trung điểm của AC và chứng minh CI là phân giác của góc MCH.

Hướng dẫn

1) Xét (O) có AB và AC lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B và C (gt)

$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{ABO}=90^0\\ \widehat{ACO}=90^0\end{cases}$ (t.c.vg)

Xét tứ giác $ABOC$ có : $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180°\Longrightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Có AB ; AC lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B và C (gt)

$\Rightarrow AB=AC$ (t.c 2 tiếp tuyến giao nhau) ; mà $OC=OB\ (=R)$ (t.c điểm thuộc đ.tròn)

$\Longrightarrow OA$ là trung trực của BC (tập hợp điểm cách đều 2 mút đoạn thẳng)

$\Longrightarrow OA\perp BC$

2) Xét ΔOBA ($\widehat{ABO}=90°$) có $OA\perp BC$ tại E (cmt)

$\Rightarrow OB^2=OE.OA$ (HTL Δ vuông)

Có $\widehat{ABO}=90^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EBO}+\widehat{ABE}=90^\circ$

Có $AO\perp BC$ tại E (cmt) $\Rightarrow \widehat{BEO}=90^\circ$ (t.c vg) $\Rightarrow$ ΔOEB vuông tại E (đ.n)

$\Rightarrow \widehat{EBO}+\widehat{BOE}=90^\circ$ (T.C 2 góc nhọn trong Δ vuông). Mà $\widehat{EBO}+\widehat{ABE}=90^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{BOE}$

Xét ΔOBE $\left(\hat{E}=90^\circ\right)$ và ΔBAE $\left(\hat{E}=90^\circ\right)$ có: $\widehat{ABE}=\widehat{BOE}$

$\Rightarrow \Delta OBE \backsim \Delta BAE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OB}{BA}=\dfrac{BE}{AE}$ (cạnh tỉ lệ)

$\Rightarrow BA.BE=AE.BO$ (đ.p.cm)

3) Có $OI\perp FD$ tại I (gt) $\Rightarrow \widehat{DIO}=\widehat{FIO}=90^\circ$ (t.c vgoc)

Có $OB\perp AB$ tại B (cmt) mà $D\in AB$ (gt) $\Rightarrow$ $OB\in AD$ tại B $\Rightarrow$ $\widehat{DBO}=90^\circ$ (t.c vg)

Có $OC\perp AC$ tại C (cmt) $\Rightarrow$ $\widehat{OCA}=90^\circ$ (t.c vg) , mà $F\in AC$ (gt) $\Rightarrow$ $\widehat{OCF}=90^\circ$

Có $\widehat{DBO}=\widehat{DIO}=90^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow B$ và I cùng thuộc đường tròn đ.kính OD (cung chứa góc 90°)

Xét đường tròn đường kính OD có $\widehat{IDO}=\widehat{IBO}$ (2 gnt cùng chắn cung OI) (1)

Có: $\widehat{FIO}=\widehat{OCF}=90^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow$ C và I cùng thuộc đường tròn đ.kính OF (cung chứa góc 90°)

Xét đường tròn đường kính OF có $\widehat{OFI}=\widehat{OCI}$ (2 gnt cùng chắn cung OI) (2)

Có $OB = OC$ (cmt) $\Rightarrow$ ΔOBC cân tại O (đ.n) $\Rightarrow \widehat{OBI}=\widehat{OCI}$ (t.c Δ cân) (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{ODI}=\widehat{OFI}$ (b.cầu)

$\Rightarrow \Delta ODF$ cân tại O (dhnb)

Có $OI\perp DF$ tại I (gt) $\Rightarrow OI$ là đường cao của ΔODF cân tại O (đ.n)

$\Rightarrow$ OI là trung tuyến ΔODF (t.c tam giác cân)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của DF (t.c trung tuyến)

4) Có I là trung điểm DF (cmt) $\Rightarrow ID = IF$ (t.c trung điểm)

Có I là trung điểm của BE (gt) $\Rightarrow IB = IE$ (t.c trung điểm)

Có OA là trung trực của BC (cmt) mà $OA\cap BC=E$ (gt)

$\Rightarrow$ E là trung điểm của BC (t.c trung trực)

- Xét ΔDBI và ΔFEI có:

$ID=IF$ (cmt)

$\widehat{BID}=\widehat{EIF}$ $(đđ)$ $\Rightarrow \Delta DBI = \Delta FEI$ (c.g.c)

$IB=IE$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{EFI}$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow BD//EF$ (dhnb 2 đt song song) , mà thẳng D; B; A thẳng hàng

$\Rightarrow EF//AB$

- Xét ΔABC có :

$\left.\begin{array}{l} E \text{ là trung diem cua BC } (cmt) \\ AB//EF \ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow F$ là trung điểm của AC (đ.lý đường TB)

Câu 4 ý 2 , trong đề bài không có điểm M và H

Bài 31. Cho (O), gọi I là trung điểm của dây AB. Qua I kẻ đường kính MN (M thuộc cung nhỏ AB), P là điểm bất kì trên tia đối của tia BA sao cho góc ANP khác $90°$. Nối PN cắt (O) tại E, ME cắt AB tại D.

a) Chứng minh các điểm D, I, N, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Chứng minh : $MD.ME = MI.MN$

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với ME, đường thẳng đó cắt (O) tại F. Chứng minh BE vuông góc NF.

d) Tìm vị trí của P để D là trung điểm BI

Hướng dẫn

a/ Xét đường tròn (O):

Đường kính MN đi qua I là trung điểm dây $AB \Rightarrow NM \perp AB$ (liên hệ đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{NID} = 90°$

$\widehat{NEM} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $NEDI$: $\widehat{NID} + \widehat{NEM} = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $NEDI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ 4 điểm D, I, N, E cùng thuộc 1 đường tròn

b/ Xét ΔMID và ΔMEN

$\widehat{MID}=\widehat{MEN}=90°$

$\widehat{IMD}$ chung $\Rightarrow \Delta MID \sim \Delta MEN\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MI}{ME}=\dfrac{MD}{MN} \Rightarrow MI.MN = MD.ME$

c/ Gọi K là giao điểm của NF và BE

Có : I là trung điểm dây AB, MN là đường kính

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{MEB}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Có $AF//ME \Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{FE}$

$\Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{FNE}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Mà $\widehat{MEB}=\widehat{ANM}$

$\Rightarrow \widehat{MEB}=\widehat{FNE}$

mà $\widehat{NEM}=90° \Rightarrow \widehat{NEK}+\widehat{MEB}=90°$

$\Rightarrow \widehat{NEK}+\widehat{FNE}=90°$

$\Rightarrow \widehat{NKE}=90° \Rightarrow NF \perp BE$

d/ Ta có: $\Delta MID \sim \Delta PIN\,(gg)$

$\Rightarrow \dfrac{ID}{IM}=\dfrac{IN}{IP} \Rightarrow ID.IP = IM.IN$

$\Delta IMB \sim \Delta IBN\,(gg)$

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IB}=\dfrac{IB}{IN} \Rightarrow IB^2 = IM.IN \Rightarrow ID.IP = IB^2$

D là trung điểm IB

$\Leftrightarrow ID=\dfrac{IB}{2} \Leftrightarrow IB=\dfrac{IP}{2} \Leftrightarrow$ B là trung điểm $IP \Leftrightarrow P$ đối xứng với I qua B

Bài 32. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B và C. Gọi H là giao điểm của AO và BC, kẻ đường kính BD của đường tròn (O), hạ $CM \perp BD$ tại M. Tia AO cắt (O) tại E, F.

a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $\Delta CMD \sim \Delta ACO$

b) Chứng minh: BF là phân giác ngoài đỉnh B của ΔABH và $AF.HE = AE.HF$

c) Gọi AD cắt CM tại K. Chứng minh: K là trung điểm của CM và cho $\widehat{DCM}=30°$, $AH=4$ cm. Tính $S_{\Delta BOC}$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $\Delta CMD \sim \Delta ACO$

* Có: AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) suy ra $\begin{cases} AB \perp BO \\ AC \perp CO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABO} = 90^\circ \\ \widehat{ACO} = 90^\circ \end{cases}$

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

* Có: $\begin{cases} \widehat{AOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC} \\ \widehat{CDM} = \widehat{CDB} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{CDM}$

Xét ΔCMD và ΔACO có: $\widehat{AOC} = \widehat{CDM}$ (cmt) và $\widehat{ACO} = \widehat{CMD} (= 90^\circ)$

Suy ra $\Delta CMD \sim \Delta ACO$ (g-g)

*b) * Chứng minh: BF là phân giác ngoài đỉnh B của ΔABH*

Có: $\widehat{ABE} = \widehat{BCE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BE) (1)

Có: AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow AB = AC$; $OB = OC\ (= R)$

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC mà $E \in OA \Rightarrow EB = EC$

$\Rightarrow \Delta EBC$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{CBE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ $\Rightarrow$ BE là tia phân giác của góc B trong ΔABH

mà EF là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{EBF} = 90° \Rightarrow BF \perp BE$

$\Rightarrow BF$ là phân giác ngoài đỉnh B của ΔABH

* *Chứng minh* $AF.HE = AE.HF$

Xét ΔABO vuông tại B đường cao BH (vì AO là đường trung trực của BC), áp dụng hệ thức lượng có:

$OB^2 = OH.OA \Rightarrow R^2 = OH.(AE + EO) \Rightarrow R^2 = OH.(AE + R)$ (*)

Ta có: $AF.HE = AE.HF \Leftrightarrow (AE + EF).(OE - OH) = AE.(OF + OH)$

$\Leftrightarrow (AE + 2R).(R - OH) = AE.(R + OH) \Leftrightarrow AE.R - AE.OH + 2R^2 - 2R.OH = AE.R + AE.OH$

$2R^2 = 2R.OH + 2AE.OH \Leftrightarrow R^2 = OH(AE + R)$ (đúng theo (*))

c) Tính $S_{\Delta BOC}$.

Có: $\Delta CMD \backsim \Delta ACO$ (chứng minh câu a) $\widehat{OAC} = \widehat{DCM} = 30°$

Xét ΔACH vuông tại H có:

$CH = AH.\tan\widehat{OAH} = AH.\tan\widehat{HAC} = 4.\tan 30° = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 2CH = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$

Xét ΔACO vuông tại C đường cao CH, áp dụng hệ thức lượng có:

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \dfrac{CH^2}{AH} = \dfrac{16}{3.4} = \dfrac{4}{3}$

Suy ra: $S_{\Delta BOC} = \dfrac{1}{2}OH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}.\dfrac{8}{\sqrt{3}} = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ (đvdt)

Bài 33. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B, C (O không thuộc (d), B nằm giữa A và C, AC cắt OM). Gọi H là trung điểm của BC, AO cắt MN tại K.

a) Chứng minh:5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn và $OA.OK = R^2$

b) Chứng minh: HA là phân giác của $\widehat{MHN}$; lấy điểm E trên MN sao cho $BE//AM$. Chứng minh $HE//CM$.

c) Cho $\widehat{AHM}=60^0, R=6cm$. Tính S_{quat} MON.

Hướng dẫn

a) Ta có $\widehat{AMO}=\widehat{ANO}=90°$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn)

Xét tứ giác $AMNO$ có $\widehat{AMO}+\widehat{ANO}=180°$ nên $AMNO$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (1)

Vì H là trung điểm BC nên $OH\perp BC\Rightarrow\widehat{AHO}=90°$

Xét tứ giác $ANOH$ có $\widehat{AHO}+\widehat{ANO}=180°\Rightarrow$ $ANOH$ nội tiếp đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Có $\begin{cases}AM=AN\\OM=ON(=R)\end{cases}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra AO là trung trực của $MN\Rightarrow AO\perp MN$. Xét tam giác AMO vuông tại M có MK là đường cao, áp dụng hệ thức lượng ta được $OK.OA=OM^2=R^2$ (đpcm)

b) Xét đường tròn đường kính OA đi qua 5 điểm A, M, H, O, N có.

$\widehat{MHA}=\widehat{MOA}$ (góc nội tiếp chắn cung MA)

$\widehat{NHA}=\widehat{NOA}$ (góc nội tiếp chắn cung NA)

Mà $\widehat{MOA}=\widehat{NOA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó $\widehat{NHA}=\widehat{MHA}$ hay HA là phân giác của $\widehat{MHN}$

- Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có $\widehat{AMN}=\widehat{AHN}$ (góc nội tiếp chắn cung AN)

Mà $\widehat{AMN}=\widehat{BEN}$ (đồng vị) suy ra $\widehat{BEN}=\widehat{BHN}$ nên tứ giác $BEHN$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{EHB}=\widehat{ENB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Lại có $\widehat{ENB}=\widehat{MCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Nên $\widehat{EHB}=\widehat{MCB}$ Mà hai góc này đồng vị với nhau do đó $HE//CM$.

c) Từ $\widehat{AHM}=60°\Rightarrow\widehat{AOM}=60°\Rightarrow\widehat{MON}=120°$

Áp dụng công thức tính diện tích hình quạt ta được.

$$S_{quat\,OMN} = \frac{\pi.R^2.120}{360} = \frac{3,14.36}{3} = 37,68\ (\ cm^2)$$

Vậy diện tích hình quạt là 37,68 (cm^2)

Bài 34. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm)

vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O, H là trung điểm EF. Tiếp tuyến tại E cắt AM tại B, cắt AN tại C.

a) Chứng minh các điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn và tính chu vi ΔABC theo AM.

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt AN tại S. Chứng minh $SO = SA$ và gọi K là giao điểm của MH với (O). Chứng minh $NK // AF$.

c) Chứng minh: $AE.AF = AM^2$

Hướng dẫn

a) Ta có: $AM \perp OM$ (Do AM là tiếp tuyến của đường tròn (O)) $\Rightarrow \Delta AMO$ vuông tại M

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OA (1)

$AN \perp ON$ (Do AN là tiếp tuyến của đường tròn (O)) $\Rightarrow \Delta ANO$ vuông tại N

$\Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính OA(2)

H là trung điểm của dây cung EF nên $OH \perp EF$ (mối liên hệ giữa bán kính và dây cung

$\Rightarrow OH \perp HA \Rightarrow \Delta OAH$ vuông tại H.

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OA(3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra O, A, H, M, N cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

Ta có CN là tiếp tuyến của đường tròn (O); CE là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $CE = CN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Chứng minh tương tự ta có $BE = BM$.

Chu vi tam giác ABC là: $AB+AC+BC=AM+AN-CN-BM+BE+CE=AM+AN=2AM$

b) Ta có: $\widehat{NOA}+\widehat{AOS}=90^\circ(gt)$; $\widehat{NAO}+\widehat{NOA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{NAO}=\widehat{AOS}$

mà $\widehat{NAO}=\widehat{OAC}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AOS}=\widehat{SAO}$

$\Rightarrow \Delta SAO$ cân tại $S \Rightarrow SO=SA$

+) Xét tam giác OMN có $OM=ON$. Suy ra tam giác OMN cân tại O.

$\Rightarrow \widehat{OMN}=\widehat{ONM}$

Ta có:

$\widehat{OMA}=\widehat{OMN}+\widehat{AMN}=90^\circ$

$\widehat{ONA}=\widehat{ONM}+\widehat{ANM}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{ANM}$

Xét đường tròn (O), ta thấy $\widehat{ANM}$ là góc giữa tiếp tuyến AN và dây cung MN.

$\widehat{MKN}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MN}$.

Suy ra góc $\widehat{MKN}=\widehat{ANM}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MN}$) (*)

+) Ta có: $\widehat{FHK}=\widehat{AHM}$ (hai góc đối đỉnh)

Lại có: O,A,H,M,N cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

Nên $\widehat{AHM}=\widehat{ANM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Suy ra, $\widehat{FHK}=\widehat{AHM}=\widehat{ANM}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $\widehat{MKN}=\widehat{FHK}$

Suy ra $KN//FE$ (đpcm).

c)Xét đường tròn (O), ta thấy góc $\widehat{AME}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến AM và dây cung ME.

$\widehat{EFM}$ là góc nội tiếp chắn cung ME.

$\Rightarrow \widehat{EFM}=\widehat{AME}$

Xét ΔAME và ΔAFM có:

Góc $\widehat{A}$ chung.

$\widehat{EFM}=\widehat{AME}$ (cmt)

Suy ra $\Delta AMEá$ $\Delta AFM(g-g)$.

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AM}=\dfrac{AM}{AF}$

$\Rightarrow AE.AF=AM^2$ (đpcm).

Bài 35. Cho (O) và điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến của (O) tại B,C. Gọi H là giao điểm của OA và BC, kẻ đường kính BD của (O), hạ $CM \perp BD$ tại M. Tia AO cắt (O) tại E,F.

a) Chứng minh tứ giác $CHOM$ nội tiếp và $\Delta AHB \sim \Delta CMD$

b) Chứng minh : BF là phân giác $\widehat{ABH}$ và $AF.HE = AE.HF$

c) Gọi AD cắt CM tại K. Chứng minh K là trung điểm của CM và cho $AB = 2R = 10cm$. Tính S giới hạn bởi cung BC và đoạn AB, AC

Hướng dẫn

a) Xét (O) có AB, AC là hai tiếp tuyến (gt)

= > AB = AC (t/ c hai tiếp tuyến)=> A thuộc đường trung trực của BC

Có OA = OB , nên O thuộc đường trung trực của BC

= > AO là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow \widehat{CHO} = \widehat{BHA} = 90^0$

$CM \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^0$

+) Xét tứ giác HOMC có

$\widehat{CMO} = \widehat{CHO} = 90^0$

= > Xét tứ giác HOMC nội tiếp (vì có tổng 2 góc đối $\widehat{CMO} + \widehat{CHO} = 180^0$)

*) Xét (O) có $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến cùng chắn cung BC)

Hay $\widehat{ABH} = \widehat{MDC}$ $(H \in BC; M \in BD)$

Xét ΔAHB và ΔCMD có :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABH} = \widehat{MDC} \quad (cmt)\\ \widehat{CMD} = \widehat{BHA} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta CMD\,(g.g)$$

b) Xét (O) $OA \perp BC$ (cmt) , mà $OA \cap (O) = \{F\}$ => F là trung điểm của cung BC $\Rightarrow \overset{\frown}{FB} = \overset{\frown}{FC}$

Xét (O) có $\widehat{ABF} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{FB}$ (Góc tạo bởi tiếp tuyến AB và dây BF)

$\widehat{CBF} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{FC}$ (góc nội tiếp chắn cung FC), mà $\overset{\frown}{FB} = \overset{\frown}{FC}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{CBF}$ => BF là phân giác của góc BAH

+) Xét ΔABH có BF là phân giác của $\widehat{B} \Rightarrow \dfrac{FA}{FH} = \dfrac{AB}{AH}(tc)$ (1)

Có $BE \perp BF$ => BE là phân giác ngoài tại đỉnh B của ΔABH $\Rightarrow \dfrac{EA}{EH} = \dfrac{AB}{AH}(tc)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{FA}{FH} = \dfrac{EA}{EH} \Rightarrow FA.EH = FH.AE$

c) Gọi $AD \cap BC = \{N\}$

Chứng minh CB là phân giác của góc ACM hay CN là phân giác của góc ACK

Xét ΔACK có CN là phân giác của góc ACK $\Rightarrow \dfrac{NK}{AN} = \dfrac{CK}{AC}$ (3)

Có $CN \perp CD$ => CD là phân giác ngoài của ΔACK tại đỉnh C $\Rightarrow \dfrac{DK}{DN} = \dfrac{CK}{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{NK}{AN} = \dfrac{DK}{DN}$ (5)

Có $\Delta DMK \sim \Delta$DBA (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KM}{AB} = \dfrac{DK}{DA}$ (6)

$\Delta CKN \sim \Delta$BAN$(g.g)$ $\Rightarrow \dfrac{KC}{AB} = \dfrac{NK}{NA}$ (7)

Từ (5); (6) và (7) $\Rightarrow \dfrac{KM}{AB} = \dfrac{CK}{AB} \Rightarrow KM = KC$ => K là trung điểm của CM

3) Xét ΔOBC vuông ở B có BF là đường cao

Ta có $OB^2 = OF.OC \Rightarrow OF = \dfrac{OB^2}{OC} = \dfrac{R^2}{2R} = \dfrac{R}{2} \Rightarrow CF = CO - OF = 2R - \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$

$\Rightarrow AB = 2AF = 2.\sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = R\sqrt{3}$

Tứ giác OACB có $OC \perp AB$ nên $S_{OACB} = \dfrac{1}{2}AB.OC = R^2\sqrt{3}$

Xét ΔOAF vuông ở F có $\sin\widehat{AOF} = \dfrac{AF}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AOF} = 60^o \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^o$

Ta có $S_{quat\ OAB} = \dfrac{\pi R^2 120^o}{360^o} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

Vậy diện tích của ΔABC nằm ngoài đường tròn (O;R) là

$$S_{OACB} - S_{quat\ OAB} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = R^2\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} \text{ (đvdt).}$$

Bài 36. Cho $(O;R)$ và dây CD cố định. Gọi H là trung điểm của CD. Gọi S là một điểm trên tia đối của tia DC. Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB tới (O) (với CD cắt bán kính OA). Đường thẳng AB cắt SO, OH tại E, F.

a) Chứng minh: Tứ giác $SBOH$ nội tiếp và $OE.OS = R^2$

b) Chứng minh: $SE.SO = SC.SD$ và $\widehat{DEC} = \widehat{DOC}$

c) Chứng minh:Khi S di chuyển trên tia đối của DC thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Vì SB là tiếp tuyến của (O) nên $SB \perp OB \Rightarrow \widehat{OBS} = 90^0$

Vì H là trung điểm CD suy ra $OH \perp CD \Rightarrow \widehat{OHD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OHS} = 90^0$

Xét tứ giác SBOH có $\widehat{OHS} + \widehat{OBS} = 180^0$ và $\widehat{OHS}$, $\widehat{OBS}$ đối nhau nên tứ giác SBOH nội tiếp .

Vì SA,SB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại S của (O) nên suy ra $AB \perp OS$ tại E

Xét tam giác OBS vuông tại B,đường cao BE có $OE.OS = OB^2$ (Hệ thức lượng)

Hay $OE.OS = R^2$

b) Xét tam giác SAD và SCA có góc S chung, $\widehat{SAD} = \widehat{SCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD) suy ra $\Delta SAD \sim \Delta SCA$ (g-g)

suy ra $\frac{SA}{SC} = \frac{SD}{SA} \Rightarrow SC.SD = SA^2$ (1)

Xét tam giác OBS vuông tại B,đường cao BE có $SE.SO = SB^2$ (Hệ thức lượng) mà $SA = SB(t/c)$

Suy ra $SE.SO = SA^2$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $SE.SO = SC.SD$

+Từ $SE.SO = SC.SD \Rightarrow \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{SD}{SO}$

Xét tam giác SDE và SOC có góc S chung và $\dfrac{SE}{SC} = \dfrac{SD}{SO}$ (cmt) suy ra $\Delta SDE \backsim \Delta SOC$ (c-g-c)

Suy ra $\widehat{SED} = \widehat{SCO}$

Xét tứ giác $DEOC$ có $\widehat{SED} = \widehat{SCO}$ và $\widehat{SED}$, $\widehat{SCO}$ là 2 góc ở vị trí góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối nên tứ giác $DEOC$ nội tiếp suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{DOC}$ (2góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

c) Vì $\Delta OEF \backsim \Delta OHS$ (g-g) nên $\dfrac{OE}{OH} = \dfrac{OF}{OS} \Rightarrow OH.OF = OE.OS = R^2$ không đổi. mà O,H cố định suy ra F cố định và thuộc AB.

Vậy khi S thay đổi thì AB luôn đi qua điểm cố định là F.

Bài 37. Cho đường tròn (O) và một dây BC cố định không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy một điểm A bất kì. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN tới (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt các đường thẳng AO và BC lần lượt ở H và K. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $AH.AO = AB.AC = AM^2$

b) Chứng minh tứ giác $BHOC$ nội tiếp

c) Vẽ dây MP song song với BC. Chứng minh N, I, P thẳng hàng.

d) Khi A di động trên tia đối của tia BC, chứng minh trọng tâm tam giác MBC chạy trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) * Xét (O) có:

+) AM, AN là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow$ OM $\perp$ AM; ON $\perp$ AN; AM = AN.

Nên $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0$.

+) $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

* AM = AN (cmt) nên A thuộc đường trung trực của MN.

OM = ON (Bán kính của (O)) nên O thuộc đường trung trực của MN.

Do đó AO là đường trung trực của MN $\Rightarrow$ AO $\perp$ MN tại H.

* Xét ΔAMO vuông tại M có MH $\perp$ AO tại H có $AM^2 = AH.AO$ (Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông) (1).

* Xét ΔAMB và ΔACM có:

$\widehat{MAB}$ chung ; $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$

Nên $\Delta AMB \backsim \Delta ACM$ (gg)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{AM}$ (Các cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AM^2 = AB.AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AH.AO = AB.AC = AM^2$

b) Ta có $AH.AO = AB.AC$ (cmt)

Nên $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AO}$

Xét ΔABH và ΔAOC có

$\widehat{OAC}$ chung

$\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AO}$ (cmt)

Nên $\Delta ABH \backsim \Delta AOC$ (cgc)

$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{ACO}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AHB} + \widehat{BHO} = 180^0$ (Hai góc kề bù)

Nên $\widehat{BCO} + \widehat{BHO} = 180^0$

Xét tứ giác BHOC có:

$\widehat{BCO} + \widehat{BHO} = 180^0$

Mà $\widehat{BCO}$ và $\widehat{BHO}$ là hai góc đối nhau

Nên tứ giác BHOC là tứ giác nội tiếp (DHNB).

c) Xét (O):

BC là dây cung

I là trung điểm của BC

OI là một phần đường kính

Nên OI $\perp$ BC tại I $\Rightarrow \widehat{OIA} = 90^0$

Mặt khác: $\widehat{ANO} = 90^0$ (AN là tiếp tuyến của (O) tại N)

Xét tứ giác AOIN có:

$\widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^0$

Mà N, I là hai đỉnh kề nhau

Nên tứ giác AOIN là tứ giác nội tiếp (DHNB)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác AOIN có:

$\widehat{AON} = \widehat{AIN}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$)

Xét (O) có:

$\widehat{MPN} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MN}$ (Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MN}$)

$\widehat{AON} =$ sđ $\overset{\frown}{FN} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MN}$

$\Rightarrow \widehat{MPN} = \widehat{AON}$

Mà $\widehat{AON} = \widehat{AIN}$ do đó $\widehat{MPN} = \widehat{AIN}$

Lại có MP // BC, I là trung điểm của BC.

$\Rightarrow \widehat{MPI} + \widehat{PIA} = 180^0$

Nên $\widehat{AIN} + \widehat{AIP} = 180^0$ do đó N, I, P thẳng hàng.

d) Gọi G là trọng tâm của $\Delta MBC \Rightarrow IG = \frac{1}{3}IM \Rightarrow \frac{IG}{IM} = \frac{1}{3}$

Trên OI lấy điểm J sao cho $\frac{IJ}{OI} = \frac{1}{3}$

Ta có BC cố định nên trung điểm I cố định, O cố định và $\frac{IJ}{OI} = \frac{1}{3}$ nên J cố định.

Xét ΔIMO có: $\frac{IG}{IM} = \frac{IJ}{IO}\left(= \frac{1}{3}\right)$

Nên JG//MO(Định lý Talet đảo)

Từ đó ta có $\frac{GJ}{MO} = \frac{IJ}{IO} = \frac{1}{3}$

Mà MO là bán kính R của đường tròn (O).

$\Rightarrow GJ = \frac{1}{3}R$ (không đổi)

Vậy khi A di động trên tia đối của tia BC thì trọng tâm G của tam giác MBC thuộc đường tròn tâm J bán kính $\frac{R}{3}$ cố định.

Bài 38. Cho $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài (O). Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ hai tiếp tuyến ME, MF. FE cắt OA tại B.

a) Chứng minh: 5 điểm M, E, O, F, A cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi EF cắt OM tại H. Chứng minh $OM \perp EF$ và $OA.OB = OH.OM$.

c) Gọi MO cắt (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMEF và tìm vị trí điểm M để diện tích ΔBHO lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Vì ME là tiếp tuyến của (O) tại E

$\Rightarrow ME \perp OE$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MEO} = 90°$

Tương tự, $\widehat{MFO} = 90°$

Xét tứ giác $MEOF$ có $\widehat{MEO} + \widehat{MFO} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $MEOF$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ 4 điểm M, E, O, F cùng thuộc một đường tròn (1)

Vì $d \perp OA \Rightarrow \widehat{MAO} = 90°$

Xét tứ giác $AMEO$ có $\widehat{MEO} + \widehat{MAO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMEO$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ 4 điểm A, M, E, O cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm M, E, O, F, A cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì ME, MF là lần lượt là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow ME = MF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow M$ nằm trên đường trung trực của EF

Vì $OE = OF = R$ nên O nằm trên đường trung trực của EF

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của $EF \Rightarrow MO \perp EF$

Vì $MO \perp EF$ tại H $\Rightarrow \widehat{OHB} = 90°$

Xét ΔOAM và ΔOHB có

$\widehat{OAM} = \widehat{OHB} (= 90°)$

$\widehat{MOA}$ chung

Do đó $\Delta OAM \backsim \Delta OHB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{OM}{OB}$ (các cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow OA.OB = OM.OH$.

c) Vì ME, MF là lần lượt là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của $\widehat{EMF}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Vì $I \in MO$ nên MI là tia phân giác của $\widehat{EMF}$ (3)

Vì $I \in MO$ và MO là đường trung trực của EF nên $IE = IF$

Xét ΔIEF có $IE = IF$

$\Rightarrow \Delta IEF$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{IFE}$ (tính chất tam giác cân)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MEOF$ có $\widehat{IEF} = \widehat{MFI}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{IF}$)

Do đó $\widehat{IFE} = \widehat{MFI} \left(= \widehat{IEF}\right)$

$\Rightarrow FI$ là tia phân giác của $\widehat{MFE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMEF.

Kẻ $HP \perp OB$, gọi J là trung điểm của OB

Ta có $S_{BHO} = \dfrac{1}{2} OB.HP$

Ta có: $OA.OB = OM.OH$.

Mà $OM.OH = OF^2$

Do đó $OA.OB = OF^2$ không đổi $\Rightarrow$ OB không đổi

Vì OB không đổi nên S_{BHO} lớn nhất khi HP lớn nhất

Mà $HP \le HJ$

Dấu "=" xảy ra $P \equiv J$

Khi đó HJ là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta OHB$ vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{HOB} = 45°$ $\Rightarrow \widehat{MOA} = 45°$

Xét ΔMOA vuông tại A có $\widehat{MOA} = 45° \Rightarrow \Delta MOA$ vuông cân tại A $\Rightarrow MA = AO$

Vậy S_{BHO} lớn nhất khi $MA = AO$.

Bài 39. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AM, AN với (O) $(M, N \in (O))$, MN cắt AO tại Q.

a) Chứng minh:Tứ giác $AMON$ nội tiếp và $OQ.OA = R^2$

b) Vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O. Kẻ $NK // AF$ cắt (O) tại K, MK cắt FE tại H.

Chứng minh $AE.AF = AM^2$ và $HE = HF$.

c) Tiếp tuyến tại E của (O) cắt AM tại B, AN tại C. Giả sử A và (O) cố định, cát tuyến AEF thay đổi. Chứng minh chu vi ΔABC không đổi. Tính giá trị không đổi ấy theo AM.

Hướng dẫn

a) Ta có $OM \perp AM$ (Theo tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OMA} = 90^0$

$ON \perp AN$ (Theo tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{ONA} = 90^0$

Tứ giác AMON có $\widehat{OMA} + \widehat{ONA} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác AMON nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

Ta có $OM = ON$ (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của MN

$AM = AN$ (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ A thuộc đường trung trực của MN

$\Rightarrow$OA là đường trung trực của MN$\Rightarrow OA \perp MN$

ΔOMA vuông tại M có $MQ \perp OA$ theo hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có

$OM^2 = OA.OQ \Rightarrow OA.OQ = R^2$

b) Xét ΔAME và ΔAFM có : $\widehat{MAE}$ chung; $\widehat{AFM} = \widehat{AME}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung ME)

$\Rightarrow \Delta AME$ đồng dạng $\Delta AFM \Rightarrow \dfrac{AM}{AF} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.\text{AF}$

Do KN//AF $\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{MKN}$ (Hai góc đồng vị)

mà $\widehat{MKN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN)

$\Rightarrow \widehat{AHM} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ (1)

Ta có tia OA là phân giác của $\widehat{MON}$ (Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{AOM}$

Tứ giác AMHN có $\widehat{AHM} = \widehat{AOM}$ nên tứ giác AMHN nội tiếp (theo quỹ tích cung chứa góc)

$\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OMA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OA)

mà $\widehat{OMA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OHA} = 90^0 \Rightarrow OH \perp \text{EF}$

Xét (O) có $OH \perp \text{EF} \Rightarrow$ H là trung điểm của EF (quan hệ giữa đường kính và dây) $\Rightarrow HE = HF$

c) Ta có $AM = AN$; $BM = BE$; $CN = CE$ (theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Chu vi tam giác ABC :

$AB + AC + BC = AB + AC + BE + EC = AB + AC + BM + CN$
$= (AB + BM) + (AC + CN) = AM + AN = 2AM$

Do A và (O) cố định nên M cố định $\Rightarrow$ đoạn thẳng AM có giá trị không đổi $\Rightarrow 2AM$ không đổi nên chu vi tam giác ABC có giá trị không đổi.

Bài 40. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O ($AB < AC$). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M, AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. E là trung điểm của đoạn AD. EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh:Tứ giác OEBM nội tiếp đường tròn và $MB^2 = MA.MD = MO.MH$

b) Chứng minh: $\widehat{BCE} = \widehat{BOE}; BF // AM$

c) Giả sử CD cắt MB tại trung điểm MB. Chứng minh AB//MC.

Hướng dẫn

a. Vì E là trung điểm của AD

Suy ra $OE \perp AD$ (liên hệ giữa đường kính và dây)

Lại có $\widehat{OBM} = 90°$ (vì BM là tiếp tuyến của (O))

Xét tứ giác $OEBM$ có

$\widehat{OEM} = \widehat{OBM} = 90°$

Mà E và B là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn OM một góc không đổi

Suy ra tứ giác $OEBM$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

Xét ΔABM và ΔBDM có:

$\widehat{BAD} = \widehat{DBM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD)

$\widehat{BMD}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta BDM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MA}{MB} \Leftrightarrow MB^2 = MA.MD$

b. Vì $\widehat{OCM} = 90°$ (CM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính OM

Mà tứ giác $OEBM$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow EBCO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BOE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Ta có $\widehat{FCB} = \dfrac{1}{2} Sđ\,\overset{\frown}{FB} = \dfrac{1}{2}\left(Sđ\,\overset{\frown}{AB} - Sđ\,\overset{\frown}{AF}\right)$ (góc nội tiếp chắn cung FB)

$\widehat{BMA} = \dfrac{1}{2}\left(Sđ\,\overset{\frown}{AB} - Sđ\,\overset{\frown}{BD}\right)$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn (O))

Mà $\widehat{FCB} = \widehat{BMA}$ (tứ giác EBMC nội tiếp đường tròn đường kính OM)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{BAD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow BF // AD$

c.

Xét ΔBKD và ΔCKB

$\widehat{BKC}$ chung

$\widehat{BCD} = \widehat{DBK}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cu

$\Rightarrow \Delta BKD \backsim \Delta CKB\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{KD}{BK}$

$\Rightarrow BK^2 = KD.KC$

Mà $BK = KM$

$\Rightarrow KM^2 = KD.KC \Rightarrow \dfrac{KM}{KD} = \dfrac{KC}{KM}$

Xét ΔKMD và ΔKCM có

$\dfrac{KM}{KD} = \dfrac{KC}{KM}$

$\widehat{DKM}$ chung

$\Rightarrow \Delta KMD \backsim \Delta KCM\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{KMD} = \widehat{KCM}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{KCM} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

$\Rightarrow \widehat{KMD} = \widehat{DAC}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow BM // AC$

Bài 41. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm)

Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Gọi E là trung điểm của DC.

a) Chứng minh:Tứ giác MAOB, ABOE nội tiếp.

b) Chứng minh: $MC.MD = MA^2$ và $\widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

c) Chứng minh: $OH.OM + MC.MD = MO^2$

Hướng dẫn

a) Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MA \perp OA; MB \perp OB.$ (T/C tiếp tuyến). $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^o.$

Xét tứ giác MAOB có:

$\widehat{MAO}+\widehat{MBO}=180^o$.

$\widehat{MAO}$ và $\widehat{MBO}$ là hai góc đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác MAOB là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).(1)

Xét (O) có: OE là một phần của đường kính

CD là dây cung; E là trung điểm của CD (gt)

$\Rightarrow OE\perp CD$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow \widehat{OEC}=90^o\, hay\, \widehat{OEM}=90^o\,(M\in CD)$.

Xét tứ giác OEMB có:

$\widehat{OEM}+\widehat{OBM}=180^o$

$\widehat{OEM}$ và $\widehat{OBM}$ là hai góc đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác OEMB là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).(2)

(1);(2) $\Rightarrow$ Năm điểm M; A; B; E; O đều nằm trên đường tròn đường kính OM.

$\Rightarrow$ Tứ giác ABOE là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

b) Xét ΔMAC và ΔMDA có:

$\widehat{AMD}\, chung$

$\widehat{MDA}=\widehat{MAC}$. (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta MAC\sim\Delta MDA(g-g)\Rightarrow \dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MC}{MA}$ (Các cạnh tương ứng) $\Leftrightarrow MC.MD=MA^2$ (3)

Ta có: $OA=OB(=R)$

$MA=MB$ (T/C hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB (T/C đường trung trực của đoạn thẳng)

$\Rightarrow MO\perp AB(H\in AB; H\in MO)\Rightarrow AH\perp OM$.

Xét ΔOAM có: AH là đường cao $(AH\perp OM)$

$\Rightarrow MA^2=MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác).(4)

(3); (4) $\Rightarrow MC.MD=MH.MO\Leftrightarrow \dfrac{MC}{MH}=\dfrac{MO}{MD}$.

Xét ΔMCH và ΔMOD có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{DMO}\, chung\\ \dfrac{MC}{MH}=\dfrac{MO}{MD}(cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta MCH\sim\Delta MOD(c.g.c)\Rightarrow \widehat{MHC}=\widehat{MDO}.$$

Xét ΔOAM có: AH là đường cao $(AH \perp OM)$; $\widehat{MAO} = 90^o\,(cmt)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} +)OA^2 = OH.OM.(HTL) \\ +)OA^2 + AM^2 = MO^2\,(pytago) \end{cases}$$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} OA^2 = OH.OM.(cmt) \\ OA^2 + AM^2 = MO^2\,(cmt) \\ MC.MD = MA^2\,(cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow OH.OM + MC.MD = MO^2.$

Bài 42. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) . Đường thẳng (d) đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B, C, (O không thuộc (d), B nằm giữa A và C, AC cắt OM). Gọi H là trung điểm BC.

a) Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp ; $AB.AC = AN^2$.

b) Chứng minh : HA là phân giác của góc $\widehat{MHN}$; lấy điểm E trên MN sao cho $HE//CM$. Chứng minh $BE//AM$.

c) Cho $\widehat{AHM} = 60^0$. Tính diện tích giới hạn bởi cung $\overset{\frown}{MN}$ và AM, AN

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $AMON$ có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

nên $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác $AMON$ nên tứ giác $AMON$ nội tiếp đường tròn . (1)

+ Xét ΔANB và ΔACN có $\hat{A}$ chung, $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{NB}\right)$

Suy ra $\Delta ANB \backsim \Delta ACN\,(g-g) \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AB.AC = AN^2$ (đpcm) .

b) Xét ΔAOM và ΔAON có: $\begin{cases} AM = AN \\ OM = ON = R \\ OA \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta AOM = \Delta AON\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{NOA} = \widehat{MOA}$.

Vì H là trung điểm $BC \Rightarrow OH \perp BC$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Xét tứ giác $AHOM$ có $\widehat{AHO} + \widehat{AMO} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $AHOM$ nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1)(2) suy ra 5 điểm A, M, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{NHA} = \widehat{NOA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NA)

$\widehat{MHA} = \widehat{MOA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

Mà $\widehat{NOA} = \widehat{MOA}\left(cmt\right) \Rightarrow \widehat{NHA} = \widehat{MHA} \Rightarrow AH$ là phân giác của góc $\widehat{MHN}$.

+ Ta có: $\widehat{EHB} = \widehat{MCB}$ (hai góc đồng vị) mà $\widehat{MCB} = \widehat{ENB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

$\Rightarrow \widehat{EHB} = \widehat{ENB} \Rightarrow$ tứ giác $EHNB$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{HNE} = \widehat{HBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

Mà $\widehat{HNE} = \widehat{HAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

$\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{HAM}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $EB // MA$.

c) Ta có: $\widehat{AOM} = \widehat{AON} = \widehat{AHM} = 60^0$ nên $\widehat{MON} = 120^0$.

Diện tích giới hạn bởi cung $\overset{\frown}{MN}$, AM, AN là: $S = \dfrac{\pi.R^2.120^0}{180^0} = \dfrac{2\pi R^2}{3}$

Bài 43. Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K, H là trung điểm của MN.

1. Chứng minh: tứ giác $OHPQ$ nội tiếp. $AP^2 = AN.AM$

2. Chứng minh: $QK^2 = KN.KP$ và $AK = KQ$

3. Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc $\widehat{PNM}$ và gọi G là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AO và PK. Tính AG theo bán kính R.

Hướng dẫn

1.***Chứng minh: tứ giác** $OHPQ$ **nội tiếp**

Vì AP, AQ là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), nên: $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90°$

Xét tứ giác $APOQ$, có: $\widehat{APO} + \widehat{AQO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APOQ$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$).

Gọi C là trung điểm của cạnh AO.

Xét ΔAPO vuông tại P, có PC là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta APO$ nội tiếp đường tròn đường kính OA

Tương tự, ΔAQO nội tiếp đường tròn đường kính OA

Suy ra, tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APOQ$ là trung điểm của cạnh OA

Gọi C là trung điểm của OA

Khi đó, $CA = CP = CO = CQ$ (vì tứ giác $APOQ$ nội tiếp) (1)

Mặt khác, $HM = HN$ (gt) nên $OH \perp MN$ (liên hệ giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{AHO} = 90°$

Xét ΔAHO vuông tại H, có HC là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền OA

Nên: $CH = CA = CO\left(= \frac{1}{2}OA\right)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $CO = CH = CP = CQ$

Suy ra tứ giác $OHPQ$ nội tiếp đường tròn tâm C

*** Chứng minh:** $AP^2 = AN.AM$

Xét ΔAPN và ΔAMP, có:

$\widehat{PAM}$ là góc chung

$\widehat{PMA} = \widehat{APN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến AP và dây cung PN cùng chắn $\overset{\frown}{PN}$)

$\Rightarrow \Delta APN \backsim \Delta AMP$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AN}{AP} \Rightarrow AP^2 = AN.AM$ (đpcm)

2. ***Chứng minh:** $QK^2 = KN.KP$

Xét ΔQKN và ΔPKQ, có:

$\widehat{PKQ}$ là góc chung

$\widehat{KPQ} = \widehat{KQN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến AQ và dây cung QN cùng chắn $\overset{\frown}{QN}$)

$\Rightarrow \Delta QKN \backsim \Delta PKQ$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{QK}{PK} = \dfrac{KN}{KQ} \Rightarrow QK^2 = KN.KP$ (đpcm) (3)

*** Chứng minh:** $AK = KQ$

Ta có: $AK = KQ$ (cmt)

$PM // AQ \Rightarrow \widehat{PMA} = \widehat{KAN}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{KAN}$

Xét ΔKAN và ΔKPA, có:

$\widehat{AKP}$ là góc chung

$\widehat{APN} = \widehat{KAN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KAN \backsim \Delta KPA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $KQ^2 = AK^2$ hay $AK = KQ$ (đpcm)

3. ***Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc** $\widehat{PNM}$

Vì AQ là tiếp tuyến của (O), đường kính QS nên $AQ \perp QS$

Mà $AQ // PM$ nên $QS \perp PM$

$\Rightarrow S$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{PM}$ (liên hệ giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow \overset{\frown}{PS} = \overset{\frown}{SM}$

$\Rightarrow \widehat{PNS} = \widehat{MNS}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow NS$ là tia phân giác của góc $\widehat{PNM}$

*** Tính AG theo bán kính R.**

Gọi $I = OA \cap PQ$

Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào ΔAQO vuông tại Q, có:

$$OQ^2 = OI.OA \Rightarrow OI = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

Mặt khác, $AI = OA - OI = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$

Ta có: $AP = AQ$ (hai tiếp tuyến của đường tròn (O))

$OP = OQ$ (bán kính của đường tròn (O))

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn thẳng PQ

$\Rightarrow IP = IQ$

Xét ΔAPQ, có PK và AI là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔAPQ

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R$

Bài 44. Cho tam giác ABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi E' là điểm đối xứng H qua AC, F' là điểmđốixứng H qua AB. Chứng minh:

a)Tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O)

b) Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn.

c) AO và EF vuông góc nhau.

d) Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Hướng dẫn

a) Vì F' đối xứng với H qua AC $\Rightarrow$ AB là đường trung trực của $F'H$ (định nghĩa)

$\Rightarrow BF' = BH$ (tính chất) $\Rightarrow$ $\Delta F'BH$ cân tại B $\Rightarrow$ $\widehat{BF'H} = \widehat{BHF'}$ (1)

Chứng minh tương tự: $\widehat{CE'H} = \widehat{CHE'}$ (2)

Mà $\widehat{F'HB} = \widehat{CHE'}$ (đối dỉnh) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow$ $\widehat{CE'H} = \widehat{BF'H}$, mà hai đỉnh E', F' kề nhau cùng nhìn đoạn BC $\Rightarrow$ tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O) (dhnb)

b) Xét ΔACF vuông tại A có $\widehat{FAC} + \widehat{ACF} = 90^0$

Xét ΔHCE vuông tại A có $\widehat{HCE} + \widehat{CHE} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{CHE}$ mà $\widehat{CE'H} = \widehat{CHE'}$(cmt) ; $\widehat{CE'H} = \widehat{BF'H}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BF'C} = \widehat{BE'C} \Rightarrow$ F', A, E' cùng thuộc cung chứa góc trên đoạn BC

$\Rightarrow$ Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn (O)

Cách 2 : Chứng minh tứ giác $BF'AC$ và tứ giác $BAE'C$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O)

c) Vì $\Delta BF'H$ cân tại B (cmt), BF là đường trung trực (cmt) $\Rightarrow$ BF là phân giác của $\widehat{F'BH}$

$\Rightarrow \widehat{F'BF} = \widehat{HBF}$ $\Rightarrow$ cung AF' = cung AE' (tính chất)

$\Rightarrow$ $AF' = AE'$ (định lí)

$\Rightarrow$ điểm A thuộc đường trung trực của $F'E'$ (4)

Ta có năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn (O) (cmt) $\Rightarrow$ $OF' = OE'$

$\Rightarrow O F' = OE'$ (bán kính) $\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của $F'E'$ (5)

Từ (4), (5) $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $F'E'$ $\Rightarrow F'E' \perp OA$

Xét $\Delta F'HE'$ có :

F là trung điểm của $F'H$ (gt) ; E là trung điểm HE' (gt) $\Rightarrow$ EF là đường trung bình của $\Delta F'HE'$ (định nghĩa) $\Rightarrow$ $F'E' // FE$ (tính chất) ; $F'E' \perp OA$ (cmt) $\Rightarrow$ $FE \perp OA$ (định lí)

d) Kẻ đường kính AD của (O) , M là trung điểm của BC

Xét (O) có $\widehat{ABD} = 90^0$; $\widehat{ACD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \perp BD; AC \perp CD$ mà $AB \perp CF; AC \perp BE$(gt) $\Rightarrow$ BH // DC ; BD // CH (định lí)

$\Rightarrow$Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (dhnb) $\Rightarrow$ M là trung điểm của HD (tính chất)

Xét ΔAHD có : M là trung điểm của HD (cmt) ; O là trung điểm AD (cách vẽ)

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của ΔAHD $\Rightarrow$ $AH = 2OM$ (tính chất)

Mà OM không đổi $\Rightarrow$ AH không đổi

Xét tứ giác $AFHE$ có : $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (dhnb) $\Rightarrow$ ΔAEF nội tiếp đường tròn đường kính AH , mà AH không đổi (cmt)

$\Rightarrow$Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi khi A di chuyển trên (O).

Bài 45. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B,C. Gọi M là điểm thuộc cung lớn BC. Từ M kẻ $MH \perp BC$, $MK \perp CA, MI \perp AB$.

a) Chứng minh: Tứ giác $MIBH$ nội tiếp và $\widehat{MIH} = \widehat{MHK}$.

b) Chứng minh: $MI.MK = MH^2$.

c) Cho $AB = 2R$. Tính diện tích giới hạn bởi cung nhỏ BC và cạnh AC, AB.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $MIBH$ có:

$\widehat{MIB} + \widehat{MHB} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $MIBH$ nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{MBC}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung MH) (1)

Chứng minh tương tự, ta có: Tứ giác $MKCH$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MHK} = \widehat{MCK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MK) 2)

Lại có $\widehat{MBC} = \widehat{MCK}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MC của (O)) (3)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{MHK}$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có: $\widehat{MHI} = \widehat{MKH}$.

Xét ΔMIH và ΔMHK có: $\widehat{MIH} = \widehat{MHK}\,(cmt); \widehat{MHI} = \widehat{MKH}\,(cmt)$

$\Rightarrow \Delta MIH \backsim \Delta MHK\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MH}{MK} \Rightarrow MI.MK = MH^2$.

c) Vì ΔOAB vuông tại B (gt) $\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OB.AB = \dfrac{1}{2}.R.2R = R^2$ (đvdt)

Gọi N là giao điểm của OA với (O)

Vì ΔOAB vuông tại $B \Rightarrow \tan\widehat{AOB} = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{2R}{R} = 2 \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 63^o \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{BN} \approx 63^o$

Suy ra diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi cung nhỏ BN và 2 bán kính OB, ON là:

$$\frac{\pi R^2.63}{360} = \frac{7\pi R^2}{40} \text{ (đvdt)}$$

Do đó diện tích giới hạn bởi cung nhỏ BC và cạnh AC, AB là: $2.\left(R^2 - \dfrac{7\pi R^2}{40}\right) = \dfrac{(40 - 7\pi)R^2}{20}$ (đvdt)

Bài 46. Từ một điểm A nằm ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB,AC với (O), (B,C∈(O)). Gọi I là trung điểm AC. IB cắt (O) tại E, tia AE cắt (O) tại D, H là trung điểm ED.

a) Cm: 5 điểm A,B,H,O,C ∈1 đường tròn và $IC^2 = IE.IB$

b) Cm: BD//AC và qua H kẻ đường thẳng // BD cắt BC tại Q. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{QED}$

c) Khi điểm B và (O) cố định tìm quỹ tích trực tâm H' của tam giác ABC

Hướng dẫn

a) Xét (O) có:

OH là một phần đường kính.

H là trung điểm của dây ED.

Do đó $OH \perp ED$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây của đường tròn) hay $\widehat{AHO} = 90^0$

$\Rightarrow$ điểm H thuộc đường tròn đường kính AO (1)

Do AB, AC là 2 tiếp tuyến của đường tròn (O), $(B, C \in (O))$ hay $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$

$\Rightarrow$ 2 điểm B, C thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ $(1)\&(2) \Rightarrow$ 3 điểm H, B, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

Do đó 5 điểm $A, B, H, O, C \in 1$ đường tròn

Xét (O) ta có: $\widehat{ICE} = \widehat{EBC} \left(= \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{EC} \right)$

Xét $\Delta IE \,\&\, \Delta ICB$ có: $\left.\begin{array}{l} \widehat{BIC} \text{ chung} \\ \widehat{ICE} = \widehat{EBC} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IEC \backsim \Delta ICB \ (g.g)$

$\Rightarrow \frac{IE}{IC} = \frac{IC}{IB} \Rightarrow IC^2 = IE.IB$ (dpcm)

b) Do I là trung điểm của AC nên $IC^2 = IE.IB \Rightarrow IA^2 = IE.IB \Leftrightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA}$

Xét ΔIAB và ΔIEA ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA} \\ \widehat{AIB}\ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IAB \sim \Delta IEA (c.g.c)$$

$\Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{IAE} \Leftrightarrow \widehat{EBA} = \widehat{CAD}$

mà $\widehat{EBA} = \widehat{BDE}$ $(= \frac{1}{2} \text{sd} \overset{\frown}{BE})$

do đó $\widehat{IAE} = \widehat{BDE}$

Mà 2 góc ở vi trí so le trong nên BD//AC.

do $HQ//BD \Rightarrow \widehat{EHQ} = \widehat{D} = \widehat{ECQ} \Rightarrow$ tứ giác $EQHC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HEQ} = \widehat{HCQ} = \widehat{BAD} \left(= \frac{1}{2} sd \overset{\frown}{BH} \right)$

hay $\widehat{BAD} = \widehat{QED}$

c) Do H' là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow BH' \perp AC$, $CH' \perp AB, OC \perp AC$, $OB \perp AB$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} BH'//OC \\ CH'//OB \\ OB = OC = R \end{array}\right\}$

nên tứ giác $BH'CO$ là hình thoi $\Rightarrow BH' = CO = R$

$H' \in (B; R)$ cố định

Vậy H' thuộc một đường tròn cố định.

Bài 47. Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là hai tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho $PM//AQ$. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K, gọi H là trung điểm MN.

a) Chứng minh năm điểm A, P, O, Q, H thuộc một đường tròn; $KQ^2 = KN.KP$.

b) Chứng minh $AK = KQ$ và kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$.

c) Cho $R = 6cm$. Tính $S_{quat} POQ$. Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG.

Hướng dẫn

a) Do AP, AQ lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn $(O)(P, Q$ là các tiếp điểm)

nên $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90°$ suy ra P, Q thuộc đường tròn đường kính AO.(1)

Mặt khác H là trung điểm của dây MN nên $\widehat{OHA} = 90°$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính AO.(2)

* Từ (1) ; (2) suy ra A, P, H, O, Q thuộc đường tròn đường kính AO.

* Ta có $\triangle KQN \sim \triangle KPQ(g.g)$ ($\widehat{K}$ chung và $\widehat{KQN} = \widehat{KPN}$)

nên $\dfrac{KQ}{KN} = \dfrac{KP}{KQ}$, hay $KQ^2 = KN.KP$.(3)

b) Ta có $\widehat{APN} = \widehat{PMN}$

hơn nữa $\widehat{PMN} = \widehat{MAK}$ (so le trong) do đó $\widehat{APN} = \widehat{MAK}$.

Vậy nên $\triangle AKN \# \triangle PKA(g.g)$ hay ta được $\frac{AK}{KN} = \frac{PK}{AK} \Rightarrow AK^2 = PK.KN.(4)$

Từ (3) (4) suy ra $AK^2 = AQ^2$ hay $AK = AQ$ kết hợp với K thuộc AQ ta được K là trung điểm AQ.

Ta có $AQ \perp QS$

mà $AQ//PM$ nên $QS \perp PM$ hơn nữa QS là đường kính nên QS đi qua điểm chính giữa cung PM do đó S là điểm chính giữa PM.

Kéo theo $\widehat{PNS} = \widehat{SNM}$ suy ra NS là tia phân giác $\widehat{PNM}$.

c) Xét tam giác vuông APO có $\cos\widehat{AOP} = \frac{PO}{AO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{AOP} \approx 70,53°$

Do dó $\widehat{POQ} = 141,16°$. Vậy diện tích hình quạt cần tìm

$$S_{quat}POQ = \frac{\pi R^2.141,16°}{360} \approx 44,35(cm^2).$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AQO ta được

$$QO^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}.$$

Do vậy $AH = \frac{8R}{3}$. Dễ thấy G là trọng tâm tam giác APQ nên $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{16}{9}R.$

Bài 48. Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) Tứ giác $AEHF$; $BDHF$; $CDHE$; $BCEF$; $ABDE$; $ACDF$ nội tiếp

b) $AE.AC = AF.AB$; $BD.BC = BF.BA$; $CD.CB = CE.CA$; $HA.HD = HB.HE$

c) EH là phân giác $\widehat{FED}$; FH là phân giác $\widehat{EFD}$; DH là phân giác $\widehat{FDE}$

Hướng dẫn

a) +) Xét tứ giác $AEHF$ có:

$\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $BDHF$ có:

$\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $CDHE$ có:

$\widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $CDHE$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $BCEF$ có:

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$

Mà F, E là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $ABDE$ có:

$\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90^0$

Mà D, E là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp (dhnb).

+) Xét tứ giác $ACDF$ có: $\widehat{CDA} = \widehat{CFA} = 90^0$

Mà D, F là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp (dhnb).

b) +) Xét ΔAEB và ΔAFC có:

$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$

$\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow AE.AC = AF.AB$ (đpcm)

+) Xét ΔBFC và ΔBDA có:

$\widehat{BFC} = \widehat{BDA} = 90^0$

$\widehat{ABC}$ chung

$\Rightarrow \Delta BFC \backsim \Delta BDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{BA}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow BD.BC = BF.BA$ (đpcm)

+) Xét ΔCDA và ΔCEB có:

$\widehat{CDA} = \widehat{CEB} = 90^0$

$\widehat{ACB}$ chung

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CB}$ (cạnh tương ứng)

$\Rightarrow CD.CB = CE.CA$ (đpcm)

+) Xét ΔDHB và ΔEHA có:

$\widehat{BDH} = \widehat{AEH} = 90^0$

$\widehat{BHD} = \widehat{AHE}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta DHB \backsim \Delta EHA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HD}{HE} = \dfrac{HB}{HA}$ (cạnh tương ứng) $\Rightarrow HA.HD = HB.HE$ (đpcm)

c) +) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{HEF} = \widehat{HAF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HF)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$ có: $\widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACDF$ có: $\widehat{HAF} = \widehat{HCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FD

$\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{HED}$

$\Rightarrow EH$ là phân giác $\widehat{FED}$ (đpcm)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{HFE} = \widehat{HAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDHF$ có: $\widehat{HFD} = \widehat{HBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

+) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$ có: $\widehat{HAE} = \widehat{HBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HFD} \Rightarrow FH$ là phân giác $\widehat{EFD}$ (đpcm)

+) Xét ΔDEF có:

EH là phân giác $\widehat{FED}$

FH là phân giác $\widehat{EFD}$

$\Rightarrow DH$ là phân giác $\widehat{FDE}$

Bài 49. Cho tam giác MNK nhọn, đường cao $MP; NQ; KI$ cắt nhau tại H . Chứng minh

a) Tứ giác $MIHQ$; $NIHP$; $KPHQ$; $NKQI$; $MNPQ$; $MKPI$ nội tiếp.

b) $MI.MN = MQ.MK$; $NI.NM = NP.NK$; $HM.HP = HN.HQ$; $HM.HP = HN.HQ$

c) QH là tia phân giác $\widehat{PQI}$; IH là tia phân giác $\widehat{PIQ}$; PH là tia phân giác $\widehat{QPI}$

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $MIHQ$ có: $\widehat{MIH} + \widehat{MQH} = 90° + 90° = 180°$

nên tứ giác $MIHQ$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

- Xét tứ giác $NIHP$ có: $\widehat{NIH} + \widehat{NPH} = 90° + 90° = 180°$

nên tứ giác $NIHP$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

- Xét tứ giác $KPHQ$ có: $\widehat{KQH} + \widehat{KPH} = 90° + 90° = 180°$

nên tứ giác $KPHQ$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

- Xét tứ giác $NKQI$ có: $\widehat{NIK} = \widehat{NQK} = 90°$

Vì 2 đỉnh I, Q kề nhau cùng nhìn cạnh NK dưới 1 góc không đổi

nên tứ giác $NKQI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

- Xét tứ giác $MNPQ$ có: $\widehat{NPM} = \widehat{NQM} = 90°$

Vì 2 đỉnh P, Q kề nhau cùng nhìn cạnh MN dưới 1 góc không đổi

nên tứ giác $MNPQ$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

- Xét tứ giác $MKPI$ có: $\widehat{MIK} = \widehat{MPK} = 90°$

Vì 2 đỉnh I, P kề nhau cùng nhìn cạnh MK dưới 1 góc không đổi

nên tứ giác $MKPI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

b) **Chứng minh:** $MI.MN = MQ.MK$

Xét ΔMIK và ΔMQN có:

$\widehat{MIK} = \widehat{MQN} = 90°$ và $\widehat{N}$ chung nên $\Delta MIK \backsim \Delta MQN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MI}{MQ} = \dfrac{MK}{MN} \Rightarrow MI.MN = MQ.MK$

*** Chứng minh:** $NI.NM = NP.NK$

Xét ΔNIK và ΔNPM có:

$\widehat{NIK} = \widehat{MPN} = 90^o$ và $\widehat{N}$ chung nên $\Delta NIK \backsim \Delta NPM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{NI}{NP} = \dfrac{NK}{MN} \Rightarrow NI.NM = NP.NK$

*** Chứng minh:** $KP.KN = KQ.KM$

Xét ΔKPN và ΔKQN có:

$\widehat{KPM} = \widehat{KQN} = 90^o$ và $\widehat{K}$ chung

nên ΔKPM □ ΔKQN (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KP}{KQ} = \dfrac{KM}{KN} \Rightarrow KP.KN = KQ.KM$

*** Chứng minh:** $HM.HP = HN.HQ$

Xét ΔHPN và ΔHQM có:

$\widehat{HPN} = \widehat{HQM} = 90^o$ và $\widehat{PHN} = \widehat{QHM}$ (đối đỉnh)

nên ΔHPN □ ΔHQM (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HP}{HQ} = \dfrac{HN}{HM} \Rightarrow HP.HM = HQ.HN$

c) ∗ QH là tia phân giác $\widehat{PQI}$;

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $QHPK$ có $\widehat{PQH} = \widehat{PKH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung PH)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $NIQK$ có $\widehat{PIH} = \widehat{PNQ}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IN)

$\Rightarrow \widehat{IQN} = \widehat{NQP}$ nên QH là tia phân giác $\widehat{PQI}$

∗ IH là tia phân giác $\widehat{PIQ}$;

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IQKN$ có $\widehat{QIK} = \widehat{QNK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung QK)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IHPN$ có $\widehat{HIP} = \widehat{HNP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HP)

$\Rightarrow \widehat{QIK} = \widehat{KIP}$ nên IH là tia phân giác $\widehat{PIQ}$

∗ PH là tia phân giác $\widehat{QPI}$;

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MQPN$ có $\widehat{MPQ} = \widehat{MNQ}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MQ)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $NIHP$ có $\widehat{INH} = \widehat{IPH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IH)

$\Rightarrow \widehat{IPH} = \widehat{GPQ}$ nên PH là tia phân giác $\widehat{QPI}$

Bài 50. Cho tam giác DEF nhọn, đường cao DQ , EM , FN cắt nhau tại H . Chứng minh

a) Tứ giác $DMHN$, $FMHQ$, $ENHQ$, $EFMN$, $DEQM$; $DFQN$ nội tiếp

b) $DM.DF = DN.DE$; $FM.FD = FQ.FE$; $EN.ED = EQ.EF$; $HF.HN = HM.HE$

c) NH là phân giác góc MNQ ; MH là phân giác góc QMN ; QH là phân giác góc MQN

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $DMHN$ có hai góc đối $\widehat{DMH}, \widehat{DNH}$ và $\widehat{DMH} + \widehat{DNH} = 180°$ nên tứ giác $DMHN$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự cho các tứ giác $FMHQ$, $ENHQ$.

Xét tứ giác $EFMN$ có $\widehat{EMF} = \widehat{ENF} = 90°$ cùng chắn cung EF nên tứ giác $EFMN$ nội tiếp

Chứng minh tương tự cho các tứ giác $DEQM$; $DFQN$.

b) Xét hai tam giác DME và DNF có

$\widehat{DME} = \widehat{DNF} = 90°$

$\widehat{D}$ chung

Vậy $\Delta DME \backsim \Delta DNF \Rightarrow \dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DN}{DF} \Rightarrow DM.DF = DN.DE$

Chứng minh tương tự $\Delta FQD \backsim \Delta FME \Rightarrow \dfrac{FQ}{FD} = \dfrac{FM}{FE} \Rightarrow FM.FD = FQ.FE$

Chứng minh tương tự $\Delta EQD \backsim \Delta ENF \Rightarrow \dfrac{EQ}{ED} = \dfrac{EN}{EF} \Rightarrow EN.ED = EQ.EF$

Xét hai tam giác HMF và HNE có

$\widehat{HMF} = \widehat{HNE} = 90°$

$\widehat{FHM} = \widehat{EHN}$ (đối đỉnh)

Vậy $\Delta HMF \backsim \Delta HNE \Rightarrow \dfrac{HM}{HF} = \dfrac{HN}{HE} \Rightarrow HF.HN = HM.HE$

c) Ta có $\widehat{HNM} = \widehat{HDM}$ (tứ giác $DMHN$ nội tiếp)

$\widehat{HDM} = \widehat{HEQ}$ (cùng phụ với $\widehat{F}$)

$\widehat{HEQ} = \widehat{QNH}$ (tứ giác $ENHQ$ nội tiếp)

Vậy $\widehat{HNM} = \widehat{QNH}$ nên NH là phân giác góc MNQ.

Chứng minh tương tự MH là phân giác góc QMN; QH là phân giác góc MQN

Bài 51. Cho tam giác BCD nhọn, đường cao BE, CI, DF cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) Tứ giác $BIHF$; $DIHE$; $CDIF$; $BDEF$; $BCEI$ nội tiếp.

b) $BI.BD = BF.BC$; $DI.DB = DE.DC$; $CF.CB = CE.CD$; $CH.CI = CE.CD$.

c) IH là phân giác góc EIF; FH là phân giác góc EFI; EH là phân giác góc IEF.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $BIHF$ có :

$\widehat{F} = \widehat{I} = 90^o$ (gt)

Nên tứ giác $BIHF$ nội tiếp đường tròn (Tứ giác có hai góc đối diện tổng bằng 180° là tứ giác nội tiếp)

Xét tứ giác $DIHE$ có:

$\widehat{E} = \widehat{I} = 90^o$ (gt)

Nên tứ giác DIHE nội tiếp đường tròn (Tứ giác có hai góc đối diện tổng bằng 180° là tứ giác nội tiếp)

Chứng minh tương tự: Tứ gíac CDIF nội tiếp đường tròn (Tứ giác có hai góc đối diện tổng bằng 180° là tứ giác nội tiếp).

Tứ giác BDEF có: $\widehat{BED} = \widehat{BFD} = 90^o$ nên nó là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh bởi hai góc bằng nhau)

Chứng minh tương tự: Tứ giác BCEI nội tiếp đường tròn.

b) Vì tứ giác CDIF nội tiếp đường tròn nên:

$\widehat{BFI} = \widehat{BDC}$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại điểm đó)

Xét ΔBFI và ΔBDC có:

Góc B chung; $\widehat{BFI} = \widehat{BDC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BDC \backsim \Delta BFI$ (góc – góc) $\Rightarrow \dfrac{BI}{BF} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BI.BD = BF.BC$

Chứng minh tương tự: $\Delta DIE \backsim \Delta DCB$ (G-G) $\Rightarrow \dfrac{DI}{DE} = \dfrac{DC}{DB} \Rightarrow DI.DB = DE.DC$

$\Delta CFE \backsim \Delta CDB$ (G-G) $\Rightarrow \dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CD}{CB} \Rightarrow CF.CB = CE.CD$

Xét ΔCHE và ΔCDI có:

$\widehat{H} = \hat{I} = 90^o$, góc C chung

$\Rightarrow \Delta CHE \backsim \Delta CDI$ (G-G) $\Rightarrow \dfrac{CH}{CE} = \dfrac{CD}{CI} \Rightarrow CH.CI = CE.CD$

c) Ta có: $\widehat{FIC} = \widehat{FDC}$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung FC)

Vì tứ giác $DIHE$ nội tiếp đường tròn nên:

$\widehat{HIE} = \widehat{HDE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

$\Rightarrow \widehat{CIE} = \widehat{FDC}$

Từ trên suy ra: $\widehat{FIC} = \widehat{CIE}$

Vậy IH là phân giác của góc EIF

Chứng minh tương tự, ta cũng có: FH là phân giác góc EFI ; EH là phân giác góc IEF .

Bài 52. Cho tam giác CDE nhọn, đường cao CM, DN, EI cắt nhau tại H . Chứng minh:

a) Tứ giác $CNHI, ENHM, DIHM, DENI, CDMN$; $CEMI$ nội tiếp

b) $CN.CE = CI.CD$; $EH.EI = EN.EC$; $DM.DE = DH.DN$; $CI.CD = CH.CM$.

c) IH là phân giác góc MIN ; NH là phân giác góc MNI ; MH là phân giác góc NMI

Hướng dẫn

a) * ΔCHN vuông tại N nên ΔCHN nội tiếp đường tròn đường kính CH (1)

ΔCHI vuông tại I nên ΔCHI nội tiếp đường tròn đường kính CH (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 4 điểm C, N, H, I cùng nằm trên đường tròn đường kính CH

Hay tứ giác $CNHI$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $ENHM; DIHM; DENI; CDMN;$ $CEMI$ nội tiếp.

b) *Ta có tứ giác $DENI$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{CNI} = \widehat{IDE}$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Xét ΔCNI và ΔCDE có:

$\widehat{C}$ chung

$\widehat{CNI} = \widehat{IDE}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta CNI \backsim \Delta CDE$ (g-g)

$\Rightarrow CN.CE = CI.CD$

*Tương tự ta có: $\Delta EHN \backsim \Delta ECI$ (g-g) $\Rightarrow EH.EI = EN.EC$

*Tương tự ta có: $\Delta DMH \backsim \Delta DNE$ (g-g) $\Rightarrow DM.DE = DH.DN$

*Tương tự ta có: $\Delta CIH \backsim \Delta CMD$ (g-g) $\Rightarrow CI.CD = CH.CM$

c) *Tứ giác $DENI$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{NIE} = \widehat{NDE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NE) (3)

*Tứ giác $DMHI$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{HDM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HM) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{NIE} = \widehat{MIE}$

$\Rightarrow IE$ là tia phân giác góc MIN.

*Tương tự có NH là phân giác góc MNI và MH là phân giác góc NMI.

Bài 53. Cho tam giác PQK nhọn, đường cao PM; QN; KI cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) Tứ giác PNHI; KMHN;QIHM; KNIQ; PQMN; PKMI nội tiếp

b) $PN.PK = PI.PQ$; $MP.MH = MK.MQ$; $IH.IK = IP.IQ$; $NH.NQ = NK.NP$

c) IH phân giác góc MIN; NH phân giác góc MNI; MH phân giác góc NMI

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác PNHI; KMHN; QIHM; PKMI nội tiếp.

Ta có +) $QN \perp PK = \{N\} \Rightarrow \widehat{QNP} = \widehat{QNK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HNP} = \widehat{HNK} = 90^0$ vì ($H \in QN$)

+) $KI \perp PQ = \{I\} \Rightarrow \widehat{KIP} = \widehat{KIQ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HIP} = \widehat{HIQ} = 90^0$ vì ($H \in IK$)

+) $PM \perp QK = \{M\} \Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{PMK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMQ} = \widehat{HMK} = 90^0$ vì ($H \in PM$)

Xét tứ giác PNHI có: $\widehat{HNP} + \widehat{HIP} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác PNHI nội tiếp (dhnb)

Xét tứ giác KMHN có: $\widehat{HNK} + \widehat{HMK} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác KMHN nội tiếp (dhnb)

Xét tứ giác QIHM có: $\widehat{HIQ} + \widehat{HMQ} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác QIHM nội tiếp (dhnb)

Xét tứ giác PKMI có: $\widehat{PIK} = \widehat{PMK} = 90^0$;Đỉnh I và M là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh PK dưới một góc bằng nhau nên tứ giác PKMI nội tiếp (dhnb)

b) Chứng minh: $PN.PK = PI.PQ$ **;** $MP.MH = MK.MQ$ **;** $IH.IK = IP.IQ$ **;** $NH.NQ = NK.NP$

+) Xét ΔPNQ và ΔPIK có: $\widehat{PNQ} = \widehat{PIK} = 90^0$ (cmt); $\widehat{P}$ chung $\Rightarrow \Delta PNQ \backsim \Delta PIK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{PN}{PI} = \dfrac{PQ}{PK} \Rightarrow PN.PK = PI.PQ$

+) Chứng minh tương tự sẽ c/m được $\Delta MQH \backsim \Delta NPH$ (g.g) và $\Delta MPK \backsim \Delta NPH$ (g.g)

$\Rightarrow \Delta MPK \backsim \Delta MQH$ (tính chất) $\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MK}{MH} \Rightarrow MP.MH = MK.MQ$

+) Ta cũng c/m được $\Delta IHP \backsim \Delta MHK$ (g.g) và $\Delta IQK \backsim \Delta MHK$ (g.g)

$\Rightarrow \Delta IHP \backsim \Delta IQK$ (tính chất) $\Rightarrow \dfrac{IH}{IQ} = \dfrac{IP}{IK} \Rightarrow IH.IK = IP.IQ$

+) Tương tự cũng c/m được $\Delta NHK \backsim \Delta IPK$ (g.g) và $\Delta NPQ \backsim \Delta IPK$ (g.g)

$\Rightarrow \Delta NHK \backsim \Delta NPQ$ (tính chất) $\Rightarrow \dfrac{NH}{NP} = \dfrac{NK}{NQ} \Rightarrow NH.NQ = NP.NK$

c) Chứng minh IH là phân giác của góc $\widehat{MIN}$

+) Ta có $\widehat{HIN} = \widehat{HPN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HN)

$\widehat{HIM} = \widehat{HQM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

mà $\widehat{HPN} = \widehat{HQM}$ (vì $\Delta NHP \backsim \Delta MHQ$ -cmt)

nên $\widehat{HIN} = \widehat{HIM}$ (tính chất) $\Rightarrow IH$ là phân giác của góc $\widehat{MIN}$

* Chứng minh NH là phân giác của góc $\widehat{MNI}$

+) Ta có $\widehat{HNM} = \widehat{HKM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

$\widehat{HNI} = \widehat{HPI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HI)

mà $\widehat{HPI} = \widehat{HKM}$ (vì $\Delta IHP \backsim \Delta MHK$ -cmt)

nên $\widehat{HNI} = \widehat{HNM}$ (tính chất) $\Rightarrow NH$ là phân giác của góc $\widehat{MNI}$

* Chứng minh MH là phân giác của góc $\widehat{NMI}$

+) Ta có $\widehat{HMI} = \widehat{HQI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HI)

$\widehat{HMN} = \widehat{HKN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HN)

mà $\widehat{HKN} = \widehat{HQI}$ (vì $\Delta IKP \backsim \Delta NQP$ -cmt)

nên $\widehat{HMI} = \widehat{HMN}$ (tính chất) $\Rightarrow MH$ là phân giác của góc $\widehat{NMI}$

Bài 54. Cho ΔEIK nhọn, các đường cao EM, IN, KP cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) Tứ giác $ENHP$; $MKNH$; $MIPH$; $KNPI$; $EIMN$; $EPMK$ nội tiếp.

b) $KH.KP = KM.KI$; $IM.IK = IP.IE$; $NH.NI = NE.NK$; $PH.PK = PE.PI$

c) NH phân giác góc MNP; MH phân giác góc NMP; PH phân giác góc MNP

Hướng dẫn

a) Tứ giác $ENHP$; $MKNH$; $MIPH$; $KNPI$; $EIMN$; $EPMK$ **nội tiếp.**

Ta có:

$KP \perp EI \equiv P \Rightarrow \widehat{KPE} = \widehat{KPI} = 90° \Rightarrow \widehat{HPE} = \widehat{HPI} = 90° \left(H \in KP\right)$

$IN \perp KE \equiv N \Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{INK} = 90° \Rightarrow \widehat{HNE} = \widehat{HNK} = 90° \left(H \in IN\right)$

$EM \perp IK \equiv M \Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{EMK} = 90° \Rightarrow \widehat{HMI} = \widehat{HMK} = 90° \left(H \in EM\right)$

*Xét tứ giác $ENHP$ có: $\widehat{ENH} + \widehat{EPH} = 90^0 + 90^0 = 180°$

$\Rightarrow ENHP$ là tứ giác nội tiếp(dhnb)

*Tương tự với hai tứ giác nội tiếp $MKNH; MIPH$

*Xét tứ giác $MKNH$ có: $\widehat{HMK} + \widehat{HNK} = 90^0 + 90^0 = 180°$

$\Rightarrow MKNH$ là tứ giác nội tiếp(dhnb)

* Xét tứ giác $MIPH$ có: $\widehat{HMI} + \widehat{HPI} = 90^0 + 90^0 = 180°$

$\Rightarrow MIPH$ là tứ giác nội tiếp(dhnb)

* Xét tứ giác $KNPI$ có: $\widehat{IPK} = \widehat{INK} \left(= 90°\right)$, đỉnh $P; N$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh IK dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $KNPI$ là tứ giác nội tiếp.

* Xét tứ giác $EIMN$ có: $\widehat{ENI} = \widehat{EMI} = 90°$ đỉnh $N; M$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh EI dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $EIMN$ là tứ giác nội tiếp.

* Xét tứ giác $EPMK$ có: $\widehat{EPK} = \widehat{EMK} = 90°$ đỉnh M; P là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh EK dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $EPMK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $KH.KP = KM.KI$; $IM.IK = IP.IE$; $NH.NI = NE.NK$; $PH.PK = PE.PI$

* Xét hai tam giác vuông KHM và KIP có:

$\widehat{KMH} = \widehat{KPI} = 90°$; $\widehat{IKP}$ chung

$\Rightarrow \Delta KHM \square \Delta KIP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KI} = \dfrac{KM}{KP} \Rightarrow \dfrac{KH}{KM} = \dfrac{KI}{KP} \Rightarrow KH.KP = KM.KI\left(dpcm\right)$

* Xét hai tam giác vuông IMH và INK có:

$\widehat{IMH} = \widehat{INK} = 90°$; $\widehat{HIM}$ chung

$\Rightarrow \Delta IMH \square \Delta INK(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IN} = \dfrac{IH}{IK} \Rightarrow IM.IK = IN.IH$ (1)

Xét hai tam giác vuông IHP và IEN có:

$\widehat{IPH} = \widehat{INE} = 90°$; $\widehat{PIH}$ chung

$\Rightarrow \Delta IHP \square \Delta IEN\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{IH}{IE} = \dfrac{IP}{IN} \Rightarrow IH.IN = IE.IP\left(2\right)$

Từ $\left(1\right);\left(2\right)$ ta có: $IM.IK = IE.IP$

*Xét hai tam giác vuông NEH và NIK :

$\widehat{ENH} = \widehat{KNI} = 90°$; $\widehat{HEN} = \widehat{NIK}$ (cùng phụ nhau với góc $\widehat{EKI}$)

$\Rightarrow \Delta NEH \square \Delta NIK\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{NE}{NI} = \dfrac{NH}{NK}$(tỉ số đồng dạng của hai tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow NE.NK = NI.NH$

* Xét hai tam giác vuông PHI và PEK có: $\widehat{HPI} = \widehat{EPK} = 90°$; $\widehat{PIH} = \widehat{PKE}$ (cùng phụ nhau với góc $\widehat{IEK}$)

$\Rightarrow \Delta PHI \square \Delta PEK\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{PH}{PE} = \dfrac{PI}{PK}$(tỉ số đồng dạng của hai tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow PH.PK = PE.PI$

c) Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IPHM$ ta có: $\widehat{PMH} = \widehat{HIP}$ cùng chắn $\overset{\frown}{PH}$ $\left(3\right)$

Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IPNK$: $\widehat{HKN} = \widehat{HIP}$ cùng chắn $\overset{\frown}{PN}$ (4)

Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHNK$: $\widehat{HKN} = \widehat{HMN}$ cùng chắn $\overset{\frown}{HN}$ (5)

Từ $(3);(4);(5) \Rightarrow \widehat{PMH} = \widehat{HMN} \Rightarrow MH$ là tia phân giác $\widehat{NMP}$

Chứng minh tương tự : NH phân giác góc MNP; PH phân giác góc MNP

Bài 55. Cho $\Delta\, MNI$ nhọn, các đường cao MK, NQ, IP cắt nhau tại H . Chứng minh:

a) Tứ giác $MQHP$; $NPHK$; $IQHK$; $MNKQ$; $IQPN$; $IKPM$ nội tiếp.

b) $MP.MN = MQ.MI$; $NH.NQ = NP.NM$; $KH.KM = KI.KN$; $QH.QN = QI.QM$

c) KH phân giác góc PKQ; PH phân giác góc KPQ; QH phân giác góc PQK

Hướng dẫn

a) Tứ giác $MQHP$; $NPHK$; $IQHK$; $MNKQ$; $IQPN$; $IKPM$ **nội tiếp.**

Ta có

+) $MK \perp NI = \{K\} \Rightarrow \widehat{MKN} = \widehat{MKI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HKN} = \widehat{HKI} = 90^0$ vì ($H \in MK$)

+) $NQ \perp MI = \{Q\} \Rightarrow \widehat{NQM} = \widehat{NQI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HQM} = \widehat{HQI} = 90^0$ vì ($H \in NQ$)

+) $IP \perp MN = \{P\} \Rightarrow \widehat{IPN} = \widehat{IPM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HPN} = \widehat{HPM} = 90^0$ vì ($H \in PM$)

+) Xét tứ giác MQHP có $\widehat{MQH} + \widehat{MPH} = 180°$, mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác MQHP nội tiếp (đpcm).

+) Xét tứ giác NPHK có $\widehat{HPN} + \widehat{HKN} = 180°$, mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $NPHK$ nội tiếp (đpcm).

+) Xét tứ giác $IQHK$ có $\widehat{IQH}+\widehat{IKH}=180^\circ$, mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $IQHK$ nội tiếp (đpcm).

+) Xét tứ giác $MNKQ$ có $\widehat{MQN}=\widehat{MKN}=90^\circ$, mà hai góc này có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh MN

$\Rightarrow$ tứ giác $MNKQ$ nội tiếp (đpcm).

+) Xét tứ giác $IQPN$ có $\widehat{IQN}=\widehat{IPN}=90^\circ$, mà hai góc này có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh NI

$\Rightarrow$ tứ giác $IQPN$ nội tiếp (đpcm).

+) Xét tứ giác $IKPM$ có $\widehat{MPI}=\widehat{MKI}=90^\circ$, mà hai góc này có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh MI

$\Rightarrow$ tứ giác $IKPM$ nội tiếp (đpcm).

b) $MP.MN = MQ.MI$; $NH.NQ = NP.NM$; $KH.KM = KI.KN$; $QH.QN = QI.QM$

+) Tứ giác $IQPN$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{QIN}+\widehat{QPN}=180^\circ$ (t/c).

Mà $\widehat{MPQ}+\widehat{QPN}=180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{QIN}=\widehat{MPQ}$ hay $\widehat{MIN}=\widehat{MPQ}$

Xét ΔMPQ và ΔMIN có

$\widehat{PMQ}$ chung; $\widehat{MIN}=\widehat{MPQ}$

$\Rightarrow \Delta MPQ \backsim \Delta MIN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MI}=\dfrac{MQ}{MN} \Rightarrow MP.MN = MQ.MI$ (đpcm).

+) Tứ giác $MQHP$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{PMQ}+\widehat{PHQ}=180^\circ$ (t/c) Mà $\widehat{NHP}+\widehat{PHQ}=180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{PMQ}=\widehat{NHP}$ hay $\widehat{NMQ}=\widehat{NHP}$

Xét ΔNHP và ΔNMQ có

$\widehat{PNH}$ chung; $\widehat{NMQ}=\widehat{NHP}$

$\Rightarrow \Delta NHP \backsim \Delta NMQ$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NH}{NM}=\dfrac{NP}{NQ} \Rightarrow NH.NQ = NP.NM$ (đpcm).

+) Xét ΔKHI và ΔKNM có

$\widehat{HKI}=\widehat{NKM}\left(=90^\circ\right)$

$\widehat{KIH}=\widehat{NMK}$ (cùng phụ với $\widehat{INP}$)

$\Rightarrow \Delta KHI \backsim \Delta KNM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KN} = \dfrac{KI}{KM} \Rightarrow KH.KM = KI.KN$ (đpcm).

+) Xét ΔQHI và ΔQMN có

$\widehat{HQI} = \widehat{MQN} (= 90°)$

$\widehat{HIQ} = \widehat{QNM}$ (cùng phụ với $\widehat{NMQ}$)

$\Rightarrow \Delta QHI \backsim \Delta QMN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{QH}{QM} = \dfrac{QI}{QN} \Rightarrow QH.QN = QI.QM$ (đpcm)

c) *KH* **phân giác góc** *PKQ*; *PH* **phân giác góc** *KPQ*; *QH* **phân giác góc** *PQK*

+) Tứ giác NPHK nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{K_1}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung PH).

Tứ giác KHQI nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{K_2}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung QH).

Mà $\widehat{N_1} = \widehat{I_1}$ (cùng phụ với $\widehat{NMI}$) nên $\widehat{K_1} = \widehat{K_2} \Rightarrow$ KH là tia phân giác $\widehat{PKQ}$ (đpcm).

+) Tứ giác NPHK nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{N_2} = \widehat{P_1}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung KH).

Tứ giác MQHP nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{P_2}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung QH).

Mà $\widehat{N_2} = \widehat{M_1}$ (cùng phụ với $\widehat{MIN}$) nên $\widehat{P_1} = \widehat{P_2} \Rightarrow$ PH là tia phân giác $\widehat{KPQ}$ (đpcm).

+) Tứ giác KHQI nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{Q_2} = \widehat{I_2}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung KH).

Tứ giác MQHP nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{Q_1} = \widehat{M_2}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung PH).

Mà $\widehat{I_2} = \widehat{M_2}$ (cùng phụ với $\widehat{MNI}$) nên $\widehat{Q_1} = \widehat{Q_2} \Rightarrow$ QH là tia phân giác $\widehat{PQK}$ (đpcm).

Bài 56. Cho ΔABC vuông tại A nội tiếp (O). Từ một điểm D trên cạnh BC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E. Gọi H là giao điểm của BF và CE, tia HD cắt (O) tại K.

a) Chứng minh $H \in (O)$, tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BF.BH = BD.BC; AK \perp BC$.

c) Cho $\widehat{AEF} = 30^0$, $R = 6\,\text{cm}$. Tính $S_{quat\,AOB}$ và chứng minh $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

d) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh $OI \perp AH$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $H \in (O)$, tứ giác $AECD$ nội tiếp.

+) Xét ΔEBC có:

$CA \perp BE$ (Vì ΔABC vuông tại A) và $ED \perp BC$ (gt) mà $CA \cap ED = \{F\}$ nên F là giao điểm của 3 đường cao trong ΔEBC $\Rightarrow BF \perp EC$ tại H $\Rightarrow \widehat{BHC} = 90°$.

Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có $\widehat{BHC} = 90° \Rightarrow H \in (O)$.

+) Vì $CA \perp BE$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{CAE} = 90°$.

Vì $ED \perp BC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EDC} = 90°$.

Xét tứ giác $AECD$ có $\widehat{CAE} = \widehat{EDC} = 90°$ mà đỉnh A và D là hai đỉnh liền kề cùng nhìn cạnh EC nên $AECD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BF.BH = BD.BC; AK \perp BC$.

Xét ΔBDF và ΔBHC có:

$\widehat{HBC}$ là góc chung,

$\widehat{BDF} = \widehat{BHC} = 90°$

từ đó ta có $\Delta BDF \sim \Delta BHC$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{BH} \Rightarrow BF.BH = BD.BC$. (đpcm) (1)

+) Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có $\widehat{AHB} = \widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Xét tứ giác $FHCD$ có $\widehat{FHC} = 90°$ (Vì $BH \perp EC$ tại H).

$\widehat{FDC} = 90°$ (Vì $ED \perp BC$ tại D)

$\Rightarrow \widehat{FHC} + \widehat{FDC} = 180°$ mà $\widehat{FHD}$ và $\widehat{FCD}$ là hai góc đối nên tứ giác $FHCD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{FHD} = \widehat{FCD} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{FD}$ mà $\widehat{AHB} = \widehat{ACB}$ (cmt) nên $\widehat{AHB} = \widehat{FHD} \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{BHK}$.

Mặt khác $\widehat{AHB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$, $\widehat{BHK} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BK}$.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BK} \Rightarrow AB = BK$ (Liên hệ giữa cung và dây).

Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có $\widehat{BKC} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC} = \dfrac{180°}{2} = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta BKC$ vuông tại K.

Xét ΔBKC và ΔBAC có:

$\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = 90°$,

BC là cạnh chung,

$BA = BK$ (cmt)

Từ đó ta được $\Delta BKC = \Delta BAC$ (Cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow KC = AC$ mà $BA = BK$ nên BC là đường trung trực của AK $\Rightarrow AK \perp BC$. (đpcm)

c) Cho $\widehat{AEF} = 30°$, $R = 6$ cm. Tính $S_{quat\ AOB}$ và chứng minh $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

Xét ΔEBD vuông tại D (vì $ED \perp BC = \{D\}$)

$\Rightarrow \widehat{DEB} + \widehat{DBE} = 90°$ (2 góc nhọn phụ nhau) $\Rightarrow \widehat{DBE} = 90° - \widehat{DEB} = 90° - 30° = 60° \Rightarrow \widehat{OBA} = 60°$.

Xét ΔOBA có $OA = OB (= R) \Rightarrow \Delta OBA$ cân tại O. Mà $\widehat{OBA} = 60°$ nên ΔOBA đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60°$.

Xét $\left(O, \dfrac{BC}{2}\right)$ có sđ $\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB}$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn) $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 60°$.

$S_{quat\ AOB} = \dfrac{\pi R^2.60}{360} = \dfrac{\pi.6^2.60}{360} = 6\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

+) Xét ΔCDE và ΔCHB có:

$\widehat{CED} = \widehat{CBH}$ (góc nt cùng chắn cung DH) và $\widehat{CDE} = \widehat{CHB} = 90° \Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CHB$ c (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CH} = \dfrac{CE}{CB} \Rightarrow CD.CB = CH.CE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $BF.BH + CH.CE = BD.BC + CD.BC = BC.(BD + CD) = BC^2$.(đpcm)

d) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh $OI \perp AH$.

Xét ΔEAF vuông tại A có I là trung điểm của EF nên AI là đường trung tuyến của ΔEAF.

$\Rightarrow AI = IE = IE = \dfrac{1}{2}EF$. (3)

Xét ΔHEF vuông tại H có I là trung điểm của EF nên HI là đường trung tuyến của ΔHEF.

$\Rightarrow HI = IE = IF = \dfrac{1}{2}EF$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $HI = AI$. (5)

Xét (O) có $OA = OH = R$ (6)

Từ (5) và (6) ta được OI là đường trung trực của AH. Vậy $OI \perp AH$. (đpcm)

Bài 57. Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, trên đoạn OA lấy điểm I sao cho $AI = \dfrac{2}{3}.OA$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C không trùng M, N, B). Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh: Tứ giác $IECB$ nội tiếp và $AM^2 = AE.AC$.

b) Chứng minh: $AE.AC - AI.IB = AI^2$ và MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

c) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường trong ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $IECB$ nội tiếp và $AM^2 = AE.AC$.

Ta có: $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\widehat{BIE} = 90°$ (giả thiết).

$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BIE} = 90° + 90° = 180°$.

Tứ giác $IECB$ có tổng hai góc đối nhau bằng $180°$ nên nội tiếp được đường tròn.

* Chứng minh $AM^2 = AE.AC$.

- *Cách 1:*

Xét ΔAIE và ΔACB có:

$\widehat{ACB} = \widehat{BIE}\left(=90^\circ\right)$;

Chung $\widehat{BAC}$.

Do đó $\Delta AIE \backsim \Delta ACB$ (g – g).

Suy ra: $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AI.AB = AE.AC$ (1)

Lại có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M, có MI là đường cao

ta có $AM^2 = AI.AB$ (2) (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Từ (1) và (2) suy ra: $AM^2 = AE.AC$ (đpcm).

- *Cách 2:*

Ta có: $AB \perp MN$ (giả thiết) $\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$.

$\widehat{AME} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AN}$; $\widehat{ACM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AME}$.

Suy ra: $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$ (đpcm).

b) Chứng minh: $AE.AC - AI.IB = AI^2$ và MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

Ta có: $MI^2 = AI.IB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông AMB).

Mà: $AM^2 = AE.AC$ (cmt).

Do đó: $AE.AC - AI.IB = AM^2 - MI^2$

$= AI^2$ (định lý Pytago trong tam giác vuông AIM).

Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.

Ta có: $HM = HE \Rightarrow \Delta MHE$ cân tại H.

$\Rightarrow \widehat{HME} = \dfrac{180^\circ - \widehat{MHE}}{2} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{MHE}$.

Lại có: $\widehat{MCE} = \dfrac{1}{2}\widehat{MHE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung ME của đường tròn tâm H).

Do đó: $\widehat{HME} = 90° - \widehat{MCE}$.

ΔBIM vuông tại I nên: $\widehat{BMI} = 90° - \widehat{IBM}$.

Mà: $\widehat{MCE} = \widehat{IBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MA}$ của đường tròn (O)).

Suy ra: $\widehat{HME} = \widehat{BME}$.

Do đó, tâm H của đường tròn ngoại tiếp ΔMEC nằm trên BM.

Mà: $\widehat{AMB} = 90° \Rightarrow AM \perp BM$ hay $AM \perp HM$.

Vậy MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC (đpcm).

c) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường trong ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Ta có: NH nhỏ nhất khi $NH \perp BM$.

Khi đó, tứ giác $IHBN$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{HNI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HI)

$\Rightarrow \Delta MHN \backsim \Delta MIB$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MI} = \dfrac{MN}{MB}$

$\Rightarrow MH.MB = MI.MN$.

Mà $MN = 2MI$ nên: $\Rightarrow MH.MB = 2MI^2$.

Xét tam giác vuông OIM, có:

$MI^2 = MO^2 - OI^2 = R^2 - \left(\dfrac{1}{3}R\right)^2 = \dfrac{8R^2}{9}$.

Xét tam giác vuông BIM, có: $MB^2 = MI^2 + IB^2 = \dfrac{8R^2}{9} + \left(\dfrac{4}{3}R\right)^2 = \dfrac{8R^2}{3} \Rightarrow MB = \dfrac{2\sqrt{6}R}{3}$.

Do đó: $MH.\dfrac{2\sqrt{6}R}{3} = 2.\dfrac{8R^2}{9} \Rightarrow MH = \dfrac{8R}{3\sqrt{6}}$.

$\Rightarrow$ Điểm H thuộc tia MB sao cho $MH = \dfrac{8R}{3\sqrt{6}}$

Vì H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC nên $MH = HC = \dfrac{8R}{3\sqrt{6}}$.

Vậy điểm C là giao điểm của đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $\left(H;\dfrac{8R}{3\sqrt{6}}\right)$.

Bài 58. Cho nửa $(O;\ R)$ đường kính AB. C là điểm chính giữa cung AB. Điểm M thuộc cung AC. Hạ $MH \perp AB$ tại H, AC cắt MH tại K, MB cắt AC tại E, hạ $EI \perp AB$ tại I.

a) Chứng minh Tứ giác $AMEI$ nội tiếp và $AK.AC = AM^2$.

b) Chứng minh IE là phân giác $\widehat{MIC}$ và E là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCI

c) Cho $R = 5cm$ tính $S = AE.AC + BE.BM$ và cho $\widehat{ECI} = 30^0$ tính $S_{quat\,MOB}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh Tứ giác $AMEI$ nội tiếp và $AK.AC = AM^2$.

+ Ta có: $EI \perp AB(gt) \Rightarrow \widehat{AIE} = 90^0$

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $AMEI$ có $\left.\begin{array}{l}\widehat{AIE} + \widehat{AME} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \\ \widehat{AIE} \text{ và } \widehat{AME} \text{ đối nhau}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMEI$ nội tiếp

+ Ta có: $\widehat{MCA} = \widehat{ABM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{AMH}$ (cùng phụ với $\widehat{MAH}$)

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{AMH}$

Xét ΔAMK và ΔACM có:

$\widehat{MCA}$ chung

$\widehat{AMK} = \widehat{MCA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMK \backsim \Delta ACM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AK}{AM}$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AM^2 = AK.AC$ (đpcm)

b) Chứng minh IE là phân giác $\widehat{MIC}$ và E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCI

+ Ta có: tứ giác $AMEI$ nội tiếp (cm a)

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MIE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung ME) (1)

Xét nửa đường tròn (O) có: $\widehat{MAE} = \widehat{EBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC) (2)

Chứng minh Tứ giác $IECB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EIC} = \widehat{EBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \widehat{MIE} = \widehat{EIC}$

$\Rightarrow IE$ là phân giác $\widehat{MIC}$

+ Xét nửa đường tròn (O) có: $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Xét tứ giác $IECB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{ACI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IE)

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ACI} \Rightarrow CE$ là phân giác $\widehat{MIC}$

Xét ΔMIC có: IE, CE là phân giác mà IE cắt CE tại E

$\Rightarrow E$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCI

c) Cho $R = 5cm$ tính $S = AE.AC + BE.BM$ và cho $\widehat{ECI} = 30^0$. Tính $S_{quat\ MOB}$

+ Chứng minh: $\Delta AIE \backsim \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AI}{AC} \Rightarrow AE.AC = AI.AB$ (4)

Chứng minh: $\Delta BIE \backsim \Delta BMA$ (g.g)

$\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BI}{BM} \Rightarrow BE.BM = BI.BA$ (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AI.AB + BI.BA$

$\Rightarrow S = (\mathrm{AI} + \mathrm{BI})\,\mathrm{AB}$

$\Rightarrow \mathrm{S} = \mathrm{AB}^2$

$S = (2\,\mathrm{R})^2 = 4R^2 = 4.5^2 = 100$

+ Ta có: $\widehat{ECI} = \widehat{EBC}$ (cm b)

$\Rightarrow \widehat{EBI} = 30^0$

Xét ΔMOB có: $OM = OB \Rightarrow \Delta$MOB cân tại O

$\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{OMB} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{MOB} = 180^0 - 2.30^0 = 120^0$

$$S_{quat\ MOB} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi.5^2.120}{360} = 75\pi(\text{cm}^2)$$

Bài 59. Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm đoạn OB. Dây $CD \perp AB$ tại M. Điểm E thuộc cung lớn $DC(E \neq A)$, AE cắt CD tại K, BE cắt CD tại H.

a)Chứng minh: Bốn điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn và $AE.AK$ không đổi.

b)Gọi AH cắt BK tại G. Chứng minh $G \in (O)$ và MK phân giác $\widehat{EMG}$

c)Cho $R = 6cm$ Tính $S_{quat\ BOC}$ và chứng minh khi E di chuyển trên cung lớn DC thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBHK thuộc một đường tròn (thẳng) cố định.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{BEK} = \widehat{BMK} = 90°$ $\Rightarrow$ tứ giác $BMEK$ nội tiếp $\Rightarrow$ bốn điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn.

Vì tứ giác $BMEK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EMA} = \widehat{BKE}$ (cùng bù với $\widehat{BME}$).

Xét ΔAME và ΔAKB có:

$\widehat{MAE}$ chung

$\widehat{EMA} = \widehat{BKE}$

Vậy $\Delta AME \backsim \Delta AKB(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AK} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE.AK = AM.AB$$

Vì M là trung điểm đoạn $OB \Rightarrow OM = MB = \frac{R}{2}; AM = \frac{3R}{2}$.

Vậy $AE.AK = AM.AB = \frac{3R}{2}.2R = 3R^2$.

b)Trong ΔAKB có: $\begin{cases} KM \perp AB \\ BE \perp AK \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABK

$AG \perp BK \Rightarrow \widehat{BGA} = 90°$

$\Rightarrow G \in (O;R)$.

Tứ giác $BGHM$ có: $\widehat{BGH} + \widehat{BMH} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow BGHM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{GBH} = \widehat{GMH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{GH}$) (1)

Tứ giác $AMHE$ có: $\widehat{AMH} + \widehat{AEH} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow AMHE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{EMH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$) (2)

Trong (O): $\widehat{EAH} = \widehat{GBH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{GE}$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{GMH} = \widehat{EMH}$

$\Rightarrow MK$ là phân giác $\widehat{EMG}$

c) Vì $CD \perp AB$ tại $M \Rightarrow MC = MD$

$\Rightarrow BCOD$ là hình thoi

$\Rightarrow BC = OC = R$

$\Rightarrow \Delta BOC$ đều

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 60°$.

$S_{quat}BOC = \frac{\pi.R^2.60°}{360°} = \frac{\pi.6^2}{6} = 6\pi(cm^2)$

Gọi N là điểm đối xứng với A qua M. Vì A, M cố định nên N cố định.

Vì $KM \perp AN$ và $NM = MA \Rightarrow \Delta KNA$ cân

$\Rightarrow \widehat{NKM} = \widehat{AKM}$

Mà $\widehat{AKM} = \widehat{ABE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAK}$).

$\Rightarrow \widehat{NKM} = \widehat{ABE}$

$\Rightarrow NKHB$ nội tiếp .

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $NKHB$

$\Rightarrow IN = IB$

$\Rightarrow I \in$ trung trực của NB cố định

$\Rightarrow I$ thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 60. Cho nửa $(O;R)$ đường kính AB. Điểm M thuộc nửa (O). H là điểm chính giữa cung AM, tia BH cắt AM tại I, tiếp tuyến của (O) tại A cắt BH tại K, AH cắt BM tại E.

a) Chứng minh Tứ giác $IHEM$ nội tiếp và ΔABE cân.

b) Chứng minh $KH.KB = KE^2$ và tứ giác $AKEI$ là hình thoi.

c) Cho KE là tiếp tuyến của $(B;BA)$ và gọi AM cắt $(B;BA)$ tại N chứng minh tứ giác $BIEN$ nội tiếp.

Hướng dẫn

a) Chứng minh Tứ giác $IHEM$ nội tiếp và ΔABE cân.

Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nữa đường tròn).

Suy ra $\widehat{EHI} = \widehat{EMI} = 90°$.

Xét tứ giác $IHEM$, có: $\widehat{EHI} + \widehat{EMI} = 90° + 90° = 180°$

Suy ra tứ giác $IHEM$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$).

Ta có: $\widehat{AIH} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{AH} + sd\,\overset{\frown}{MB}}{2} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{HM} + sd\,\overset{\frown}{MB}}{2} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{HB}}{2} = \widehat{HAB}$.

Mà $\widehat{AIH} = \widehat{AEM}$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác $IHEM$ nội tiếp).

Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$.

Suy ra ΔABE cân tại B.

b) Chứng minh $KH.KB = KE^2$ và tứ giác $AKEI$ là hình thoi.

Xét ΔABE cân tại B có BH là đường cao.

Suy ra BH cũng là đường trung trực của AE.

Mà $K \in BH$ nên $KA = KE$ (tính chất đường trung trực).

Xét tam giác KAB vuông tại A có BH là đường cao, khi đó: $KA^2 = KH.KB$ (hệ thức lượng).

Mà $KA = KE$ (chứng minh trên).

Suy ra $KE^2 = KH.KB$.

Ta có: $\widehat{AKI} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ với $\widehat{HBA}$)

Mà $\widehat{HAB} = \widehat{AIK}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{AIK}$.

Suy ra ΔAIK cân tại A, có AH là đường cao

Suy ra AH cùng là đường trung tuyến.

Suy ra H là trung điểm của KI.

Xét tứ giác $AKEI$ có:

H là trung điểm của KI (chứng minh trên)

H là trung điểm của AE (chứng minh trên)

Suy ra $AKEI$ là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Mà $AE \perp KI$ tại H

Nên $AKEI$ là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi).

c) Chứng minh tứ giác $BIEN$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ (cùng phụ với $\widehat{BKE}$).

Mà $\widehat{E_1} = \widehat{N_1}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và day cung bằng góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$.

Suy ra $BIEN$ nội tiếp (hai góc liên tiếp cùng nhìn một cạnh).

Bài 61. Cho $(O;R)$ đường kính QK. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm A,B theo thứ tự Q,A,B,K sao cho $\widehat{AOB} = 90^0$, QA cắt BK tại S, QB cắt AK tại H, SH cắt QK tại I, $AF \perp QB$ tại F cắt (O) tại M.

a)Chứng minh: Tứ giác $SAHB$ nội tiếp và $SA.SQ = SB.SK$.

b)Chứng minh: $\widehat{AIB} = 90^0$ và $MB \perp AK$

c) Gọi N là trung điểm SH. Chứng minh $ON \perp AB$ và $SH = 2R$

Hướng dẫn

a) $\widehat{QAK}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{KAS}=90^0$

$\widehat{QBK}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{QBS}=90^0$

Xét tứ giác $SAHB$ có: $\widehat{HAS}+\widehat{HBS}=90^0+90^0=180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Nên tứ giác $SAHB$ nội tiếp .

Xét ΔSAK và ΔSBQ, ta có:

$\widehat{ASB}$ chung

$\widehat{SAK}=\widehat{SBQ}=90^0$

Vậy ΔSAK đồng dạng ΔSBQ

Suy ra : $SA.SQ=SB.SK$

ΔSQK có H là trực tâm. $\Rightarrow SI\perp QK$.

Tứ giác $HIKB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HKI}=\widehat{HBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Tứ giác $SAHB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ASH}=\widehat{ABH}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Tứ giác $SAIK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ASH}=\widehat{HKI}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Từ đó suy ra : $\widehat{ABI}=2.\widehat{AKO}$

Mà ΔAOK cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOQ} = 2.\widehat{AKO}$ (góc ngoài của tam giác)

Vậy $\widehat{ABI} = \widehat{AOQ}$. Suy ra tứ giác $AOIB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AIB} = 90^0$

Có $\widehat{AQB} = \widehat{AMB} = 90^0 : 2 = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

ΔMFB vuông có $\widehat{AMB} = 45^0 \Rightarrow \Delta MFB$ vuông cân.

$\Rightarrow \widehat{FMB} = \widehat{FBM} = \widehat{AQF}$

$\Rightarrow AQ // BM$

$\Rightarrow MB \perp AK$

Có tứ giác $SQIB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BQI} = \widehat{ISB}$

ΔBNS cân $\Rightarrow \widehat{NBS} = \widehat{ISB}$

Vậy $\widehat{NBS} = \widehat{BQI}$

Tứ giác $QABK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AQO} = \widehat{ABS}$

Từ đó , $\widehat{AQF} = \widehat{ABN} = 45^0$

ΔAOB vuông cân $\widehat{OBA} = 45^0$

Vậy $\widehat{OBN} = 90^0$

Chứng minh tương tự: $\widehat{OAN} = 90^0$

Tứ giác $OANB$ là hình vuông .

Suy ra $ON \perp AB$ và $OA = AN = \frac{1}{2}SH \Rightarrow SH = 2R$

Bài 62. Cho đường tròn tâm O đường kính AD. Trên nửa đường tròn lấy điểm B, C theo thứ tự A, B, C, D và $\widehat{BOC} = 90^0$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE.

a) Chứng minh Tứ giác $ABEH$ nội tiếp, và HE là phân giác $\widehat{BHC}$.

b)Chứng minh $AE.AC + DE.DB = AD^2$ và năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn

c)Chứng minh AB, DC, HE đồng quy, gọi điểm đồng quy tại M. Tính ME theo R.

d)Tìm quỹ tích điểm E khi B, C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho góc $\widehat{BOC} = 90^0$

Hướng dẫn

a) Xét (O) đường kính AD có:

$B \in (O)(GT) \Rightarrow \widehat{ABD} = 90°$ hay $\widehat{ABE} = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mặt khác

$EH \perp AD(GT) \Rightarrow \widehat{AHE} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{AHE} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Vậy tứ giác ABEH là tứ giác nội tiếp (DHNB)

Ta có $\widehat{ACD} = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa (O))

Nên $\widehat{ECD} + \widehat{EHD} = 90° + 90° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác EHDC là tứ giác nội tiếp(DHNB)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEH$ có:

$\widehat{BAE} = \widehat{BHE}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$) hay $\widehat{BAC} = \widehat{BHE}$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HECD$ có:

$\widehat{EHC} = \widehat{EDC}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$) hay $\widehat{EHC} = \widehat{BDC}$

Xét (O) có:

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Do đó $\widehat{BHE} = \widehat{EHC}$

Mà tia HE nằm giữa hai tia HB và HC

Nên tia HE là tia phân giác của $\widehat{BHC}$ (TC)

b) Ta có :

$$\Delta AHE \sim \Delta ACD(G.G) \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AE.AC = AH.AD$$

$$\Delta DHE \sim \Delta DBA(G.G) \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{DH}{DB} \Leftrightarrow DE.DB = AD.DH$$

$$\Rightarrow AE.AC + DE.DB = AH.AD + AD.DH = AD.(AH + HD) = AD^2$$

Ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ (Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} =$ sđ $\overset{\frown}{BC}$

Mà $\widehat{BOC} = 90°$ (GT), $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn $\overset{\frown}{BC}$ nên sđ $\overset{\frown}{BC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 90°$

$\widehat{BAC} = \widehat{BHE}(CMT)$

$\widehat{BDC} = \widehat{EHC}(CMT)$

$\Rightarrow \widehat{BHE} + \widehat{EHC} = 90° \Rightarrow \widehat{BHC} = 90°(1)$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BHE}+\widehat{EHC}=90^\circ\\ \widehat{BHE}=\widehat{EHC}(cmt)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{BHE}=\widehat{EHC}=45^\circ$$

$\widehat{EHC}=\widehat{EDC}(CMT)\Rightarrow \widehat{EDC}=45^\circ$

$\widehat{ECD}=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ECD$ vuông cân tại C

Mà I trung điểm của DE (GT)

Nên CI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của ΔECD

$\Rightarrow \widehat{EIC}=90^\circ$ hay $\widehat{BIC}=90^\circ(2)$

Mà $\widehat{BOC}=90^\circ(GT)(3)$

Từ (1),(2),(3) ta có 3 đỉnh O,H,I cùng nhìn BC dưới 1 góc bằng 90°

Nên 5 điểm B,O,H,I,C cùng thuộc một đường tròn.

c) Gỉa sử AB và CD cắt nhau tại M

Xét ΔAMD có:

AC là đường cao ứng với cạnh MD ($\widehat{ACD}=90^\circ$)

DB là đường cao ứng với cạnh MA ($\widehat{ABD}=90^\circ$)

Mà AC cắt DB tại E (GT)

Do đó E là trực tâm của ΔAMD (tính chất 3 đường cao)

$\Rightarrow ME\perp AD$

Mà $EH\perp AD(GT)$

Nên M,E,H thẳng hang

Vậy AB, DC, HE đồng quy, gọi điểm đồng quy tại M

Ta có : $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ mà sđ $\overset{\frown}{BC}=90^\circ(CMT)\Rightarrow \widehat{BAC}=45^\circ$ hay $\widehat{MAC}=45^\circ$

Xét ΔAMC có $\widehat{ACM}=90^\circ(cmt)$ mà $\widehat{MAC}=45^\circ(CMT)$ nên ΔAMC vuông cân tại C(DHNB)

$\Rightarrow CM=CA(TC)\Rightarrow CM^2=CA^2$

ΔECD vuông cân tại C(CMT)

$\Rightarrow EC=CD\Rightarrow EC^2=CD^2$

$\Rightarrow CM^2+EC^2=AC^2+CD^2$

Xét ΔMEC vuông tại M nên $ME^2 = MC^2 + EC^2$ (Định lí Pytago)

Xét ΔACD vuông tại C nên $AD^2 = AC^2 + CD^2$ (Định lí Pytago)

Do đó $ME^2 = AD^2 \Rightarrow ME = AD = 2R$

d) Xét (O) có:

$\widehat{CAD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ (Góc nộ tiếp chắn $\overset{\frown}{CD}$)

$\widehat{BDA} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (Góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{BDA} + \widehat{CAD} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AB}$ +sđ $\overset{\frown}{CD}$)= $= \frac{1}{2}$(180° -sđ $\overset{\frown}{BC}$)= $\frac{1}{2}(180° - 90°) = 45°$

hay $\widehat{EDA} + \widehat{EAD} = 45°$

Xét $\Delta AED: \widehat{EDA} + \widehat{EAD} = 45°(CMT) \Rightarrow \widehat{AED} = 135°$ (Định lí tổng ba góc của một tam giác)

Do đó điểm E luôn nhìn cạnh AD dưới 1 góc không đổi bằng $135°$

Vậy quĩ tích điểm E là cung chứa góc $135°$ dựng trên cạnh AD.

Bài 63. Cho ΔABC vuông tại A nội tiếp (O) đường kính BC. Từ một điểm D trên đoạn OC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E. Gọi H là giao điểm của BF và CE tia HD cắt (O) tại K. Chứng minh:

a) Tứ giác $AFHE$ nội tiếp; $CF.CA = CH.CE$

b) $AK \perp BC$; $BF.BH + CH.CE = BC^2$

c) Cho $\widehat{AEF} = 30^0, R = 6cm$ tính $S_{quat}AOB$ và gọi I là trung điểm EF. Chứng minh OA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔAHE.

Hướng dẫn

a) Ta có ΔABC vuông tại A nên $\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EAF} = 90^0$.

Xét ΔBEC có :

$ED \perp BC$

$CA \perp BE$

$CA; DE$ cắt nhau tại F

$\Rightarrow F$ là trực tâm của ΔBEC $\Rightarrow BH \perp EC \Rightarrow \widehat{FHE} = 90^0$

Xét tứ giác $AEHF$ có : $\widehat{FAE} + \widehat{FHE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $AEHF$ nội tiếp

Xét ΔCFH và ΔCEA có :

$\widehat{FHC} = \widehat{CAE}\ (= 90^0)$

$\widehat{FCH}$ chung

$\Rightarrow \Delta CFH\ \sim \Delta CEA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow CF.CA = CH.CE$ (Đpcm)

b) Xét tứ giác $AECD$ ta có:

$\widehat{EAC} = \widehat{EDC}\,(= 90^0)$

Mà A, D là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh EC

$\Rightarrow$ tứ giác $AECD$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$) (1)

Xét tứ giác $DFHC$ ta có:

$\widehat{FDC} + \widehat{FHC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{FDC}; \widehat{FHC}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $DFHC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FD}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{E_1}$

Xét đường tròn (O) ta có :

$\widehat{H_1} = \widehat{A_1}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$)

Mà $\widehat{H_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$, mà $\widehat{A_1}; \widehat{E_1}$ là hai góc đồng vị

$\Rightarrow AK // ED$. Ta có : $ED \perp BC \Rightarrow AK \perp BC$ (ĐPCM)

Xét ΔBFD và ΔBCH ta có :

$\widehat{FBD}$ chung

$\widehat{BDF} = \widehat{BHC}(= 90^0)$

$\Rightarrow \Delta BFD \sim \Delta BCH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{BH} \Rightarrow BF.BH = BC.BD$ (3)

Xét ΔCHB và ΔCDE ta có :

$\widehat{DCE}$ chung

$\widehat{BHC} = \widehat{CDE} (= 90^0)$

$\Rightarrow \Delta CHB \sim \Delta CDE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{CB}{CE} \Rightarrow CH.CE = BC.CD$ (4)

Từ (3) và (4), ta có : $BF.BH + CH.CE = BC.BD + BC.CD = BC.(BD + DC) = BC.BC = BC^2$

Vậy $BF.BH + CH.CE = BC^2$

c) Ta có $\widehat{AEF} = 30^0 \Rightarrow \widehat{E_1} = 30^0$

Mà $\widehat{E_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = 30^0$

Xét đường tròn (O) ta có : $\widehat{C_1}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 2\widehat{C_1} = 2.30^0 = 60^0$

$S_{\text{quat}} AOB = \dfrac{\pi R^2.n}{360^0} = \dfrac{\pi.6^2.60^0}{360^0} = 6\pi\,(cm^2)$

Ta có $\widehat{EAF} = 90^0$ $\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính EF

Ta có $\widehat{EHF} = 90^0 \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính EF

$\Rightarrow A$ và H thuộc đường tròn đường kính EF

$\Rightarrow \Delta AHE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF

Ta có I là trung điểm $EF \Rightarrow I$ là tâm của đường tròn đường kính EF

Ta có: $OA = OC \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ (5)

Xét ΔEAF vuông tại A ta có AI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền EF

$\Rightarrow AI = IE = IF = \dfrac{EF}{2} \Rightarrow \Delta IAF$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{IFA}$

Ta có $\widehat{IFA} = \widehat{CFD}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{IAF} = \widehat{IFA} \Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{CFD}$ (6)

Ta có $\widehat{OCA} + \widehat{CFD} = 90^0$ (7)

Từ (5), (6); (7) $\Rightarrow \widehat{IAF} + \widehat{OAF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OAI} = 90^0 \Rightarrow OA \perp IA$

Mà $A \in$ đường tròn ngoại tiếp ΔAHE.

$\Rightarrow OA$ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔAHE (đpcm).

Bài 64. Trên một đường thẳng lấy ba điểm A, B, C cố định theo thứ tự ấy. Gọi (O) là đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn luôn đi qua A và B. Vẽ đường kính IJ vuông góc với AB; E là giao điểm của IJ và AB. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm CI và CJ với (O). ($M \neq I, N \neq J$). Chứng minh:

a) IN, JM và CE đồng quy (gọi đồng quy tại D) và tứ giác $MDNC$ nội tiếp.

b) Gọi F là trung điểm của CD. Chứng minh: $OF \perp MN$ và ND là phân giác $\widehat{ENM}$.

c) Chứng minh FM là tiếp tuyến của (O) và $EA.EB = EC.ED$.

ΔCEJ

a) <u>Chứng minh</u> IN, JM và CE đồng quy (gọi đồng quy tại D) và tứ giác $MDNC$ nội tiếp.

* Xét (O) có IJ là đường kính (gt)

$\Rightarrow \widehat{IMJ} = \widehat{INJ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow IN \perp JC;\ JM \perp IC$

$\Rightarrow IN,\ JM$ là đường cao của tam giác IJC

Lại có CE cũng là đường cao của tam giác IJC (vì $CE \perp IJ$)

Do đó IN, JM, CE đồng quy (tại D) (tính chất ba đường cao).

* Xét tứ giác $MDNC$ có:

$\widehat{DMC} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{IMJ}$)

$\widehat{DNC} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{INJ}$)

Do đó $\widehat{DMC} + \widehat{DNC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MDNC$ nội tiếp (dhnb).

b) <u>Chứng minh</u>: $OF \perp MN$ và ND là phân giác $\widehat{ENM}$.

* Có M, N thuộc (O) $\Rightarrow OM = ON$ (1)

Tứ giác $MDNC$ nội tiếp đường tròn đường kính CD (cmt), F là trung điểm CD (gt)

$\Rightarrow FM = FN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra OF là đường trung trực của MN (t/c)

$\Rightarrow OF \perp MN$ (đpcm)

* Có $\widehat{IEC} = \widehat{INC} = 90^0$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $IENC$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{INE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IE)

Lại có tứ giác $MDNC$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{MND}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

Do đó: $\widehat{INE} = \widehat{MND}$ hay ND là phân giác của $\widehat{MNE}$ (đpcm).

c) Chứng minh FM là tiếp tuyến của (O) và $EA.EB = EC.ED$.

* Tam giác JED vuông tại E $\Rightarrow \widehat{EJD}+\widehat{EDJ}=90^0$

Mà $\widehat{EJD}=\widehat{OMD}$ (do tam giác OMD cân tại M)

$\widehat{EDJ}=\widehat{MDF}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{MDF}=\widehat{DMF}$ (do $FM=FD$ $\Rightarrow$ tam giác MFD cân tại F)

Do đó $\widehat{OMJ}+\widehat{JMF}=90^0$

Hay $OM\perp MF$

$\Rightarrow MF$ là tiếp tuyến của (O) (đpcm)

* Có B thuộc đường tròn đường kính IJ

$\Rightarrow \Delta IBJ$ vuông tại B, lại có BE là đường cao

$\Rightarrow BE^2=EI.EJ$ (hệ thức)

Mà $BE=EA$ (E là trung điểm AB)

$\Rightarrow BE.AE=EI.EJ$ (1)

Xét ΔIED và ΔCEJ có

$\widehat{IED}=\widehat{JEC}=90^0$

$\widehat{EID}=\widehat{ECJ}$ (cùng phụ với $\widehat{EJC}$)

Do đó $\Delta IED\backsim\Delta CEJ$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IE}{CE}=\dfrac{ED}{EJ}\Rightarrow DE.CE=EI.EJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE.AE=DE.CE$ (đpcm)

Bài 65. Cho ΔABC vuông tại A nội tiếp (O). Từ một điểm D trên đoạn thẳng OC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E. Gọi H là giao điểm của BF và CE. Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp và $BF.BH = BD.BC$.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh IH là tiếp tuyến (O) và $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

c) Khi D di chuyển trên BC thì H di chuyển trên một đường tròn cố định.

d) Chứng minh D là điểm cố định khi (O) thay đổi.**(Xem lại đề)**

Hướng dẫn

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp và $BF.BH = BD.BC$.

* Có ΔABC vuông tại A nội tiếp (O) (gt) $\Rightarrow \widehat{EAC} = 90^0$ (kề bù với góc BAC)

$ED \perp BC$ tại D (gt) $\Rightarrow \widehat{EDC} = 90^0$

Do đó Tứ giác AECD nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh EC dưới một góc vuông)

* Xét ΔBEC có CA và ED là hai đường cao cắt nhau tại F

$\Rightarrow BF$ là đường cao thứ ba của ΔBEC (t/c)

Mà H là giao điểm của BF và CE (gt)

$\Rightarrow BF \perp EC$ hay ΔBHC vuông tại H.

Xét ΔBDF và ΔBHC có:

$\begin{cases} \widehat{B} \text{ chung} \\ \widehat{BDF} = \widehat{BHC} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BDF \sim \Delta BHC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BH} = \dfrac{BF}{BC}$ (đ/n) $\Rightarrow BF.BH = BD.BC$ (đpcm)

b) Chứng minh IH là tiếp tuyến và $BF.BH + CH.CE = BC^2$.

* Có I là trung điểm của EF (gt), mà tam giác ΔEHF vuông tại H (cmt)

$\Rightarrow HI = IE = IF$ (t/c đường trung tuyến)

$\Rightarrow \Delta IFH$ cân tại I. $\Rightarrow \widehat{IFH} = \widehat{IHF}$

Mà $\widehat{IFH} = \widehat{DFB}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IHF} = \widehat{DFB}$ (1)

Có ΔBOH cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBH} = \widehat{OHB}$ (2)

Mà $\widehat{OBH} + \widehat{DFB} = 90^0$ (3) (ΔBDF vuông tại D)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{IHF} + \widehat{OHB} = 90^0 \Rightarrow OH \perp HI$

Mà H thuộc (O) (vì $\widehat{BHC} = 90^0$ (cmt))

$\Rightarrow IH$ là tiếp tuyến của (O) (đpcm)

* C/m được $\Delta EDC \sim \Delta BHC$ (có góc C chung và $\widehat{EDC} = \widehat{BHC} = 90^0$)

$\Rightarrow \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{CD}{HC}$

$\Rightarrow EC.HC = CD.CB$

Có $BF.BH = BD.BC$ (cmt)

$\Rightarrow BF.BH + CH.CE = BC^2$ (đpcm).

c) Khi D di chuyển trên BC thì H di chuyển trên một đường tròn cố định.

Vì H thuộc (O) (cmt), mà (O) không đổi nên H luôn thuộc một đường tròn cố định.

d) Chứng minh D là điểm cố định khi (O) thay đổi: Sai đề (vì cho đường tròn O cố định)

Bài 66. Cho ΔABC vuông ở C nội tiếp (O) đường kính AB và $BC < CA$. Lấy điểm I trên đoạn AB sao cho $IB > IA$. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB, d cắt AC ở F và cắt BC ở E, AE cắt FB tại N. Chứng minh:

a) Tứ giác $FCEN$ nội tiếp và $\Delta IBE \backsim \Delta IFA$

b) $IE.IF = IA.IB$ và NF là phân giác $\widehat{CNI}$

c) F là tâm đường tròn nội tiếp ΔICN và gọi M là điểm đối xứng với B qua I, cho A, I, B cố định sao cho $\widehat{ACB} = 90^0$. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFAE chạy trên một đường cố định.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $FCEN$ nội tiếp và $\Delta IBE \backsim \Delta IFA$

Xét ΔABE có $AC \perp BE$ (vì ΔABC vuông tại C)

$EI \perp AB$ (vì $d \perp AB$ tại I)

$EI \cap AC = \{F\}$

Suy ra : F là trực tâm của ΔABE $\Rightarrow BF \perp AE$ tại N $\Rightarrow \widehat{ANF} = 90^0$

Xét tứ giác $FCEN$ có $\widehat{FCE} + \widehat{FNE} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow FCEN$ nội tiếp (đpcm)

Vì tứ giác $FCEN$ nội tiếp nên $\widehat{CEF} = \widehat{CNF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CF}$)

mà $\widehat{CNF} = \widehat{BAF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Do đó $\widehat{CEF} = \widehat{BAF}$ hay $\widehat{BEI} = \widehat{IAF}$

Xét ΔIBE và ΔIFA có: $\widehat{BIE} = \widehat{FIA}$ $\left(= 90^0\right)$

$\widehat{BEI} = \widehat{IAF}$ (cmt)

Vậy $\Delta IBE \backsim \Delta IFA$ (đpcm)

b) $IE.IF = IA.IB$ và NF là phân giác $\widehat{CNI}$

Vì ΔIBE " ΔIFA (cmt) suy ra $\frac{IE}{IA}=\frac{IB}{IF}\Leftrightarrow IE.IF=IA.IB$ (đpcm)

Vì tứ giác $ABCN$ nội tiếp (O) nên $\widehat{BAC}=\widehat{BNC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Xét tứ giác $ANFI$ có $\widehat{ANF}+\widehat{AIF}=90^0+90^0=180^0$

Suy ra tứ giác $ANFI$ nội tiếp nên $\widehat{IAF}=\widehat{FNI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FI}$)

Suy ra: $\widehat{FNI}=\widehat{BNC}$ hay $\widehat{BNI}=\widehat{BNC}$. Do đó NF là phân giác $\widehat{CNI}$ (đpcm)

c) F là tâm đường tròn nội tiếp ΔICN và gọi M là điểm đối xứng với B qua I, cho A,I,B cố định sao cho $\widehat{ACB}=90^0$. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFAE chạy trên một đường cố định.

Xét tứ giác $BCFI$ có $\widehat{BCF}+\widehat{BIF}=90^0+90^0=180^0$

Suy ra tứ giác $BCFI$ nội tiếp nên $\widehat{CBF}=\widehat{FIC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$)

mà $\widehat{NAF}=\widehat{FIN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FN}$) và $\widehat{CBN}=\widehat{NAC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NC}$)

suy ra $\widehat{NIF}=\widehat{FIC}$. Do đó IF là tia phân giác của $\widehat{CIN}$

Xét ΔICN có NF là phân giác $\widehat{CNI}$ (cmt)

IF là tia phân giác của $\widehat{CIN}$ (cmt)

$NF\cap IF=\{F\}$

Do đó F là tâm đường tròn nội tiếp ΔICN (đpcm)

Xét ΔBEM có EI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao nên ΔBEM cân tại E

Suy ra $\widehat{BME}=\widehat{MBE}$ mà $\widehat{MBE}=\widehat{CFE}$ (góc ngoài bằng đối góc trong của tứ giác $BCFI$ nội tiếp)

nên $\widehat{BME}=\widehat{CFE}$

Xét tứ giác $AMEF$ có $\widehat{BME}=\widehat{CFE}$ hay $\widehat{AME}=\widehat{CFE}$ nên tứ giác $AMEF$ nội tiếp đường tròn.

Do đó tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $AMEF$ nằm trên đường trung trực của AM.

Do A,I,B cố định và M là điểm đối xứng với B qua I nên M cố định $\Rightarrow AM$ cố định $\Rightarrow$ đường trung trực của AM cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFAE chạy trên một đường cố định là trung trực của AM.

Bài 67. Cho ba điểm A,B,C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC vẽ cát tuyến AMN của (O). Tia CM cắt d tại D. Tia DB cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Chứng minh:

a) Tứ giác $ABMD$ nội tiếp và tích $CM.CD$ không phụ thuộc vào vị trí M

b) Chứng minh: $NP \perp AC$ và cho $\widehat{ADB} = 40^0, R = 5cm$. Tính $S_{quat}NOC$

c) Trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $ABMD$ nội tiếp và tích $CM.CD$ không phụ thuộc vào vị trí M

Xét ΔBMC có $M \in (O)$ và BC là đường kính nên $\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0$

Xét tứ giác $ABMD$ có $\widehat{BMD} + \widehat{BAD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó tứ giác $ABMD$ nội tiếp (đpcm)

Xét ΔBCM và ΔDCA có: $\widehat{ACD}$ chung

$\widehat{DAC} = \widehat{BMC} (= 90^0)$

Suy ra ΔBCM ” ΔDCA(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{CM}{CA} \Leftrightarrow DC.CM = BC.CA$

Vì A, B, C cố định nên $BC.CA$ không đổi do đó $DC.CM$ không đổi (đpcm).

b) Chứng minh: $NP \perp AC$ và cho $\widehat{ADB} = 40^0, R = 5cm$. Tính $S_{quat}NOC$

Có tứ giác $BMNP$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{MNP} = \widehat{MBD}$ (góc ngoài bằng đối góc trong)

mà $\widehat{MBD} = \widehat{MAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DM}$)

suy ra $\widehat{MNP} = \widehat{MAD}$ mà 2 góc ở vị trí so le trong nên $NP \,//\, AD$

Lại có $AD \perp AC$ (gt) nên $NP \perp AC$ (đpcm)

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AMB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

mà $\widehat{AMB} = \widehat{BCN}$ (góc ngoài bằng đối góc trong)

Suy ra $\widehat{BCN} = \widehat{ADB}$. Vì $\widehat{ADB} = 40^0$ nên $\widehat{BCN} = 40^0$ hay $\widehat{OCN} = 40^0$

Xét ΔOCN có $OC = ON$ nên ΔOCN cân tại O $\Rightarrow \widehat{OCN} = \widehat{ONC} = 40^0$

$\Rightarrow \widehat{CON} = 180^0 - 2.40^0 = 100^0$.

Diện tích hình quạt CON là: $S_{CON} = \dfrac{\pi.R^2.n}{360^0} = \dfrac{\pi.5^2.100^0}{360^0} \approx 21,8\left(cm^2\right)$

c) Trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định.

Gọi I là trung điểm AC. Vì A, C cố định nên I cố định.

Từ trọng tâm G của ΔMAC kẻ $GP \,//\, MB$ nên P cố định, kẻ $GJ \,//\, MC$ nên J cố định.

Vì $GP \,//\, MB$, $GJ \,//\, MC$ và điểm I, J cố định nên G di động trên đường tròn đường kính PJ cố định.

Vậy trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 68. Cho đoạn thẳng AC kẻ đường thẳng $d \perp AC$ tại A, trên AC lấy điểm M, dựng (O) đường kính MC, kẻ cát tuyến AEF, tia CE cắt d tại B. Tia BM cắt (O) tại D. Đường thẳng AD cắt (O) tại S. Chứng minh:

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp, CA là phân giác $\widehat{SCB}$.

b) AB; EM; CD đồng quy và $FD \perp AC$.

c) Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE và $CM.CA = CE.CB$.

d) Vẽ (K) đường kính MB ngoại tiếp tứ giác $ABEM$. Kẻ tiếp tuyến chung của (O) và (K) tại P và Q. Chứng minh ME đi qua trung điểm PQ.

Hướng dẫn

a) $D \in \left(O;\dfrac{MC}{2}\right) \Rightarrow \widehat{MDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ$

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Tứ giác $MCDS$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SCM} = \widehat{SDM} \Rightarrow \widehat{SCA} = \widehat{ADB}$.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{SCA} \Rightarrow CA$ là phân giác của góc SCB.

b) Gọi N là giao điểm của BA và CD.

Ta có $CA \perp BA \Rightarrow CA \perp BN$

$BD \perp CD$ (do $\widehat{BDC} = 90^\circ$) $\Rightarrow BD \perp CN$.

Xét ΔNBC có: $CA \perp BN$; $BD \perp CN$ mà CA và BD cắt nhau tại M nên M là trực tâm của ΔNBC.

$\Rightarrow NM$ là đường cao của $\Delta NBC \Rightarrow NM \perp BC$ (1).

$E \in \left(O;\dfrac{MB}{2}\right) \Rightarrow \widehat{MEB} = 90^\circ \Rightarrow ME \perp EB \Rightarrow ME \perp BC$ (2).

Áp dụng tiên đề Ơclit từ (1) và (2) suy ra N; M; E thẳng hàng.

Suy ra AB; EM; CD đồng quy.

Ta có: $\widehat{FDC} = \widehat{FEC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$)

Mà $\widehat{FEC} = \widehat{BEA}$ (hai góc đối đỉnh).

Tứ giác $ABEM$ có $\widehat{BEM} + \widehat{BAM} = 180^0 \Rightarrow ABEM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AMB}$.

Tứ giác $MAND$ có $\widehat{MAN}+\widehat{MDN}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow MAND$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BMA}=\widehat{BND}=\widehat{BNC} \Rightarrow \widehat{BEA}=\widehat{BNC} \Rightarrow \widehat{FDC}=\widehat{BNC} \Rightarrow FD // BN$ (hai góc đồng vị)

Mà $BN \perp AC \Rightarrow FD \perp AC$.

c) Theo câu a) tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NAD}=\widehat{DCB}$

Tứ giác $AECN$ có: $\widehat{NEC}=\widehat{CAN}=90° \Rightarrow AECN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{ECN}=\widehat{DCB}$

$\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{NAD}$

$\Rightarrow \widehat{MAE}=\widehat{MAD} \Rightarrow AM$ là đường phân giác trong ΔADE.

Tương tự EM cũng là đường phân giác trong ΔADE suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

Tứ giác $ABEM$ nội tiếp (câu b) $\Rightarrow CM.CA=CE.CB$ (tính chất cát tuyến).

d) Gọi L là giao điểm của ME và PQ

Ta có $LQ^2=LE.LM$ (tính chất cát tuyến và tiếp tuyến)

$LP^2=LE.LM$ (tính chất cát tuyến và tiếp tuyến)

$\Rightarrow LQ^2=LP^2 \Rightarrow LQ=LP$

$\Rightarrow ME$ đi qua trung điểm L của PQ

Bài 69. Cho ΔABC vuông tại A có $AB=3AC$. Trên cạnh AB lấy một điểm D sao cho $DB=2DA$. Vẽ (O) đường kính BD cắt BC tại E. Đường thẳng CD; AE cắt (O) tại F,G. Chứng minh:

a)Tứ giác $ADEC$; $AFBC$ nội tiếp.

b) $\Delta ABC \backsim \Delta EBD$ và $AC // FG$

c) AC; DE; BF đồng quy và D là tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF

Hướng dẫn

a) $E \in \left(O;\frac{BD}{2}\right) \Rightarrow \widehat{BED} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^0$.

Tứ giác $ACED$ có $\widehat{DAC} + \widehat{DEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow ACED$ nội tiếp.

$F \in \left(O;\frac{BD}{2}\right) \Rightarrow \widehat{BFD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^0$.

Tứ giác $AFBC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BAC}\ \left(= 90^0\right) \Rightarrow AFBC$ nội tiếp.

b) ΔABC và ΔEBD có:

$\widehat{ABC}$ chung, $\widehat{BAC} = \widehat{BED} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta EBD\,(g.g)$

Ta có $\widehat{BFG} = \widehat{BEG}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà $\widehat{BEG} = \widehat{AEC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BFG} = \widehat{AEC}$

$ADEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{BFG} = \widehat{ADC}$

$\Rightarrow 90^0 - \widehat{BFG} = 90^0 - \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{GFD} = \widehat{ACD} \Rightarrow AC//FG$ (Hai góc sole trong).

c) Gọi P là giao điểm của AC và BF.

Ta có $BA \perp AC \Rightarrow BA \perp CP$

$CF \perp BF \Rightarrow CF \perp BP$

ΔBCP có $BA \perp CP$; $CF \perp BP$. Mà AB; CF cắt nhau tại D nên D là trực tâm của ΔBCP

$\Rightarrow PD \perp BC$ (1).

$\widehat{DEC} = 90^0 \Rightarrow DE \perp BC$ (2)

Áp dụng tiên đề Ơclit từ (1) và (2) suy ra P; D; E thẳng hàng $\Rightarrow AC$; BF; DE đồng quy tại một điểm.

Tứ giác $AEBP$ có $\widehat{PAB} = \widehat{PEB} = 90^0 \Rightarrow AEBP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{EBP} = \widehat{CBP}$.

Lại có $AFBC$ nội tiếp (câu a) $\Rightarrow \widehat{PAF} = \widehat{FBC} = \widehat{PBC}$

$\Rightarrow \widehat{PAF} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{EAD} \Rightarrow AD$ là phân giác $\widehat{EAF}$

Tương tự FD là phân giác của $\widehat{AFE}$ của ΔAEF suy ra D là tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF.

Bài 70. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK.

a) Chứng minh tứ giác $ACFD$ nội tiếp và $DE//CK$.

b) Chứng minh AC^2=AF.AK và $\widehat{OCA}=\widehat{BAD}$.

c) Tính $S_{quat}OKC$ biết $\widehat{ABC}=60^o$ và $R=4cm$ và cho BC cố định, A chuyển động sao cho ΔABC nhọn. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF không đổi.

Hướng dẫn

a) Có $AD\perp BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ADC}=90^o$, $CF\perp AK$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AFC}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{AFC}=90^o$, mà hai góc này thuộc hai đỉnh D,F kề nhau cùng nhìn AC dưới một góc 90° không đổi nên tứ giác $ACFD$ nội tiếp.

* Kéo dài DE cắt AC ở I

Chứng minh tương tự như trên ta có tứ giác $AEBD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{ADE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

$\widehat{AKB}=\widehat{ABE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAE}$)

$\widehat{ACB}=\widehat{AKB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Từ đó suy ra: $\widehat{ACB}=\widehat{ADE}$, mà $\widehat{ADE}+\widehat{EDC}=90^o \Rightarrow \widehat{ACB}+\widehat{EDC}=90^o$

$\Rightarrow \Delta DIC$ vuông tại I $\Rightarrow DE\perp AC$ tại I (1)

Mặt khác $\widehat{ACK}=90^o$ (góc nội tiếp chăn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK\perp AC$ tại C (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $DE//CK$

b) Xét ΔAFC và ΔACK có:

$\hat{A}$: chung, $\widehat{AFC}=\widehat{ACK}$

$\Rightarrow \Delta AFC\sim\Delta ACK$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AC}{AK}$ (tỉ số đồng dạng) $\Rightarrow AC^2=AF.AK$ (đpcm)

* Có: $\begin{cases} \widehat{AKC}+\widehat{KAC}=90^o \\ \widehat{ABD}+\widehat{BAD}=90^o \\ \widehat{ABD}=\widehat{AKC}(cmt) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{KAC}$ (3)

Ta lại có: ΔOAC cân tại $O(OA=OC)$ nên: $\widehat{OCA}=\widehat{OAC}$ hay $\widehat{OCA}=\widehat{KAC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{OCA}$.

c) Vì $\widehat{ABC}=60^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AOC}=120^o$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

Mà $\widehat{AOC}+\widehat{COK}=180^o$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{COK}=60^o$

$\Rightarrow S_{quat}OKC=\dfrac{4^2.\pi.60^o}{360^o}=\dfrac{8\pi}{3}(cm^2)$

* Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $BC,AC \Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow MN//AB$, mà $AB\perp BK(\widehat{ABK}=90^o)$ $\Rightarrow MN\perp BK$

Ta lại có: $\widehat{AKB}=\widehat{AFD}$ (vì cùng bằng $\widehat{ACB}$), mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DF//BK$

Từ đó suy ra: $\Rightarrow MN\perp DF$

Trong hai tam giác vuông $\Delta ADC,\Delta AFC$ ta có:

$DN=\dfrac{1}{2}AC,FN=\dfrac{1}{2}AC\Rightarrow DN=FN\Rightarrow \Delta DFN$

cân tại N

Mà $MN\perp DF$ (cmt) $\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $DF\Rightarrow MD=MF$

Chứng minh tương tự có: $MD=ME$, từ đó suy ra M là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔDEF

Mà BC cố định nên M cố định.

Bài 71. Cho ΔABC nhọn nội tiếp $(O;R)$ các đường cao BH, CK cắt nhau tại Q và cắt (O) tại D và E. AQ cắt BC tại S

a) Chứng minh tứ giác $BKHC$ nội tiếp và $DE//HK$.

b) Chứng minh $OA\perp HK$ và Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔSHK.

c) ΔAOD cân và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC thỏa mãn ΔABC nhọn.

Hướng dẫn

a)Chứng minh tứ giác $BKHC$ nội tiếp và $DE//HK$.

Xét tứ giác $BKHC$ có $\widehat{BKC}=\widehat{BHC}=90^0(BH\perp AC;CK\perp AB)$ mà K,H là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC => tứ giác $BKHC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Xét (O) có $\widehat{EDB}=\widehat{ECB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE) (1)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKHC$ có $\widehat{KHB}=\widehat{ECB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK) (2)

Từ (1) và (2) => $\widehat{EDB}=\widehat{KHB}$ => $ED//KH$ (đồng vị)

b)Chứng minh $OA\perp HK$ và Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔSHK.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKHC$ có $\widehat{KBH}=\widehat{KCH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KH) => $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$

Xét (O) có $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}(cmt)$ => $cung\ AE=cungAD$

=> A là điểm chính giữa của cung ED nhỏ.

mà OA là một phần đường kính

=> $OA\perp ED$ (đ/l)

Mà ED//KH(cm câu a)

=> $OA\perp KH$ (đpcm)

Cho ΔABC có các đường cao BH, CK cắt nhau tại Q

=> Q là trực tâm ΔABC => $AQ\perp BC$ => $\widehat{QSC}=90^0$

Xét tứ giác $QHCS$ có $\widehat{QSC}=\widehat{QHC}=90^0$(cmt) mà S,H là hai đỉnh đối nhau

=> tứ giác $QHCS$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $QHCS$ có $\widehat{QHS}=\widehat{QCS}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QS) => $\widehat{BHS}=\widehat{ECB}$ mà $\widehat{KHB}=\widehat{ECB}$ (cm câu a)

=> $\widehat{KHB} = \widehat{BHS}$ => HB là tia phân giác của $\widehat{KHS}$.(3)

Chứng minh tương tự KC là tia phân giác của $\widehat{HKS}$ (4)

Từ (3) và (4) ; KC cắt HB tại Q => Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔSKH .

c. ΔAOD có $OA = OD = R$ => ΔAOD cân.

Chứng minh tứ giác $AKQH$ là tứ giác nội tiếp (vì $\widehat{AKQ} = \widehat{AHQ} = 90^0$)

=> A, K, Q, H thuộc đường tròn đường kính AQ

=> đường tròn ngoại tiếp ΔAHK có bán kính là $\frac{AQ}{2}$

Kéo dài AO cắt (O) ở M

Xét (O) có $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $CM \perp AC$ mà $BH \perp AC(gt)$ => BM//CM (5)

Chứng minh tương tự BM//CK (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác BMCQ là hình bình hành

Gọi N là giao điểm của BC và QM => N là trung điểm của BC và QM (t/c hbh).

Xét ΔAQM có O là trung điểm AM; N là trung điểm QM => ON là đường trung bình

=> $ON = \frac{AQ}{2}$ (t/c đường trung bình)

Có BC cố định, N là trung điểm BC nên N cố định

=> ON không đổi => $\frac{AQ}{2}$ không đổi

=> bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC thỏa mãn ΔABC nhọn.

Bài 72. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn tâm O, bán kính R $(0 < BC < 2R)$. Gọi A là điểm di chuyển trên cung BC lớn sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tai H $(D \in BC, E \in AC, F \in AB)$, đường thẳng BE cắt (O) tại K.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp và $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$

b) Chứng minh ΔAHK cân và EH là phân giác của $\widehat{FED}$

c) Chứng minh $AO \perp FE$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi khi A di chuyển trên cung BC lớn sao cho ΔABC nhọn

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $BFEC$ có

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$

Mà hai đỉnh F, E cùng nhìn cạnh BC

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ có:

$\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FB)

Xét ΔFHE và ΔCHB có

$\widehat{FHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta FHE \backsim \Delta CHB (g-g)$

b) Xét (O) có

$\widehat{KAC} = \widehat{KBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC)

Có $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

$\Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{HAE} \Rightarrow AE$ là phân giác của $\widehat{KAH}$

Xét ΔAHK có AE là phân giác của, là đường cao

$\Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A.

Xét tứ giác $EHDC$ có $\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 180^0$

Suy ra tứ giác $EHDC$ nội tiếp$\Rightarrow \widehat{HEC} = \widehat{HDC}$

Mà $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (cmt)$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{DEB}$

$\Rightarrow EH$ là phân giác của $\widehat{FED}$

c) Kẻ đường kính AG, gọi N là giao điểm của AG và FE

có tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với $\widehat{FEC}$)

Xét (O) có

$\widehat{AGC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)$\Rightarrow \widehat{AEN} = \widehat{AGC}$

Có $\widehat{ACG} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{CAG} + \widehat{AGC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NAE} + \widehat{AEN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ANE} = 90^0 \Rightarrow AO \perp FE$

Xét (O) có

$\widehat{ACG} = \widehat{ABG} = 90^0 \Rightarrow HB//CK, CH//BK$

$\Rightarrow$ tứ giác $BHCG$ là hình bình hành$\Rightarrow$ M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ OM là đường trùn bình tam giác $AHG \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$

Tứ giác $AEHF$ nội tiếp vì có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^0$

$\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nhận AH là đường kính

Mà $AH = 2OM$ (không đổi)

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi khi A di chuyển trên cung BC lớn sao cho ΔABC nhọn.

Bài 73. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc AK, cho $\widehat{ABC} = 60^0$ và $R = 4cm$.

a) Chứng minh tứ giác $ACFD$ nội tiếp và $AB^2 = AE.AK$.

b) Chứng minh $DF//BK$ và tính $S_{quat}OKC$.

c) Cho BC cố định, A chuyển động. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) + Xét tứ giác $ACFD$ ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ (vì AD là đường cao, $CF \perp AK$)

mà hai đỉnh D, F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AC dưới một góc không đổi

Nên tứ giác $ACFD$ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

+ Nối B với K. Suy ra $\widehat{ABK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

+ Xét ΔABE và ΔAKB có $\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{ABK} = 90^\circ \\ \widehat{BAK}\ chung \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta AKB(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AK.AE$

b) + Vì tứ giác $ACFD$ nội tiếp nên $\widehat{CDF} = \widehat{FAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FC)

Mà $\widehat{KBC} = \widehat{KAC}$ *hay* $\widehat{KBC} = \widehat{FAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC trong (O))

Suy ra $\widehat{CDF} = \widehat{KBC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DF//BK$ (DHNB)

+ Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{AKC} = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC trong (O))

Mà ΔAKC vuông tại C (vì $\widehat{ACK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

Suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{ACO} = 30^\circ$ (vì ΔOAC cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{KOC} = 2.\widehat{OAC} = 2.30^\circ = 60^\circ$ (Vì $\widehat{KOC}$ là góc ngoài của ΔOAC)

$\Rightarrow S_{quat\,OKC} = \dfrac{\pi.R^2.n}{360} = \dfrac{\pi.16.60}{360} = \dfrac{8\pi}{3}(cm^2)$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB , AC. Gọi I là trung điểm BC .

Suy ra NI là đường trung bình của ΔBAC

$\Rightarrow NI//AB \Rightarrow NI \perp BK\,(do\,AB \perp BK) \Rightarrow NI \perp DF\,(do\,BK//DF)$

+ Vì tứ giác $ACFD$ nội tiếp đường tròn đướng kính AC mà N là trung điểm AC

Nên $ND = NF$ $\Rightarrow N \in$ đường trung trực của DF mà $NI \perp DF$ nên $I \in$ đường trung trực của $DF \Rightarrow ID = \text{IF}$ (1)

+ Ta có: $\widehat{EDC} = \widehat{BAK}$ (trong tứ giác $AEDB$ nội tiếp, góc ngoài tại đỉnh này bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

mà $\widehat{BCK} = \widehat{BAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK)

$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{EDC} \Rightarrow DE//KC \Rightarrow DE \perp AC\,(do\,CK \perp AC)$

$\Rightarrow DE \perp MI\,(do\,MI//AC)$

+ Một cách tương tự chứng minh được $MD = ME \Rightarrow M \in$ đường trung trực của DE mà $DE \perp MI \Rightarrow I \in$ đường trung trực của DE

$\Rightarrow ID = \text{IE}$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF mà I là trung điểm BC nên I là điểm cố định.

Bài 74. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn tâm O, bán kính R ($0 < BC < 2R$). A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc CA, F thuộc AB).

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$.

b) Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Chứng minh $d // EF$ và EH là phân giác của góc $\widehat{FED}$

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AH = 2IO$; gọi BE, CF cắt (O) tại P, Q. Chứng minh $EF = \frac{1}{2}PQ$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$.

Nối Q với A, nối E với F, nối E với D

Ta có BE, CF là các đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AEH} = 90° \\ \widehat{AFH} = 90° \end{cases}$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180° \Rightarrow$ tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

Xét ΔABE và ΔACF có $\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90° \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACF\,(g.g)$

$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$.

b) Chứng minh $d // EF$ và EH là phân giác của góc $\widehat{FED}$

Theo ý a) ta có $AE.AC = AF.AB \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

Kẻ đường kính AM

Xét ΔAEF và ΔABC có

$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}\ chung\\ \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC\left(c.g.c\right)\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ACB}$ (cặp góc tương ứng) (1)

Ta có d là tiếp tuyến với đường tròn $\left(O\right)$ tại $A\Rightarrow \widehat{BAx}=\dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AB}$ (2)

Mà $\widehat{ACB}=\widehat{AMB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$, suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{AMB}=\dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{BAx}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\widehat{AFE}=\widehat{BAx}$, mặt khác hai góc $\widehat{AFE};\widehat{BAx}$ ở vị trí so le trong. Suy ra $d\,//\,EF$.

Vậy $d\,//\,EF$.

- Ta có tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{HAF}=\widehat{HEF}\left(5\right)$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HF}$)
- Xét tứ giác $HECD$ có $\widehat{HDC}+\widehat{HEC}=180^\circ\Rightarrow$ tứ giác $HECD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{HED}=\widehat{HCD}\left(6\right)$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HD}$), mà $\widehat{HAF}=\widehat{HCD}\left(7\right)$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

Từ (5), (6) và (7) suy ra $\widehat{HEF}=\widehat{HED}$, mặt khác tia EH nằm giữa hai tia EF và ED, từ đó ta

có EH là phân giác của góc $\widehat{FED}$.

Vậy EH là phân giác của góc $\widehat{FED}$.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AH=2IO$; gọi BE,CF cắt (O) tại P,Q. Chứng minh $EF=\dfrac{1}{2}PQ$.

Kẻ đường kính AM, ta có $\widehat{ACM}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MC\perp AC$, mà $BE\perp AC$ (gt), từ đó suy ra $MC\,//\,BE$ (quan hệ từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow MC\,//\,BH$

. Chứng minh tương tự ta có $MB\,//\,CH$.

Xét tứ giác $BHCM$ có

$\left.\begin{array}{l}MC\,//\,BH\\ MB\,//\,CH\end{array}\right\}\Rightarrow$ tứ giác $BHCM$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Suy ra hai đường chéo BC,HM cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, mặt khác ta có I là trung điểm của $BC\Rightarrow I$ là trung điểm của HM.

Xét ΔMAH có I, O lần lượt là trung điểm của hai cạnh HM và AM, suy ra OI là đường trung bình của $\Delta MAH \Rightarrow AH = 2IO$.

Vậy $AH = 2IO$.

+ Chứng minh $EF = \frac{1}{2}PQ$

Thật vậy, ta có $\widehat{QAB} = \widehat{QCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{QB}$), mà $\widehat{QCB} = \widehat{BAD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$), từ đó suy ra $\widehat{QAB} = \widehat{BAD} \Rightarrow AF$ là phân giác của góc $\widehat{QAH}$.

Xét ΔQAH có AF vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔQAH cân tại $A \Rightarrow AF$ là trung tuyến, suy ra F là trung điểm của QH.

Chứng minh tương tự ta cũng có E là trung điểm của HP.

Xét ΔHPQ có F là trung điểm của QH, E là trung điểm của HP, suy ra EF là đường trung bình của $\Delta HPQ \Rightarrow EF = \frac{1}{2}PQ$.

Vậy $EF = \frac{1}{2}PQ$.

Bài 75. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AK. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp và ba điểm H, I, K thẳng hàng .

b) Chứng minh $DH.DA = DB.DC$ và cho $\widehat{ABC} = 45^0$, $R = 4cm$. Tính $S_{quat}KOC$.

c) Khi BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Tìm vị trí của A để diện tích ΔEAH lớn nhất .

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp .

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BEC} = 90^0 (gt)\\ \widehat{BFC} = 90^0 (gt)\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC}$$

Suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp

(có 2 đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn BC dưới một góc không đổi)

Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng .

Ta có : $\widehat{ACK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $KC \perp AC$

mà $BE \perp AC (gt)$ nên $KC // BE$ *hay* $KC // BH$ (1)

$\widehat{ABK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB \perp BK$

mà $CF \perp AB(gt)$ nên $BK // CF$ *hay* $BK // CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành

Mà I là trung điểm của BC (gt) nên I cũng là trung điểm của HK hay ba điểm H, I, K thẳng hàng .

b) Chứng minh $DH.DA = DB.DC$.

Xét ΔDHC và ΔDBA có

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{DCH} = \widehat{DAB}(\text{cùng phu với } \widehat{ABC}) \\ \widehat{CDH} = \widehat{ADB} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DHC \infty \Delta DBA(g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{DH}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow DH.DA = DB.DC$$

Tính $S_{quat}KOC$

Ta có : $\widehat{ABK} = 90^0$ mà $\widehat{ABC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{KBC} = 45^0$

Nên $\widehat{KOC} = 2\widehat{KBC}(t/c) \Rightarrow \widehat{KOC} = 2.45^0 = 90^0$

Suy ra $S_{quat}KOC = \dfrac{\pi.R^2.n}{360} = \dfrac{\pi.4^2.90}{360} = 4\pi$

c) Khi BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn. Tìm vị trí của A để diện tích ΔEAH lớn nhất .

Ta có : OI là đường trung bình của tam giác AKH $\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}AH$.

Mà O và BC cố định suy ra OI không đổi nên $AH = 2OI$ không đổi.

Ta có $S_{AEH} = \dfrac{1}{2}AE \cdot EH \le \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AE^2 + EH^2}{2} = \dfrac{AH^2}{4} = \dfrac{4OI^2}{4} = OI^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE = EH \Leftrightarrow \Delta AEH$ vuông cân tại $E \Leftrightarrow \widehat{HAE} = 45^0 \Leftrightarrow \Delta DAC$ vuông cân tại $D \Leftrightarrow \widehat{DCA} = 45^0$ *hay* $\widehat{BCA} = 45^0$.

Vậy khi A thuộc cung lớn BC sao cho $\widehat{BCA} = 45^0$ thì S_{AEH} lớn nhất bằng OI^2.

Bài 76. Cho ΔABC nhọn nội tiếp $(O;R)$ các đường cao BH, CK cắt (O) tại D, E.

a) Chứng minh 4 điểm B, H, C, K cùng thuộc một đường tròn và $AK.AB = AH.AC$.

b) Chứng minh $DE // HK$ và $OA \perp DE$.

c) Cho $\widehat{ABH}=30°, R=5\text{cm}$. Tính $S_{quat}AOE$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC thỏa mãn ΔABC nhọn.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $BKHC$ có:

$\widehat{BKC}=\widehat{BHC}=90°$ và K, H là 2 đỉnh kề nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKHC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{AKH}=\widehat{ACB}$ (góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

Xét ΔAKH và ΔACB có:

$\widehat{AKH}=\widehat{ACB}$ (cmt) và $\widehat{A}$ chung $\Rightarrow \Delta AKH \backsim \Delta ACB$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AK.AB=AH.AC$.

b)Xét (O) có: $\widehat{DEC}=\widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DC).

Vì $BKHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBC}=\widehat{HKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HC)

$\Rightarrow \widehat{DEC}=\widehat{HKC}$ và chúng ở vị trí đồng vị nên $KH // DE$.

Kẻ đường kính AA', nối $A'C$.

Xét $\Delta A'AC$ có: $\Delta A'AC$ nội tiếp (O) và $A'A$ là đường kính nên $\Delta A'AC$ vuông tại C.

$\Rightarrow \widehat{A'AC}+\widehat{AA'C}=90°$ (1).

Xét (O) có $\widehat{AA'C}=\widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Mà $BKHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{AHK}$.

Do đó $\widehat{AHK}=\widehat{AA'C}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{A'AC}+\widehat{AHK}=90°$ nên $OA\perp KH$, mà $KH // DE$ (cmt)

$\Rightarrow OA\perp DE$.

c) $\widehat{AOE} = 2\widehat{ACE}$ (Hệ quả góc nội tiếp).

Vì tứ giác $BKHC$ nội tiếp nên $\widehat{HCK} = \widehat{ABH} = 30°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KH).

$\Rightarrow \widehat{AOE} = 2\widehat{ABH} = 60°$.

Diện tích hình quạt AOE là: $\dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.5^2.60}{360} = \dfrac{25\pi}{6}$ (cm).

Gọi I là giao điểm của BH và CK.

Xét tứ giác $AKIH$ có $\widehat{AKI} + \widehat{AHI} = 90° + 90° = 180°$ và góc K và H là 2 góc đối.

$\Rightarrow$ tứ giác $AKIH$ nội tiếp đường tròn đường kính AI.

Để chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAKH không đổi ta đi chứng minh AI không đổi.

Tứ giác $AKIH$ nội tiếp nên $\widehat{AIK} = \widehat{AHK}$.

Tứ giác $BKHC$ nội tiếp nên $\widehat{AHK} = \widehat{ABC}$.

Xét (O) có $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$.

Do đó $\widehat{AIK} = \widehat{AEC}$ $\Rightarrow$ ΔAEI cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (3).

Xét (O) có $\widehat{AED} = \widehat{ABD} = 30°$ (hệ quả góc nội tiếp).

Mà $OA \perp DE$ (cmt) nên ΔAEG vuông tại G. Với G là giao điểm của OA và DE.

$\Rightarrow \widehat{EAG} = 60°$.

Xét ΔOAE cân tại O có góc $\widehat{EAG} = 60°$ nên ΔOAE đều nên $AE = OA = 5$ (cm) (4).

Từ (3) và (4) có $AI = 5$ (cm). Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC.

Bài 77. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O). Gọi BM, CN là các đường cao của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi E là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp và tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $OI = \dfrac{1}{2}AH$ và E nằm trên (O).

c) G là trọng tâm ΔABC và $AO \perp MN$.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $AMHN$ có $\widehat{ANH} = \widehat{AMH} = 90^0$ (mà 2 góc ở vị trí đối đỉnh) => tứ giác AMHN nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Xét tứ giác BHCE có I là trung điểm của BC, mặt khác E đối xứng với H qua I => I là trung điểm của HE => Tứ giác BHCE có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường => tứ giác BHCE là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết).

b) Xét Δ BOC có $OB = OC = R$ => Δ BOC cân tại O, ta có I là trung điểm của BC => OI là trung tuyến đồng thời là đường cao của Δ BOC => $OI \perp BC$ (1)

Xét ΔABC có H là giao của 2 đường cao BM và CN => AH là đường cao thứ 3 của Δ ABC => $AH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OI // AH$, mặt khác I là trung điểm của BC => O là trung điểm của AE => $OI = \frac{AH}{2}$ và E thuộc đường tròn.

(Cách khác chứng minh O thuộc đường tròn: vì BHCE là hình bình hành => BE // CH , mà CH vuông góc với AB => EB vuông góc với AB, tam giác ABE có ABE =90 độ => suy ra AE là đường kính đường tròn tâm O => E thuộc đường tròn)

c) Gọi G' là trọng tâm Δ ABC. Ta sẽ chứng minh H, G', O thẳng hàng

Ta có Δ ABC có AI là trung tuyến, G' là trọng tâm Δ ABC => G' thuộc AI và AG' = 2/3 AI. Xét Δ AHE là AI là trung tuyến, G' thuộc AI và AG' = 2/3 AI => G' là trọng tâm Δ AHE => HO đi qua G' => H, G', O thẳng hàng.

Mặt khác HO cắt AI tại G => G trùng G' => G là trọng tâm Δ ABC.

Gọi giao điểm của AO và MN là P.

Tứ giác ABEC nội tiếp đường tròn tâm O => $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ (1)(góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Xét tứ giác BNMC có $\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^0$ (2 góc cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90 độ) =>

BNMC nội tiếp được đường tròn. => $\widehat{NBC} = \widehat{AMP}$ (2) (góc ngoài tứ giác nội tiếp bằng góc trong không kề với nó)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{AMP}$ (3)

Xét Δ APM và Δ AEC có A chung và $\widehat{AEC} = \widehat{AMP}$ (3) => Δ APM $\backsim$ Δ AEC =>

$\widehat{APM} = \widehat{ACE} = 90$ (2 góc tương ứng) => AO $\perp$ MN

Bài 78. Cho tam giác nhọn ΔABC $(AB < AC < BC)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC $(D \in AC, E \in AB)$. Chứng minh

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp trong một đường tròn và $HE.HC = HB.HD$.

b) Gọi AH cắt BC tại M. Chứng minh EH phân giác MED. Gọi J là trung điểm của BC, kẻ đường kính AI. Chứng minh ba điểm H, I, J thẳng hàng.

c) Cho góc $ABC = 60^0$. Tính $S_{quat}IOC$; Gọi K, N lần lượt là giao điểm của AI với ED và BD. Chứng minh rằng: $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DN^2}$.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $AEHD$ có: $\widehat{AEH}=90^0$, $\widehat{ADH}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{AEH}+\widehat{ADH}=90^0+90^0=180^0$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow AEHD$ là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn (dhnb)

Xét ΔBEH và ΔCDH có:

$\widehat{EHB}=\widehat{CHD}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BEH}=\widehat{CDH}=90^0$

$\Rightarrow \Delta BEH$ đồng dạng với ΔCDH (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HE}{HD}=\dfrac{HB}{HC}$ (các cạnh tương ứng)

$\Rightarrow HE.HC=HB.HD$

b) +) Ta có: $BD\perp AC$; $CE\perp AB$

$BD\cap CE=\{H\}\Rightarrow AH\perp BC$ tại M

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEHM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{E_1}=\widehat{B_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

mà $\widehat{B_1}=\widehat{CAM}$ (cùng phụ $\widehat{C}$)

Mà $\widehat{CAM}=\widehat{E_2}\Rightarrow \widehat{E_1}=\widehat{E_2}$

$\Rightarrow EH$ là phân giác của $\widehat{MED}$

+) AI là đường kính $\Rightarrow \begin{cases}\widehat{ACI}=90^0\\ \widehat{ABI}=90^0\end{cases}$

Có $\begin{cases} BH \perp AC \\ CI \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH // CI\,(1)$

Lại có: $\begin{cases} CE \perp AB \\ BI \perp AB \end{cases} \Rightarrow BI // CE\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $BHCI$ là hình bình hành (dhnb)

Mà J là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ J là trung điểm của HI

$\Rightarrow$ H, I, J thẳng hàng

c) Ta có: $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (định lí góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{COI} = 60^0$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow S_{quat}IOC = \frac{R^2.\pi.60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$

Ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{CBI}$ (cùng chắn cung CI) (3)

$\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (cùng chắn cung AF)

Mà $\widehat{AHE} = \widehat{CHM}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CHM}$

$\widehat{CBI} = \widehat{HCB}$ (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{HCB}$

Mà $\widehat{ADE} = \widehat{CHM}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{CAI} + \widehat{ADE} = \widehat{HCB} + \widehat{CHM}$

Mà $\widehat{HCB} + \widehat{CHM} = 90^0$ (ΔMHC vuông tại M)

$\Rightarrow \widehat{CAI} + \widehat{ADE} = 90^0 \Rightarrow \Delta ADK$ vuông tại $K \Rightarrow DK \perp AK$

Xét ΔADN vuông tại D có $DK \perp AN$

Áp dụng hệ thức lượng ta có: $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DN^2}$ (đpcm)

Bài 79. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm (O). Hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H ($D \in BC, E \in AC$). Gọi F là giao điểm của tia CH với AB. Tia AO cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$).

a) CM: Tứ giác $ABDE, BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) CM: Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành và H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

c) Gọi BE, CF cắt (O) tại P, Q. Chứng minh $EF // PQ$ và ΔAPQ cân.

d) CM: $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$.

Hướng dẫn

a) Vì ΔABC có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H (gt) $\Rightarrow AD \perp BC, BE \perp AC$ (đn)

$\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{ADC}=90°, \widehat{BEA}=\widehat{BEC}=90°$ (đn)

$\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{BEA}(=90°)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (hai góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh) (đpcm).

Vì ΔABC có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H (gt) $\Rightarrow H$ là trực tâm (đn)

$\Rightarrow CF$ là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow CF \perp AB$ (đn) $\Rightarrow \widehat{BFC}=\widehat{AFC}=90°$

$\Rightarrow \widehat{BFC}=\widehat{BEC}(=90°)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (hai góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh) (đpcm).

b) Vì tia AO cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$) $\Rightarrow AK$ là đường kính của đường tròn (O).

$\Rightarrow \widehat{ABK}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \perp BK$ (đn)

Mà $CF \perp AB$ (cmt)

$\Rightarrow BK // CF \Rightarrow BK // CH$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow BH // CK$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành (đpcm).

Vì $\widehat{AFC}=90°, \widehat{AEB}=90°$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AFC}+\widehat{AEB}=180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn (dhnb)

$\Rightarrow \widehat{FAH}=\widehat{FEH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FH}$)

Vì tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow \widehat{FAH}=\widehat{BED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\Rightarrow \widehat{FEH} = \widehat{BED}\left(= \widehat{FAH}\right)$ hay EH là tia phân giác của $\widehat{FED}$ (đn).

CMTT: DH là tia phân giác của $\widehat{FDE}$.

$\Rightarrow H$ là giao của ba đường phân giác của ΔDEF.

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF (đpcm).

c) Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$)

Xét đường tròn (O): $\widehat{QPB} = \widehat{FCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BQ}$)

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{QPB}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị.

$\Rightarrow EF // PQ$ (dhnb) (đpcm).

Xét đường tròn (O): $\widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AQ}$)

$\widehat{AQP} = \widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)

Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{ACQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$)

$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AQP}$

$\Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A (dhnb)(đpcm).

d) Ta có: $\dfrac{HD}{AD} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}; \dfrac{HE}{BE} = \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}; \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{ABH}}{S_{ABC}}$.

$\Rightarrow \dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{BCH} + S_{ACH} + S_{ABH}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$ (đpcm).

Bài 80. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BI, CK cắt nhau tại H và cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại E, F. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh:

a) Tứ giác $BCIK$ nội tiếp và ΔAEF cân.

b) A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và $KI = \dfrac{1}{2}EF$

c) Kẻ đường kính BD. Chứng minh tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Và cho $\widehat{CBD} = 30^0, R = 6cm$. Tính diện tích hình quạt AOF. Chứng minh $EF \le 2AH$

Hướng dẫn

a) Do BI, CK là hai đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BIC} = \widehat{BKC} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BCIK$ nội tiếp.

Do tứ giác $BICK$ nội tiếp nên $\widehat{KBI} = \widehat{KCI} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại A

b) Tam giác ABC có hai đường cao BI, CK cắt nhau tại H nên H là trực tâm, suy ra $AH \perp BC$.

Xét (O) có $\widehat{FAB} = \widehat{FCB}$ mà $\widehat{FCB} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$), suy ra $\widehat{FAK} = \widehat{HAK} \Rightarrow \Delta AFH$ cân tại $A \Rightarrow AF = AH$, mà $AF = AE \Rightarrow AF = AE = AH \Rightarrow$

A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH.

Tam giác AFH cân tại A có AK là đường cao nên K là trung điểm của FH. Tương tự I là trung điểm của HE. Khi đó IK là đường trung bình của tam giác HEF nên $KI = \frac{1}{2}EF$.

c) Xét (O) có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Có $AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH // DC$ và $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH // DA$. Từ đó suy ra $ADCH$ là hình bình hành.

Xét (O) có $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 30^0$. Do $CH // DA \Rightarrow \widehat{HCA} = \widehat{CAD} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AOF} = 60^0$

Do đó $S_{quat\,AOF} = \dfrac{\pi.6^2.60^0}{360^0} = 6\pi\left(cm^2\right)$.

Có $\widehat{AKH} = \widehat{AIH} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $AKHI$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH \Rightarrow KI \le AH \Rightarrow \frac{1}{2}EF \le AH \Rightarrow EF \le 2AH\,(dpcm)$.

Bài 81. Cho đường tròn (O), dây cung BC (BC không là đường kính). Điểm A di chuyển trên cung nhỏ BC (A khác B và C, độ dài AB khác độ dài AC). Kẻ đường kính AA' của đường tròn

(O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hai điểm E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AA'.

a) Chứng minh 4 điểm A, F, D, C cùng thuộc một đường tròn và $\Delta FCA \sim \Delta DAB$

b) Chứng minh DE//CA' và DE $\perp$ AC.

c) Cho $\widehat{ACB} = 30^0$. Tính $S_{quatBOA}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Chứng minh 4 điểm A, F, D, C cùng thuộc một đường tròn và $\Delta FCA \sim \Delta DAB$

* AD $\perp$ BC $\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$

* CF $\perp$ AA' $\Rightarrow \widehat{AFC} = 90^0$

* Xét tứ giác ADFC, có:

$\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^0$. Mà góc $\widehat{ADC}; \widehat{AFC}$ ở hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC.

$\Rightarrow$ Tứ giác ADFC là tứ giác nội tiếp.

* Chứng minh $\widehat{ACF} = \widehat{CA'F}$

* Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{CA'F}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CAF}$

* Xét ΔFCA và ΔDAB, có

$\widehat{ADB} = \widehat{CFA}$

$\widehat{ABD} = \widehat{CAF}$

$\Rightarrow \Delta FCA \sim \Delta DAB$

b) Chứng minh DE//CA' và DE $\perp$ AC.

Tứ giác AEDB là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{DEA'} = \widehat{ABD}$

Mà: $\widehat{ABD} = \widehat{CA'F} \Rightarrow \widehat{DEA'} = \widehat{AA'C} \Rightarrow$ DE//CA' (So le trong)

* Ta có: CA' $\perp$ CA. $\Rightarrow$ DE $\perp$ AC

c) Cho $\widehat{ACB} = 30^0$. Tính $S_{quatBOA}$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

* Vì $\widehat{ACB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow S_{quatAOB} = \dfrac{\pi.R^2.60}{360} = \dfrac{\pi.R^2}{6}$

CMR Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

* Gọi I là trung điểm AB, K là trung điểm AC, H là trung điểm của BC.

* Ta có : Tứ giác AEDB là tứ giác nội tiếp nhận I là tâm $\Rightarrow$ IE = ID

Tứ giác ADFC là tứ giác nội tiếp nhận K là tâm $\Rightarrow$ KD = KF

* Xét tam giác ABC, có:

IH; HK là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$ HI // AC; HK // AB.

* Mà DE $\perp$ AC $\Rightarrow$ DE $\perp$ HI

Mặt khác: IE = ID (cmt) $\Rightarrow$ IH là trung trực DE (1)

* Tương tự: HK // AB

Mà : DF $\perp$ AB $\Rightarrow$ DF $\perp$ HK

Mặt khác: KD = KF (cmt) $\Rightarrow$ HK là đường trung trực của DF (2)

* Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ H là giao điểm của hai đường trung trực 2 cạnh tam giác DEF $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF

Mà: H là trung điểm BC cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Bài 82. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, Điểm A thuộc nửa $(O;R)$. kẻ $AH \perp BC$ tại H, $HE \perp AB$ tại E, $HF \perp AC$ tại F. Đường thẳng EF cắt $(O;R)$ tại $M;N$

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $AE.AB = AF.AC$ và ΔAMN cân.

c) Gọi Q là trung điểm của HC. Chứng minh rằng $FE \perp FQ$.

Hướng dẫn

a) $\widehat{EAF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$

Vậy tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật .

+) Gọi K là giao điểm của AH và EF

Suy ra $KA = KH = KE = KF$

$\Rightarrow \Delta AKE$ .cân tại K

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$)

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E_1}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEFC$ nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó)

b) ΔAHB vuông tại H có $HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE.AB$

ΔAHC vuông tại H có $HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF.AC$

$\Rightarrow AE.AB = AF.AC$

+) $\widehat{E_1} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AN} + sd\overset{\frown}{BM}}{2}$

$\widehat{C_1} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AM} + sd\overset{\frown}{BM}}{2}$ mà $\widehat{C_1} = \widehat{E_1}$

Nên $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

c) ΔKAF cân tại K(Vì $KA = KF \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{F_2}$

Có FQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông HFB

$\Rightarrow QF = QC = QH = \dfrac{HC}{2}$

$\Rightarrow \Delta QFC$ cân tại $Q \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{F_1}$

Lại có $\widehat{A_2} = \widehat{F_2}$ mà $\widehat{A_2} + \widehat{C_1} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QFE} = 90^0 \Rightarrow FE \perp FQ$

Bài 83. Cho ΔAMB vuông tại M . Hạ $MH \perp AB$, vẽ về phía M nửa đường tròn tâm (I) đường kính AH cắt MA tại P , và nửa đường tròn tâm (K) đường kính BH cắt MB tại Q .

a) chứng minh $MH = PQ$ và $MP.MA = MQ.MB$.

b) Chứng minh tứ giác $APQB$ nội tiếp và PQ là tiếp tuyến của (K).

c) vẽ (O) đường kính AB cắt PQ tại E và D . chứng minh ΔMED cân và xác định vị trí của M để chu vi, diện tích tứ giác $IPQK$ lớn nhất.

Hướng dẫn

a) xét đường tròn tâm (I) có : $\widehat{APH} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

xét đường tròn tâm (K) có $\widehat{HQB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

xét tứ giác $MPHQ$ có $\widehat{PMQ} = \widehat{MPH} = \widehat{MQH} = 90°$

$\Rightarrow$ tứ giác $MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow PQ = MH$

Xét ΔAHM vuông tại H đường cao PH :

$AH^2 = MP.MA$ (hệ thức lượng)

Xét ΔBHM vuông tại H đường cao QH :

$AH^2 = MQ.MB$ (hệ thức lượng)

$\Rightarrow$ $MP.MA = MQ.MB$.

b) Gọi $MH \cap PQ = \{F\}$ $\Rightarrow FP = FM = FQ = FH$ (tính chất hình chữ nhật)

$\Rightarrow \Delta FMP$ cân ở F $\Rightarrow \widehat{FPM} = \widehat{FMP}$

Ta có $\widehat{PMF} = \widehat{MBH}$ (cùng phụ $\widehat{MAH}$)

$\Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MBA}$ $\Rightarrow \widehat{MBA} + \widehat{APQ} = 180°$

Xét tứ giác $APQB$ có :

$\widehat{APQ} + \widehat{QBA} = 180°$

Mà $\widehat{APQ}, \widehat{QBA}$ là 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $APQB$ nội tiếp .

Ta có $FH = FQ$ $\Rightarrow \Delta FHQ$ cân ở F $\Rightarrow \widehat{FHQ} = \widehat{FQH}$ (1)

Xét ΔHQB vuông ở Q , K là trung điểm HB $\Rightarrow KQ = KH = KB$

$\Rightarrow \Delta KHQ$ cân ở K $\Rightarrow \widehat{KHQ} = \widehat{KQH}$ (2)

Ta có $\widehat{MHQ} + \widehat{KHQ} = 90°$ (3)

Từ (1), (2) ,(3) $\Rightarrow \widehat{PQH} + \widehat{KQH} = 90°$ $\Rightarrow PQ \perp QK$

Xét đường tròn tâm (K) có KQ là bán kính :

$PQ \perp QK \Rightarrow$ PQ là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) ta có $OA = OM \Rightarrow \Delta OAM$ cân ở O $\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OMA}$

ta có $\widehat{OAM} + \widehat{ABM} = 90°$ $\Rightarrow \widehat{QPM} + \widehat{AMO} = 90° \Rightarrow OM \perp PQ$

ta có $OE = OD \Rightarrow \Delta OED$ cân ở O , $OM \perp PQ$

$\Rightarrow OM$ là trung trực ED

$\Rightarrow \Delta MED$ cân ở M

Ta có $\begin{cases} IP \perp PQ \\ QK \perp PQ \end{cases} \Rightarrow IP // QK$ $\Rightarrow$ tứ giác $IPQK$ là hình thang vuông.

Chu vi $IPQK = IP + IK + KQ + PQ = 2(IH + HK) + PQ = AB + PQ$

Ta có $PQ \le IK \Leftrightarrow PQ \le \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow PQ + AB \le \frac{3}{2}AB$

$\Rightarrow$ chu vi $IPQK \le \frac{3}{2}AB$

Vậy chu vi $IPQK$ lớn nhất $= \frac{3}{2}AB$ khi M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

$S_{IPQK} = \frac{1}{2}(IP + QK)PQ = \frac{1}{4}AB.PQ \le \frac{1}{8}AB^2$

Vậy giá trị lớn nhất $S_{IPQK} = \frac{1}{8}AB^2$ khi M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$.

Bài 84. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Điểm $H \in OA$, kẻ dây $CD \perp AB$ tại H. Vẽ (I) đường kính AH và (K) đường kính BH. AC cắt (I) tại E, BC cắt (K) tại F. EF cắt (O) tại M và N.

a) Chứng minh:Tứ giác $HECF$ là hình chữ nhật và $CE.CA = CF.CB$

b) Chứng minh:Tứ giác $ABFE$ nội tiếp và EF là tiếp tuyến của (I)

c) Chứng minh: ΔCMN cân và tìm vị trí của H để diện tích tứ giác $CEHF$ lớn nhất.

Hướng dẫn

a)Ta có: $\widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{AEH} = 90^o$; $\widehat{HFB} = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{CEH} = 90^o; \widehat{HFC} = 90^o$ mà $\widehat{ECF} = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $HECF$ là hình chữ nhật

ΔAHC vuông tại H có đường cao HE nên ta có $CH^2 = CE.CA$

ΔBHC vuông tại H có đường cao HF nên ta có $CH^2 = CF.CB$

$\Rightarrow CE.CA = CF.CB$

b)Do $CE.CA = CF.CB \Rightarrow \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CF}{CA}$ mà $\widehat{ACB}$ chung $\Rightarrow \Delta CEF \backsim \Delta CBA$ (g.c.g)

$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{CBA}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABFE$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện)

Gọi P là giao điểm của HC và EF. Ta có $\Delta IEP = \Delta IHP$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IEP} = \widehat{IHP} = 90^o \Rightarrow IE \perp EF$. Mà $E \in (I)$

$\Rightarrow$ EF là tiếp tuyến của (I)

c)Ta có: ΔOCB cân tại O nên $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$; ΔHPF cân tại P nên $\widehat{PHE} = \widehat{PFH}$

Mà $\widehat{PHE} = \widehat{CBO}$ ($= \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{HF}$)

$\Rightarrow \widehat{HPF} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{CPF} = \widehat{HOC}$

Mà $\widehat{HOC} + \widehat{HCO} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{CPF} + \widehat{HCO} = 90^o \Rightarrow \widehat{CQP} = 90^o \Rightarrow OC \perp MN$

$\Rightarrow C$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{MN}$

$\Rightarrow CM = CN \Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C

Hình chữ nhật $CEHF$ có diện tích lớn nhất khi $CEHF$ là hình vuông $\Leftrightarrow \Delta HEF$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow HI = HK \Leftrightarrow H \equiv O$

Bài 85. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt BC tại I.

a) Chứng minh: $AEHF$ là hình chữ nhật và $AE.AB = AF.AC$

b) Chứng minh: Tứ giác $BEFC$ nội tiếp và $IB = IC$

c) Cho $\widehat{ABH} = 60^0$, $R = 3$ cm, tính S_{quat} HOE và nếu diện tích ΔABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật $AEHF$ thì ΔABC vuông cân.

Hướng dẫn

a) Xét (O) có

$\widehat{AEH} = 90^0$
$\widehat{AFH} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà $\widehat{EAF} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF là hình chữ nhật

+ $\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$ (góc nội tiếp chắn cung AF)

+ $\widehat{AHF} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ $\widehat{AHF}$)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACH} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AE \,.\, AB = AF \,.\, AC$

b) + Có $\widehat{AEF} = \widehat{BCF} \Rightarrow$ Tứ giác BEFC nội tiếp (dhnb)

+Có $\begin{cases} \widehat{EAI} + \widehat{AEF} = 90^0 \\ \widehat{AEF} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BAI} \Rightarrow \Delta ABI$ cân tại I $\Rightarrow AI = BI$ (1)

+ $\widehat{ICA} = \widehat{IAC}$ (cùng phụ $\widehat{IAB} = \widehat{ABI}$)

$\Rightarrow \Delta IAC$ cân $\Rightarrow IA = IC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IB = IC$

c) $\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{EOH} = 60^0$

$S_{quat}HOE = \dfrac{\pi R^2.n}{360} = \dfrac{\pi \,.\, 3^2 \,.\, 60}{360} = \dfrac{3\pi}{2}$ (cm^2)

$S_{ABC} = 2.\, S_{AEHF} \Rightarrow S_{ABC} = 4.\, S_{AEF}$ mà $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$

$\Rightarrow \dfrac{S_{ACB}}{S_{AEF}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = 2$

mà $EF = AH$, $BC = 2 \,.\, AI \Rightarrow \dfrac{2.AI}{AH} = 2 \Rightarrow \dfrac{AI}{AH} = 1 \Rightarrow AI = AH$

$AH \le AI \Rightarrow H \equiv I \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Bài 86. Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định, CD là đường kính di động. Gọi d là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại B; đường thẳng AC; AD cắt d lần lượt tại $P;Q$; AI là trung tuyến của $\triangle APQ$

a) Chứng minh: $ACBD$ là hình chữ nhật và tứ giác $CPQD$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD.AQ = AC.AP$ và $AI \perp CD$.

c) Cho $\widehat{AQP} = 30^0; R = 6\ cm.$ Tính diện tích hình quạt AOD. Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác $CPQD$ bằng ba lần diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn

a)Ta có

+ $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\triangle ABC$ vuông tại C suy ra $\widehat{ACB} = 90^0$

+ $\triangle ACD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD nên $\triangle ACD$ vuông tại A suy ra $\widehat{CAD} = 90^0$

+ $\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\triangle ABD$ vuông tại D suy ra $\widehat{ADB} = 90^0$

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ACB} = \widehat{CAD} = \widehat{ADB} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật

Vì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{PAB}$

Mà $\widehat{PAB} = \widehat{AQP}$ (cùng phụ với $\widehat{APQ}$) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{AQP} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{DQP} \Rightarrow$ tứ giác $CPQD$ nội tiếp.

b)Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao vào:

+ ΔABQ vuông tại B, BD là đường cao có: $AB^2 = AD.AQ$

+ ΔABP vuông tại B, AC là đường cao có: $AB^2 = AC.AP$

Suy ra: $AD.AQ = AC.AP$

Xét ΔAIQ cân tại I nên $\widehat{IAQ} = \widehat{IQA}$ mà theo tính chất góc ngoài của tam giác thì

$\widehat{AIB} = \widehat{IAQ} + \widehat{IQA} \Rightarrow \widehat{AIB} = 2.\widehat{IQA}$

Xét ΔAOC cân tại O nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ mà theo tính chất góc ngoài của tam giác thì

$\widehat{AOD} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} \Rightarrow \widehat{AOD} = 2.\widehat{ACO}$

Mà: $\widehat{IQA} = \widehat{ACO}$ nên $\widehat{AIB} = \widehat{AOD}$

Ta lại có:

$\widehat{AIB} + \widehat{BAI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{BAI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AOH} + \widehat{OAH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AHO} = 90^0 \Rightarrow AI \perp OD$

c)Ta có $\widehat{AOD} = 2.\widehat{AQP} = 2.30^0 = 60^0$

Diện tích hình quạt tròn AOD là $S = \dfrac{\pi.6^2.60^0}{360^0} = 6\pi$

Ta có $S_{CPQD} = 3.S_{ABC} \Rightarrow S_{CPQD} = 3.S_{ACD} \Rightarrow S_{APQ} = 4.S_{ACD}$

Lại có $\triangle APQ \sim \triangle ADC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{S_{ADC}}{S_{APQ}} = \left(\dfrac{DC}{PQ}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{DC}{PQ} = \dfrac{1}{2}$

Mà $\dfrac{S_{ACD}}{S_{APQ}} = \dfrac{\frac{1}{2}.AH.CD}{\frac{1}{2}.AB.PQ} = \dfrac{AH}{AB}.\dfrac{CD}{PQ} \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{AH}{AB}.\dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = 2.AH \Rightarrow H \equiv O$

Mặt khác $CD \perp AH \Rightarrow CD \perp AO \Rightarrow CD \perp AB$

Vậy $CD \perp AB$ thì diện tích tứ giác $CPQD$ bằng ba lần diện tích tam giác ABC.

Bài 87. Cho ΔABC vuông tại A $(AB > AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

a) Chứng minh : $AH = EF$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b) Chứng minh : $AE.AB = AF.AC$ và EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

c) Vẽ (K) đường kính BC ngoại tiếp ΔABC, EF cắt (K) tại P,Q. Chứng minh ΔAPQ cân.

d) Chứng minh khi ΔABC thay đổi thỏa mãn là tam giác vuông và BC không đổi thì ΔABC thỏa mãn điều kiện gì để S_{BCEF} lớn nhất.

Hướng dẫn

a)+) Vì E thuộc nửa đường tròn đường kính BH

$\Rightarrow \widehat{BEH}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{HEA}=90^\circ$ (góc kề bù).

+) Vì F thuộc nửa đường tròn đường kính HC

$\Rightarrow \widehat{CFH}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{HFA}=90^\circ$ (góc kề bù).

Xét tứ giác $AEHF$ có : $\widehat{EAF}=\widehat{HEA}=\widehat{HFA}=90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow AH=EF$.

Gọi I là giao điểm của AH và EF .

Vì tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên : $IA=IE=IH=IF$

$\Rightarrow \Delta IAF$ là tam giác cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAF}=\widehat{IFA}$

Mà $\widehat{IAF}+\widehat{HAB}=90^\circ \Rightarrow \widehat{IFA}+\widehat{HAB}=90^\circ$.

Lại có : $\widehat{HAB}+\widehat{HBA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{IFA}=\widehat{HBA}$

Mà $\widehat{IFA}+\widehat{EFC}=180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{HBA}+\widehat{EFC}=180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b)Xét ΔAEF và ΔACB có :

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{AFE}=\widehat{ABC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AEF \square \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AE.AB=AF.AC$

Gọi M,N lần lượt là tâm của hai nửa đường tròn đường kính BH và nửa đường tròn đường kính HC .

Do $IE=IH$ (cmt) $\Rightarrow \Delta IEH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{E_2}=\widehat{H_2}$

$ME=MH(=\dfrac{BH}{2}) \Rightarrow \Delta MEH$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{E_1}=\widehat{H_1}$

Mà $\widehat{H_1}+\widehat{H_2}=90^\circ \Rightarrow \widehat{E_1}+\widehat{E_2}=90^\circ \Rightarrow \widehat{MEI}=90^\circ \Rightarrow ME\perp EF$

$\Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm M đường kính BH .

Chứng minh tương tự ta có EF là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính HC.

c)Gọi J là giao điểm của AK và PQ

Vì ΔAIF cân (cmt) $\Rightarrow \widehat{AIF}=180^\circ-2\widehat{IFA}$

Do K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $KA=KB$

$\Rightarrow \Delta KAB$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{AKB}=180^\circ-2\widehat{ABC}$

Mà $\widehat{IFA} = \widehat{ABC}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AIF} = \widehat{AKB} \Rightarrow \widehat{AIJ} = \widehat{AKH}$.

Xét ΔAIJ và ΔAKH có :

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{AIJ} = \widehat{AKH} \Rightarrow \Delta AIJ \backsim \Delta AKH$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{AJI} = \widehat{AHK} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PQ$

Xét ΔKPQ có $KP = KQ \Rightarrow \Delta KPQ$ cân tại K

Lại có AK là đường cao (do $AK \perp PQ$)

$\Rightarrow AK$ đồng thời cũng là trung trực của PQ

$\Rightarrow AP = AQ \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A .

c)Ta có : $S_{BCEF} = S_{ABC} - S_{AEF}$

$= S_{ABC} - \dfrac{AE^2}{AC^2}.S_{ABC} = S_{ABC} - \dfrac{AH^2}{BC^2}.S_{ABC}$ (do $\Delta EAH \backsim \Delta ACB$)

$= \dfrac{1}{2}.2R.AH - \dfrac{AH^2}{4R^2}.\dfrac{1}{2}.2R.AH$

$= Rx - \dfrac{x^3}{4R} (x = AH \le R)$

$= Rx + \dfrac{R^2}{2} - \left(\dfrac{x^3}{4R} + \dfrac{R^2}{4} + \dfrac{R^2}{4}\right) \le Rx + \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{3xR}{4}$

$= \dfrac{Rx}{4} + \dfrac{R^2}{2} \le \dfrac{R^2}{4} + \dfrac{R^2}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

$S_{\max} = \dfrac{3R^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AH = R \Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A .

Bài 88. Cho tam giác ABC vuông tại A đường kính BC nội tiếp đường tròn (O), d là tiếp tuyến của (O) tại A. Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt d tại D, E.

a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và $BD.EC = R^2$.

b) Kẻ đường cao AH, gọi AB cắt DO tại M, AC cắt EO tại N. Cm: $\widehat{AHM} = \widehat{DOB}$ và $\widehat{MHN} = 90^o$.

c) Tìm BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE và I là trung điểm của AH, (AH cắt DC tại I).

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $AECO$: $\widehat{EAO} = \widehat{ECO} = 90^o \Rightarrow \widehat{EAO} + \widehat{ECO} = 180^o$ => tứ giác $AECO$ nội tiếp.

Dễ dàng chứng minh được ΔDOE vuông tại O, $OA \perp DE \Rightarrow OA^2 = DA.EA$

Ta có: $BD = AD$, $CE = AE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow BD.CE = DA.EA = AO^2 = R^2$.

b) Có $AB \perp DO$ tại $M \Rightarrow \widehat{AMO} = 90^o$ mà $\Rightarrow \widehat{AHO} = 90^o$

$\Rightarrow AMHO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MOA}$ mà $\widehat{MOA} = \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{BOD}$.

* Ta có: $AMON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{MNA}$ mà $\widehat{MHA} = \widehat{MOA} \Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MNA}$

$\Rightarrow MHNA$ nội tiếp, mà $\widehat{MAN} = 90^o \Rightarrow \widehat{MHN} = 180^o - 90^o = 90^o$..

c) Gọi O' là trung điểm của DE.

Ta có ΔDOE vuông tại O

Có OO' là đường trung tuyến $\Rightarrow O'O = O'D = O'E$ => OO' là bán kính

OO' là đường trung bình của hình thang $BDEC$ $\Rightarrow OO'//BD$ mà $BD \perp BC \Rightarrow OO' \perp BC$

$\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O').

* Gọi F là giao điểm của BD và AC .

Ta có $DA = DB \Rightarrow \Delta DAB$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DBA}$

Mà $\left.\begin{array}{l}\widehat{DAB} + \widehat{DAF} = 90^o \\ \widehat{DBA} + \widehat{DFA} = 90^o\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{DFA}$

$\Rightarrow \Delta FAD$ cân tại D $\Rightarrow DF = DA$ mà $DA = DB \Rightarrow DF = DB$

Mặt khác, $AH \cap DC = \{I\}; AH//BF$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{DF} = \dfrac{CI}{CD}; \dfrac{CI}{CD} = \dfrac{IH}{DB}$ mà $DF = DB \Rightarrow AI = AH$ hay I là trung điểm của AH .

Bài 89. Cho nửa (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ C là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, By tại E, F. Gọi M là giao điểm OE với AC, N là giao điểm OF với BC.

a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và tích $AE.BF$ không đổi.

b) Chứng minh $AC \perp EO$ và tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật.

c) Gọi D là giao điểm AF và BE. Chứng minh $CD \perp AB$ và khi C di chuyển trên (O) thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và tích $AE.BF$ không đổi.

+) Ta có: $\widehat{OAE} = 90^o$ (Ax là tiếp tuyến của (O))

$\widehat{OCE} = 90^o$ (CE là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{OAE} + \widehat{OCE} = 180^o$ mà A và C là hai đỉnh đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECO$ nội tiếp

+) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

Ta có: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^o$

$\Rightarrow 2\widehat{O}_2 + 2\widehat{O}_3 = 180^o \Leftrightarrow 2\left(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3\right) = 180^o \Rightarrow \widehat{EOF} = 90^o$

Xét ΔEOF vuông tại O $\left(\widehat{EOF} = 90^o\right)$ có $OC \perp EF$ (EF là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow CE.CF = OC^2$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao

mà $AE = CE$; $BF = CF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow AE.BF = OC^2 = R^2$ (không đổi)

b) Chứng minh $AC \perp EO$ và tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật.

+) Ta có: $AE = CE$ (chứng minh trên); $OA = OC$ $(= R)$

$\Rightarrow OE$ là đường trung trực của AC $\Rightarrow AC \perp EO$

Chứng minh tương tự, $BC \perp OF$

+) Xét tứ giác $MCNO$ có:

$\widehat{MOF} = 90^o$ $\left(\widehat{EOF} = 90^o\right)$

$\widehat{OMC} = 90^o$ $(AC \perp OE)$

$\widehat{ONC} = 90^o$ $(BC \perp OF)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật.

c) Gọi D là giao điểm AF và BE. Chứng minh $CD \perp AB$ và khi C di chuyển trên (O) thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường nào?

+) Ta có: $AE // BF$ $(Ax // By)$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AE}{BF}$ (hệ quả định lí Ta-lét)

mà $AE = CE$; $BF = CF$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{CE}{CF} \Rightarrow CD // AE$ (định lí Ta-lét đảo)

mà $AE \perp AB$ (Ax là tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow CD \perp AB$

+) Ta có tứ giác $MCNO$ là hình chữ nhật (chứng minh câu b)

mà I là trung điểm của MN (gt)

$\Rightarrow I$ là trung điểm OC (tính chất hai đường chéo hình chữ nhật)

$\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{2}R$

$\Rightarrow I$ thuộc nửa đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{1}{2}R$ khi C di chuyển trên nửa (O)

Bài 90. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ C là một điểm bất kì trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, By tại E, F.

a) Chứng minh tứ giác $AECO$ nội tiếp và tích $AE \cdot BF = R^2$.

b) Gọi M là giao điểm OE với AC, N là giao điểm OF với BC, kẻ $CH \perp AB$ tại H. Chứng minh ΔAMH cân và $HM \perp HN$.

c) Gọi D là giao điểm của AF và CH. Chứng minh ba điểm E, D, B thẳng hàng.

d) Khi C di chuyển trên (O) thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn

a) AE là tiếp tuyến của (O) nên $AE \perp OA \Leftrightarrow \widehat{OAE} = 90°$.

EC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OCE} = 90°$.

Tứ giác $OAEC$ có $\widehat{OAE} + \widehat{OCE} = 90° + 90° = 180°$ suy ra $OAEC$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có $OBFC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{CFB} = \widehat{AOC}$ (tính chất của tứ giác nội tiếp). (1)

Lại có EA, EC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại E của (O), $\Rightarrow OE$ là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{EOA} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$. (2)

FC, FB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại F của (O) nên FO là tia phân giác của $\widehat{CFB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{OFB} = \frac{1}{2}\widehat{CFB}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$\widehat{EOA} = \widehat{OFB}$.

Xét ΔOAE và ΔFBO có

$\widehat{EOA} = \widehat{OFB}$ (chứng minh trên)

$\widehat{OAE} = \widehat{FBO} = 90°$.

$\Rightarrow \Delta OAE \sim \Delta FBO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OA}{FB} = \frac{AE}{BO}$ (hai cặp cạnh tương ứng).

$\Leftrightarrow OA \cdot OB = BF \cdot AE \Leftrightarrow BF \cdot AE = R^2$.

b) EA, EC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại E của (O) $\Rightarrow EA = EC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) suy ra E thuộc trung trực của AC.

Mặt khác $OA = OC = R$ nên O thuộc trung trực của AC.

Mà O khác E nên OE là trung trực của AC, suy ra OE đi qua trung điểm của AC và $OE \perp AC$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AC.

ΔAHC vuông tại H có M là trung điểm của AC, suy ra $HM = HA = HC = \frac{1}{2}AC$.

$\Rightarrow \Delta MHA$ cân tại H.

Chứng minh tương tự ta có N là trung điểm của BC và $NB = NC = NH = \frac{1}{2}BC$.

Xét ΔMCN và ΔMHN có

$MC = MH = \frac{1}{2}AC$ (chứng minh trên)

MN chung

$NC = NH = \frac{1}{2}BC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MCN = \Delta MHN$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{MHN}$ (hai góc tương ứng).

Mà $C \in (O)$ đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90°$ hay $\widehat{MCN} = 90°$.

$\Rightarrow \widehat{MHN} = 90° \Leftrightarrow MH \perp HN$ (điều phải chứng minh).

c) Áp dụng hệ quả của định lý Ta let cho ΔAFB với $DH \parallel BF$ ta có

$\frac{AD}{AF} = \frac{DH}{FB}$. (4)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta let cho ΔFAE với $CD \parallel EA$ ta có

$\frac{CD}{EA} = \frac{FC}{FE}$ và $\frac{EC}{EF} = \frac{AD}{AF}$ (5)

Mà $FC = FB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $EA = EC$ nên

$\frac{CD}{EC} = \frac{FB}{FE} \Leftrightarrow \frac{CD}{FB} = \frac{EC}{EF}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{CD}{FB} = \frac{AD}{AF}$. (7)

Từ (4) và (7) suy ra $\frac{DH}{FB} = \frac{CD}{FB}\left(= \frac{AD}{AF}\right) \Leftrightarrow DH = CD.$

Suy ra D là trung điểm của CH.

Tương tự gọi D' là giao của BE và CH ta cũng chứng minh được D' là trung điểm của CH.

$\Rightarrow D \equiv D'$ hay B, E, D thẳng hàng.

d) M là trung điểm của AC (chứng minh trên).

Mà O là trung điểm của AB, suy ra OM là đường trung bình trong ΔACB.

$$\Rightarrow MO \parallel CB \Leftrightarrow OM \perp AC \Leftrightarrow \widehat{OMC} = 90°.$$

Tương tự ta có $\widehat{ONC} = 90°$.

Xét tứ giác $OMCN$ có $\widehat{OMC} = \widehat{MCN} = \widehat{ONC} = 90°$ suy ra $OMCN$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow OC$ và MN cắt nhau tại I là trung điểm mỗi đường $\Rightarrow OI = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$.

Vậy khi C di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì I di chuyển trên nửa đường tròn $\left(O;\frac{1}{2}R\right)$.

Bài 91. Cho tam giác vuông ABC, vuông tại A đường kính BC nội tiếp (O), d là tiếp tuyến của (O) tại A. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt d tại D và E, AB cắt DO tại M, AC cắt EO tại N.

a) Chứng minh: Tứ giác $ADBO$ nội tiếp và $\widehat{AMO} = \widehat{MOE} = 90^o$

b) Kẻ đường cao AH. Chứng minh $\widehat{AHN} = \widehat{EOC}$ và $\widehat{MHN} = 90^o$.

c) Chứng minh: BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE và I là trung điểm của AH (AH cắt DC tại I)

Hướng dẫn

a) + Xét (O) có: AD, BD là tiếp tuyến

$\Rightarrow AD = BD$, OD là tia phân giác của $\widehat{AOB}$, $DA \perp AO$, $BD \perp OB$

+ Xét (O) có: AE, CE là tiếp tuyến

$\Rightarrow AE = EC$, OE là tia phân giác của $\widehat{AOC}$, $AE \perp AO$; $OC \perp CE$.

+ Xét tứ giác $ADBO$ có: $\widehat{OAD} + \widehat{OBD} = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADBO$ nội tiếp

+ Có: $AD = BD$; $OA = OB$ nên AB là trung trực của $OD \Rightarrow \widehat{AMO} = 90^0$.

+ Có: OD là tia phân giác của $\widehat{AOB}$, OE là tia phân giác của $\widehat{AOC}$, mà $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AOC}$ là 2 góc kề bù

$\Rightarrow$ $\widehat{DOE} = 90°$ hay $\widehat{MOE} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{MOE} = 90^o$

b) + Có: $AE = EC$; $OA = OC$ nên AC là trung trực của $OE \Rightarrow AN = NC; \widehat{ONC} = 90^0$.

+ Xét ΔAHC vuông tại H có HN là đường trung tuyến nên $AN = NC = HN$.

$\Rightarrow$ ΔNHC cân tại $N \Rightarrow \widehat{NHC} = \widehat{NCH}$.

Mà $\widehat{AHN} + \widehat{NHC} = 90^0$

$\widehat{NCH} + \widehat{EOC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{EOC}$

+ Xét ΔAHB vuông tại H có HM là đường trung tuyến nên $AM = MH = BM$.

+ Xét ΔAMN và ΔHMN, có:

$AM = HM$

$AN = HN$

MN chung

Nên $\Delta AMN = \Delta HMN\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MHN}$ mà $\widehat{MAN} = 90^0\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{MHN} = 90^o$.

c) Gọi K là trung điểm của DE nên K là tâm đường tròn đường kính DE.

+ Xét ΔDOE có $\widehat{DOE} = 90^0$, OK là đường trung tuyến nên $OK = DK = EK \Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính DE (1).

+ Ta có $BD//CE$ (do $BD \perp BC$; $CE \perp BC$) $\Rightarrow DBCE$ là hình thang

Mà $O; K$ lần lượt là trung điểm của $BC; DE$.

$\Rightarrow OK \perp BC$ tại O (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE

Giả sử BE cắt DC tại I'.

Vì $BD//CE \Rightarrow \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{DI'}{CI'}\left(3\right)$

Vì $AI//EC$ (do $AH//EC$) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DI}{CI}\left(4\right)$

Mà $BD = AD; AE = EC\left(5\right)$

Từ (3); (4); (5) $\Rightarrow \dfrac{DI'}{I'C} = \dfrac{DI}{CI}$

Mà $I; I'$ cùng thuộc BC nên I trùng với I'. Do đó $B; I; E$ thẳng hàng

Ta có: $IH//EC \Rightarrow \dfrac{IH}{EC}=\dfrac{BI}{BE}$

$IA//EC \Rightarrow \dfrac{IA}{EC}=\dfrac{DI}{DC}$

Mà $\dfrac{IE}{BI}=\dfrac{IC}{ID} \Rightarrow \dfrac{IE}{BI}+1=\dfrac{IC}{ID}+1 \Rightarrow \dfrac{EB}{BI}=\dfrac{DC}{ID} \Rightarrow \dfrac{BI}{BE}=\dfrac{DI}{DC}$

Vậy $\dfrac{IH}{EC}=\dfrac{IA}{EC} \Rightarrow IH=IA \Rightarrow I$ là trung điểm của AH.

Bài 92. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, By. Từ M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, By. Tại C, D cắt nhau tại N.

a) Chứng minh: Tứ giác $ACMO$ nội tiếp và $AC.BD=R^2$.

b) Gọi E là giao điểm OC với AM, F là giao điểm OD với BM. Chứng minh: $OE.OC=OF.OD$ và tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $MN//AC$ và cho $\widehat{OFE}=60°$, $R=6cm$, tính $S_{quatAOM}$?

d) Điểm M nằm ở vị trí nào trên nửa đường tròn (O) thì $AC+BD$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a)

+ Xét (O) có: CA, CM là tiếp tuyến

$\Rightarrow CA=CM$, OC là tia phân giác của $\widehat{AOM}$,

$CA \perp AO$, $CM \perp MO$

+ Xét (O) có: DB, DM là tiếp tuyến

$\Rightarrow DM=DB$, OD là tia phân giác của $\widehat{BOM}$,

$DB \perp BO$

+ Xét tứ giác $ACMO$ có:

$\widehat{OAC}+\widehat{OMC}=180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACMO$ nội tiếp

+ Có: OC là tia phân giác của $\widehat{AOM}$, OD là tia phân giác của $\widehat{BOM}$, $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ là 2 góc kề bù

$\Rightarrow \widehat{COD}=90°$

$\Rightarrow \widehat{AOC}+\widehat{BOD}=90^\circ$

Mà $\widehat{BDO}+\widehat{BOD}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AOC}=\widehat{BDO}$

+ Chứng minh $\Delta CAO \# \Delta OBD\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{CA}{OB}=\dfrac{AO}{BD}\Rightarrow AC.BD=AO.BO=R^2$

b) + Có $OA=OM$, $CA=CM$ $\Rightarrow OC$ là đường trung trực của AM $\Rightarrow OC\perp AM$

+ Chứng minh tương tự có $OD\perp BM$

+ Xét ΔOMC vuông tại M có $ME\perp OC\Rightarrow OM^2=OC.OE$

+ Xét ΔOMD vuông tại M có $MF\perp OD\Rightarrow OM^2=OF.OD$

$\Rightarrow OE.OC=OF.OD\Rightarrow \dfrac{OE}{OD}=\dfrac{OF}{OC}$

+ Chứng minh $\Delta OEF \# \Delta ODC\left(c.g.c\right)\Rightarrow \widehat{OEF}=\widehat{ODC}$

+ Xét tứ giác $CDFE$ có: $\widehat{OEF}=\widehat{ODC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

c) + Xét ΔNCA có $AC//BD$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AN}{DN}$

Mà $CA=CM$, $DB=DM$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{DM}=\dfrac{AN}{DN}$

+ Xét ΔDCA có $\dfrac{CM}{DM}=\dfrac{AN}{DN}\Rightarrow MN//AC$

+ Xét tứ giác $FMEO$ có $\widehat{MEO}+\widehat{MFO}=180^\circ\Rightarrow$ tứ giác $FMEO$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OFE}=\widehat{OME}\Rightarrow \widehat{OME}=60^\circ$

Mà ΔOAM cân tại O

$\Rightarrow \Delta OAM$ đều

$\Rightarrow \widehat{MOA}=60^\circ$

$S_{quatAOM}=\pi.6^2.\dfrac{60}{360}\approx 18,84\left(cm^2\right)$

d) + Có $AC+BD=CM+MD=CD$

+ Có $AC//BD$

Mà $AB\perp AC$, $AB\perp BD$

$\Rightarrow CD\geq AB$

$\Rightarrow AC + BD \geq AB$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow CD \perp AC$ mà $CD \perp OM$

$\Rightarrow OM \perp AC$ mà $AC \perp AB$

$\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$.

Bài 93. Cho $1/2(O;R)$, đường kính AB và một điểm M bất kì $\in 1/2(O;R)$ (M khác A và B). Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với $1/2(O;R)$. Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba với $1/2(O;R)$ cắt Ax và By tại C và D, OC cắt AM tại E, OD cắt BM tại F, $AC = 4cm; BD = 9cm$.

a) Chứng minh: tứ giác $ACMO$ nội tiếp và $AC.BD = R^2$.

b) Tính $EF; sin\widehat{MBA}$.

c) Kẻ $MH \perp AB$ tại H chứng minh ΔEHA cân và $\widehat{EHF} = 90°$.

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: tứ giác $ACMO$ nội tiếp và $AC.BD = R^2$.

+) Có Ax và CD lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại A và M (GT)

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax \perp AB = \{A\} \\ CD \perp OM = \{M\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{CAO} = 90° \\ \widehat{CMO} = 90° \end{cases} \Rightarrow \widehat{CAO} + \widehat{CMO} = 180° \Rightarrow \text{tứ giác } ACMO \text{ nội tiếp.}$$

+) Có $By; CD$ lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại B và M mà By cắt CD tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} DB = DM \\ \widehat{OBM} = \widehat{MBD} \end{cases}.$$

Có $Ax; CD$ lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại A và M mà Ax cắt CD tại C

$\Rightarrow \begin{cases} CA = CM \\ \widehat{AOC} = \widehat{COM} \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} AC.BD = CM.DM \\ \widehat{COM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOC} + \widehat{OBM} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ \end{cases}$

Xét ΔCOD vuông tại O , OM là đường cao

$\Rightarrow CM.DM = OM^2 \Rightarrow AC.BD = R^2$

b) Tính $EF; sin\widehat{MBA}$.

Có $AC = 4cm; BD = 9cm \Rightarrow R = 6cm$

Có $\begin{cases} CA = CM \\ OA = OM \end{cases} \Rightarrow CO$ là đường trung trực của AM

Mà $AM \cap CO = \{E\} \Rightarrow E$ là trung điểm của AM

Có $\begin{cases} DB = DM \\ OB = OM \end{cases} \Rightarrow DO$ là đường trung trực của BM

Mà $BM \cap DO = \{F\} \Rightarrow F$ là trung điểm của BM

ΔAMB có $E; F$ lần lượt là trung điểm của $AM; BM$

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\Delta ABM \Rightarrow EF = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow EF = R = 6cm$

Có ΔACO vuông tại $A \Rightarrow CO^2 = AC^2 + AO^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow CO = 2\sqrt{13}$

Có $\sin\widehat{MBA} = \sin\widehat{AOC} = \dfrac{AC}{AO} = \dfrac{4}{2\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

c) Kẻ $MH \perp AB$ tại H chứng minh ΔEHA cân và $\widehat{EHF} = 90^\circ$.

Có ΔAHM vuông tại H và HE là đường trung tuyến (E là trung điểm của AM)

$\Rightarrow HE = AE = EM = \dfrac{AM}{2} \Rightarrow \Delta AHE$ cân tại E.

Có $HE = EM \Rightarrow \Delta HEM$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{EMH}$

Có ΔBHM vuông tại H và HF là đường trung tuyến (F là trung điểm của BM)

$\Rightarrow HF = MF = FB = \dfrac{BM}{2} \Rightarrow \Delta BHF$ cân tại $F \Rightarrow \widehat{FHM} = \widehat{FMH}$.

$\Rightarrow \widehat{EHM} + \widehat{FHM} = \widehat{EMH} + \widehat{FMH} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{EMF} = 90^\circ$

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất.

Có $Ax; By$ lần lượt là tiếp tuyến của $1/2(O;R)$ tại $A; B$ và $C \in Ax; D \in By$

$\Rightarrow CA \perp AB; DB \perp AB \Rightarrow CA // DB \Rightarrow$ tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông

$\Rightarrow S_{ACDB} = \dfrac{(AC+BD)AB}{2}$

Có $AC + BD \ge 2\sqrt{AC.BD} \Rightarrow (AC+BD)^2 \ge 4AC.BD \ge 4R^2 \Rightarrow AC + BD \ge 2R$

$S_{ACDB} \ge \dfrac{2R.2R}{2} = 2R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $AC = BD$

Vậy diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất bằng $2R^2$ khi M là điểm chính giữa $1/2(O;R)$.

Bài 94. Cho đoạn thẳng AB và một điểm C thuộc đoạn thẳng đó (C khác A, B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm M cố định. Kẻ tia $Cz \perp CM \equiv C$, tia Cz cắt By tại K. Vẽ đường tròn $(O;R)$ đường kính MC cắt MK tại E.

a) Chứng minh tứ giác $CEKB$ nội tiếp và $AM.BK = AC.BC$.

b) Chứng minh ΔAEB vuông. AE cắt MC tại I. BE cắt CK tại S. Chứng minh $IS // AB$.

c) Cho A, B, M cố định, tìm vị trí của C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất.

Hướng dẫn

a)+ Ta có $E \in (O)$, đường kính MC nên $\widehat{MEC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CEK} = 90^0$ (1)

Lại có $By \perp AB$ nên $\widehat{CBK} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEB} + \widehat{CBK} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Tứ giác $ECBK$ có hai góc đối diện bù nhau nên tứ giác nội tiếp.

+ Ta có $\widehat{ACM} = 180^0 - 90^0 - \widehat{KCB} = 90^0 - \widehat{KCB}$; $\widehat{CKB} = 90^0 - \widehat{KCB}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{CKB}$

Xét ΔAMC và ΔBCK có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0 \\ \widehat{MCA} = \widehat{CKB}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta BCK \text{ (g-g)}$$

suy ra $\frac{AM}{BC}=\frac{AC}{BK}\Rightarrow AM.BK=AC.BC$.

b)+ Ta có $\widehat{MEC}=90^0$ (cmt) , lại có $\widehat{MAC}=90^O$ (Do $Ax\perp AB$) nên tứ giác $AMEC$ là tứ giác nội tiếp (hai góc đối bù nhau).

Xét đường tròn $(AMEC)$: $\widehat{MEA}=\widehat{MCA}$ (cùng chắn cung AM) (3)

Xét đường tròn $(ECKB)$: $\widehat{BEK}=\widehat{BCK}$ (cùng chắn cung BK) (4)

Có $\widehat{MCA}+\widehat{BCK}=180^0-\widehat{MCK}=180^0-90^0=90^0$ (5)

Từ (3)(4)(5) suy ra $\widehat{MEA}+\widehat{BEK}=90^0\Rightarrow\widehat{AEB}=180^0-\left(\widehat{MEA}+\widehat{BEK}\right)==180^0-90^0=90^0$.

Vậy AEB vuông.

+ Xét tứ giác $IESC$: $\widehat{IES}+\widehat{ICS}=\widehat{AEB}+\widehat{MCK}=90^0+90^0=180^0$ nên tứ giác nội tiếp

Xét đường tròn $(IESC)$: $\widehat{EIS}=\widehat{ECS}$ (cùng chắn cung ES) (6)

Có $\widehat{ECS}=\widehat{EMC}$ (cùng phụ $\widehat{CKE}$) (7)

Xét đường tròn $(AMEC)$: $\widehat{EMC}=\widehat{EAC}$ (cùng chắn cung EC) (8)

Từ (6)(7)(8) suy ra $\widehat{EIS}=\widehat{EAC}$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $IS//AB$.

c) Ta có $\Delta AMC\backsim\Delta BCK$ (g-g) suy ra $\frac{AM}{BC}=\frac{AC}{BK}$

$\Rightarrow AM.BK=AC.BC\le\frac{(AC+BC)^2}{4}=\frac{AB^2}{4}$

$\Rightarrow BK\le\frac{AB^2}{4.AM}$

$\Rightarrow BK\max=\frac{AB^2}{4AM}$ khi $AC=CB\Leftrightarrow C$ là trung điểm của AB.

$Ax\perp AB, By\perp AB\Rightarrow Ax//By\ \Rightarrow AM//BK$

$\Rightarrow$Tứ giác $ABKM$ là hình thang với hai đáy là AM, BK, đường cao AB.

$\Rightarrow S_{ABKM}=\frac{(AM+BK)AB}{2}$

A, B, M cố định nên AM, AB không đổi

$S_{ABKM}\max\Leftrightarrow BK\max\Leftrightarrow C$ là trung điểm của AB.

Bài 95. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, M là điểm bất kỳ trên $\overset{\frown}{BC}$. Trên tia MA lấy điểm E sao cho $ME=MB$, MA cắt OC ở H.

a) Cm: tứ giác $OHMB$ nội tiếp, $\triangle MDE = \triangle MDB$.

b) Cm: D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB. Gọi đường tròn $(D;DA)$ cắt đoạn thẳng MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$. Khi AM đi qua trung điểm của BC. Tính tỉ số $MA:MB$. Suy ra số đo $\widehat{MAB}$.

c) Tính theo R chu vi và diện tích phần chung của hai hình tròn $(O;R)$ và $(D;DA)$.

Hướng dẫn

a)Cm: tứ giác $OHMB$ nội tiếp, $\triangle MDE = \triangle MDB$.

Chứng minh : $\widehat{HOB} + \widehat{HMB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Suy ra $OHMB$ nội tiếp

Vì hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau (gt)

Suy ra: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

Suy ra: $\widehat{AMD} = \widehat{BMD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Chứng minh được $\triangle MDE = \triangle MDB$ (c.g.c)

b) Cm: D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$. Khi AM đi qua trung điểm của BC. Tính tỉ số $MA:MB$. Suy ra số đo $\widehat{MAB}$.

Vì $\triangle MDE = \triangle MDB$ (cmt). Suy ra: $DE = DB$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DB}$ (mt) . Suy ra $DA = DB$

$\rightarrow AD = DB = DE$. Suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

*)Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Vì $\widehat{AMD} = \widehat{BMD}$ suy ra: MD là tia phân giác cuả $\widehat{AMB}$ .Mà đường tròn $(D;DA)$ cắt đoạn thẳng MD tại I. Hay MI là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ (*)

Nên chứng minh được $\Delta MEI = \Delta MBI$ (c.g.c). Suy ra: $\widehat{MEI} = \widehat{MBI}$ (1)

Xét tam giác AEB có: $\widehat{MEI}=\widehat{EAI}+\widehat{EIA}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

Mà: $\widehat{EAI}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EI}$ (Tính chất góc nôi tiếp) và $\widehat{EIA}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EA}$ (Tính chất góc nôi tiếp)

Suy ra: $\widehat{MEI}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AI}$. Mà $\widehat{ABI}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AI}$ suy ra: $\widehat{MEI}=\widehat{ABI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{ABI}=\widehat{MBI}$. Suy ra: BI là tia phân giác của $\widehat{ABM}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Vì AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ (gt) và CO là đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Mà AM và CO cắt nhau tại H. Suy ra H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$\rightarrow \frac{HO}{OC}=\frac{1}{3}\rightarrow \frac{HO}{OA}=\frac{1}{3}$ Vì $OA=OC=R$

Xét ΔAOH vuông tại O và ΔAMB vuông tại M

Ta có: $\tan\widehat{HAO}=\frac{OH}{OA}=\tan\widehat{MAB}=\frac{MB}{MA}=\frac{1}{3}$. Suy ra: $\frac{MA}{MB}=3$. Tính được $\widehat{MAB}=18^0 26'$

c) Tính được $DA=R\sqrt{2}\rightarrow DA=R\sqrt{2}$ là bán kính của $(D;DA)$

Chu vi phần hình tròn được tạo bởi hai hình tròn $(O;R)$ và $(D;DA)$ là:

$$\frac{\Pi R.180}{180}+\frac{\Pi R\sqrt{2}.90}{180}=\frac{3\Pi R\sqrt{2}}{2}$$

Diện tích hình quạt tròn tạo bởi bán kính DA, DB là: $\frac{\Pi\left(R\sqrt{2}\right)^2.90}{360}=\frac{\Pi R^2}{2}$

Diện tích ΔADB là: $\frac{DO.AB}{2}=R.2R=2R^2$

Diện tích hình viên phân tạo bởi bán kính DA, DB là: $\frac{\Pi R^2}{2}-R^2=\frac{(\Pi-2)R^2}{2s}$

Diện tích phần chung của hai hình tròn $(O;R)$ và $(D;DA)$ là :

$$\frac{\Pi R^2.180}{360}+\frac{(\Pi-2)R^2}{2}=(\Pi-1)R^2$$

Bài 96. Cho $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của OB, nối CI cắt đường tròn (O) tại E, nối AE cắt CD tại H, BD cắt AE tại K.

a) Chứng minh tứ giác $BOHE$ nội tiếp và $AH.AE=2R^2$.

b) Tính $\tan\widehat{BAE}$ và chứng minh $OK\perp BD$.

c) Chứng minh tứ giác $OKEC$ nội tiếp và tinh $S_{quat\,DOE}$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $BOHE$ nội tiếp và $AH.AE = 2R^2$.

Ta có $\widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{HEB} = 90°$.

$\widehat{HOB} = 90°$ (vì $AB \perp CD$).

Do đó $\widehat{HEB} + \widehat{HOB} = 180° \Rightarrow$ tứ giác $BOHE$ nội tiếp.

Xét ΔAOH và ΔAEB có $\widehat{A}$ chung; $\widehat{AOH} = \widehat{AEB} = 90° \Rightarrow \Delta AOH \backsim \Delta AEB$ (g - g).

$\Rightarrow \dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AH = AO.AB = 2R^2$.

b) Tính $\tan\widehat{BAE}$ và chứng minh $OK \perp BD$.

Ta có $\widehat{AEC} = \dfrac{1}{2}.\widehat{AOC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \dfrac{1}{2}.90° = 45°$.

$\widehat{BEC} = \dfrac{1}{2}.\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}.90°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{CB}$)

Vậy $\widehat{AEC} = \widehat{BEC} \Rightarrow EC$ là đường phân giác của góc $\widehat{AEB}$.

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{\frac{R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất đường phân giác).

Xét ΔEAB vuông tại E ta có $\tan\widehat{BAE} = \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{1}{3}$.

Xét ΔAOH vuông tại O có $\widehat{\tan OAH} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow \dfrac{OH}{R} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{3}R$.

Xét ΔADB có DO là đường trung tuyến và $\frac{OH}{OD}=\frac{\frac{1}{3}R}{R}=\frac{1}{3}\Rightarrow H$ là trọng tâm ΔADB, mà $AH\cap BD=K\Rightarrow K$ là trung điểm của $BD\Rightarrow OK\perp BD$ (tính chất đường kính và dây cung).

c) Chứng minh tứ giác $OKEC$ nội tiếp và tinh $S_{quat\,DOE}$.

Ta có ΔOBD vuông cân tại O có K là trung điểm của $BD\Rightarrow OK$ là phân giác của $\widehat{BOD}$ $\Rightarrow \widehat{DOK}=\frac{1}{2}.\widehat{DOB}=\frac{1}{2}.90^\circ=45^\circ$.

Mà $\widehat{KEC}=45^\circ$ (Chứng minh trên). Do đó $\widehat{KEC}=\widehat{DOK}=45^\circ\Rightarrow$ tứ giác $OKEC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

Ta có $\tan\widehat{BAE}=\frac{1}{3}\Rightarrow\widehat{BAE}\approx 18,43^\circ$

Ta có $\widehat{DOE}=2.\widehat{DAE}=2.\left(45^\circ-\widehat{BAE}\right)\approx 2.\left(45^\circ-18,43^\circ\right)=53,14^\circ$.

$S_{quat\,DOE}\approx\frac{53,14}{360}.\pi.R^2\approx\frac{3\pi}{20}R^2$

Bài 97. Cho $(O;R)$ có hai đường kính $AB\perp CD$. Trên đoạn AB lấy điểm M khác O. Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến N của (O) tại P

a) CMR: Tứ giác $OMNP$ nội tiếp và $CM.CN=2R^2$

b) CMR: Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành và PD là tiếp tuyến của (O)

c) CMR: Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) CMR: Tứ giác $OMNP$ nội tiếp và $CM.CN = 2R^2$

Ta có: NP là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ONP} = 90°$

$MP \perp AB$ tại M nên $\widehat{OMP} = 90°$

Xét tứ giác $OMNP$ có $\widehat{ONP} = \widehat{OMP}(= 90°)$ mà 2 đỉnh liên tiếp

Nên tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

* Chứng minh: $CM.CN = 2R^2$

Xét (O) có $\widehat{OND} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔCOM và ΔCND có $\widehat{C}$ chung; $\widehat{COM} = \widehat{CND} = 90°$

Nên $\Delta COM \square \Delta CND$ $(g.g)$

Ta có: $\dfrac{CO}{CN} = \dfrac{CM}{CD} \Rightarrow CN.CM = CO.CD$ Mà $CN = R; CD = 2R$

Do đó: $CM.CN = 2R^2$ (đpcm)

b) CMR: Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành và PD là tiếp tuyến của (O)

Do tứ giác $OMNP$ nội tiếp nên $\widehat{ONM} = \widehat{OPM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{OM}$)

Mặt khác có: ΔOCN cân tại O nên $\widehat{OCN} = \widehat{ONC}$ (tính chất)

Nên $\widehat{OPM} = \widehat{OCN}$ mà $\widehat{OPM} + \widehat{MOP} = 90°$; $\widehat{OCN} + \widehat{OMC} = 90°$

Do đó: $\widehat{MOP} = \widehat{OMC}$ mà 2 góc ở vị trí so le trong nên $OP//CM$

Xét tứ giác $CMPO$ có: $OP//CM$ (cmt); $OC//PM\ (\perp AB)$

Nên tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

Ta có: $OP//CN$ nên $\widehat{PON} = \widehat{ONC}$ (so le trong)

Có $\widehat{POD} = \widehat{OCN}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{ONC} = \widehat{OCN}$ (cmt)

Nên $\widehat{PON} = \widehat{POD}$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta DOP = \Delta NOP$ $(c.g.c)$

Do đó: $\widehat{ODP} = \widehat{ONP}$ mà $\widehat{ONP} = 90°$ Nên $\widehat{ODP} = 90°$

Vậy PD là tiếp tuyến của (O)

c) CMR: Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Xét tứ giác $ODPM$ ta có: $\widehat{DOM} = \widehat{ODP} = \widehat{OMP} = 90°$

Nên tứ giác $ODPM$ là hình chữ nhật.

Gọi d là đường thẳng đi qua D và vuông góc với OD nên d cố định và $P \in d$

Khi $M \equiv A$ thì $P \equiv G$ với G là hình chiếu của A trên d

Khi $M \equiv B$ thì $P \equiv H$ với H là hình chiếu của B trên d

Vậy M di chuyển trên AB thì P chạy trên đoạn GH cố định.

Bài 98. Cho $(O;R)$ có hai đường kính $AB \perp CD$. Gọi I là trung điểm OB, CI cắt (O) tại E, AE cắt CD tại H, BD cắt AE tại K.

a) Chứng minh tứ giác $DOIE$ nội tiếp và $CI.CE = 2R^2$.

b) Tính tỉ số $\dfrac{EB}{EA}$ và chứng minh $KD = KB$.

c) Chứng minh $\widehat{OKH} = \widehat{DCE}$ và tính $S_{quat}DOE$.

Hướng dẫn

a) Vì CD là đường kính $(O) \Rightarrow \widehat{CED} = 90^0$

Xét tứ giác $DOIE$ có:

$\widehat{IED} + \widehat{IOD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DOIE$ nội tiếp đường tròn.

Xét ΔCED và ΔCOI có

$\widehat{DCE}$ chung

$\widehat{CED} = \widehat{COI}\left(= 90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta CED = \Delta COI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CD} = \dfrac{CO}{CE} \Rightarrow CI.CE = CO.CD = R.2R = 2R^2$ (đpcm)

b) Vì $AB \perp CD$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{AD}$ $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{KEI} = \widehat{IBK}$

Xét tứ giác $EBIK$ có $\widehat{KEI}=\widehat{IBK}$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $EBIK$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{KIB}+\widehat{KEB}=180^0$ (tổng hai góc đối trong tứ giác nội tiếp)

Vì AB là đường kính $(O) \Rightarrow \widehat{AEB}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{KIB}=90^0 \Rightarrow KI \perp OB$

Mà $OD \perp OB \Rightarrow KI // OD$

Mà I là trung điểm OB (giả thiết)

$\Rightarrow IK$ là đường trung bình của ΔBOD

$\Rightarrow IK=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}R$

Có $AI=AO+OI=R+\frac{1}{2}R=\frac{3}{2}R$

Xét ΔAIK và ΔAEB có:

$\widehat{BAE}$ chung

$\widehat{AIK}=\widehat{AEB}\left(=90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta AIK=\Delta AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EB}{IK}=\frac{EA}{IA} \Rightarrow \frac{EB}{EA}=\frac{IK}{IA}=\frac{\frac{1}{2}R}{\frac{3}{2}R}=\frac{1}{3}$$

Vì IK là đường trung bình của ΔBOD (cmt)

$\Rightarrow K$ là trung điểm BD

$\Rightarrow KD=KB$

c) Xét ΔOBD cân tại O có K là trung điểm BD

$\Rightarrow OK \perp BD \Rightarrow \widehat{OKB}=90^0$

Có $\widehat{AKO}+\widehat{OKB}+\widehat{BKE}=\widehat{AKE}$

$\Rightarrow \widehat{AKO}+90^0+\widehat{BKE}=180^0 \Rightarrow \widehat{AKO}+\widehat{BKE}=90^0$

Xét ΔKEB vuông tại E có

$\widehat{KBE}+\widehat{BKE}=90^0$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\widehat{AKO}+\widehat{BKE}=90^0 \Rightarrow \widehat{AKO}=\widehat{KBE}$ (cùng phụ với $\widehat{BKE}$)

Xét (O) có $\widehat{DCE}=\widehat{DBE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DE}$)

$\Rightarrow \widehat{AKO}=\widehat{DCE}$ (đpcm)

Xét ΔAEB vuông tại E có $\tan\widehat{ABE}=\dfrac{EA}{EB}=3 \Rightarrow \widehat{ABE}\approx 71^0565'$

Xét ΔOEB cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBE}=\widehat{OEB}$

Có $\widehat{BOE}+\widehat{OBE}+\widehat{OEB}=180^0$

$\Rightarrow \widehat{BOE}+2\widehat{OBE}=180^0 \Rightarrow \widehat{BOE}=180^0-2\widehat{OBE} \Rightarrow \widehat{BOE}\approx 36^087'$

Có $\widehat{BOE}+\widehat{DOE}=\widehat{DOB}$

$\Rightarrow \widehat{DOE}=\widehat{DOB}-\widehat{BOE}\approx 90^0-36^087'\approx 53^013'$

$\Rightarrow S_{quat}DOE\approx \dfrac{\pi.R^2.53,13}{360}\approx 0,15\pi.R^2$

Bài 99. Cho (O), hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm trên cung nhỏ AC. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tia DC tại S. Gọi I là giao điểm của CD và BM.

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ nội tiếp; $\widehat{MSD}=2\widehat{MBA}$

b) Chứng minh $SM^2=SC.SD$. Tia phân giác $\widehat{COM}$ cắt BM tại N chứng minh $\dfrac{NI}{NM}=\tan\widehat{MBO}$

c) Gọi K là trung điểm của MB. Khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì K di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn

a) Vì $AB\perp CD\ (gt) \Rightarrow \widehat{AOI}=90^0$

Ta có: $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hay $\widehat{AMI}=90^0$

Xét tứ giác $AMIO$ có: $\widehat{AOI}+\widehat{AMI}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMIO nội tiếp (tổng 2 góc đối diện bằng 180^0)

- Vì $\widehat{MSD}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{MSD} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{MD} - sđ\overset{\frown}{MC}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{MA} - sđ\overset{\frown}{MC}}{2}$ (1)

Vì hai đường kính $AB,\ CD$ vuông góc với nhau $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{MSD} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{MA} - sđ\overset{\frown}{MC}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{MC} + sđ\overset{\frown}{MA} + sđ\overset{\frown}{MA} - sđ\overset{\frown}{MC}}{2} = \dfrac{2sđ\overset{\frown}{MA}}{2} = sđ\overset{\frown}{MA}$

Mà $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MA}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MA}$)

$\Rightarrow \widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$

b) Xét ΔSMC và ΔSDM có:

$\widehat{MSD}$ chung

$\widehat{SMC} = \widehat{SDM}\ \left(= \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MC}\right)$

$\Rightarrow \Delta SMC \sim \Delta SDM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SC}{SM} \Rightarrow SM^2 = SC.SD$

Vì ON là tia phân giác của $\widehat{IOM}$

$\Rightarrow \dfrac{NI}{NM} = \dfrac{OI}{OM}$ mà $OM = OB = R \Rightarrow \dfrac{NI}{NM} = \dfrac{OI}{OB}$ (3)

Xét ΔIOB vuông tại O, ta có: $\tan\widehat{IBO} = \dfrac{OI}{OB}$ hay $\tan\widehat{MBO} = \dfrac{OI}{OB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{NI}{NM} = \tan\widehat{MBO}$

c) Ta có: $OK \perp MB\ (gt) \Rightarrow \widehat{OKB} = 90^0$

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính OB.

Ta thấy khi M trùng A thì K trùng O, M trùng C thì K là trung điểm của BC.

Gọi J là trung điểm của BC

Khi đó, khi M chuyển động trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) thì K chuyển động trên cung nhỏ OJ của đường tròn đường kính OB.

Bài 100. Cho $(O;R)$ có hai đường kính $AB;CD$ vuông góc với nhau. Trên đoạn AB lấy điểm M (khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở P.

a) Tứ giác $OMND$ nội tiếp và tích $CM.CN = \frac{CD^2}{2}$.

b) $OP//MN$ và PD là tiếp tuyến của (O).

c) Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đoạn thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) N thuộc đường tròn đường kính $CD \Rightarrow MND = 90^0$

$AB \perp CD \Rightarrow MOD = 90^0$

$\Rightarrow MND + MOD = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $MNDO$ nội tiếp

ΔCMO đồng dạng ΔCDN (g.g) $\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM.CN = \frac{CD^2}{2}$

b) NP là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow PNO = PMO = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $MNPO$ nội tiếp

$\Rightarrow C = MNO = MPO = POD \Rightarrow OP//MN$

$\Rightarrow NOP = MNO = MPO = POD$

$\Rightarrow \Delta NPO = \Delta DPO$ (cgc) $\Rightarrow PDO = PNO = 90^0 \Rightarrow PD \perp OD \Rightarrow PD$ là tiếp tuyến của (O)

c) $OMP = MOD = PDO = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $MPDO$ là hifh chữ nhật

$\Rightarrow$ Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đoạn thẳng EF đi qua D và vuông góc với CD với tứ giác $AEFB$ là hình chữ nhật

Bài 101. Cho (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. M là một điểm trên cung nhỏ AC. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tia DC tại S. Gọi I là giao điểm của CD và BM.

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ nội tiếp và $\widehat{MIC} = \widehat{MDB}$.

b) Chứng minh $\widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$ và MD là phân giác $\widehat{AMB}$.

c) Chứng minh $IM.IB = IC.ID$; $SM^2 = SC.SD$.

d) Tia phân giác $\widehat{COM}$ cắt BM tại N. Chứng minh $\frac{NI}{NM} = \tan\widehat{MBO}$ và $CN \perp BM$.

e) Gọi K là trung điểm MB. Khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì K di chuyển trên đường nào? Và xác định vị trí của M trên cung nhỏ AC sao cho $AM = \frac{3}{5}MB$.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $AMOI$ nội tiếp vì: $\widehat{AMI} + \widehat{AOI} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMIO$ nội tiếp (tứ giác có tổng 2 góc bằng 180^0)

+) $\widehat{MIC} = \frac{1}{2}$ Sđ $\left(\overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{BD}\right)$

$\widehat{MDB} = \frac{1}{2}$ Sđ $\left(\overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{BC}\right)$

$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MDB}$.

b) $\widehat{MSD} = \frac{1}{2}$ Sđ $\left(\overset{\frown}{MD} - \overset{\frown}{MC}\right)$; $\widehat{MBA} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MA}$

Lại có $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AD}$ Mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{MSD} = \frac{1}{2}$ sđ $\left(\overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{MC}\right) = \frac{1}{2}$ sđ $\left(\overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{MA}\right) =$ sđ $\overset{\frown}{MA}$ $\Rightarrow \widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$

+) Ta có: $\widehat{AMD} = \frac{1}{2}$ Sđ $\overset{\frown}{AD}$; $\widehat{BMD} = \frac{1}{2}$ Sđ $\overset{\frown}{DB}$ mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{BMD}$ hay MD là phân giác $\widehat{AMB}$.

c) Ta có $\widehat{MCD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MD}$; $\widehat{MBD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MD}$

Xét ΔMIC và ΔBID có

$\widehat{MIC} = \widehat{BID}$ (đối đỉnh)

$\widehat{MCI} = \widehat{IBD}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{MD}\right)$

$\Rightarrow \Delta MIC \infty \Delta DIB(g.g) \Rightarrow \frac{MI}{DI} = \frac{IC}{IB} \Rightarrow MI.IB = ID.IC$

+) $\widehat{SMC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MC}$; $\widehat{MDC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MC}$

Xét ΔSMC và ΔSMD có:

$\hat{S}$ chung

$\widehat{SMC} = \widehat{MDC}\left(=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{MC}\right)$

$\Rightarrow \Delta SMC \infty \Delta SDM\,(g.g) \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SC}{SM} \Rightarrow SM^2 = SC.SD$.

d) +) $\frac{NI}{NM} = \frac{OI}{OM}$ (tính chất phân giác)

$\frac{OI}{OM} = \frac{OI}{OB} =$ T= $\tan\widehat{MBA}$

+) $\Delta OCN = \Delta OMN(c.g.c) \Rightarrow \widehat{OCN} = \widehat{OMN} = \widehat{NBO}$

$\widehat{OCN} = \widehat{NBO} \Rightarrow$ Tứ giác $OBCN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CNB} = \widehat{COB} = 90^0$ hay $CN \perp BM$

e) OK là đường trung bình $\Delta AMB \Rightarrow \widehat{OKB} = 90^0$

K di chuyển trên đường tròn đường kính OB

Giới hạn: Vì $\widehat{ABM} < 45^0 \Rightarrow K$ nằm trên cung tròn $\frac{1}{4}$ như hình

+) $AM = \frac{3}{5}BM$

$MA = \frac{3}{5}MB \Rightarrow OI = \frac{3}{5}OB = \frac{3}{5}R$

Trong đoạn OC lấy $OI = \frac{3}{5}R$ Kẻ tia BI cắt cung AC tại M .

Bài 102. Cho $(O;R)$ có đường kính BC, A là điểm chính giữa cung BC , gọi M là trung điểm của BO, kẻ $ME \perp AB$ tại E, kẻ $MF \perp AC$ tại F. Kẻ tiếp tuyến của (O) tại A cắt MF tại K.

a)Chứng minh năm điểm A, E, M, O, F thuộc một đường tròn và $BE.BA = BO.BM$.

b)Chứng minh $ME = KF$ và gọi đường thẳng d là tiếp tuyến tại C của (O). AK cắt d tại S , từ K kẻ tiếp tuyến với (O) tại Q cắt d tại P. Tính chu vi ΔSKP theo R.

c) +Tính diện tích giới hạn bởi (O) và SA, SC biết $R = 6cm$.

+Chứng minh khi M di chuyển trên BC thì MN luôn đi qua một điểm cố định với $MN \perp EF$ tại N.

Hướng dẫn

a) Ta có tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật, nên 4 điểm A, E, M, F nằm trên đường tròn đường kính EF . Các tam giác $BEM, ABO,$ AKF vuông cân.

Nên : $\Delta OFA = \Delta OEB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{FOA}$

$\Rightarrow \widehat{FOE} = \widehat{FOA} + \widehat{EOA} = \widehat{EOA} + \widehat{BOE} = \widehat{AOB} = 90°$

$\Rightarrow (O)$ thuộc đường tròn đường kính EF

Vậy minh năm điểm A, E, M, O, F thuộc một đường tròn đường kính EF.

$\Delta BEF \backsim \Delta BOA \Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BA = BO.BM$.

b) $ME =$ AF,AF $= FK \Rightarrow ME = KF$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow KQ = AK, QP = PC$.

Chu vi tam giác

$SKP = KS + SP + Kp = KS + SP + KQ + QP = KS + AK + SP + PC =$ AS+SC=2R

c) Gọi diện tích giới hạn bởi đường tròn (O) và SA, SC là S.

$$S = S_{AOCS} - S_{qAOC} = S_{AOCS} - \frac{1}{4}S_{(O)} = R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 = 36 - 9\pi$$

Gọi giao điểm của AO với EF là I, giao của AO với đường tròn (O) là D

Ta có: $\Delta AIE \backsim \Delta BMA(g.g) \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AIE} \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{OIE} \Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{OIE}$

$\Rightarrow \widehat{OIE} + \widehat{ODM} = \widehat{OMD} + \widehat{ODM} = 90° \Rightarrow IM \perp EF$

Mà $MN \perp EF$ Nên I, M, N thẳng hẳng, hay MN luôn đi qua một điểm cố định là D.

Bài 103. Cho ΔABC nội tiếp (O). Gọi BM, CN là các đường cao của ΔABC tại H. Kẻ đường kính AE, gọi I là trung điểm của BC, G là giao điểm của AI và OH.

a) Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp và tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $AO \perp MN$ và G là trọng tâm ΔABC.

c) Gọi BM; CN cắt (O) tại P; Q. Chứng minh $PQ//MN$ và tìm vị trí của A để diện tích tam giác AMH lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^0$ (BM, CN là các đường cao)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn đường kính BC (dhnb).

+)Chứng minh tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

Ta có: $BE \perp AB$ (AE là đường kính)

$NC \perp AB$ (NC là đường cao)

$\Rightarrow$ $BE//NC$ (t/c từ vuông góc đến song song)

hay $BE//CH$ (1)

Chứng minh tương tự $CE//BM$ hay $CE//BH$ (2)

Từ (1) (2) suy ra tứ giác $BHCE$ là hình bình hành (dhnb).

b) Chứng minh $MN \perp AO$

Gọi K là giao điểm của MN và AE.

+ Ta có: $\widehat{EBC} = \widehat{EAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

mà $\widehat{EBC} = \widehat{NCB}$ (sole trong)

$\Rightarrow$ $\widehat{EAC} = \widehat{NCB}$.

+ Ta có: $\widehat{AMN} = \widehat{NBC}$ (t/c góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$\widehat{EAC} = \widehat{NCB}$ (cmt)

$\Rightarrow$ $\widehat{AMN} + \widehat{EAC} = \widehat{NBC} + \widehat{NCB} = 90^0$ (ΔNBC vuông tại N)

$\Rightarrow \widehat{AMN} + \widehat{EAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AKE} = 90^0 \Rightarrow MN \perp AE$ hay $MN \perp AO$ (đpcm)

+)Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC

Xét hình bình hành $BHCE$ có I là trung điểm của BC (gt)

$\Rightarrow$ I là trung điểm của HE (t/c đường chéo hbh)

mà O là trung điểm của AE (AE là đường kính của (O))

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔAHE (đn)

$\Rightarrow OI // = \frac{1}{2}AH$ (t/c)

$\Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{OI}{AH} = \frac{1}{2}$ (hệ quả Đl Talet)

$\Rightarrow GA = 2GI$

mà G thuộc trung tuyến AI của tam giác ABC (gt)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác).

c) **Chứng minh** $PQ//MN$

+ Xét đường tròn tâm O: $\widehat{PQC} = \widehat{PBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PC}$)

+ Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BNMC$: $\widehat{PBC} = \widehat{MNC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{PQC} = \widehat{MNC}$ mà chúng ở vị trí sole trong

$\Rightarrow$ $PQ//MN$ (dhnb).

Tìm vị trí của A để diện tích tam giác AMH lớn nhất.

+ Kẻ đường cao ME của tam giác AMH .

Ta có: $S_{AMH} = \frac{1}{2}AH.ME$ mà $AH = 2OI$ (cmt)

Vì I là trung điểm của BC (gt) nên $OI \perp BC$ cố định (t/c đường kính và dây cung). Do đó OI không đổi.

$\Rightarrow AH$ không đổi.

$\Rightarrow$ Diện tích của tam giác AMH lớn nhất khi đường cao ME lớn nhất.

+ Gọi J là trung điểm của AH .

Vì tam giác vuông MAH vuông tại H: $MJ = \frac{1}{2}AH$ không đổi.

mà $ME \le MJ$

$\Rightarrow$ ME lớn nhất bằng MJ không đổi khi $E \equiv J$. Khi đó tam giác MAH vuông cân tại M .

$\Rightarrow \widehat{HAM} = 45^0$ mà $AH \perp BC$ (H là trực tâm của ΔABC) $\Rightarrow$ $\widehat{ACB} = 45^0$.

Vậy S_{AMH} lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\widehat{ACB} = 45^0$.

Bài 104. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK

a) Chứng minh rằng $ABDE$ nội tiếp và $DF//BK$

b) Chứng minh rằng $\widehat{OCA}=\widehat{BAD}$ và $AB^2=AE.AK$

c) Tính $S_{quat}OKC$ biết $\widehat{ABC}=60^0$ và $R=4cm$ và chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cô định khi BC cố định, A chuyển động trên $\frac{1}{2}(O)$ thỏa mãn tam giác ABC nhọn

Hướng dẫn

a) Chứng minh rằng $ABDE$ nội tiếp và $DF//BK$

Ta có AD là đường cao $\widehat{ADB}=90^0$ và $BE\perp AK$ nên $\widehat{AEB}=90^0$ mà E và D là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc vuông $\Rightarrow ABDE$ nội tiếp

Cmtt ta có $\Rightarrow ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAK}=\widehat{CDF}$ và $\widehat{CAK}=\widehat{CBK}$ ($ABKC$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{CDF}=\widehat{CBK}$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị => $DF//BK$

b) Chứng minh rằng $\widehat{OCA}=\widehat{BAD}$ và $AB^2=AE.AK$

Xét tam giác ABK có AK là đường kính => tam giác ABK vuông tại B

ta có $\widehat{OCA}=\widehat{OAC}$ (vì tam giác OAC cân tại O)

mà $\widehat{CAK}=\widehat{OAC}=\widehat{CBK}$ ($ABKC$ nội tiếp)

ta lại có $\widehat{ABD}+\widehat{CBK}=90^0$ (tam giác ABK vuông tại B) và $\widehat{ABD}+\widehat{BAD}=90^0$ (tam giác ABD vuông tại D) $\Rightarrow \widehat{CBK}=\widehat{BAD}\Rightarrow \widehat{OCA}=\widehat{BAD}$.

Xét ABK vuông tại B có $BE\perp AK$ $\Rightarrow AB^2=AE.AK$ (hệ thức về đường cao và cạnh trong tam giác vuông).

c) Tính $S_{quat}OKC$ biết $\widehat{ABC}=60^0$ và $R=4cm$ và chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cô định khi BC cố định, A chuyển động trên $\frac{1}{2}(O)$ thỏa mãn tam giác ABC nhọn.

Ta có $\widehat{ABC}=60^0 \Rightarrow \widehat{KBC}=30^0 \Rightarrow \widehat{KAC}=30^0 \Rightarrow \widehat{KOC}=60^0$ (quan hệ góc nội tiếp và góc ở tâm) $\Rightarrow S_{quat}OKC=\dfrac{4^2.\pi.60^0}{360^0}=\dfrac{8\pi}{3}(dv\text{dt})$

Gọi $M;N;P$ lần lượt là trung điểm của $BC;AC;AB => MN//AB$ mà $AB\perp BK => MN\perp BK$

Mà $BK//DF \Rightarrow MN\perp DF$ (1)

Xét ΔADC vuông tại D có N là trung điểm $\Rightarrow DN=\dfrac{1}{2}AC$

Xét ΔAFC vuông tại F có N là trung điểm $\Rightarrow FN=\dfrac{1}{2}AC$

$\Rightarrow DN=FN$ (2) từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $DF \Rightarrow MD=MF$ (3)

Cmtt ta có MP là đường trung trực của $DE \Rightarrow MD=ME$ (4)

Từ (3) và (4) ta có M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF mà $M\in BC$ và BC cố định $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cô định khi BC cố định , A chuyển động trên $\dfrac{1}{2}(O)$ thỏa mãn tam giác ABC nhọn.

Bài 105. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BE,CF cắt nhau tại H, cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại M và N.

a. Chứng minh AE.AC=AF.AB

b. Chứng minh MN song song với EF

c. Chứng minh $\frac{MH}{AH}<2$

d. Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Hướng dẫn

a. Xét ΔACF và ΔABE có $\begin{cases}\widehat{AEB}=\widehat{AFC}=90^0\\ \widehat{A} \text{ chung}\end{cases} \Rightarrow \Delta ACF \backsim \Delta ABE(g.g)$

b. Xét tứ giác EFBC có $\widehat{CEB}=\widehat{CFB}=90^0$ (2 góc cùng nhìn cạnh BC) $\Rightarrow$ □EFBC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EBC}=\widehat{EFC}\left(\text{cung chan } \overset{\frown}{EC}\right)(1)$; $\widehat{MBC}=\widehat{MNC}(2)\left(\text{ goc noi tiep cung chan cung } \overset{\frown}{MC}\right)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{EFC}=\widehat{MNC} \Rightarrow EF//MN$

c. Tam giác AMH cân tại A (do AE vừa là phân giác vừa là đường cao)

$\Rightarrow MH=2EH \Rightarrow EH=\frac{MH}{2}<AH \Rightarrow \frac{MH}{AH}<2$

d.

kẻ đường kính BB'.

Chứng minh AHCB' là hình bình hành => AH =CB'

Tam giác CBB' vuông tại C có BB' = 2R, BC không đổi suy ra CB' không đổi suy ra AH không đổi.

Ta có AEHF là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AH, suy ra AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF suy ra diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi. (đpcm)

Bài 106. Cho tam giác ABC vuông tại C. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC cắt AB tại D. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Nối AM cắt BC tại N. Nối DM cắt BC tại E. Tia phân giác của $\widehat{MAD}$ cắt BC tại I, cắt MD tại K.

a. Chứng minh: BDMN là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh tam giác EIK cân

c. Chứng minh $MN.AB = MC.NB$

Hướng dẫn

a. Chứng minh: BDMN là tứ giác nội tiếp.

+ Xét đường tròn (O) có:

M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{CM}$

$\widehat{ANC}$ là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn chắn $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{CM} \Rightarrow \widehat{ANC} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AC} - sd\overset{\frown}{CM}\right)$

$\widehat{ADM}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{ACM} \Rightarrow \widehat{ADM} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{ACM} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AC} + sd\overset{\frown}{CM}\right)$

$\Rightarrow \widehat{ANC} + \widehat{ADM} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AC} + sd\overset{\frown}{AC}\right) = sd\overset{\frown}{AC} = 180°$

Mà $\widehat{ADM} + \widehat{MDB} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{ANC}$

+ Xét tứ giác BDMN có: $\widehat{MDB}=\widehat{ANC}$ mà $\widehat{ANC}$ là góc ngoài tại đỉnh N, N là đỉnh đối diện với đỉnh D

$\Rightarrow$ BDMN là tứ giác nội tiếp (dhnb)

b. Chứng minh tam giác EIK cân

Gọi $\{H\}=AI\cap(O)$

+ Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{MAH}=\widehat{HAD}\Rightarrow \overset{\frown}{HM}=\overset{\frown}{DH}$

$\widehat{MKH}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn chắn $\overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{MK}\Rightarrow \widehat{MKH}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AD}+sd\overset{\frown}{HM}\right)$

$\widehat{AIC}$ là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn chắn $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{HC}\Rightarrow \widehat{AIC}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AC}-sd\overset{\frown}{HC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{AIC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AH}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AD}+sd\overset{\frown}{DH}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AD}+sd\overset{\frown}{HM}\right)$

$\Rightarrow \widehat{MKH}=\widehat{AIC}$

$\Rightarrow$ ΔEKI cân tại E

c. Chứng minh $MN.AB=MC.NB$

+ Chứng minh $\Delta MNC\#\Delta CNA(g.g)\Rightarrow \frac{MN}{MC}=\frac{CN}{CA}$

+ Xét (O) có: $\overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MD}\Rightarrow \widehat{CAM}=\widehat{MAD}$

+ Xét ΔCAB có AN là tia phân giác của $\widehat{CAB}\Rightarrow \frac{BN}{BA}=\frac{CN}{CA}$

$\Rightarrow \frac{MN}{MC}=\frac{BN}{BA}\left(=\frac{CN}{CA}\right)\Rightarrow MN.BA=MC.BN$ (đpcm)

Bài 107. Cho đường tròn (O) có đường kính AB=2R và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B,C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

a/ Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp.

b/ Chứng minh DA.DE = DB. DC

c/ Chứng minh $\widehat{CFD}=\widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d/ Cho biết DF=R. Chứng minh $\tan\widehat{AFB}=2$

Hướng dẫn

d/ Cho biết DF=R. Chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CDF \sim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{CB}{CF} = \dfrac{AB}{DF} = \dfrac{2R}{R} = 2 \\ \tan \widehat{AFB} = \dfrac{CB}{CF} (\Delta CFB) \end{array}\right\} \Rightarrow \tan \widehat{AFB} = 2$$

Bài 108. Cho đường tròn $(O;R)$. B và C là hai điểm thuộc đường tròn sao cho $\widehat{BOC} = 120^0$. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A. Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC (M khác B và C). Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AB và AC lần lượt tại E và tại F.

a) Chứng minh ΔABC là tam giác đều

b) Tính theo R chu vi ΔAEF

c) Gọi I và K lần lượt là giao điểm của OE và OF với BC. Chứng minh EK, OM, FI cùng đi qua 1 điểm

d) Tính tỉ số $\dfrac{EF}{IK}$

Hướng dẫn

a) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^0$

Do đó ΔABC là tam giác đều.

b) Theo tính chất tiếp tuyết ta có EB = EM, FC = FM nên chu vi tam giác $AEF = AB + AC = 2AC$.

Cũng theo tính chất tiếp tuyến ta có: $\widehat{COA} = \widehat{BOA} = 60^0; OC \perp AC$.

Do đó: $AC = OC.\tan 60^0 = R\sqrt{3}$. Vậy chu vi tam giác $AEF = 2R\sqrt{3}$

c) Có OE là phân giác của $\widehat{MOB}$, OF là phân giác của $\widehat{MOC}$ suy ra $\widehat{EOF} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^0$.

Mặt khác $\widehat{BCA} = \widehat{CBA} = 60^0$ (câu a), $\widehat{IOF} = \widehat{ICF} = 60^0$, suy ra COIF và BOKE là tứ giác nội tiếp.

Do đó $\widehat{OIF} = 180^0 - \widehat{OCF} = 90^0; \widehat{OKE} = 180^0 - \widehat{OBE} = 90^0$ nên $\widehat{EIF} = \widehat{EKF} = 90^0$.

Theo tính chất tiếp tuyến $OM \perp EF$. Vậy OM, EK, FI là 3 đường cao của tam giác OEF nên chúng đồng quy tại 1 điểm.

d) Tứ giác EIKF có $\widehat{EIF} = \widehat{EKF} = 90^0$ nên EIKF là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{OIK} = \widehat{OFE}$,

lại có $\widehat{EOF}$ chung nên $\Delta OIK \# \Delta OFE (g-g)$.

Do đó $\frac{IK}{EF} = \frac{OK}{OE} = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$. Vậy $\frac{EF}{IK} = 2$

Bài 109. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AH, cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi I là trùn điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm M, O, N thẳng hàng

b) $BMNC$ là tứ giác nội tiếp

c) AI vuông góc với MN

d) $BM.BA + CN.CA \geq 2AH$

Hướng dẫn

a) Vì $\widehat{MAN} = 90^0$ nên MN là đường kính của đường tròn (O). Do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng

b) Có $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$). Mà $OA = OM = R$ nên $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$

Do đó $\widehat{AMO} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BMN} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác BMNC là tứ giác nội tiếp.

c) ΔABC vuông tại A nên $IA = IB$. Do đó $\widehat{B} = \widehat{IAB}$. Theo chứng minh trên thì $\widehat{C} = \widehat{AMO}$, mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$, suy ra $\widehat{AMO} + \widehat{IAB} = 90^0$. Do đó $AI \perp MN$

d) Có $BM.BA = BH^2$; $CN.CA = CH^2$; $BH.CH = AH^2$. Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 110. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC, Gọi A là điểm chính giữa cung BC. Điểm M thuộc đoạn BC. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AC$, $MN \perp EF$ tại N

a) Chứng minh năm điểm A, E, O, M, F thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $BE . BA = BO. BM$

c)Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại A cắt MF tại K . Chứng minh $BE = KF$

d) Khi M di chuyển trên BC , chứng minh rằng MN luôn đi qua 1 điểm cố định

Hướng dẫn

a) Vì cung $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow OA \perp BC$, có $\widehat{MEA} = \widehat{MFA} = 90^0$ nên 5 điểm A, E, O, M, F thuộc đường tròn đường kinh AM

b) $\Delta BEM \backsim \Delta BOA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BA = BO.BM$

c) ΔABC vuông cân tại A nên $\widehat{ABC} = 45^0$. Mà AK là tiếp tuyến tại A của đường trong (O) nên $\widehat{KAC} = \widehat{ABC} = 45^0$. Do đó các ΔBEM và vuông cân $\Rightarrow BE = ME$ và $AF = FK$.

Mặt khác $MEAF$ là hình chữ nhật nên $ME = AF$. Từ đó suy ra $BE = KF$.

d) Vẽ đường kính AI. TA có $AI \perp BC$, $OA = OB = OC = OI = R$ nên $BEHI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH = BE$. Mà $BE = ME \Rightarrow ME = IH$ và $\widehat{MHI} = 90^0$.

Do đó CB là phân giác của ACI nên $MF = MH$. Tứ giác MEAF là hình chữ nhật nên $\widehat{EMF} = 90^0$

Từ đó suy ra $\Delta HMI = \Delta MFE\ (c.g.c)$ suy ra $\widehat{MFE} = \widehat{IMH}$. Do đó $\widehat{IMH} + \widehat{FMN} = 90^0$

Lại có CFMH là hình vuông nên $\widehat{HMF} = 90^0$. Vậy $\widehat{IMH} + \widehat{FMN} + \widehat{HMN} = 180^0$ suy ra N, M, I thẳng hàng , Mà I cố định

Vậy MN luôn đi qua điểm cố định I là điểm chính giữa cung BC không chưa điểm A

Bài 111. Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB, bán kính $OC \perp AB$. Điểm E thuộc đoạn OC. Nối AE cắt nửa đường tròn tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D.

a) ΔDME là tam giác cân.

b) Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC.

c) Tìm vị trí của điểm E để $MA = 2MB$.

d) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔCME.

CMR: khi E chuyển động trên OC thì I luôn thuộc 1 đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) $\widehat{BMA} = \widehat{BOE} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BMEO$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MED}$. Mà $\widehat{ABM} = \widehat{DMA} \Rightarrow \widehat{DMA} = \widehat{MED} \Rightarrow \Delta DME$ cân tại D.

b) $\Delta BOK \sim \Delta BMA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BO}{MB} = \dfrac{BK}{BA}$

$\Rightarrow BM.BK = BO.BA = 2R^2$ không đổi.

c) $\tan \widehat{MAB} = \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{OE}{OA}$

$MA = 2MB \Leftrightarrow \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow OE = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2} \Leftrightarrow E$ là trung điểm của OC.

d) Có $\widehat{CMA} = \dfrac{1}{2}\widehat{COA} = 45^0$

Mà $\widehat{CMA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CIA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CIA} = 90^0$

Lại có $IC = IE = r \Rightarrow \Delta ICE$ vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{ECI} = 45^0$

Theo giả thiết: $OC \perp OB, OC = OB = R \Rightarrow \widehat{OCB} = 45^0 \Rightarrow I \in BC$ cố định.

Bài 112. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O,R). Kẻ đường cao AD và đường kính AK. Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK.

a)Chứng minh $ABDE$ và $ACFD$ là tứ giác nội tiếp

b)Chứng minh $DF//BK$

c)Cho $\widehat{ABC}=60^0, R=4cm$. Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OC, OK và cung nhỏ CK.

d) Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF là một điểm cố định

Hướng dẫn

a) $\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90^0; \widehat{ADC}=\widehat{AFC}=90^0$ nên các tứ giác $ABDE$ và $ACFD$ là tứ giác nội tiếp

b)Tứ giác $ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDF}=\widehat{CAF}$. Mà $\widehat{CAF}=\widehat{CBK} \Rightarrow \widehat{CBK}=\widehat{CDF} \Rightarrow DF//BK$

c) $\widehat{CBA}=60^0 \Rightarrow \widehat{AOC}=120^0 \Rightarrow \widehat{COK}=60^0.S_q=\dfrac{60.\pi.16}{360}=\dfrac{8\pi}{3}\left(cm^3\right)$

d)Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC, $\Rightarrow MN//AB$, mà $\widehat{ABK}=90^0$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MN \perp BK$. Mà $BK//DF \Rightarrow MN \perp DF$. Các $\Delta ADC, \Delta AFC$ vuông tại D và F $\Rightarrow ND=MF$

Tương tự $MD=ME \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Vì BC cố định nên M cố định.

Bài 113. Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính BC và điểm A thuộc nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài ΔABC hai nửa đường tròn; nửa đường tròn tâm I, đường kính AB; nửa đường tròn tâm K, đường kính AC. Một đường thẳng d thay đổi qua A cắt nửa đường tròn (I) và (K) tương ứng tại M và N.

a) Tứ giác $MNCB$ là hình gì?

b) Chứng minh $AM.AN=MB.NC$

c) Chứng minh ΔOMN là tam giác cân

d) Xác định vị trí của đường thẳng d để S_{BMNC} lớn nhất.

Hướng dẫn

a) $\widehat{AMB}, \widehat{ANC}$ là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ \Rightarrow BM // NC \Rightarrow$ Tứ giác $MNCB$ là hình thang vuông

b) Vì $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ nên $\widehat{MAB} = \widehat{NCA}$ (cùng phụ $\widehat{NAC}$)

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta NCA$ (g.g) $\Rightarrow AM.AN = MB.NC$

c) Gọi E là trung điểm $MN \Rightarrow OE$ là đường trunh bình của hình thang $BMNC$

$\Rightarrow OE \perp MN \Rightarrow OMN$ cân tại O.

d) Vì ΔABC cố định $\Rightarrow S_{ABC}$ không đổi. Do đó S_{BMNC} max $\Leftrightarrow (S_{MBA} + S_{NAC})$ max

Vì $\Delta MAB \backsim \Delta NCA$ với tỉ số $k = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow S_{MAB} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 .S_{NCA}$

$S_{MBA} + S_{NAC} = \left(1 + \dfrac{AB^2}{AC^2}\right).S_{ANC} \Leftrightarrow S_{ANC}$ max

Bài 114. Cho đường tròn $(O;R)$, M là điểm nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Gọi E là điểm thuộc cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của đường tròn tại E cắt MA, MB lần lượt tại I và K.

a) Tính số đo $\widehat{AMB}$ và $\widehat{IOK}$

b) Tính chu vi tam giác MIK theo R

c) Tính bán kính r đường tròn nội tiếp tam giác MAB theo R.

Hướng dẫn

a) Theo tính chất tiếp tuyến thì $OA \perp MA$ và $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$

Ta có $\sin\widehat{OMA} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OMA} = 30°$ nên $\widehat{AMB} = 60°$ và $\widehat{AOM} = 60°$

Mà OM là phân giác của $\widehat{AOB}$ $\Rightarrow \widehat{AOB} = 120°$

Tương tự OI là phân giác của $\widehat{AOE}$; OK là phân giác của $\widehat{BOE}$ $\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{IOK} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = 60°$

b) Theo tính chất tiếp tuyến $IE = IA; KE = KB$. Do đó chu vi ΔMIK bằng:

$$MA + MB = 2MA$$

Ta có $MA = OM.\cos 30° = R\sqrt{3}$

Vậy chu vi ΔMIK bằng $2R\sqrt{3}$

c) OM cắt AB tại H, cắt cung nhỏ AB tại N.

Theo chứng minh trên $MA = MB, \widehat{OMA} = \widehat{OMB}$ nên $OM \perp AB$ tại H.

Do đó $\widehat{NBH} = 90° - \widehat{ONB}$

Mặt khác $OB \perp BM$ nên $\widehat{NBM} = 90° - \widehat{OBN}$

Vì $OB = ON = R$ nên $\widehat{ONB} = \widehat{OBN}$

Từ đó suy ra $\widehat{HBN} = \widehat{MBN}$.

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, do đó $r = NH$

ΔOBN có $\widehat{BON} = 60°$ và $OB = ON$ nên là tam giác đều

Có $BH \perp ON$ nên $NH = HO = \dfrac{R}{2}$

Vậy $r = \dfrac{R}{2}$.

Bài 115. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

a/ Chứng minh BCHK là tứ giác nội tiếp.

b/ Tính tích $AH.AK$ theo R

c/ Xác định vị trí của điểm K để tổng (KM + KN + KB) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn

a) Do AB là đường kính nên $\widehat{AKB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Theo giải thiết $MN \perp AB$ tại C $\Rightarrow \widehat{HCB} = 90^0$

Suy ra tứ giác HCBK có 2 góc đối có tổng bằng 180^0 nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ đpcm.

b) Xét $\triangle AHC$ và $\triangle ABK$ có

$\widehat{HCA} = \widehat{AKB} = 90^0$

Góc $\widehat{KAB}$ chung

$\Rightarrow \triangle AHC$ đồng dạng $\triangle ABK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AK}$

$\Rightarrow AH.AK = AC.AB = \dfrac{R}{2}.2R = R^2$ (Do C là trung điểm OA)

Vậy $AH.AK = R^2$

c) Ta có : $OC = \dfrac{R}{2} = \dfrac{OM}{2}$

$\Rightarrow$ ΔMOC vuông tại C có $OC = \dfrac{1}{2}OM$ nên $\widehat{OMC} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MOC} = 60^0 = \widehat{NOC}$

$\Rightarrow \widehat{MBN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON} = \dfrac{1}{2}.120^0 = 60^0$ (1)

$MN \perp AB \Rightarrow$ AB là trung trực của MN $\Rightarrow$ $BM = BN$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow$ ΔBMN đều.

Lấy điểm E trên đoạn KN sao cho $KE = KM$

.Dễ thấy $\widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 60^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MN) $\Rightarrow$ ΔMKE đều.

Ta có: $\widehat{NMB} = \widehat{EMK} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{MNE} = \widehat{KMB}$ ($= 60^0 - \widehat{EMB}$)

Xét $\triangle MEN$ và $\triangle MKB$ có

$MN = AB$ (do $\triangle MNB$ đều)

$ME = MK$ (do $\triangle KME$ đều)

$\widehat{MNE} = \widehat{KMB}$ (CM trên)

$\Rightarrow \triangle MEN = \triangle MKB$ (c.g.c)

$\Rightarrow EN = KB$ (2 cạnh tương ứng)

Suy ra: $KM + KB + KN = KE + EN + KN = 2KN$

$(KM + KB + KN)_{ax} \Leftrightarrow KN_{ax}$

Lại có $KN \le 2R$

.Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ K, N, O thẳng hàng.

Vậy GTLN của $(KM + KN + KB) = 4R$ khi và chỉ khi K là giao điểm của NO với cung $MB_{nhỏ.}$

Bài 116. Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên đường thẳng d lấy điểm H không trùng với điểm A và AH < R. Qua H kẻ một đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

a) Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và $\Delta ABH \sim \Delta EAH$.

b) Lấy C trên d sao cho sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh: Tứ giác AHEK nội tiếp.

c) Xác định H để AB = $R\sqrt{3}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AE)

Chứng minh $\Delta ABH \sim \Delta EAH$ (g.g) ($\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và góc H chung)

b) Lấy C trên d sao cho sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh: Tứ giác AHEK nội tiếp.

C/m $\Delta CEH \sim \Delta CAK$ (g.g) => $\widehat{CKA} = 90^0$ => $\widehat{CKA} + \widehat{EAH} = 180^0$ => Tứ giác AHEK nội tiếp.

c) Xác định H để AB = $R\sqrt{3}$

+ Từ O kẻ OM vuông góc với AB tại M => M là trung điểm AB => AM = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

+ ΔOMA vuông tại M có $\cos\widehat{MAO} = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} : R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ => $\widehat{MAO} = 30^0$ => $\widehat{BAH} = 60^0$

Vậy H thuộc d sao cho $BH \perp d$ và $\widehat{BAH} = 60^0$.

Bài 117. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm)

a/ Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b/ Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$

c/ Trên cung nhỏ BC của đường tròn $(O;R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O;R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K di chuyển trên cung nhỏ BC

d/ Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $ABOC$ có

$\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau

Tứ giác $ABOC$ nội tiếp

b) Xét (O)

Có tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C cắt nhau ở A nên

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AO \text{ là tia phân giác cua góc } \widehat{BAC} \end{cases}$$

Vì $E \in AO \Rightarrow AE$ là tia phân giác cua góc $\widehat{BAC}$

Xét ΔABC có $AB = AC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Lại có AE là tia phân giác cua góc $\widehat{BAC}$

Suy ra AE đồng thời là đường cao

$\Rightarrow AE \perp BC$ *hay* $AO \perp BC$

c) Xét (O)

Có tiếp tuyến tại K và tiếp tuyến tại B cắt nhau tại P $\Rightarrow PK = PB$

Có tiếp tuyến tại K và tiếp tuyến tại C cắt nhau tại Q $\Rightarrow QK = QC$

Ta có :

$$\begin{aligned} P_{\Delta APQ} &= AP + PQ + AQ \\ &= AP + PK + KQ + AQ \\ &= (AP + PB) + (QC + AQ) \\ &= AB + AC \\ &= 2AB\,(do\ AB = AC) \end{aligned}$$

Mà AB không đổi $\Rightarrow P_{\Delta APQ}$ không đổi (đpcm)

d) Chứng minh được $\Delta MOP \backsim \Delta NQO\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MP}{ON} = \dfrac{OM}{QN}$

$\Rightarrow PM.QN = OM.ON = \dfrac{MN^2}{4}$

Theo BĐT Cosi ta có

$PM + QN \geq 2.PM.QN \Rightarrow (PM + QN)^2 \geq 4(PM.QN)^2$

$\Rightarrow (PM + QN)^2 \geq 4.\dfrac{MN^2}{4} \Rightarrow (PM + QN)^2 \geq MN^2$

$\Rightarrow PM + QN \geq MN$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow PM = QN$

Bài 118. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C).Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại điểm F.

a) Chứng minh: $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $DA.DE = DB.DC$

c) Chứng minh: $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Cho biết $DF = R$. Chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

$\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\widehat{BCF} = 90^0$

$\widehat{AEB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\widehat{AEF} = 90^0$

Từ giác $FCDE$ có: $\widehat{BCF} + \widehat{AEF} = 180^0$

Mà hai góc này là hai góc đối

$\Rightarrow FCDE$ là tứ giác nội tiếp (d.h.n.b)

b) Chứng minh: $DA.DE = DB.DC$

ΔACD đồng dạng ΔACD (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DE}$

$\Rightarrow DA.DE = DB.DC$

c) Chứng minh: $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

* $FCDE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CD}$)

$\widehat{CED} = \widehat{CBA}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{OCB}$

* I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$ $\Rightarrow I$ trung điểm FD

$\Rightarrow CI = ID \Rightarrow \Delta CID$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{IDC}$

* OC = OB = R $\Rightarrow \Delta COB$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

$\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$ (cnt)

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{OBC}\left(= \widehat{OCB}\right)$

* $\Delta CDF : \widehat{DCF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{DFC} = 90^0$ (hệ quả định lí tổng ba góc)

$\Rightarrow \widehat{ICD} + \widehat{OCB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{OCI} = 90^0$

$\Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Cho biết $DF = R$. Chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$

ΔCDF đồng dạng ΔCAB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

Xét ΔCFB vuông tại C: $\tan \widehat{CFB} = \dfrac{CB}{CF} = 2$

Bài 119. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh: Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90°$.

c) Chứng minh: $AM.BN = AI.BI$.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của ΔMIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMEI$ có $\widehat{MAI}+\widehat{MEI}=180°$ mà A và E là hai đỉnh đối diện

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN}=90°$.

+ Chứng minh tương tự câu a có: Tứ giác $BNEI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EI}$)

+ Chứng minh ΔEAB vuông tại E có $\widehat{EAI}+\widehat{EBI}=90°$

Mà $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ và $\widehat{EMI}=\widehat{EAI}$ (Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{ENI}+\widehat{ENI}=90°$

$\Rightarrow \widehat{MIN}=90°$

c) Chứng minh: $AM.BN=AI.BI$.

+ Có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{MIA}+\widehat{NIB}=90°\\ \widehat{INB}+\widehat{NIB}=90°\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{MIA}=\widehat{INB}$

+ Chứng minh $\Delta MAI \# \Delta IBN\,(g.g)\Rightarrow \dfrac{AM}{BI}=\dfrac{AI}{BN}\Rightarrow AM.BN=AI.BI$

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của ΔMIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

+ Xét đường tròn (O) có: F là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BF}$ $\Rightarrow$ $\widehat{AEF}=\widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{BEF} = \frac{1}{2}\widehat{AEB} = 45°$

+ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AEI} \Rightarrow \widehat{AMI} = 45°$

+ ΔAMI vuông tại $A \Rightarrow MI = \frac{AI}{\sin\widehat{MAI}} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

+ Tương tự có $NI = \frac{BI}{\sin\widehat{BNI}} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3R\sqrt{2}}{2}$

+ ΔMIN vuông tại $I \Rightarrow S_{MIN} = \frac{MI.NI}{2} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}.\frac{3R\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3R^2}{4}$

Bài 120. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A, C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

a) Chứng minh: Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp,

b) Chứng minh: $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.

c) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh: ΔECM là tam giác vuông tại C.

d) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho P nằm cùng phía với C đối với đường thẳng AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh: đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

+ Chứng minh $\widehat{ACB}=90^\circ$

+ Xét tứ giác $CBKH$ có: $\widehat{HKB}+\widehat{HCB}=180^\circ$ (do $\widehat{HKB}=90^\circ$, $\widehat{HCB}=90^\circ$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{ACM}=\widehat{ACK}$.

+ Xét (O) có $\widehat{MCA}=\widehat{MBA}$

+ Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{HCK}=\widehat{HBK}$

$\Rightarrow$ $\widehat{ACM}=\widehat{ACK}\left(=\widehat{MBA}\right)$

c) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE=AM$. Chứng minh: ΔECM là tam giác vuông tại C.

+ Xét (O) có $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$

+ Xét (O) có $CO\perp AB\Rightarrow \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{CB}\Rightarrow CA=CB$

+ Chứng minh $\Delta CBE=\Delta CAM\left(c.g.c\right)\Rightarrow \widehat{BCE}=\widehat{ACM}$

Mà $\widehat{BCE}+\widehat{ECH}=\widehat{ACB}=90^\circ$

$\Rightarrow$ $\widehat{ACM}+\widehat{ECH}=90^\circ\Rightarrow \widehat{MCE}=90^\circ$

$\Rightarrow$ ΔECM là tam giác vuông tại C.

d) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho P nằm cùng phía với C đối với đường thẳng AB và $\dfrac{AP.MB}{MA}=R$. Chứng minh: đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

+ Gọi $\{F\}=BM\cap d$ và $\{I\}=BP\cap HK$

+ $\dfrac{AP.MB}{MA}=R\Rightarrow AP.MB=MA.R\Rightarrow AP=\dfrac{MA.R}{MB}$

+ Chứng minh $\Delta BMA\#\Delta BAF\left(g.g\right)\Rightarrow AF=\dfrac{MA.AB}{MB}\Rightarrow AF=2.\dfrac{MA.R}{MB}=2.AP$

$\Rightarrow$ P là trung điểm của AF.

+ Chứng minh $HK//AF$

+ Có:

$$\left.\begin{array}{l} HI//FP \Rightarrow \dfrac{HI}{FP}=\dfrac{BI}{BP} \\ IK//PA \Rightarrow \dfrac{KI}{AP}=\dfrac{BI}{BP} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{HI}{FP}=\dfrac{KI}{AP} \text{ mà } FP=AP \Rightarrow HI=KI$$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của HK

$\Rightarrow$ đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK

Bài 121. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO(C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.

c) Chứng minh: ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

d) Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90°$ (góc chắn nửa đường tròn).

Do đó, tứ giác $ACMD$ nội tiếp vì có $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90°$ (dhnb).

b) Ta có $\widehat{HAB} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với $\widehat{CBD}$). Do đó $\triangle CAH \sim \triangle CDB (g.g)$ suy ra

$\frac{CA}{CH}=\frac{CD}{CB}\Rightarrow CA.CB=CH.CD.$

c) Dễ thấy H là trực tâm $\triangle ABD$. Hơn nữa $AN\perp BH$ tại N suy ra A,N,D thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của HD. Ta sẽ chứng minh $IN\perp NO$.

Vì I là trung điểm của HD, kết hợp với $\widehat{HND}=90^\circ$ suy ra $NI=ID=IH$.

Do vậy $\widehat{N_1}=\widehat{D_1}$. Mặt khác $\widehat{OAN}=\widehat{ONA}$ nên $\widehat{ONI}=\widehat{ONB}+\widehat{BNI}=\widehat{OBN}+\widehat{CHB}=90^\circ$.

Hay $IN\perp NO$ tại $N,(N\in(O))$ suy ra IN là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

d) Gọi MN giao với AB tại T. Kẻ TL là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

Do vậy $TL^2=TM.TN$. (1)

Ta có $IN\perp NO$ nên tương tự $IM\perp MO$. Kết hợp với $OC\perp IC$ nên năm điểm I,N,C,O,M thuộc đường tròn đường kính IO.

Suy ra $\triangle TNO\sim\triangle TCM\,(g.g)\Rightarrow TN.TM=TC.TO$. (2)

Từ (1) (2) ta được $TC.TO=TL^2\Rightarrow\triangle TCL\sim\triangle TLO(\text{c.g.c})\Rightarrow LC\perp TO$ (hơn nữa L thuộc nửa đường tròn (O)) nên $L\equiv K$. Do vậy T là giao điểm của tiếp tuyến tại K và AB nên T cố định.

Cách 2:

a) Ta có $\widehat{ANB}=\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc chắn nửa đường tròn).

Do đó, tứ giác $ACMD$ nội tiếp vì có $\widehat{ACD}=\widehat{AMD}=90^\circ$ (dhnb).

b) Ta có $\widehat{HAB}=\widehat{CDB}$ (cùng phụ với $\widehat{CBD}$). Do đó $\triangle CAH\sim\triangle CDB(g.g)$ suy ra

$\frac{CA}{CD}=\frac{CH}{CB}\Rightarrow CA.CB=CH.CD.$

c) Dễ thấy H là trực tâm $\triangle ABD$. Hơn nữa $AN\perp BH$ tại N suy ra A,N,D thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn với DH. Ta chứng minh I là trung điểm của DH.

Ta có $\widehat{NAB} = \widehat{INB}$ (góc nt và góc tạo bởi tia tt và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{NB}$ của (O))=> $\widehat{NAC} = \widehat{INH}$

Lại có $\widehat{NAC} = \widehat{NHI}$ (cùng phụ với $\widehat{ADC}$). Do đó $\widehat{NHI} = \widehat{INH}$ => ΔINH cân tại I $\Rightarrow IN = IH$

Mặt khác $\widehat{DNI} + \widehat{INH} = \widehat{NDI} + \widehat{NHI} = 90^0; \widehat{NHI} = \widehat{INH}$ => $\widehat{DNI} = \widehat{NDI}$ => ΔDNI cân tại I => $ID = IN$

Do đó $IH = ID$ => I là trung điểm của DH.

d) Ta có I là trung điểm của DH => $IN = IM$ ($= \frac{1}{2}DH$) mà $OM = ON$ => OI là đường trung trực của MN $\Rightarrow OI \perp MN$ tại E

ΔINO vuông tại N có $NE \perp IO$ => $OE.OI = ON^2 = OA^2$ (1)

Gọi giao điểm của MN với đường thẳng BA là T.

Ta có $\Delta OET \sim \Delta OCI (g.g) \Rightarrow \frac{OE}{OC} = \frac{OT}{OI}$ => $OT.OC = OE.OI$ (2)

Từ (1) (2) ta được $OT.OC = OA^2$ => $OT = \frac{OA^2}{OC}$.

Mà O, A. C cố định nên OT không đổi => T cố định.

Vậy khi M chuyển động trên cung KB thì đường thẳng MN luôn đi qua điểm T cố định.

Bài 122. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt lại các điểm H và K.

a) Chứng minh: 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: NB^2=NK.NM

c) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.

d) Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc 1 đường tròn.

Vì M là điểm chính giữa cung nhỏ AB của (O) (giả thiết)

Suy ra $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Mà $\widehat{ACM} = \widehat{ANM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BCM}$ hay $\Rightarrow \widehat{KIN} = \widehat{KCI}$

Xét tư giác IKNC: $\widehat{KIN} = \widehat{KCI}$ (chứng minh trên)

Mà C và N là hai đỉnh kề nhau.

$\Rightarrow$ IKNC là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow$ 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: NB^2=NK.NM

Vì ABNC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{NBC} = \widehat{NAC}$

Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) nên $\widehat{NAC} = \widehat{NAB}$

Vì AMBN là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{NAB} = \widehat{NMB}$

Suy ra $\widehat{NBC} = \widehat{NMB}$ hay $\widehat{NBK} = \widehat{NMB}$

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

$\widehat{NBK} = \widehat{NMB}$ (chứng minh trên)

$\widehat{MNB}$ chung

$\Rightarrow \Delta NBK$ đồng dạng với ΔNMB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NM} = \dfrac{NK}{NB} \Rightarrow NB^2 = NM.NK$

c) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi

Tứ giác IKNC nội tiếp suy ra $\widehat{IKC} = \widehat{INC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IC}$)

Xét (O): $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Suy ra: $\widehat{ABC} = \widehat{IKC}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị.

Suy ra IK // HB (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

BI cắt (O) tại G.

CM, AN lần lượt là đường phân giác của $\widehat{ACB}$; $\widehat{BAC}$ (do M, N là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$; $\overset{\frown}{BC}$)

Suy ra I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC nên G là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$ và BI là phân giác $\widehat{ABC}$.

Tứ giác AHMI nội tiếp do $\widehat{HAI} = \widehat{HMI}$ (do $\widehat{BAN} = \widehat{NMC}$ hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra $\widehat{AHI} = \widehat{AMI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

Xét (O): $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Suy ra: $\widehat{ABC} = \widehat{AHI}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị. Suy ra HI // BK (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Xét tứ giác BHIK

IK // HB (chứng minh trên)

HI // BK (chứng minh trên)

Suy ra tứ giác BHIK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà BI là phân giác $\widehat{HBK}$ (chứng minh trên)

Suy ra tứ giác BHIK là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

d) Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Vì $\widehat{NBK} = \widehat{BMK}$ nên ta có BN là tiếp tuyến tại B của đường tròn (P) ngoại tiếp ΔMBK

$\Rightarrow BN \perp BP$

Mà $\Rightarrow BN \perp BD$ do $\widehat{DBN} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra B, P, D thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có: C, Q, D thẳng hàng.

ΔPBK cân tại P (vì PB = PK = bán kính)

ΔDBC cân tại D (vì NB = NC do N là điểm chính giữa cung BC; ND là đường kính)

ΔPBK và ΔDBC là 2 tam giác cân có chung góc ở đáy nên góc ở đỉnh của chúng bằng nhau

$\Rightarrow \widehat{BPK} = \widehat{BDC}$

$\Rightarrow PK//DC$

$\Rightarrow PK//DQ$

Chứng minh tương tự ta có DB // QK

Vậy DPKQ là hình bình hành.

$\Rightarrow$ DK đi qua trung điểm PQ là E.

$\Rightarrow$ D, E, K thẳng hàng.

Bài 123. Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Hạ $OH \perp d$ tại H. Điểm M thuộc d. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn $(O;R)$. Nối AB cắt OH, OM lần lượt tại K và I.

a) Chứng minh 5 điểm M, H, O, A, B thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh OK.OH = OI.OM

c) Chứng minh khi M di chuyển trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.

d) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Xét (O) có MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn; A, B là tiếp điểm

Suy ra MA $\perp$ AO tại A; MB $\perp$ OB tại B.

Suy ra ΔMAO vuông tại A, suy ra OM là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔMAO; ΔOBM vuông tại B, suy ra OM là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔOBM.

Mà ΔOHM vuông tại H, suy ra OM là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔOHM.

Suy ra 5 điểm M, H, O, A, B cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, suy ra MA = MB; mà OA = OB. Suy ra OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra OM $\perp$ AB tại I.

Xét ΔOIK và ΔOHM có:

$\widehat{O}$ là góc chung

$\widehat{OIK} = \widehat{OHM} = 90^0$

Suy ra ΔOIK đồng dạng với ΔOHM (g – g)

Suy ra $\frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM}$

Suy ra $OI.OM = OH.OK$

c) Xét ΔOBM vuông tại B, áp dụng hệ thức lượng ta có:

$$OI.OM = OB^2 = R^2 \Rightarrow OH.OK = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$$

Do O, H cố định, suy ra K cố định, suy ra AB luôn đi qua điểm K cố định khi M di chuyển trên đường thẳng d.

d) Kẻ IE $\perp$ OK; Lấy J là trung điểm của OK.

Ta có $S_{\Delta OIK} = \frac{1}{2}OK.IE$

Mà OK không đổi suy ra $S_{\Delta OIK}$ lớn nhất khi và chỉ khi IE lớn nhất.

Mà IE $\leq$ IJ.

Dấu "=" xảy ra khi E $\equiv$ J

Khi đó ΔOIK vuông cân tại I, suy ra $\widehat{OIK} = 45^0$, suy ra ΔHMO vuông cân tại H $\Leftrightarrow$ HM = HO.

Vậy $S_{\Delta OIK}$ max $\Leftrightarrow$ HM = HO.

Bài 124. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AO. Về phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn, nửa đường tròn tâm I đường kính AB và nửa đường tròn tâm K đường kính AC. Một đường thẳng d qua A cắt các nửa đường tròn tâm I và tâm K lần lượt tại M và N.

a) Tứ giác MNCB là hình gì?

b) Chứng minh: $AM.AN = MB.NC$

c) Chứng minh tam giác OMN cân.

d) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác BMNC lớn nhất.

Hướng dẫn

a) * vì M thuộc nửa đường tròn tâm I đường kính AB suy ra tam giác AMB vuông tại M $\Rightarrow MB \perp MN$

vì N thuộc nửa đường tròn tâm K đường kính AC suy ra tam giác AMC vuông tại N $\Rightarrow NC \perp MN$

$\Rightarrow MB//NC \Rightarrow$ Tứ giác MNCB là hình thang (ĐN).

* Xét hình thang MNCB có: $\widehat{BMN} = 90^0 \left(MB \perp MN\right) \Rightarrow$ Tứ giác MNCB là hình thang vuông (ĐN).

b) $\widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{NAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{NAC} = 90^0$

+Vì tam giác ANC vuông tại N nên $\widehat{ACN} + \widehat{NAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{ACN} \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta NCA\left(gg\right) \Rightarrow$

$\frac{\text{AM}}{\text{NC}} = \frac{\text{MB}}{\text{AN}}$. suy ra $AM.AN = MB.NC$

c) Gọi E là trung điểm của MN suy ra OE là đường trung bình của hình thang MNCB (ĐN)

$\Rightarrow OE//MB//NC \Rightarrow OE \perp MN$

Xét tam giác OMN có: OE là đường trung tuyến (vì E là trung điểm của MN) vừa là đường cao $\left(OE \perp MN\right) \Rightarrow$ tam giác OMN cân tại O.

d) * vì $\Delta MAB \sim \Delta NCA \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{NCA}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \Rightarrow S_{MAB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 .S_{NCA}$

* $S_{MNCB} = S_{MAB} + S_{ABC} + S_{NCA} = S_{ABC} + \left[1 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2\right].S_{NCA}$

$\Rightarrow S_{MNCB}$ max $\Leftrightarrow S_{NCA}$ max; $S_{NCA} = \frac{1}{2}AN.NC$

$AN.NC \le \frac{AN^2 + NC^2}{2} \left(BĐT\ \cos i\right) \Leftrightarrow AN.NC \le \frac{AC^2}{2}$

$"=" \Leftrightarrow AN = NC \Leftrightarrow \Delta NCA$ vuông cân tại C $\Leftrightarrow \widehat{NAC} = 45^0$

Vậy khi đường thẳng d tạo với AC một góc 45^0 thì diện tích tứ giác BMNC lớn nhất.

Bài 125. Cho đường tròn đường kính AD. Gọi H là điểm thuộc đoạn OD. Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC, kẻ $CK \perp AM$ tại K. Đường thẳng BM cắt CK tại N.

a) Chứng minh $AH.AD = AB^2$.

b) Chứng minh tam giác CAN cân tại A.

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $AH.AD = AB^2$.

Tam giác ABD nội tiếp đường tròn có AD là đường kính nên vuông tại B.

Vì BH là đường cao của tam giác ABD vuông tại B nên ta có hệ thức lượng $AH.AD = AB^2$.

b) Chứng minh tam giác CAN cân tại A.

Tứ giác $AKCH$ nội tiếp (do $\widehat{AKC} + \widehat{AHC} = 180°$) suy ra $\widehat{KHC} = \widehat{KAC}$ mà $\widehat{KAC} = \widehat{MBC}$ (do cùng chắn cung $\overset{\frown}{MC}$) nên $\widehat{KHC} = \widehat{MBC}$.

$\widehat{KHC} = \widehat{MBC}$ mà hai góc này là hai góc đồng vị nên $HK // BM$. Lại có H là trung điểm của BC nên ta suy ra K là trung điểm của NC.

Tam giác CAN có AK vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A.

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

$AB = AC = AN$ nên tam giác ABN cân tại A. Suy ra $S_{ABN} = 2S_{ABI}$.

Gọi I là trung điểm BN, do ΔABN cân tại A suy ra $AI \perp BN \Rightarrow \widehat{AIB} = 90° \Rightarrow I$ di chuyển trên đường tròn đường kính AB.

S_{ABI} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\Leftrightarrow$ I nằm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ trên đường tròn đường kính $AB \Leftrightarrow \Delta ABI$ cân tại I $\Leftrightarrow \widehat{ABI} = 45° \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 90° \Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung $\overset{\frown}{AD}$.

Bài 126. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây BC cố định (BC không đi qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Điểm E thuộc cung lớn BC. Nối AE cắt BC tại D. Gọi I là trung điểm của BC. Hạ $CH \perp AE$ tại H, nối BE cắt CH tại M.

a) Chứng minh 4 điểm A,I,H,C thuộc một đường tròn.

b) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính AC.

c) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh 4 điểm A,I,H,C thuộc một đường tròn

- Chứng minh: ΔAIC vuông tại I.

$$\left.\begin{array}{l} CA = BA\ \left(\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{BA}\right) \\ CI = IB\ (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A, I nằm trên đường trung trực của CB}$$

$\Rightarrow AI \perp BC \Rightarrow \Delta AIC$ vuông tại I (đpcm).

-Chứng minh ΔCHA vuông tại H.

-Chứng minh ΔAIC *và* ΔCHA cùng nội tiếp đường tròn (C) tâm là trung điểm CA; Bán kính $r = \dfrac{CA}{2}$

- KL: Tứ giác CAIH nội tiếp tiếp đường tròn (C) tâm là trung điểm CA; Bán kính $r = \dfrac{CA}{2}$

Vậy 4 điểm A,I,H,C thuộc một đường tròn (đpcm).

b) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính AC.

- Chứng minh $OI \perp BC$ (*bán kính đi qua trung điểm của dây*) , mà $CI = BI$. Suy ra OI nằm trên đường trung trực của BC. Vậy 3 điểm A,I,O thẳng hàng.

- Xét ΔCIO vuông tại I. AD định lý Phytagos:

$$CO^2 = CI^2 + OI^2 \Rightarrow OI^2 = CO^2 - CI^2 \Rightarrow OI^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$$

-Có: $OI + AI = AO(=R) \Rightarrow AI = AO - OI = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$

- Xét ΔCIA vuông tại I. AD định lý Phytagos:

$$CA^2 = AI^2 + CI^2 \Rightarrow CA^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow CA = R.$$

c) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.

- Chứng minh $\widehat{ACI} = \widehat{AHI}$ (Vì tứ giác ACHI nội tiếp đường tròn – cm ý a.) (1)

- Mà $\widehat{ACI} = \widehat{AEB}$ (Vì tứ giác ACEB nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{AEB} = \widehat{AHI} \Rightarrow HI // EM$

Lại có:

$$\left.\begin{array}{l} HI // MB\ (HI // EB) \\ CI = IB\ (gt) \end{array}\right\} \Rightarrow CH = HM$$ (HI là đường trung bình trong tam giác.)

Mà:

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp CM\ \ (gt) \\ CH = HM\ \ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CAM$$ cân tại A.

-Diện tích $S_{\Delta CAM} = 2.S_{\Delta CAH} = 2.\frac{1}{2}.CH.AH \le \frac{CH^2 + AH^2}{2} = \frac{CA^2}{2}$ (CA không thay đổi do BC cố định)

- Diện tích ΔCAM lớn nhất là: $\max S_{\Delta CAM} = \frac{CA^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $CH = AH$.

- Khi đó ΔCAH vuông cân tại H. $\left(\widehat{HAC} = \widehat{HCA} = 45^0\right)$

- Vậy vị trí điểm E nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Sao cho $\widehat{CAE} = 45^0$.

Bài 127. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M , N cùng thuộc đường tròn và AM < AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

a) Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh góc AOC bằng góc BIC

c) Chứng minh BI song song với MN

d) Xác định vị trí cuả cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Xét (O) có:

OE là một phần đường kính, MN dây không di qua tâm

OE $\cap$ MN tại trung điểm E

$\Rightarrow$ OE $\perp$ MN tại E (định lý) $\Rightarrow \widehat{AEO} = 90^0$

Xét (O) có AC là tiếp tuyến tại tiếp điểm C (gt) $\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác AEOC có: $\widehat{AEO} + \widehat{ACO} = 180^0$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$Tứ giác AEOC nội tiếp được một đường tròn (dhnb)

$\Rightarrow$4 điểm A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn

b) Xét (O) có: AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A (tiếp điểm B, C)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{ACO} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (t/c) **(1)**

$\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn cung BC; $\widehat{CIB}$ là góc nội tiếp chắn cung BC

$\Rightarrow \widehat{CIB} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (t/c) **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CIB} = \widehat{AOC}$ (b/c)

c) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEOC có:

$\widehat{AEC} = \widehat{AOC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC) mà $\widehat{CIB} = \widehat{AOC}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{BIC}$ mà hai này góc ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow$BI // NM (dhnb)

d) Vẽ NG $\perp$ AB kéo dài tại G; BN' là đường kính.

Ta có: $S_{ABN} = S_{AIN}$ (vì BI // MN) = $\frac{1}{2}NG.AB$

S_{AIN} max $\Leftrightarrow$ S_{ABN} max $\Leftrightarrow$ NG max, mà NG $\leq$ BN mà BN $\leq$ BN'.

NG max G $\equiv$ B hay NB$\perp$AB $\Rightarrow$ B, O, N thẳng hàng (Minh họa N $\equiv$N', M $\equiv$M')

Vậy S_{AIN} lớn nhất khi cát tuyến AMN có vị trí điểm N sao cho B, O, N thẳng hàng.

Bài 128. Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB = 2R*, *C* là trung điểm của *OA* và dây *MN* vuông góc với *OA* tại *C*. Gọi *K* là điểm tùy ý trên cung nhỏ *BM*, *H* là giao điểm của *AK* và *MN*.

1. Chứng minh tứ giác *BCHK* nội tiếp.
2. Tính tích *AH.AK* theo *R*.
3. Xác định vị trí của điểm *K* để tổng (*KM* + *KN* + *KB*) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó?

Hướng dẫn

1. Chứng minh tứ giác *BHCK* nội tiếp.

$MN \perp AC$

$\widehat{AKB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{HCB} = 90°$

Xét tứ giác *BCHK* có:

$\widehat{HCB} + \widehat{AKB} = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác *BCHK* nội tiếp.

2. Tính *AH.AK* theo *R*.

Xét tam giác ΔACH và ΔAKB có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACH} = \widehat{AKB} = 90° \\ \widehat{A}\ chung\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACH \# \ \Delta AKB\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AC.AB$$

Mà $AC = \frac{1}{4}R$ và $AB = 2R \Rightarrow AH.AK = \frac{R^2}{2}\cdot$

3. Xác định vị trí của K để $(KM+KN+KB)$ max

* Chứng minh ΔBMN đều:

ΔAOM cân tại M (MC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

Mà $OA=OM=R \Rightarrow \Delta AOM$ đều $\Rightarrow \widehat{MOA}=60^\circ$

ΔMBN cân tại B vì $\begin{cases} MC=CN \\ BC\perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow CM=CN$

Mặt khác: $\widehat{MBA}=\frac{1}{2}\widehat{MOA}=30^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MA}$) $\Rightarrow \widehat{MBN}=60^\circ$

ΔMBN cân tại B lại có $\widehat{MBN}=60^\circ$ nên ΔMBN là tam giác đều

* Chứng minh $KM+KB=KN$

Trên cạnh NK lấy điểm D sao cho $KD=KB$.

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác cân mà $\widehat{NKB}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NB}=60^\circ$

$\Rightarrow \Delta KDB$ là tam giác đều $\Rightarrow KB=BD$.

Ta có: $\widehat{DMB}=\widehat{KMB}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{BDN}=120^\circ$ (kề bù với $\widehat{KBD}$ trong ΔKDB đều)

$\widehat{MKB}=120^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung 240°)

$\Rightarrow \widehat{MBK}=\widehat{DBN}$ (tổng các góc trong tam giác bằng 180°)

Xét ΔBDN và ΔBKM có:

$$\left.\begin{array}{l} BK=BD\ (cmt) \\ \widehat{BDN}=\widehat{BKM}\ (cmt) \\ MB=MN \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BDN=\Delta BKN\ (c.g.c)$$

$\Rightarrow ND=MK$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow KM+KN+KB=2KN$

$\Rightarrow (KM+KN+KB)\max=4R$ khi KN là đường kính $\Rightarrow K,O,N$ thẳng hàng

$\Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung BM.

Vậy với K là điểm chính giữa cung BM thì $(KM+KN+KB)$ đạt giá trị max bằng $4R$.

Bài 129. Cho đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

1. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và $\Delta ABH \# \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh: $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$

$\widehat{ABE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{EA}$ (t/c góc nội tiếp)

$\widehat{HAE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EA}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{HAE}$

Xét ΔABH và ΔEAH có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AHB} = 90^\circ \\ \widehat{ABE} = \widehat{HAE}\ (cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \# \Delta EAH\ (g.g)$$

2. Xét $\Delta HEC = \Delta HEA\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CAE}$ mà $\widehat{CAE} = \widehat{ABE}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABE}$

Mặt khác: $\widehat{ABE} + \widehat{CAK} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{CAK} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại K

Xét tứ giác $AHEK$ có: $\widehat{EHK} = \widehat{AKE} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{EHK} + \widehat{AKE} = 180°$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHEK$ nội tiếp.

3. Hạ $OI \perp AB \Rightarrow AI = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔAOI vuông tại I có $\cos\widehat{OAI} = \dfrac{AI}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAI} = 30° \Rightarrow \widehat{BAH} = 60°$

ΔAHB vuông tại H có: $\widehat{BAH} = 60° \Rightarrow \cos\ \widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{R\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H sao cho độ dài $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB = R\sqrt{3}$

Bài 130. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1. Chứng minh $\Delta KAF \# \Delta KEA$.
2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
3. Chứng minh $MN // AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O), với P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $\Delta KAF \# \Delta KEA$

$\widehat{KAB} = \widehat{KEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KB}$)

Xét ΔKAF và ΔKEA có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{KAB} = \widehat{AEK}(cmt)\\ \widehat{K}\ chung\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KAF \# \Delta AEK(g.g)$$

2. * Đường tròn $(I;IE)$ và đường tròn $(O;OE)$

I, O, E thẳng hàng $\Leftrightarrow IE + IO = OE$

$\Rightarrow IO = OE - IE$

Vậy $(I;IE)$ và $(O;OE)$ tiếp xúc trong tại E.

* Chứng minh $(I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F

Dễ dàng chứng minh: ΔEIF cân tại I ($I \in$ trung trực của EF)

ΔEOK cân tại $O \Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{EKO}\ (= \widehat{OEF})$

mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IF // OK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Có : $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{KB}\ (\widehat{AEK} = \widehat{KEB}) \Rightarrow AK = KB$

$\Rightarrow \Delta AKB$ cân tại K

$\Rightarrow OK \perp AB$

Vì $\left.\begin{array}{l} OK \perp AB \\ OK // IF \end{array}\right\} \Rightarrow IF \perp AB$

$\Rightarrow (I;IE)$ tiếp xúc với AB tại F.

3. $\widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{MEN} = 90°$ mà $\widehat{MEN}$ là góc nội tiếp đường tròn $(I;IE)$

$\Rightarrow MN$ là đường kính $(I;IE)$

$\Rightarrow \Delta EIN$ cân tại I

Lại có: ΔEOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{OBE}$ mà 2 góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow MN // AB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //).

4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyển động trên (O)

$\widehat{MFE} = \widehat{MNE}$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung ME)

$\widehat{AKE} = \widehat{ABE}$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung AE)

Mà $\widehat{MNE} = \widehat{ABE}$ $(cmt) \Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{AKE}$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MQ // AK$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng //)

Chứng minh tương tự: $NP // BK$

Tứ giác $PFQK$ có: $MQ // AK$

$NP // BK$

$\widehat{PKQ} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Tứ giác $PFQK$ là hình chữ nhật

Ta có: $\widehat{MFA} = \widehat{QFB}$ (đối đỉnh) ở

$\widehat{KAB} = \widehat{KBA}$ (ΔAKB cân) mà $\widehat{MFA} = \widehat{KAB} \Rightarrow \Delta FQB$ vuông cân tại Q.

Chu vi $\Delta KPQ = KP + PQ + KQ$

Mà $PK = FQ$ ($PFQK$ là hình chữ nhật) và $FQ = QB$ (ΔBFQ cân tại Q)

$\Rightarrow P_{KPQ} = QB + QK + FK = KB + FK$

Mặt khác: ΔAKB cân tại $K \Rightarrow K$ là điểm chính giữa cung AB

$FK \geq FO$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow KB + FK \geq KB + FO$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow KB + FK = KB + FO$

$\Leftrightarrow FK = FO$

$\Rightarrow$ E là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow FO = R$

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong ΔFOB tính được $BK = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $= R + R\sqrt{2} = R(\sqrt{2}+1)$.

Bài 131. Cho $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$.
3. Trên cung nhỏ BC của $(O;\ R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của $(O;\ R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ABOC$ có:

$\widehat{ABO} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{ACO} = 90^o$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. $AB = AC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Mà AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

nên AO là đường cao của ΔABC hay $AO \perp BC$.

Xét ΔABO vuông ở B có BE là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Rightarrow OB^2 = OE.OA$,

mà $OB = R \Rightarrow R^2 = OE.OA$.

3. $PK = PB$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

$KQ = QC$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm).

Xét chu vi $\Delta APQ = AP + AQ + QP$

$$= AP + AQ + PK + KQ$$

$$= AP + PK + AQ + QC$$

$$= AB + AC$$

$$= 2AB$$

Mà (O) cố định, điểm A cố định nên AB không thay đổi.

4. $\Delta OMP \# \Delta QNO \Rightarrow \dfrac{MP}{ON} = \dfrac{OM}{QN} \Rightarrow MP.QN = ON.OM = \dfrac{MN^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2 = 4MP.QN$

$MN = 2\sqrt{MP.QN} \le MP + NQ$ (Theo bất đẳng thức Cô-si)

Hay $MP + NQ \ge MN$ (đpcm).

Bài 132. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt BE tại điểm F.

1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$.

3. Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. C hứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{ACE} = \widehat{AEB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $FCDE$ có :

$\widehat{FCD} + \widehat{FDE} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên $\Rightarrow$ Tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp

2. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$

Xét ΔACD và ΔBED có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACD} = \widehat{BED} = 90^o \\ \widehat{ADC} = \widehat{BDE}\ (đ.đ)\end{array}\right\} \Delta ACD \# \ \Delta BED (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{ED} \Rightarrow AD.ED = CD.BD \text{ (đpcm).}$$

3. * Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$

Vì tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp (I) nên

$\widehat{CFD} = \widehat{CEA}$ (góc nội tiếp (I) cùng chắn cung CD)

Mà $\widehat{CED} = \widehat{CBA}$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung CA)

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBA}$

Lại có ΔOCB cân tại O nên $\widehat{CBA} = \widehat{OCB}$

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{OCB}$ (1)

ΔICF cân tại I: $\widehat{CFD} = \widehat{ICF}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{OCB}$

* Chứng minh IC là tiếp tuyến (O):

Ta có: $\widehat{ICF} + \widehat{ICB} = 90^o$ (vì $\widehat{DIC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{OCB} + \widehat{BCI} = 90^o$

$\Rightarrow OC \perp CI \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O).

4. Ta có 2 tam giác vuông $\Delta ICO \# \Delta FEA(g.g)$

$\widehat{CAE} = \frac{1}{2}\widehat{COE} = \widehat{COI}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CE}$) $\Rightarrow \widehat{CIO} = \widehat{AFB}$

Mà $\tan\widehat{CIO} = \frac{CO}{CI} = \frac{R}{\frac{R}{2}} = 2$

$\Rightarrow \tan\widehat{AFB} = \tan\widehat{CIO} = 2.$

Bài 133. Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M, N.

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^o$.
3. Chứng minh $AM.BN = AI.BI$.
4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $AMEI$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AMEI$ có:

$\widehat{MAI}+\widehat{MEI}=90°+90°=180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

2. * Chứng minh $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$.

Xét tứ giác $ENBI$ có:

$\widehat{IEN}+\widehat{IBN}=90°+90°=180°$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ENBI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{EI}$)

* Chứng minh $\widehat{MIN}=90°$

Tứ giác $ENBI$ nội tiếp nên $\widehat{EMI}=\widehat{EAI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

Lại có: $\widehat{AEB}=90°\Rightarrow\widehat{EAI}+\widehat{EBI}=90°$

$\Rightarrow\widehat{EMI}+\widehat{ENI}=90°\Rightarrow\Delta MNI$ vuông tại I. Vậy $\widehat{MIN}=90°$.

3. Chứng minh $AM.BN=AI.BI$

Xét ΔAMI và ΔBNI có: $\widehat{MAI}=\widehat{NBI}=90°$

$\widehat{AIM}=\widehat{BNI}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BIN}$)

$\Rightarrow\Delta AMI\ \#\ \Delta BIN\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{BI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI.$

4. Khi E, I, F thẳng hàng $\widehat{AEF} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AF} = 45°$

$\widehat{AMI} = \widehat{AEI} = 45°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AI}$)

$\Rightarrow \Delta MAI$ vuông cân tại A.

$\Rightarrow AM = AI = \dfrac{R}{2} \Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ (Định lí Pi-ta-go).

Chứng minh tương tự: ΔBIN vuông cân tại B

$\Rightarrow BI = BN = \dfrac{3R}{4} \Rightarrow IN = \sqrt{BI^2 + BN^2} = \sqrt{\dfrac{9R^2}{16} + \dfrac{9R^2}{16}} = \dfrac{3R\sqrt{2}}{2}$ $\quad S_{MIN} = \dfrac{1}{2}MI.NI = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

(đơn vị diện tích).

Bài 134. Cho đường tròn (*O; R*), đường kính *AB*. Bán kính *CO* vuông góc với *AB*, *M* là điểm bất kì trên cung nhỏ *AC* (*M* khác *A* và *C*), *BM* cắt *AC* tại *H*. Gọi *K* là hình chiếu của *H* trên *AB*.

1. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$
3. Trên đoạn thẳng *BM* lấy điểm *E* sao cho *BE* = *AM*. Chứng minh tam giác *ECM* là tam giác vuông cân tại *C*.
4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại điểm *A*. Cho *P* là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm *P*, *C* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng *PB* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *HK*.

Hướng dẫn

1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp:

Xét tứ giác $CBKH$ ta có:

$\widehat{BKH} = 90^0$

$\widehat{HCB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BKH} + \widehat{HCB} = 180^o$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$

Tứ giác $CBKH$ nội tiếp nên: $\widehat{HCK} = \widehat{HBK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

Tứ giác $MCBA$ nội tiếp (O) nên: $\widehat{MCA} = \widehat{HKB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MA)

$\Rightarrow \widehat{HCK} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ACK}$ (Đpcm).

3. Chứng minh ΔECM vuông cân tại C.

Vì $CD \perp AB$ nên CO là đường trung trực của $AB \Rightarrow CA = CB$

Xét ΔAMC và ΔBEC có:

$\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$MA = BE$ (gt)

$CA = CB$(cmt)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta BEC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ECB}$ (2 góc tương ứng) và $CM = CE$ (2 cạnh tương ứng)

Mặt khác: $\widehat{ECB} + \widehat{EAC} = \widehat{BCA} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{MCA} + \widehat{ECA} = 90^o$

Xét ΔEMC có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{MCE} = 90^o \\ CM = CE\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ECM$ vuông cân tại C (Đpcm).

4. Chứng minh PB đi qua trung điểm của HK

Theo đề bài: $\dfrac{AP.MB}{MA} = R \Leftrightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{R}{MB} = \dfrac{BO}{BM}$

Mà $\widehat{PAM} = \dfrac{1}{2} sđ\, \overset{\frown}{AM}$ (t/c góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2} sđ\, \overset{\frown}{AM}$ (t/c góc nội tiếp chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{MBA} \Rightarrow \Delta PAM \# \Delta OMB(c.g.c)$ (Hệ quả)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PM} = \dfrac{OB}{OM} = 1 \Rightarrow PA = PM$

Vậy cần lấy điểm $P \in d$ sao cho $PA = PM$ (1)

Gọi N là giao điểm của PB và HK, Q là giao điểm của BM với d

Xét ΔQMA vuông tại M có: $PA = PM \Rightarrow \Delta PMA$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{PMA}$

$\widehat{PMA} + \widehat{PMQ} = 90^o$

$\widehat{PAM} + \widehat{PQM} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{PQM} \Rightarrow \Delta PMQ$ cân tại P $\Rightarrow PM = PQ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PM = PA = PQ$.

Vì $AQ \,//\, HK$ (cùng vuông góc AB) nên:

$\dfrac{NK}{PA} = \dfrac{BN}{BP}$ (Định lí Ta-let trong ΔABP)

$\dfrac{BN}{BP} = \dfrac{NH}{PQ}$ (Định lí Ta-let trong ΔPBQ)

$\Rightarrow \dfrac{NK}{PA} = \dfrac{NH}{PQ}$ mà $PA = PQ(cmt)$ $\Rightarrow NK = NH$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của HK.

Vậy với $P \in d$ mà $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$ thì PB đi qua trung điểm của HK.

Bài 135. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O)

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm, AN = 6cm.
3. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: MT // AC.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Hướng dẫn

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

Ta có $AM \perp OM$ (AM là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{OMA} = 90^o$

$AN \perp ON$ (AN là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{ONA} = 90^o$

Xét tứ giác $AMON$ có:

$\widehat{OMA} + \widehat{ONA} = 90^o + 90^o = 180^o$

mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $AMON$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm; AN = 6cm.

Xét (O): $\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BN).

Xét ΔANB và ΔACN:

$\widehat{CAN}$ chung

$\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ANB \# \Delta ACN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN}$ (tính chất hai tam giác đồng dạng).

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$ (Đpcm).

* Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm; AN = 6cm.

Ta có $AN^2 = AB.AC$ (cmt) mà AB = 4cm, AN = 6cm nên: $4.AC = 6^2 \Leftrightarrow AC = 9$ (cm) mà $AB + BC = AC$ nên $BC = 5$ cm.

3. Chứng minh $MT // AC$.

Xét (O): I là trung điểm của dây BC

$\Rightarrow OI \perp BC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Tứ giác $OIAN$ nội tiếp vì $\widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AON}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$) mà hai góc cùng nhìn cạnh AO **(1)**

AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A.

$\Rightarrow OA$ là phân giác $\widehat{MON}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AON} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$

Mà $\widehat{MTN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN).

$\Rightarrow \widehat{MTN} = \widehat{AON}$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** ta có: $\widehat{MTN} = \widehat{AIN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow MT // AC$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).

4. Hai tiếp tuyến (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi thỏa mãn điều kiện đề bài.

* MN cắt OA tại E.

Ta chứng minh được $MN \perp OA \Rightarrow EM \perp OA$

Ta chứng minh được $OI.OK = OE.\ OA\ (= OB^2 = OM^2 = R^2)$

Từ đó chứng minh được $\Delta OEK\ \#\ \Delta OIA\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OIA} = 90^o$

$\Rightarrow EK \perp OA$ mà $EM \perp OA \Rightarrow EM$ trùng EK.

K thuộc MN cố định (đpcm).

Bài 136. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R). (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF
4. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{MBN} = \widehat{BNA} = \widehat{NAM} = 90^o$ (4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AMBN$ là hình chữ nhật.

2. Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\widehat{ABM} = \widehat{MQB}$ (2 góc cùng phụ với góc $\widehat{QBM}$)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{MQB}$

Mà $\widehat{ANM} + \widehat{MNP} = 180^o \Rightarrow \widehat{MQB} + \widehat{MNP} = 180^o$; hai góc này lại ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

3. * Chứng minh F là trung điểm của BP.

E là trung điểm của BQ, O là trung điểm của AB

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔABQ

$\Rightarrow OE // AQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác)

Mà $OE \perp OF$; $AQ \perp AP$

$\Rightarrow OF // AP$

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OF$ là đường trung bình của ΔABP.

$\Rightarrow F$ là trung điểm của BP.

* Chứng minh $ME // NF$

ΔNPB vuông tại N, có F là trung điểm của cạnh $BP \Rightarrow NF = BF = FB = \frac{1}{2}BP$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền)

Xét ΔONF và ΔOBF có:

$$\left.\begin{array}{l} ON = OB = R \\ OF\ chung \\ FN = FB\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ONF = \Delta OBF\ (c.c.c)$$

$\Rightarrow \widehat{ONF} = \widehat{OBF} = 90^o$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow ON \perp NF$

Chứng minh tương tự ta có $OM \perp ME$

$\Rightarrow ME // NF$ (cùng vuông góc với MN).

4. $2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN$

$\Delta ABP \# \Delta QBA \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{BP}{BA} \Rightarrow AB^2 = BP.QB$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB.QB} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có: $AM.AN \leq \frac{AM^2 + AN^2}{2} = \frac{MN^2}{2} = 2R^2$

$2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2$

$\Rightarrow S_{MNPQ} \geq 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$. Hay MN vuông góc với AB.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất thì đường kính MN vuông góc với đường kính AB.

Bài 137. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N.

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.
3. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.
4. Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{AMD} = 90^o$

Vì $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^o$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh DA (nên M, C thuộc đường tròn đường kính AD).

Vậy tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $CA.CB = CH.CD$

Xét ΔCAH và ΔCDB có: $\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^o$ (1)

Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CBM}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta CAH \# \Delta CDB\ (g.g)$

$\Rightarrow CA.CB = CH.CD$ (Đpcm).

3. * Chứng minh A, N, D thẳng hàng

Vì AM và DC là đường cao của tam giác ABD nên H là trực tâm ΔABD

$\Rightarrow AD \perp BH;\ AN \perp BH$

Nên A, N, D thẳng hàng

* Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến tại N.

Ta có: $BN \perp DN, ON \perp EN$

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{BNO}$ mà $\widehat{BNO} = \widehat{OBN}, \widehat{OBN} = \widehat{EDN}$

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{EDN} \Rightarrow \Delta DEN$ cân tại $E \Rightarrow ED = EN$ (3)

Ta có: $\widehat{ENH} = 90^o - \widehat{END} = 90^o - \widehat{NDH} = \widehat{EHN}$

$\Rightarrow \Delta HEN$ cân tại $E \Rightarrow EH = EN$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow E$ là trung điểm của HD (Đpcm).

4. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của MN và AB, kẻ IT là tiếp tuyến của nửa đường tròn với T là tiếp điểm

$\Rightarrow IN.IM = IT^2$ (5)

Mặt khác: $EM \perp OM$ (vì $\Delta ENO = \Delta EMO$ và $EN \perp ON$)

$\Rightarrow N, C, O, M$ cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow IN.IM = IO.IC$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow IC.IO = IT^2$

$\Rightarrow \Delta ICT \# \Delta ITO \Rightarrow CT \perp IO \Rightarrow T \equiv K$

$\Rightarrow I$ là giao điểm của tiếp tuyến tại K của nửa đường tròn và đường thẳng AB

$\Rightarrow I$ cố định (Đpcm).

Bài 138. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.
3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh: $HK // DC$.
4. Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Hướng dẫn

1. Chứng minh bốn điểm *A, B, O, H* cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh được $\widehat{ABO} = 90^o$

Chứng minh được $\widehat{AHO} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác *ABOH* nội tiếp

Suy ra bốn điểm *A, B, O, H* cùng nằm trên đường tròn đường kính *AO*.

2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$

Chứng minh được $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$

Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{EAB}$ chung

Chứng minh được $\Delta ABD \# \Delta AEB\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$ (Đpcm).

3. Chứng minh *KH // DC*

Tứ giác *ABOH* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OBH} = \widehat{OAH}$ mà $\widehat{OAH} = \widehat{HEK}$ (do EK//AO)

$\Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HEK}$.

Suy ra tứ giác *BHKE* nội tiếp

Chứng minh được $\widehat{BKH} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng $\widehat{BEH}$)

Kết luận *HK // DC*.

4. Chứng minh tứ giác *BECF* là hình chữ nhật.

Gọi giao điểm tia CE và tia AO là Q, tia EK và CD cắt nhau tại điểm M

Xét ΔEDM có $HK // DM$ và H là trung điểm của đoạn DE, suy ra K là trung điểm của đoạn thẳng ME.

Có $ME // PQ \Rightarrow \dfrac{KE}{OQ} = \dfrac{MK}{OP}$ (cùng bằng $\dfrac{CK}{CO}$) suy ra O là trung điểm của đoạn PQ

Có: $OP = OQ; OB = OC$. Suy ra tứ giác $BPCQ$ là hình bình hành. Suy ra $CE // BF$.

Chứng minh được $\Delta COE = \Delta BOF$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OF$

Mà $OB = OC = OE \Rightarrow OB = OC = OE = OF$ Suy ra tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Cách 2:

Kẻ tiếp tuyến AT với (O), chứng minh $APDT$ nội tiếp $(\widehat{PAT} + \widehat{PDT} = 180°)$

dẫn đến $\widehat{ATP} = \widehat{CBE}$ (1), chứng minh $\Delta TAP = \Delta BAP$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{ABP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{EBC}$

Dẫn đến $\widehat{EBF} = 90° \Rightarrow EF$ là đường kính $\Rightarrow BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Cách 3:

Chứng minh $\Delta EHB \# \ \Delta COP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{CP} = \dfrac{EH}{CO} = \dfrac{ED}{CB}$

$\Rightarrow \Delta EDB \# \ \Delta CBP$

$\Rightarrow \widehat{EDP} = \widehat{CBP}$

$\widehat{EDB} + \widehat{CDE} = 90°$, $\widehat{CDE} = \widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{EBP} = 90° \Rightarrow$ $BECF$ là hình chữ nhật (Đpcm).

Bài 139. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn..
2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P và Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I thuộc cùng một đường tròn.

Ta có: $\widehat{MCB} = \widehat{ANM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{ICK} = \widehat{INK}$

Mà hai góc này ở cùng nhìn cạnh IK trong tứ giác $IKNC$ từ hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow IKNC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow C, N, K, I$ thuộc cùng một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.\text{NM}$.

$\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).

Xét ΔNBK và ΔNMB có:

$\widehat{MNB}$ chung

$\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NBK \# \ \Delta NMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NM}{NB} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ (đpcm).

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi

Nối BI cắt đường tròn (O) tại $F \Rightarrow AF = FC$

Ta có $\widehat{BMH} = \widehat{HMI}$ (vì cùng nhìn cung $BN = NC$)

$\widehat{MBI} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{MA} + sđ\,\overset{\frown}{AF}\right)$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MF}$)

$\widehat{MIB} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{MB} + sđ\,\overset{\frown}{FC}\right)$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)

Mà $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC}; \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$ nên $\widehat{MBI} = \widehat{MIB}$

$\Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M có MN là phân giác

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của BI.

$\Rightarrow HK \perp BI, BH = HI, BK = KI$ (1)

Mặt khác $\widehat{HBF} = \widehat{FBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung $AF = FC$)

$\Rightarrow \Delta BHK$ có BF là phân giác cũng là đường cao

$\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại $B \Rightarrow BH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $BHIK$ là hình thoi.

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng

$\widehat{QCK} = 90^o - \widehat{CMK}$

$\Rightarrow \widehat{QCK} = 90^o - \widehat{CBN}$

$\Rightarrow \widehat{QCK} = 90^o - \widehat{BCN}$

$\Rightarrow CQ \perp CN$ nên C, D, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có D, B, P

thẳng hàng.

Lại có $\widehat{CKQ} = 90^o - \widehat{CMK}$

$\Rightarrow \widehat{KBP} = 90^o - \widehat{BMK}$

Mà $\widehat{CMK} = \widehat{BMK}$ nên $\widehat{CKQ} = \widehat{KBP}$

Hay $KQ // DP$.

Tương tự $KP // DQ$

Nên $KPDQ$ là hình bình hành. Hình bình hành $KPDQ$ có hai

đường chéo KD và PQ cắt nhau

tại trung điểm mỗi đường. Nên D, E, K thẳng hàng (Đpcm).

Bài 140. Cho đường tròn (O; R) với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn (O; R) sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.

SD, SC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)

$\Rightarrow OD \perp SD, OC \perp SC$

$\Rightarrow D, C$ thuộc đường tròn đường kính SO (1)

Mặt khác H là trung điểm của AB

$\Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{SHO} = 90^o$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn

đường kính SO (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, H, O, S$ cùng thuộc đường tròn đường kính SO.

2. Tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và số đo góc $\widehat{CSD}$.

Xét ΔSDO có:

$SO^2 = SD^2 + DO^2$

$\Rightarrow SD^2 = SO^2 - DO^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow SD = R\sqrt{3}$

Ta có: $\sin\widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DSO} = 30^o \Rightarrow \widehat{CSD} = 60^o$.

3. Vì S, D, O, H cùng thuộc một đường tròn nên $SHOD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{SOD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{SD}$) (3)

Lại có: $\widehat{AKD} = \widehat{SCD}$ (đồng vị) nên $\widehat{AKD} = \dfrac{1}{2}sđ\ \overset{\frown}{CD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AKD} \Rightarrow ADHK$ nội tiếp.

Gọi M là giao điểm của BK và SC.

Gọi N là giao điểm của AK và BC.

Ta có: $\widehat{KHA} = \widehat{CBS}$ vì $\widehat{KHA} = \widehat{ADK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$)

$\widehat{ADK} = \widehat{CBS}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow HK // BC$ mà H là trung điểm AB nên K là trung điểm của AN. Suy ra $AK = KN$.

Có: $\dfrac{AK}{SM} = \dfrac{KN}{CM} = \dfrac{BK}{BM}$ mà $AK = KN$ nên $SM = CM$ nên M là trung điểm của SC.

4. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn tâm O.

Ta có $\widehat{ADA'} = 90^o \Rightarrow DA' \perp DA$ mà $EF \perp DA \Rightarrow EF // DA'$.

Kéo dài EF cắt BA' tại G.

$EG // DA', E$ là trung điểm của BD nên G là trung điểm của BA'.

AA' là đường kính đường tròn tâm O nên A' cố định $\Rightarrow BA'$ cố định. Vậy G cố định.

Mà $\widehat{AFG} = 90^o \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AG cố định (đpcm).

Bài 141. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q.

1. Chứng minh rằng: Tứ giác $APMO$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AP + BQ = PQ$.
3. Chứng minh rằng: $AP.BQ = AO^2$.
4. Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác $APQB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1. Xét tứ giác $APMQ$, ta có $\widehat{OAP} = \widehat{OMP} = 90^o$ (vì PA, PM là tiếp tuyến của (O))

Vậy tứ giác $APMO$ nội tiếp.

2. Ta có: $AP = MP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$BQ = MQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

$\Rightarrow AP + BQ = MP + MQ = PQ\left(Đpcm\right)$.

3. Ta có OP là phân giác $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

OQ là phân giác $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Mà $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^o$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{POQ} = 90^o$

Xét ΔPOQ có: $\widehat{POQ} = 90^o$ (cmt)

$OM \perp PQ$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔPOQ vuông tại O có đường cao OM

$\Rightarrow MP.MQ = OM^2$ (hệ thức lượng)

Lại có $MP = AP; MQ = BQ$ (cmt); $OM = OA$ (bán kính)

Do đó $AP.BQ = AO^2$ $(Đpcm)$.

4. Tứ giác $APQB$ có: $AP//BQ$ $(AP \perp AB; BQ \perp AB)$, nên tứ giác $APQB$ là hình thang vuông.

$\Rightarrow S_{APQB} = \dfrac{(AP+BQ).AB}{2} = \dfrac{PQ.AB}{2}$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN $\Leftrightarrow PQ$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow PQ = AB \Leftrightarrow PQ//AB \Leftrightarrow OM \perp AB$

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

Tức M trùng M_1 hoặc M_2 thì S_{APQB} đạt GTNN là $\dfrac{AB^2}{2}$.

Bài 142. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn (O) $(M, N \in (O))$. Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

1. Chứng minh tứ giác $ANHM$ nội tiếp được trong đường tròn.
2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$.
3. Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh $EH//NC$.

Hướng dẫn

1. Vì AN, AM là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ANO} = \widehat{AMO} = 90^o$

$\Rightarrow A; M; O; N \in$ đường tròn đường kính AO

Gọi J là trung điểm của AO

Vì H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHO} = 90^o$

$\Rightarrow H, O \in$ đường tròn đường kính AO

Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO

Suy ra $AMHN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2. Có $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{BN}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BN}$)

Xét ΔANB và ΔACN có:

$\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (cmt)

$\widehat{BAN}$ chung

$\Rightarrow \Delta ANB \# \Delta ACN\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC.$

3. Gọi I là giao điểm của MN và AC

Ta có MN là trục đẳng phương của đường tròn (J) và (O).

$I \in MN$ nên phương trình tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau.

$\Rightarrow IA.IH = IB.IC \Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IH}{IC}$

Vì $BE // AN$ nên $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IE}{AN} \Rightarrow \dfrac{IE}{IN} = \dfrac{IH}{IC} \Rightarrow EH // NC.$

Bài 143. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn $(O;R)$ (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn $(O;R)$ sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn $\left(O;R\right)$. Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1. Chứng minh tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$

2. Kẻ đường kính QS của đường tròn $\left(O;R\right)$. Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$.

3. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính đội dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^o$

Trong tứ giác $APOQ$ có tổng hai góc đối bằng 180^0

Suy ra tứ giác $APOQ$ nội tiếp đường tròn

$PM // AQ \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{KAN}$ (so le trong)

Mà $\widehat{PMN} = \widehat{APK}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{PN}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{PN}$)

$\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{APK}$

Xét ΔKAN và ΔKPA có:

$\widehat{K}$ chung

$\widehat{KAN} = \widehat{KPA}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KAN \# \Delta KPA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP(Đpcm)$.

2. Ta có: $AQ \perp QS$ (AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)

Mà $PM // AQ$ (giả thiết) nên $PM \perp QS$

Đường kính $QS \perp PM$ nên QS đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{PM}$ nhỏ

$sđ\overset{\frown}{PS} = sđ\overset{\frown}{SM} \Rightarrow \widehat{PNS} = \widehat{SNM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Hay NS là tia phân giác $\widehat{PNM}$ $(Đpcm)$.

3. Gọi H là giao điểm của PQ và AO

$\Rightarrow AH \perp PQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại 1 điểm)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOQ ta có:

$$OQ^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$$\Rightarrow AH = OA - OH = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$$

$\widehat{KPQ} = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{NQ}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{NQ}$)

$\widehat{NQK} = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{NQ}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung $\overset{\frown}{NQ}$)

$\Rightarrow \widehat{NQK} = \widehat{KPQ}$

Xét ΔKNQ và ΔKQP có:

$\widehat{NQK} = \widehat{KPQ}$ (cmt)

$\widehat{K}$ chung

$\Rightarrow \Delta KNQ \# \Delta KQP (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{KN}{KQ} = \frac{KQ}{KP} \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$$

Mà $AK^2 = NK.KP$ nên $AK = KQ$

Vậy ΔAPQ có các trung tuyến AH và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R.$$

Bài 144. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn (O) tại D.

1. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn;
2. Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
3. Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BAC.

Hướng dẫn

1. Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (cùng nhìn cạnh BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có: $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow DC \perp AC$

Mà $HE \perp AC$; suy ra $BH // DC$ (1)

Chứng minh tương tự: $CH // BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BDCD$ là hình bình hành.

3. Ta có M là trung điểm của BC suy ra M trung điểm HD.

Do đó AM, HO là các đường trung tuyến của $\Delta AHD \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔAHD

$\Rightarrow \dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Xét tam giác ABC có M trung điểm của BC và $\dfrac{GM}{AM} = \dfrac{1}{3}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔABC.

Bài 145. Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1. Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp;
2. Tính $BM.BP$ theo R.
3. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song;

4. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).

Hướng dẫn

1. Ta có AB là đường kính của $(O), M \in (O) \Rightarrow \widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^o.$

Mặt khác

$\widehat{ACP} = 90^o\,(gt) \Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{ACP} = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $ACPM$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔBAM và ΔBPC có:

$\widehat{AMB} = \widehat{BCP} = 90^o$

$\widehat{MBA}$ chung

$\Rightarrow \Delta BAM \# \Delta BPC\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BA}{BP}$

$\Rightarrow BM.BP = BA.BC = 2R.3R = 6R^2.$

3. Ta có:

$AMNQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{PAM}$ (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

$AMPC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PCM} = \widehat{PAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PM}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{PCM}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow PC//NQ$.

4. Gọi D là trung điểm của $BC \Rightarrow D$ là điểm cố định

Qua G kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại I

G là trọng tâm ΔBCM nên $G \in MD$ và $MG = \frac{2}{3}MD$ (tính chất trọng tâm trong tam giác)

Do $GI//MO$

Áp dụng định lý Ta-lét cho ΔDMO ta có $I \in DO$ và $\frac{OI}{OD} = \frac{MG}{MD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OI = \frac{2}{3}OD$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định

Do $GI//MO$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{GI}{MO} = \frac{DG}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG = \frac{1}{3}MO = \frac{R}{3}$

$\Rightarrow G$ luôn cách điểm I cố định một khoảng $\frac{R}{3}$ không đổi.

$\Rightarrow$ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R}{3}$.

Bài 146. Cho ΔABC có ba góc nội tiếp đường tròn (O), bán kính R. Hạ đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

1. Chứng minh tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
2. Chứng minh. $HK//DE$.
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Hướng dẫn

1. Tứ giác $ABHK$ có $\widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90^o$, mà hai góc cùng nhìn cạnh AB

Suy ra tứ giác $ABHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

2. Theo câu trên tứ giác $ABHK$ nội tiếp (J) với J là trung điểm của AB

Nên $\widehat{BAH} = \widehat{BKH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BH}$ của (J))

Mà $\widehat{BAH} = \widehat{BAD}$ (A, H, K thẳng hàng)

$\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (hai góc cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của (O))

Suy ra $\widehat{BKH} = \widehat{BED}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK // DE$.

3. Gọi T là giao điểm của hai đường cao AH và BK

Tứ giác $CHTK$ có $\widehat{CHT} = \widehat{CKT} = 90^o$

Suy ra tứ giác $CHTK$ nội tiếp đường tròn đường kính CT

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔCHK (*)

Gọi F là giao điểm của CO với (O) hay CF là đường kính của (O)

Ta có: $\widehat{CAF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FA \perp CA$

Mà $BK \perp CA$ (gt)

Nên $BK // FA$ hay $BT // FA$ (1)

Ta có: $\widehat{CBF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow FB \perp CB$

Mà $AH \perp CB$ (gt)

Nên $AH // FB$ hay $AT // FB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AFBT$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT (tính chất đường chéo hình bình hành)

Xét ΔCTF có O là trung điểm của FC, J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình của ΔCTF

$\Rightarrow OJ = \frac{1}{2}CT$ (**)

Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK

Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB)

Do (O) và dây AB cố định nên độ dài OJ không đổi.

Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔCHK không đổi.

Bài 147. Cho $\widehat{xAy} = 90^o$, vẽ đường tròn tâm A bán kính R. Đường tròn này cắt Ax, Ay thứ tự tại B và D. Các tiếp tuyến với đường tròn (A) kẻ từ B và D cắt nhau tại C.

1. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Chứng minh?
2. Trên BC lấy điểm M tùy ý (M khác B và C) kẻ tiếp tuyến MH với đường tròn (A), (H là tiếp điểm). MH cắt CD tại N. Chứng minh rằng $\widehat{MAN} = 45^0$.
3. $P; Q$ thứ tự là giao điểm của AM; AN với BD. Chứng minh rằng $MQ; NP$ là các đường cao của ΔAMN.

Hướng dẫn

1. Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$\widehat{CBA} = \widehat{ADC} = 90^o$

Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = 90^o \\ \widehat{CBA} = \widehat{ADC} = 90^o \left(cmt\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Ta có $AB = AC = R$ nên $ABCD$ là hình vuông.

2. Xét ΔADN vuông và ΔAHN vuông có:

$$\begin{cases} AN\ chung \\ AD = AH = R \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ADN = \Delta AHN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{HAN}$

Tương tự: $\widehat{DAN} + \widehat{HAN} + \widehat{HAM} + \widehat{BAM} = \widehat{xAy} = 90^o$

$\Rightarrow 2.\widehat{HAN} + 2.\widehat{HAM} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{HAN} + \widehat{HAM} = 45^o$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = 45^o.$

3. Xét ΔBCD vuông có: $BC = CD = R$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại $C \Rightarrow \widehat{CBD} = 45^o$

Ta có A, B là hai đỉnh cùng nhìn QM một góc 45°

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AQM} + \widehat{ABM} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{AQM} = 180^o - \widehat{ABM} = 180^o - 90^o = 90^o$

$\Rightarrow MQ \perp AN \Rightarrow MQ$ là đường cao của ΔAMN (đpcm)

Tương tự $ADNP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow NP \perp AM \Rightarrow NP$ là đường cao trong ΔAMN

Vậy MQ, NP là các đường cao trong ΔAMN (đpcm)

Bài 148. Cho $\Delta ABC\left(AB<AC\right)$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Vẽ đường cao AH của ΔABC, đường kính AD của đường tròn. Gọi E,F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuống đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BMFO$ nội tiếp.
2. Chứng minh $HE//BD$.
3. Chứng minh $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích ΔABC).

Hướng dẫn

1. Theo đề bài ta có: $\widehat{AHB}=\widehat{BFA}=90^o$ mà 2 góc cùng nhìn cạnh AB

Vậy tứ giác $ABHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.

Có M là trung điểm là BC mà BC là dây cung nên $OM\perp BC$

Khi đó $\widehat{BFO}=\widehat{BMO}=90^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Vậy tứ giác $BMOF$ nội tiếp đường tròn đường kính OB.

2. Theo đề bài: $\widehat{AEC}=\widehat{AHC}=90^o\Rightarrow ACEH$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{CHE}=\widehat{CAE}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Lại có: $\widehat{CAE}=\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

Nên $\widehat{CHE}=\widehat{CBD}$ mà chúng ở vị trí đồng vị suy ra: $HE//BD$.

3. Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.AH=\dfrac{1}{2}BC.AB.\sin\widehat{ABC}\left(AH=AB.\sin\widehat{ABC}\right)$

Mặt khác trong ΔABC có: $\widehat{ABD}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $AB = AD.\sin\widehat{ADB} = 2R\sin\widehat{ACB}$ ($\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ vì hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Tương tự ta có: $\begin{cases} AC = 2R.\sin\widehat{ABC} \\ BC = 2R.\sin\widehat{BAC} \end{cases}$

Ta có: $AB.AC.BC = 8R^3.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{ABC}.\sin\widehat{BAC}$ (1)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AB.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.2R.\sin\widehat{BAC}.2R.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{CBA} = 2R^2.\sin\widehat{BAC}.\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{CBA}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{AB.BA.CA} = \frac{1}{4R}$

Vậy $S_{ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$.

Bài 149. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ ba đường cao AP, BM, CN của ΔABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp.
2. Chứng minh $\Delta ANM \backsim \Delta ACB$.
3. Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh $BD = BE$.
4. Giả sử $AB = 4$cm; $AC = 5$cm; $BC = 6$cm. Tính MN.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^o$

Mà hai đỉnh M, N cùng nhìn $BC \Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét ΔANM và ΔACB có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BNM}$)

Suy ra $\Rightarrow \Delta ANM \# \Delta ACB$ (g.g).

3. Gọi O là tâm đường tròn đường kính AH

Gọi I là tâm đường tròn đườn kính CH

Xét ΔBDH và ΔBMD có:

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BDH} = \widehat{BMD}$ (cùng phụ với $\widehat{MDH}$)

Suy ra: $\Delta BDH \# \Delta BMD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{BH}{BD} \Rightarrow BD^2 = BM.BH$ (1)

Ta có: $\widehat{EMC} = \widehat{EHC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Mà $\widehat{HME} + \widehat{EMC} = 90^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{EHI} = 90^o$

Lại có $\widehat{IHE} = \widehat{HEI}$ do ΔHIE cân tại I

$\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{HEI} = 90^o$

Xét ΔBHE và ΔBEM có:

$\widehat{HBE}$ chung

$\widehat{BEH} = \widehat{BME}$ (cùng phụ với $\widehat{HEI}$)

Suy ra: $\Delta BHE \# \Delta BEM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BE} = \dfrac{BE}{BM} \Rightarrow BE^2 = BM.BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = BD$.

4. Đặt $AN = x$; $NB = 4 - x$ $(0 < x < 4)$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có:

$CN^2 = AC^2 - AN^2$

Mà $CN^2 = BC^2 - BN^2$

$\Rightarrow AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2 \Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - (4 - x)^2$

$\Leftrightarrow 25-x^2=36-16+8x-x^2 \Leftrightarrow 25-36+16=8x \Leftrightarrow 8x=5 \Leftrightarrow x=0,625$

Vậy $AN=0,625$

Lại có: $\Delta ANM \# \Delta ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$

$\Rightarrow MN=\dfrac{AN.BC}{AC}=\dfrac{0,625.6}{5}=0,75$ (cm).

Bài 150. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB=2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B. Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

1. Chứng minh: tứ giác $OCNB$ nội tiếp.
2. Chứng minh: $AC.AN = AO.AB$.
3. Chứng minh: NO vuông góc với AE.
4. Tìm vị trí điểm M sao cho $(2.AM+AN)$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1. Theo tính chất dây cung ta có: $OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OCN}=90^o$

BN là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow \widehat{OBN}=90^o$

Xét tứ giác $OCNB$ có tổng góc đối: $\widehat{OCN}+\widehat{OBN}=90^o+90^o=180^o$

Do đó tứ giác $OCNB$ nội tiếp.

2. Xét ΔACO và ΔABN có:

$\widehat{CAO}$ chung

$\widehat{ACO} = \widehat{ABN} = 90^o$

Suy ra $\Rightarrow \Delta ACO \# \Delta ABN\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO}{AN}$

Do đó: $AC.AN = AO.AB$ (đpcm).

1. Theo chứng minh trên ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC$ là đường cao của ΔANE $\left(1\right)$

$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB$ là đường cao của ΔAME $\left(2\right)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔANE (vì O là gia điểm của AB và EC)

$\Rightarrow NO$ là đường cao thứ ba của ΔANE

Suy ra $NO \perp AE$ (đpcm).

2. Ta có: $2.AM + AN = 4AC + AN$ (vì C là trung điểm của AM)

$4AC.AN = 4AO.AB = 4R.2R = 8R^2$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có:

$4AC + AN \geq 2\sqrt{2AC.AN} = 2.\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$

Suy ra tổng $2.AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$ khi $4AC = AN$

$\Rightarrow AN = 2AM \Rightarrow M$ là trung điểm của AN

Khi đó ΔABN vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên $AM = MB \Rightarrow AM = BM$

Vậy với M là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB thì $2AM + AN$ nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}R$.

Bài 151. Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường thẳng $\left(d\right)$ không đi qua O, cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại 2 điểm A, B. Lấy điểm M bất kỳ trên tia đối BA, qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.
2. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh HM là phân giác của $\widehat{CHD}$.

3. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với MO cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1. Xét tứ giác $MCOD$ có:

$MC \perp OD \Rightarrow \widehat{OCM} = 90^o$; $MD \perp OD \Rightarrow \widehat{ODM} = 90^o$

Suy ra tứ giác $MCOD$ nội tiếp đường tròn.

2. Ta có H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow \widehat{MHO} = 90^o \Rightarrow H$ thuộc đường kính MO

$\Rightarrow$ 5 điểm $D; M; C; H; O$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{DOM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

$\widehat{CHM} = \widehat{COM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Lại có $\widehat{DOM} = \widehat{COM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{CHM} \Rightarrow HM$ là phân giác $\widehat{CHD}$.

3. Ta có: $S_{MPQ} = 2S_{MOP} = OC.MP = R.(MC + CP) \geq 2R\sqrt{CM.CP}$

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMP ta có:

$CM.CP = OC^2 = R^2$ không đổi $\Rightarrow S_{MPQ} \geq 2R^2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow CM = CP = R\sqrt{2}$. Khi đó M là giao điểm (d) với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Vậy M là giao điểm của (d) với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$ thì diện tích ΔMRT nhỏ nhất.

Bài 152. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC; E thuộc AB).

1. Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn;
2. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AH và BC. Chứng minh MI vuông góc với ED.

Hướng dẫn

1. Tứ giác $ADHE$ có: $AD \perp DH\ (gt)$; $AE \perp EH\ (gt)$

Nên $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^o$

Do đó: $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $BEDC$ có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^o$ (gt) nên cùng nội tiếp đường tròn tâm I đường kính BC (1)

Tương tự: Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính AH và E, D là giao điểm của I và đường tròn

Dễ dàng chứng minh $\Delta EMI = \Delta DMI\ (c.c.c)$

$\Rightarrow MI$ là phân giác $\widehat{DME}$

Mà ΔDMI cân tại $M\ (MD = ME)$

$\Rightarrow MI \perp DE\ (Đpcm).$

Bài 153. Cho ΔABC có ba góc đều nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F.

1. Chứng minh $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BIC}$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh hệ thức $AM.AB = AN.AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
3. Chứng minh: tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn

1. Vì $ABIC$ là tứ giác nội tiếp nên: $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}; \widehat{ACB} = \widehat{AIB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{AIC} + \widehat{AIB} = \widehat{BIC}$

Vì $NE \perp AD; NC \perp CD$ nên s $\widehat{NED} = \widehat{NCD} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{NED} + \widehat{NCD} = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $DENC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có:

$AM.AB = AH^2; AN.AC = AH^2 \Rightarrow AM.AB = AN.AC$

Có $\widehat{IAC} = 90^o - \widehat{AIC}$; $\widehat{BAF} = 90^o - \widehat{ABH}$; $\widehat{AIC} = \widehat{ABH} \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{BAF}$

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau $\Rightarrow IC = BF$

Mặt khác vì $ABFI$ và $ABIC$ nội tiếp nên $\widehat{BAF} = \widehat{BIF}$; $\widehat{IAC} = \widehat{IBC}$; $\widehat{BIF} = \widehat{IBC}$

Suy ra $IF // BC \Rightarrow BCIF$ là hình thang

Vì $\widehat{BAF}=\widehat{CAI}\Rightarrow\widehat{BAI}=\widehat{CAF}$

$\Rightarrow\overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{BI}\Rightarrow FC=BI$

Hình thang $BCIF$ có $FC=BI\Rightarrow BCIF$ là hình thang cân.

3. Có $\Delta AEN\#\ AGD(g.g)$

$\Rightarrow\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AN}{AD}\Rightarrow AE.AD=AN.AC=AM.AB\Rightarrow\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AM}{AD}$

Xét ΔAME và ΔADB có:

$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AM}{AD}$ (cmt); $\widehat{MAE}$ chung

Suy ra $\Delta AME\#\ ADB(c.g.c)$

$\Rightarrow\widehat{AME}=\widehat{ADB}\Rightarrow\widehat{BME}+\widehat{ADB}=180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối diện

Suy ra $BMED$ nội tiếp đường tròn.

Bài 154. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh: $AD.AE=AC.AB$.
2. Chứng minh: Ba điểm B,F,D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ΔCDN.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

Hướng dẫn

1. Có $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔADB và ΔACE có:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACE} = 90^o$

$\widehat{EAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ADB \# \Delta ACE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC.AB\left(Đpcm\right)$

2. Có $AN \perp EB$; $EC \perp AB$, EC giao AN tại F nên F là trực tâm của $\Delta AEB \Rightarrow BF \perp EA$

Mà $BD \perp EA \Rightarrow B, D, F$ thẳng hàng

Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90° nên tứ giác $ADFC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{DAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DF}$)

Tương tự ta có: $\widehat{NCF} = \widehat{NBF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NF}$)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{NBF}$ (cùng phụ với $\widehat{AEB}$) $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{NCF}$

Suy ra CF là phân giác $\widehat{DCN}$

Tương tự cùng có DF là phân giác $\widehat{NDC}$

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp ΔDCN

2. Gọi J là giao điểm của (I) với đoạn AB

Có $\widehat{FAC} = \widehat{CEB} = 90^o - \widehat{ABE} \Rightarrow \Delta FAC \# \Delta BEC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow CF.CE = BC.AC \qquad (1)$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FJC} = \widehat{FEA} = 180^o - \widehat{AJF}$

$\Rightarrow \Delta CFJ \# \Delta CAE(g.g) \Rightarrow \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CJ}{CE} \Rightarrow CF.CE = CA.CJ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BC.AC = CA.CJ \Rightarrow BC = CJ \Rightarrow C$ là trung điểm của BJ (vì $J \neq B$)

Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ là đường thẳng cố định.

Bài 155. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp (O), vẽ đường kính AD. Đường thẳng đi qua B vuông góc với AD tại E và cắt AC tại F. Gọi H là hình chiếu của B trên AC và M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = 90^o$.
3. Chứng minh $\dfrac{HC}{HF} + 1 = \dfrac{BC}{HE}$.

Hướng dẫn

1. Có $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $BE \perp AD$ nên $\widehat{FED} = 90^o \Rightarrow \widehat{FED} + \widehat{FCD} = 180^o$ mà hai góc ở vị trí đối nhau

Suy ra tứ giác $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BHC nên

$MH = MC = MB \Rightarrow \Delta MHC$ cân tại M (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MCH}$

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{MHC} = \widehat{BCD} + \widehat{MCH} = \widehat{DCH} = 90^o$.

3. Vì $BE \perp AE, BH \perp AH$ nên $\widehat{BEA} = \widehat{BHA} = 90^o \Rightarrow ABEH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Mà theo ý 2 ta có: $\widehat{BAE} = 90^o - \widehat{MHC} = \widehat{BHM} \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BHM}$

Suy ra H, E, M thẳng hàng.

Gọi N là trung điểm của FC.

$\Rightarrow$ NM là đường trung bình của ΔBFC

$\Rightarrow MN // BF$ nên ta có:

$$\frac{BC}{HE} = \frac{2HM}{HE} = \frac{2HN}{HF} = \frac{2(HF+FN)}{HF} = \frac{2HF+FC}{HF} = \frac{HF+HC}{HF} = 1 + \frac{HC}{HF} \text{ (đpcm).}$$

Bài 156. Cho ΔABC nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm $M, N\left(M \neq B, N \neq C\right)$. Gọi H là giao điểm của BN và CM; P là giao điểm của AH và BC.

1. Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $BM.BA = BP.BC$.
3. Trong trường hợp đặc biệt khi ΔABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a.
4. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\widehat{AMH} = 90^o$; $\widehat{ANH} = 90^o$ nên M và N cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn.

2. Tứ giác $AMPC$ có $\widehat{APC} = 90^0$ (do H là trực tâm của ΔABC) và $\widehat{AMC} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta BMC \# \ \Delta BPA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BP} = \dfrac{BC}{BA}\cdot$ Từ đó suy ra $BM.BA = BP.BC.$

3. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có đường kính AH

ΔABC đều nên trực tâm H cũng là trọng tâm

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}\cdot AP = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ bằng: $\pi.AH = \dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$

Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp tức giác $AMHN$ bằng $\dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\cdot$

4. Ta có: $AH.AP = AM.AB = AE^2 \Rightarrow \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{AP}$

Xét ΔAHE và ΔAEP có:

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{AP}$ (cmt); $\widehat{EAP}$ chung

Nên $\Delta AHE \# \Delta AEP$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AEP}$ (1)

Tương tự ta có: $\widehat{AHF} = \widehat{AFP}$ (2)

Mặt khác: Tứ giác *AFOP* và *AEOF* nội tiếp đường tròn đường kính *AO* nên năm điểm *A, E, P, O, F* cùng thuộc đường tròn đường kính *AO*.

Suy ra tứ giác *AEPF* nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{AEP} + \widehat{AFP} = 180^o$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AHF} = \widehat{AEP} + \widehat{AFP} = 180^o \Rightarrow \widehat{EHF} = 180^o$

Vậy ba điểm *E, H, F* thẳng hàng.

Bài 157. Cho ΔABC đều có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC.

1. Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
2. Chứng minh $OH \perp PQ$.
3. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Hướng dẫn

1. Xét tứ giác *APMQ* có: $\widehat{APM} = \widehat{AQM} = 90^o$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{APM} + \widehat{AQM} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác *APMQ* nội tiếp trong đường tròn đường kính *AM*

Gọi *O* là trung điểm của *AM*

$\Rightarrow$ tứ giác *APMQ* nội tiếp trong đường tròn tâm *O* đường kính *AM*.

2. Ta có: $\widehat{AHM}=90^o$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AHM}$ nội tiếp chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn đường kính AM

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{HPQ}=\widehat{HAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HQ}$)

$\widehat{HQP}=\widehat{HAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HP}$)

Mà $\widehat{HAC}=\widehat{HAB}$ (ΔABC đều nên AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác)

$\Rightarrow \widehat{HPQ}=\widehat{HQP} \Rightarrow \Delta HPQ$ cân tại $H \Rightarrow HP=HQ$ (1)

Mà $OP=OQ$ (do $P,Q\in(O)$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của $PQ \Rightarrow OH\perp PQ$.

1. $S_{MAC}=\frac{1}{2}MQ.AC=\frac{1}{2}MQ.BC$

Ta có: $S_{MAB}=\frac{1}{2}.MP.AB=\frac{1}{2}.MP.BC$ (do $AB=BC$)

$S_{MAC}=\frac{1}{2}MQ.AC=\frac{1}{2}MQ.BC$ (do $AC=BC$)

$S_{ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC$ (do $AC=BC$)

$S_{MAB}+S_{MAC}=S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.MP.BC+\frac{1}{2}.MQ.BC=\frac{1}{2}.AH.BC \Leftrightarrow MP+MQ=AH$ (đpcm).

Bài 158. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) có bán kính $R=3$ cm. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D.

1. Chứng minh tứ giác $OBDC$ nội tiếp đường tròn;
2. Gọi M là giao điểm của BC và OD. Biết $OD=5$ (cm). Tính diện tích ΔBCD
3. Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với đường tiếp tuyến với (O) tại A, d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $AB.AP=AQ.AC$.
4. Chứng minh $\widehat{PAD}=\widehat{MAC}$.

Hướng dẫn

1. Do DB, DC là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{OCD} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{OBD} + \widehat{OCD} = 90^o + 90^o = 180^o$ mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Áp dụng định lý Pi-ta-go vào ΔOBD vuông tại B

$\Rightarrow DB = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(cm)$

Ta có: $OB = OC = R, BD = DC$ (2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow O; D$ thuộc trung trực $BC \Rightarrow OD$ là trung trực $BC \Rightarrow OD \perp BC$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔOBD vuông, ta có:

$$DM.DO = BD^2 \Rightarrow DM = \frac{BD^2}{DO} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}(cm)$$

$$BM.OD = OB.BD \Rightarrow BM = \frac{OB.BD}{OD} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}(cm)$$

Vậy $S_{DBC} = \frac{1}{2}DM.BC = DM.BM = \frac{16}{5}.\frac{12}{5} = 7,68(cm^2)$

3. Ta có: $\widehat{APQ} = \widehat{BAx}$ (2 góc so le trong do $Ax // PQ$)

Mà $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và cung $\overset{\frown}{AB}$ và góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$

Xét ΔABC và ΔAQP có:

$\widehat{PAQ}$ chung; $\widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \# \Delta AQP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AC}{AP} \Rightarrow AB.AP = AC.AQ.$

4. Kéo dài BD cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại F

Ta có: $\widehat{DBP} = \widehat{ABF}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{ABF} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{ACB} = \widehat{APD}$ (do $\Delta ABC \# \Delta AQP$)

$\Rightarrow \widehat{DBP} = \widehat{APD} = \widehat{BPD} \Rightarrow \Delta DBP$ cân tại $D \Rightarrow DB = DP$

Tương tự kéo dàu DC cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại G

Ta chứng minh $\widehat{DCQ} = \widehat{ACG} = \widehat{ABC} = \widehat{DQC} \Rightarrow \Delta DCQ$ cân tại D

Lại có $DB = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow DP = DQ \Rightarrow D$ là trung điểm PQ

Ta có: $\Delta ABC \# \Delta AQP$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{2MC}{2PD} \Rightarrow \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{PD}$

Xét ΔAMC và ΔADP có:

$\widehat{ACM} = \widehat{APD}$ ($\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$ - cmt); $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{PD}$

$\Rightarrow \Delta AMC \# \Delta ADP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PAD} = \widehat{MAC}$ (đpcm).

Bài 159. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung $AC\,(M \neq A; C)$. Hạ $MH \perp AB$ tại H. Nối MB cắt CA tại E. Hạ $EI \perp AB$ tại I. Gọi K là giao điểm của AC và MH. Chứng minh:

1. $BHKC$ và $AMEI$ là các tứ giác nội tiếp.
2. $AK.AC = AM^2$.
3. $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Hướng dẫn

1. Chứng minh tứ giác tứ giác $BHKC$ và $AMEI$ là tứ giác nội tiếp

$\widehat{AMB} = \widehat{KCB} = 90^o$ (2 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $BHKC$ có: $\widehat{KHB} + \widehat{KCB} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHKC$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $AMEI$ có: $\widehat{AMB} + \widehat{EIA} = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Xét ΔAHK và ΔACB có:

$\widehat{AHK} = \widehat{ACK} = 90^o$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHK \# \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AK}{AB} \Rightarrow AH.AB = AC.AK$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔAMB vuông tại M, có MH là đường cao, ta có:

$AH.AB = AM^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow AK.AC = AM^2 \left(Đpcm\right)$

3. Xét ΔAEI và ΔABC có:

$\widehat{AIE} = \widehat{ACB} = 90^o$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEI \# \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AB.AI$ (3)

Xét ΔBEI và ΔBAM có:

$\widehat{BIE} = \widehat{BMA} = 90^o$

$\widehat{ABM}$ chung

$\Rightarrow \Delta BEI \# \Delta BAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BI} = \dfrac{BA}{BM} \Rightarrow BE.BM = BI.BA \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB(AI + BI)$

$\Rightarrow AE.AC + BE.BM = AB^2 = 4R^2$

Vậy $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vào M.

4. Khi M chuyển động trên cung AC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định.

Tứ giác $BCEI$ có:

$\widehat{BCE} + \widehat{EIB} = 90^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $BCEI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EIC} = \widehat{EBC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Từ câu 1, ta có tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EIM} = \widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME).

Mà $\widehat{EBC} = \widehat{EAM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$\widehat{MIC} = \widehat{EIC} + \widehat{EIM} = 2.\widehat{EAM} = \widehat{MOC}$ mà 2 đỉnh cùng nhìn cạnh MC

$\Rightarrow M, C, I, O$ thuộc cùng 1 đường tròn

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác IMC đi qua hai điểm cố định O và C.

Bài 160. Cho đường tròn$(O; R)$và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng $d \perp OA$ tại A. Trên d lấy điểm M. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O). Nối EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.

1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $OA.OB = OH.OM = R^2$.
3. Chứng minh tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MEF thuộc một đường tròn cố định khi M di chuyển trên d.
4. Tìm vị trí của M để diện tích ΔHBO lớn nhất.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $ABHM$ là tứ giác nội tiếp.

Có $ME = MF$ và MO là phân giác của $\widehat{EMF}$ nên $MO \perp EF$ tại H. Mà $MA \perp OA \Rightarrow MABH$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta OHB \# \Delta OAM \Rightarrow OB.OA = OH.OM$

ΔEMO vuông tại $E \Rightarrow OH.OM = OE^2 = R^2$.

3. Có $I \in MO; EI$ là phân giác $\widehat{MEH}$.

Mà $\widehat{MEI} + \widehat{IEO} = 90^o$

$\widehat{IEH} + \widehat{OIE} = 90^o \Rightarrow \widehat{OIE} = \widehat{IEO}$

$\Rightarrow \Delta OIE$ cân tại $O \Rightarrow OI = OE = R \Rightarrow I \in (O;R)$.

4. Vì $OB.OA = R^2 \Rightarrow OA = \dfrac{R^2}{OA} \Rightarrow B$ cố định.

$\widehat{OHB} = 90^o \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính OB.

Gọi K là trung điểm $OB \Rightarrow KB = KO = HK$.

Hạ $HN \perp OB$

S_{HBO} max $\Leftrightarrow HN$ max. Mà $HN \le HK$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$.

Vậy S_{HBO} max $\Leftrightarrow \Delta HBO$ vuông cân tại $H \Leftrightarrow MO$ tạo với OA một góc 45°.

Bài 161. Cho $(O; R)$ và điểm A thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm H sao cho $AH < R$. Dựng đường thẳng $d \perp Ax$ tại H. Đường thẳng d cắt đường tròn tại E và B (E nằm giữa H và B).

1. Chứng minh $\Delta ABH \# \Delta EAH$.
2. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho H là trung điểm AC. Nối CE cắt AB tại K. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $\Delta AHB \# \Delta EAH$

Ta có: $\widehat{EAH} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AE}$ (t/c góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{ABE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AE}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AE}$)

Xét ΔAHB và ΔEAH có:

$\widehat{EAH} = \widehat{ABE}$ (cmt)

$\widehat{AHB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHB \# \Delta EAH (g.g)$.

2. Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $\left.\begin{matrix} EH \perp AC \\ AH = HC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta EAC$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{KCA} = \widehat{ABH}$

Mà $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{KCA} + \widehat{BAH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{CKA} = 90^o$

Xét tứ giác $AHEK$ có:

$\widehat{AKE} + \widehat{EHA} = 90^o + 90^o = 180^o$

Mà 2 góc này ở vị trí đối diện

$\Rightarrow AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Tìm vị trí của H trên Ax sao cho $AB = R\sqrt{3}$

Kẻ $OI \perp AB$ tại I

$\Rightarrow AI = IB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{OAI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OAI} = 30^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o$

$\Rightarrow AH = AB.\cos 60^o = R\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy cần lấy điểm H trên Ax sao cho $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ thì $AB = R\sqrt{3}$.

Bài 162. Cho ΔABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy 1 điểm M, dựng đường tròn tâm (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn tâm (O) tại D, đường thẳng AD cắt đường tròn tâm (O) tại S

1. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCS}$.
2. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
3. Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Hướng dẫn

1. Ta có $\widehat{BAC} = 90^o$ (giả thiết)

$\widehat{MDC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

A, D nhìn BC dưới góc 90° nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). (1)

Ta có tứ giác $DMCS$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACS}$ (cùng bù với $\widehat{MDS}$). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACS} \Rightarrow CA$

là phân giác $\widehat{BCS}$.

2. Giả sử BA cắt CD tại K. Ta có $BD \perp CK, CA \perp BK$.

$\Rightarrow M$ là trực tâm ΔKBC. Mặt khác $\widehat{MEC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow K, M, E$ thẳng hàng hay BA, EM, CD đồng quy tại K.

3. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (cùng chắn cung DC). (3)

Mặt khác tứ giác $BAME$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MBE}$ (cùng chắn cung ME). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MAE}$ hay AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{ADM} = \widehat{MDE}$ hay DM là tia phân giác $\widehat{ADE}$.

Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE.

* **Lưu ý**: *Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, một phương pháp thường dùng là chứng minh ba đường thẳng ấy hoặc là ba đường cao, hoặc là ba đường trung tuyến, hoặc là ba đường phân giác của một tam giác.*

Bài 163. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OA. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường kính BH. Nối AC cắt đường tròn (O_1) tại N. Nối BC cắt đường tròn (O_2) tại M. Đường thẳng MN cắt đường tròn $(O;R)$ tại E và F.

1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật.
2. Cho $AH = 4$ cm, $BH = 9$ cm. Tính MN.
3. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).
4. Chứng minh $CE = CF = CH$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $CMHN$ là hình chữ nhật:

Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{ACB} = \widehat{HNB} = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{CMH} = \widehat{CNH} = 90^o$

$\Rightarrow CMHN$ là hình chữ nhật.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB:

$CH^2 = AH.HB = 4.9 = 36$

Suy ra $CH = 6 \Rightarrow MN = 6\,(cm)$.

3. Gọi I là giao điểm của CH và MN. Theo tính chất hình chữ nhật:

$IM = IN = IC = IH \Rightarrow \Delta IMH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IMH} = \widehat{IHM}$

Lại có: $O_2M = O_2H \Rightarrow \widehat{O_2MH} = \widehat{O_2HM}$

$\Rightarrow \widehat{O_2MI} = \widehat{O_2HI} = 90^o$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{O_1NI} = 90^o$

Do đó MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

4. OC cắt MN tại K, cắt $(O; R)$ tại $Q \Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{CFQ} = 90^o$.

Có $OC = OB = R \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

Mà $O_2M = O_2B = R_2 \Rightarrow \widehat{O_2MB} = \widehat{OBN} \Rightarrow \widehat{O_2MB} = \widehat{OCB}$

$\Rightarrow O_2M // OC \Rightarrow OC \perp MN$ tại K.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông FCQ: $CF^2 = CK.CQ$ (1)

Có $\Delta CKI \# \Delta CDQ\,(g.g) \Rightarrow CK.CQ = CI.CD$ (2)

Mà $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$

Do đó $CI.CD = \frac{1}{2}CH.2CH = CH^2$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow CF^2 = CH^2 \Rightarrow CF = CH$

Có $OK \perp EF \Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta CEF$ cân tại $C \Rightarrow CE = CF$.

Vậy $CE = CF = CH$.

Bài 164. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính vuông góc AB và CD. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn $(O; R)$ tại E. Nối AE cắt CD tại H; nối BD cắt AE tại K.

1. Chứng minh tứ giác $OIED$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AH.AE = 2R^2$.
3. Tính $\tan \widehat{BAE}$.
4. Chứng minh OK vuông góc với BD.

Hướng dẫn

1. Ta có CD là đường kính của đường tròn (O; R) nên $\widehat{CED} = 90^o$

Theo giả thiết $\widehat{BOD} = 90^o$

Do đó: $\widehat{IED} + \widehat{IOD} = 180^o$

Suy ra tứ giác *OIED* là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta AOH \# \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AH = AO.AB = 2R^2$

3. Ta có: $\widehat{BEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = 45^o$

$\widehat{AEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 45^o$

Suy ra *EI* là phân giác $\widehat{AEB}$

Do đó $\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\tan\widehat{BAE} = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{1}{3}$

4. Xét ΔOHA vuông tại O, ta có $OH = OA.\tan\widehat{OAH} = \dfrac{OA}{3} = \dfrac{OD}{3}$ vì vậy *H* là trọng tâm của tam giác *DAB*.

Do đó *AK* là đường trung tuyến của tam giác *DAB*.

Suy ra *KB* = *KD*. Vì vậy $OK \perp DB$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Bài 165. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, đường kính AD. Điểm H thuộc đoạn OD. Kẻ dây $BC \perp AD$ tại H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ AC, kẻ $CK \perp AM$ tại K. Đường thẳng BM cắt CK tại N.

1. Chứng minh $AH.AD = AB^2$.
2. Chứng minh tam giác CAN cân tại A.
3. Giả sử H là trung điểm của OD. Tính R theo thể tích hình nón có bán kính đáy là HD, đường cao BH.
4. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác ABN lớn nhất.

Hướng dẫn

1. Tam giác ABD vuông tại B, $BH \perp AD$ nên $AH.AD = AB^2$.
2. Do $AH \perp BC \Rightarrow HB = HC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{AMB}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{KMN}$ (1)

Tứ giác $ABCM$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{KMC}$ (cùng bù với $\widehat{AMC}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{KMC}$.

Lại có $MK \perp CN$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta MCN$ cân tại $M \Rightarrow KC = KN$.

Tam giác CAN có $AK \perp CN$ và $KC = KN$ nên ΔACN cân tại A.

3. Khi $OH = HD$, tam giác BOD cân tại $B \Rightarrow BO = BD$, mà $OB = OD = R$ nên tam giác OBD đều

$\Rightarrow \widehat{BOH} = 60^o \Rightarrow BH = OB.\sin 60^o = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$

Trong đó: $r = HD = \dfrac{R}{2}, h = BH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2}{4}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$.

4. Hạ $NE\perp AB$. Vì AB không đổi nên S_{ABN} lớn nhất khi NE lớn nhất.

Ta có: $AN = AC$ không đổi.

Mà $NE\le NA$, dấu bằng xảy ra khi $E\equiv A$. Lấy I đối xứng với B qua O. Khi $E\equiv A$ thì $\widehat{NAB}=90^o$ do đó NA đi qua I.

Mặt khác AM là phân giác của $\widehat{NAC}$ nên M là điểm chính giữa của cung nhỏ IC.

Vậy điểm M cần tìm là điểm chính giữa cung nhỏ IC.

Bài 166. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $(AC\le AB)$. Dựng về phía ngoài ΔABC một hình vuông $ACED$. Tia EA cắt nửa đường tròn tại F. Nối BF cắt ED tại K.

1. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, K thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $AB = EK$.
3. Cho $\widehat{ABC}=30^o; BC=10cm$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.
4. Tìm vị trí điểm A để chu vi tam giác ΔABC lớn nhất.

Hướng dẫn

1. $ACED$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{CAE}=\widehat{CDE}=45^o$

Tứ giác $BCAF$ nội tiếp đường tròn $(O)\Rightarrow \widehat{FBC}=\widehat{CAE}$

(cùng bù với góc $\widehat{CAF}$)

$\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{FBC} + \widehat{CDK} = 180^o$

$\Rightarrow BCDK$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có: $\widehat{BAC} = 90^o = \widehat{CEK}$.

Mà tứ giác $BCDK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CKD} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ECK}$.

Lại có: $AC = CE$ (cạnh hình vuông)

Suy ra $\Delta ABC = \Delta EKC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow AB = EK$

3. Vì $\widehat{ABC} = 30^o$ nên $\widehat{AOC} = 60^o$, do đó tam giác OAC là tam giác đều.

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AH = OA.\sin 60^o = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Gọi diện tích hình viên phân là S, ta có: $S = S_{quat\ AOC} - S_{AOC}$

$$S = \frac{60^o}{360^o}.\pi.R^2 - \frac{1}{2}OC.AH$$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}\,(cm^2).$$

4. Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ lớn nhất. Áp dụng BĐT $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

   Ta có: $(AB + AC)^2 \leq 2(AB^2 + AC^2) = 2BC^2 = 8R^2 \Rightarrow AB + AC \leq 2\sqrt{2}R.$

Dấu "=" xảy ra khi $AB = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC.

Bài 167. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC cố định. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn tại B (B khác A). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt AB tại D. Nối OM cắt AB tại I, cắt cung nhỏ AB tại E.

1. Chứng minh $OIDC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AB.AD$ không đổi khi M di chuyển trên Ax.
3. Tìm vị trí điểm M trên Ax để $AOBE$ là hình thoi.
4. Chứng minh $OD \perp MC$.

Hướng dẫn

1. Có $MA = MB; OA = OB = R$ nên OM là trung trực của AB nên $OI \perp AB$ và $IA = IB$

Lại có $OC \perp CD$ nên $\widehat{OID} + \widehat{OCD} = 180^o \Rightarrow OIDC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mà ΔACD vuông tại C nên $AB.AD = AC^2$ không đổi.

3. $AOBE$ là hình thoi $\Leftrightarrow AE = EB = BO = OA \Leftrightarrow \Delta AOE$ đều $\Leftrightarrow \widehat{AOE} = 60^o$

ΔAOM vuông tại A nên $AM = OA.\tan 60^o = R\sqrt{3}$.

4. $\widehat{AMO} = \widehat{BAC}$ (cùng phụ với $\widehat{MAB}$), $\widehat{MAO} = \widehat{OCD} = 90^o$

Nên $\Delta AMO \# \Delta CAD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AO}{CD}$

Mà $OA = OC = R$, suy ra $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{OC}{CD} \Rightarrow \tan\widehat{MCA} = \tan\widehat{ODC}$

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MCD} = 90^o$. Do đó $OD \perp MC$.

Bài 168. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E là trung điểm BC. Dựng hình bình hành $ADEF$.

1. Tính $\widehat{MIC}$.
2. Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.
3. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn $(O;R)$.
4. Cho $\widehat{CAB} = 30^o; R = 30cm$. Tính thể tích hình tạo thành khi cho ΔABC quay một vòng quanh AB.

Hướng dẫn

1. $\widehat{MIA}=\frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{MA}+sđ\overset{\frown}{CN})=\frac{1}{4}sđ\overset{\frown}{AB}=45^o\Rightarrow\widehat{MIC}=135^o$

2. Có: $\overset{\frown}{NC}=\overset{\frown}{NB}\Rightarrow ON\perp BC$ tại E.

Lại có: $\widehat{ACB}=90^o\Rightarrow\widehat{DCE}=90^o$.

Mà $ND\perp CD\ (gt)\Rightarrow CEND$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow DN\perp ON$ tại $N\Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O).

3. Theo tính chất hình chữ nhật ta có: $\widehat{EDC}=\widehat{NCD}$

Mà $\widehat{EDC}=\widehat{F}\Rightarrow\widehat{F}=\widehat{DNC}\Rightarrow\widehat{F}+\widehat{ACN}=180^o.ON\ //\ AC$ (cùng $\perp CB$)

$\Rightarrow N, E, O, F$ thẳng hàng. Suy ra $ACNF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow F\in(O)$

4. Hạ $CK\perp AB$. Tam giác ABC có $\widehat{A}=30^o,\widehat{C}=90^o$ nên $\widehat{B}=60^o$

Do đó, ΔOBC là tam giác đều $\Rightarrow BK=KO=\frac{R}{2};\ BC=R;\ CK=\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot$

Khi quay ΔABC một vòng quanh AB có hai hình nón tạo thành: hình nón đỉnh A, và hình nón đỉnh B cùng có tâm hình tròn đáy là K, bán kính CK.

Gọi thể tích tạo thành là V, ta có:

$$V=\frac{1}{3}\pi.CK^2.AK+\frac{1}{3}\pi.CK^2.BK=\frac{1}{3}\pi.CK^2(AK+BK)$$

$$=\frac{1}{3}\pi.CK^2.AB=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot 2R=\frac{\pi R^3}{2}=500\pi\ (cm^3)$$

Bài 169. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây AB cố định. Gọi I là điểm chính giữa cung lớn AB. Điểm M thuộc cung nhỏ IB. Hạ $AH\perp IM;AH$ cắt BM tại C.

1. Chứng minh ΔIAB và ΔMAC là tam giác cân.
2. Chứng minh C thuộc một đường tròn cố định khi M chuyển động trên cung nhỏ IB.
3. Tìm vị trí của M để chu vi ΔMAC lớn nhất.

Hướng dẫn

1. Vì $\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB} \Rightarrow IA = IB \Rightarrow \Delta IAB$ cân tại I.

Tứ giác $ABMI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IMC}$ (cùng bù với $\widehat{IMB}$)

Ta có: $\widehat{IAB} = \widehat{IBA}; \widehat{IBA} = \widehat{IMA}; \widehat{IAB} = \widehat{IMC} \Rightarrow \widehat{IMA} = \widehat{IMC}$

Lại có: $MH \perp AC \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M.

2. Từ chứng minh trên $\Rightarrow MI$ là đường trung trực của AC

$\Rightarrow IC = IA$ không đổi $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn $(I; IA)$

3. Chu vi $\Delta MAC = MA + MC + AC = 2(MA + AH)$

Có $\widehat{HMA} = \widehat{IBA}$ (không đổi và $\widehat{IBA} < 90^o$)

Đặt $\widehat{HMA} = \widehat{IAB} = \alpha$. Ta có: $AH = MA.\sin\alpha$

Vậy chu vi $\Delta MAC = 2MA(1 + \sin\alpha)$

Chu vi ΔMAC lớn nhất khi MA lớn nhất $\Leftrightarrow A, O, M$ thẳng hàng.

Bài 170. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên Ax lấy điểm $K\left(AK \geq R\right)$. Qua K kẻ tiếp tuyến KM với đường tròn (O). Đường thẳng $d \perp AB$ tại O, d cắt MB tại E.

1. Chứng minh $KAOM$ là tứ giác nội tiếp;
2. OK cắt AM tại I. Chứng minh $OI.OK$ không đổi khi K chuyển động trên Ax;
3. Chứng minh $KAOE$ là hình chữ nhật;

4. Gọi H là trực tâm của ΔKMA. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

1. $\widehat{KAO} = \widehat{KMO} = 90^o \Rightarrow KAOM$ nội tiếp.
2. Theo tính chất tiếp tuyến: $KA = KM$

KO là phân giác của $\widehat{AKM} \Rightarrow KO \perp AM$ tại I

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác vuông AOK ta có

$OI.OK = OA^2 = R^2$

3. Có $OK \ // BM$ (cùng $\perp AM$) $\Rightarrow \widehat{KOA} = \widehat{EBO}$.

Mà $OA = OB = R; \widehat{KAO} = \widehat{EOB} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AKO = \Delta OEB\ (c.g.c)$

$\Rightarrow AK = OE$, mà $AK \ // OE$, $\widehat{KAO} = 90^o$

$\Rightarrow AKEO$ là hình chữ nhật.

4. H là trực tâm của $\Delta KMA \Rightarrow AH \perp KM$, $MH \perp KA \Rightarrow AH \ // OM$, $MH \ // OA$.

Do đó $AOMH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = OM = R$.

Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$.

Bài 171. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA. Dây $MN \perp AB$ tại C. Trên cung MB nhỏ lấy điểm K. Nối AK cắt NM tại H.

1. Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tích $AH.AK$ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ MB.

3. Chứng minh ΔBMN là tam giác đều.
4. Tìm vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ lớn nhất.

Hướng dẫn

1. Có $\widehat{BKA} = 90^o; \widehat{MCB} = 90^o \Rightarrow \widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 180^o$ nên tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

2. $\Delta ACH \# \Delta AKB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AB.AC = R^2$

3. Vì $OC \perp MN \Rightarrow CM = CN \Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B.

ΔMAB vuông tại M $\Rightarrow AM^2 = AC.AB = R^2$

$\Rightarrow AM = R$. Do đó $\sin\widehat{MBA} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MAB} = 30^o$

Mà $\widehat{MCB} = \widehat{NCB}$ (tính chất tam giác cân) $\Rightarrow \widehat{MNB} = 60^o$

Do đó ΔMNB là tam giác đều.

4. Trên KN lấy E sao cho $KE = KM$

Vì tam giác BMN đều nên $\widehat{MBN} = 60^o \Rightarrow \widehat{MKN} = 60^o \Rightarrow \Delta KME$ đều.

Do đó $ME = MK$ và $\widehat{KME} = 60^o$.

Lại có: $MB = MN$ và $\widehat{KMB} = \widehat{EMN}$ (cùng cộng với $\widehat{BME} = 60^o$)

$\Rightarrow \Delta KMB = \Delta EMN\ (c.g.c) \Rightarrow KB = EN$.

Từ đó $KM + KB = KN \Rightarrow S = KM + KN + KB = 2KN$

S lớn nhất $\Leftrightarrow KN$ lớn nhất $\Leftrightarrow K, O, N$ thẳng hàng.

Bài 172. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở ngoài đường tròn. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là 2 tiếp điểm). I là một điểm thuộc đoạn BC $(IB < IC)$. Kẻ đường thẳng $d \perp OI$ tại I. Đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh $OIBE$ và $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh I là trung điểm EF.
3. K là một điểm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại K cắt AB; AC tại M và N. Tính chu vi ΔAMN nếu $OA = 2R$.
4. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC tại P và Q. Tìm vị trí của A để S_{APQ} nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1. Có $OB \perp AB, OC \perp AC$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{OIE} = \widehat{OBE} = 90^o \Rightarrow OIBE$ nội tiếp

$\widehat{OIF} + \widehat{OCF} = 180^o \Rightarrow OIFC$

nội tiếp.

2. Tứ giác $OIBE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OBI}$. Tương tự $\widehat{OFI} = \widehat{OCI}$. Mà $OB = OC = R$

$\Rightarrow \widehat{OBI} = \widehat{OCI} \Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OFI}$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O. Mà $OI \perp EF \Rightarrow IE = IF$ (Đpcm)

3. Có $MK = MB$, $NK = NC$

Suy ra chu vi $\Delta AMN = AC + AB = 2AC = 2\sqrt{AO^2 - OC^2} = 2\sqrt{3R^2} = 2R\sqrt{3}$

4. Có AO là phân giác của $\widehat{PAQ}$, $PQ \perp AO \Rightarrow \Delta APQ$ cân tại $A \Rightarrow S_{APQ} = 2S_{AOQ}$

$S_{APQ} = AQ.OC$ mà $OC = R$ không đổi, do đó S_{APQ} nhỏ nhất $\Leftrightarrow AQ$ nhỏ nhất.

ΔOAQ vuông tại O $\Rightarrow AC.CQ = OC^2 = R^2$.

Mà $AQ = AC + CQ \geq 2\sqrt{AC.CQ} = 2R$, dấu "=" xảy ra khi $AC = CQ$

S_{APQ} min $\Leftrightarrow AC = CQ \Leftrightarrow \Delta OQA$ vuông cân tại $O \Leftrightarrow \widehat{A} = 45^o \Leftrightarrow OA = R\sqrt{2}$

Bài 173. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt. Đường thẳng OA cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai C, D. Đường thẳng $O'A$ cắt $(O);(O')$ lần lượt tại điểm thứ hai E, F.

1. Chứng minh 3 đường thẳng AB, CE và DF đồng quy tại một điểm I.
2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
3. Cho PQ là tiếp tuyến chung của (O) và (O') $(P \in (O), Q \in (O'))$. Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABF} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên *B, C, F* thẳng hàng.

Có *AB; CE* và *DF* là 3 đường cao của ΔACF nên chúng đồng quy.

2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{IBF} = 90^o$ suy ra *BEIF* nội tiếp đường tròn.
3. Gọi *H* là giao điểm của *AB* và *PQ*

Ta chứng minh được $\Delta AHP \# \Delta PHB \Rightarrow \dfrac{HP}{HB} = \dfrac{HA}{HP} \Rightarrow HP^2 = HA.HB$

Tương tự, $HQ^2 = HA.HB$

Vậy $HP = HQ$ hay *H* là trung điểm của *PQ*.

Bài 174. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại *A* và *B*. Kẻ tiếp tuyến chung *DE* của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho *B* gần tiếp tuyến đó hơn so với *A*.

1. Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.
2. Tia *AB* cắt *DE* tại *M* . Chứng minh *M* là trung điểm của *DE*.
3. Đường thẳng *EB* cắt *DA* tại *P*, đường thẳng *DB* cắt *AE* tại *Q*. Chứng minh rằng *PQ* song song với *AB*.

Hướng dẫn

1. Ta có $\widehat{DAB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc nội tiếp)

$\widehat{BDE} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

2. Xét ΔDMB và ΔAMD có:

$\widehat{DMA}$ chung,

$\widehat{DAM} = \widehat{BDM}$

Nên $\Delta DMB \# \Delta AMD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MA}{MD}$ hay $MD^2 = MA.MB$.

Tương tự ta cũng có: $\Delta EMB \# \Delta AME \Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MA}{ME}$ hay $ME^2 = MA.MB$.

Từ đó: $MD = ME$ hay M là trung điểm của DE.

3. Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{BDM}$, $\widehat{EAB} = \widehat{BEM}$

$\Rightarrow \widehat{PAQ} + \widehat{PBQ} = \widehat{DAB} + \widehat{EAB} + \widehat{PBQ} = \widehat{BDM} + \widehat{BEM} + \widehat{DBE} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APBQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PAB}$.

Kết hợp với $\widehat{PAB} = \widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB} = \widehat{BDM}$.

Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB.

Bài 175. Cho đường trong $(O;R)$ và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB;

1. Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.
3. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Hướng dẫn

1. Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM} = 90^o$.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^o$.

Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M

$\Rightarrow MI$ là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$.

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$ nên $\widehat{DCI} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DI} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CI} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow$ CI là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD.

3. Ta có ΔMPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính:

$$S = 2S_{OQM} = 2.\frac{1}{2}.OD.QM = R(MD + DQ).$$

Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow MD + DQ$ nhỏ nhất.

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên $MD + DQ$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DM = DQ = R$.

Khi đó $OM = R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Bài 176. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm BC, vẽ đường kính AK.

1. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
2. Chứng minh $DA.DH = DB.DC$.
3. Cho $\widehat{BAC} = 60^0; S_{ABC} = 20cm^2$. Tính S_{ABC}.

4. Cho BC cố định; A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

1. Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AK: $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^o$

Do đó $BH//CK$ và $CH//BK \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

Mà I là trung điểm BC nên I là trung điểm của HK

Suy ra $H; I; K$ thẳng hàng.

2. Ta có $\widehat{HBD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) nên $\Delta DBH \# \Delta DAC(g.g)$

Suy ra $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{HD}{DC} \Rightarrow DB.DC = DA.DH$.

3. Vì $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^o \Rightarrow \Delta AEB \# \Delta AFC(g.g)$

Suy ra $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$; $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \# \Delta ABC(c.g.c)$

Do đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AF}\right)^2$

Mà $\dfrac{AE}{AB} = cos\widehat{BAC} = cos60^o = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AEF} = 80cm^2$.

4. Lấy O' đối xứng với O qua I suy ra O' cố định.

Ta có $IH = IK; OK = OA = R$ nên OI là đường trung bình của ΔKHA

Do đó $OI//AH$ và $OI=\frac{1}{2}AH$

Suy ra $OO'//AH$, $OO'=AH$ nên $OO'HA$ là hình bình hành

Do đó $O'H=OA=R$ (không đổi)

Vậy H thuộc đường tròn (O';R) cố định.

Bài 177. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính vuông góc là AB và CD. Lấy K thuộc cung nhỏ AC, kẻ $KH\perp AB$ tại H. Nối AC cắt HK tại I, tia BC cắt HK tại E; nối AE cắt đường tròn (O;R) tại F.

1. Chứng minh $BHFE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $EC.EB = EF.EA$.
3. Cho H là trung điểm OA. Tính theo R diện tích ΔCEF.
4. Cho K di chuyển trên cung nhỏ AC. Chứng minh đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

1. Do F thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AFB}=90^o$

Suy ra $\widehat{BFE}=\widehat{BHE}=90^o\Rightarrow BHFE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{ECA}=\widehat{EFB}=90^o;\widehat{AEC}$ chung

Nên $\Delta ECA\#\ \Delta EFB(g.g)\Rightarrow\frac{EC}{EF}=\frac{EA}{EB}\Rightarrow EC.EB=EA.EF$.

3. Từ chứng minh trên suy ra *AC, BF, EH* là 3 đường cao của ΔEAB nên chúng cắt nhau tại I.

Do đó $\frac{EC}{EF}=\frac{EA}{EB}$ và $\widehat{AEB}$ chung nên $\Delta ECF \# \Delta EAB$ (cạnh – góc – cạnh)

$\frac{S_{ECF}}{S_{EAB}}=\left(\frac{EC}{EA}\right)^2$ (1)

Vì $OB=OC=R$ nên ΔOBC vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC}=45^o$.

Do đó ΔHBE vuông cân tại $H \Rightarrow EH=HB=\frac{3R}{2}\cdot$

Mà $AH=\frac{R}{2}$ nên $AE^2=AH^2+HE^2=\frac{R^2}{4}+\frac{9R^2}{4}=\frac{10R^2}{4}\Rightarrow AE=\frac{R\sqrt{10}}{2}$

Tương tự $BE^2=HB^2+HE^2=\frac{9R^2}{2}\Rightarrow BE=\frac{3R}{\sqrt{2}}$

Lại có: $OC//EH$ (cùng $\perp AB$) nên $\frac{EC}{EB}=\frac{HO}{HB}=\frac{1}{3}\Rightarrow EC=\frac{1}{3}EB=\frac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\left(\frac{EC}{EA}\right)^2=\frac{1}{5}\Rightarrow S_{ECF}=\frac{1}{5}S_{EAB}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot EH\cdot AB=\frac{3R^2}{10}$

4. Các tứ giác *BEFH* và *AHCE* nội tiếp nên $\widehat{AEB}=\widehat{CHB};\widehat{AEB}=\widehat{AHF}\Rightarrow\widehat{AHF}=\widehat{CHB}$

Suy ra $\widehat{AHF}=\widehat{DHB}$.

Có $HO\perp OC, OC=OD$ nên ΔHCD cân tại *H* nên $\widehat{AHF}=\widehat{DHB}$

Do đó $\widehat{AHF}=\widehat{DHB}$ mà $\widehat{AHF}+\widehat{FHB}=180^o\Rightarrow\widehat{DHB}+\widehat{FHB}=180^o$

Suy ra *F; H; D* thẳng hàng. Suy ra *FH* đi qua *D* cố định.

Bài 178. [Bà Rịa – Vũng Tàu 2015 – 2016]

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Dựng cát tuyến AMN không đi qua O, M nằm giữa A và N. Dựng hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B,C là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ MN). Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh tứ giác OI nội tiếp.

b) Hai tia BO và CI lần lượt cắt (O) tại D và E (D khác B, E khác C). Chứng minh góc CED = góc BAO.

c) Chứng minh OI vuông góc với BE

d) Đường thẳng OI cắt đường tròn tại P và Q (I thuộc OP); MN cắt BC tại F; T là giao điểm thứ hai của PF và (O). Chứng minh ba điểm A; T; Q thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác OI nội tiếp.

+ Ta có ABO = 90° (tctt)

AIO = 90 (IM = IN)

+ Suy ra ABO + AIO = 180^0 nên tứ giác ABOI nội tiếp đường tròn đường kính AO.

b) Chứng minh CED = BAO

+ Vì AB; AC là hai tiếp tuyến của (O) nên AO ⊥ BC

+ Ta có: $E_1 = B_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD của đường tròn (O))

BAO = B_1 (cùng phụ O_1)

Suy ra E_1 = BAO hay CED = BAO

c) Chứng minh OI vuông góc với BE

+ Ta có : E2 = ABC (cùng chắn cung BC); ABC = I_3 (A,B,O,I,C cùng thuộc đường tròn đường kính AO);

I3 = I2 (đđ)

Suy ra E2 = I2. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên MN // BE .

+ Ta lại có MN $\perp$ OI (IM = IN) nên OI $\perp$ BE

d) Chứng minh ba điểm A; T; Q thẳng hàng.

+ Gọi K là giao điểm OF và AP

+ Ta có QKP = 90° (góc nt chắn nửa đường tròn) nên QK $\perp$ AP

+ Trong tam giác APQ có hai đường cao AI và QK cắt nhau tại F nên F là trực tâm.

Suy ra PF là đường cao thứ 3 của tam giác APQ nên PF $\perp$ QA (1)

+ Ta lại có QTP = 90° (góc nt chắn nửa đường tròn) nên PF $\perp$ QT (2)

Từ (1);(2) suy ra QA ≡QT. Do đó 3 điểm A; T; Q thẳng hàng.

Bài 179. [Bắc Giang 2014 – 2015]

Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho AC = R. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M bất kì trên (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

a) Chứng minh tứ giác ACPM là tứ giác nội tiếp.

b) Tình BM.BP theo R

c) Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song.

d) Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên (O).

Hướng dẫn

a) Ta có AB là đường kính của (O), M ∈ (O) ⇒ góc AMB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn => AMB = 90° => AMP = 90°

Mặt khác ACP = 90° (gt) => AMP + ACP = 180°

Suy ra tứ giác ACPM nội tiếp đường tròn.

b) Xét 2 tam giác BAM và BPC ta có:

$$\begin{cases} AMB = BCP = 90^o \\ MBA(chung) \end{cases} \Rightarrow \Delta BAM \sim \Delta BPC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BA}{BP} \Rightarrow BM.BP = BA.BC = 2R.3R = 6R^2$$

c) Ta có:

AMNQ là tứ giác nội tiếp ⇒ MNQ = PAM (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện) (1)

AMPC là tứ giác nội tiếp ⇒ PCM = PAM (hai góc nội tiếp cùng chắn cung PM) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ MNQ = PCM

Hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau ⇒ PC // NQ.

d) Gọi D là trung điểm BC, là điểm cố định. Qua G kẻ đường thẳng song song MO cắt AB tại I.

*G là trọng tâm tam giác BCM nên G ∈ đoạn MD và MG = $\frac{2}{3}MD$ (tính chất trọng tâm)

Do GI // MO nên theo định lí Ta–lét cho tam giác DMO ta có I ∈ đoạn DO và $\frac{OI}{OD} = \frac{MG}{MD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OI = \frac{2}{3}OD.$ Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định.

*Do GI // MO nên theo định lí Ta–lét ta có $\frac{GI}{MO}=\frac{DG}{DM}=\frac{1}{3}\Rightarrow IG=\frac{1}{3}MO=\frac{R}{3}$.

⇒ G luôn cách điểm I cố định một khoảng $\frac{R}{3}$ không đổi.

⇒ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R}{3}$

Bài 180. [Bắc Giang 2015 – 2016]

Trên đường tròn (O) có đường kính AB = 2R, lấy một điểm C sao cho AC = R và lấy điểm D bất kỳ trên cung nhỏ BC (điểm D không trùng với B và C). Gọi E là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng đi qua điểm E và vuông góc với đường thẳng AB tại điểm H cắt tia AC tại điểm F. Điểm M là trung điểm của đoạn EF.

a) Chứng minh tứ giác BHCF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: HA.HB = HE. HF

c) Chứng minh CM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Xác định vị trí của điểm D để chu vi của tứ giác ABDC lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{BHF}=90^o$ (giả thiết) (1).

$\widehat{BCA}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Suy ra $\widehat{BCF}=90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCF nội tiếp một đường tròn (vì có hai đỉnh H, C kề nhau cùng nhìn BF dưới một góc vuông).

b) Xét tam giác vuông BHE và FHA có $\widehat{BEH} = \widehat{CAB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CBA}$).

Suy ra hai tam giác BHE và FHA đồng dạng.

Từ đó ta có $\frac{HB}{HF} = \frac{HE}{HA}$ ⇔ HA. HB = HE. HF

c) Tam giác vuông ECF vuông tại C có CM là đường trung tuyến

Nên CM = ME suy ra CME là tam giác cân, suy ra $\widehat{MCE} = \widehat{MEC}$ (3)

$\widehat{MCO} = \widehat{MCE} + \widehat{ECO} = \widehat{MEC} + \widehat{CBO}$ (do (3) và tam giác COB cân tại O).

= $\widehat{BEH} + \widehat{CBO} = 90^o$

Vậy CM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Lấy điểm K đối xứng với điểm C qua AB. Suy ra điểm K cố định trên (O)

Lấy điểm P trên đoạn DK sao cho DP = DC.

Khẳng định tam giác OAC đều => tam giác CBK đều => tam giác CDP đều.

Xét hai tam giác CKP và CBD có:

CP = CD ; CK = CB và $\widehat{KCP} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng 60° - $\widehat{PCB}$)

Từ đó, ΔCKP = ΔCBD (c.g.c) suy ra PK = BD.

Chu vi tứ giác ABDC bằng:

AB + BD + DC + CA = 3R + BD + DC = 3R + PK + PD = 3R + KD

Chu vi tứ giác lớn nhất khi KD lớn nhất => KD là đường kính của đường tròn (O; R).

Kết luận D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Bài 181. [Bắc Ninh – 2015 – 2016]

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (khác với điểm A). Tiếp tuyến kẻ từ điểm E cắt các tiếp tuyến kẻ từ điểm A và B của nửa đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Hướng dẫn

a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

Vì AC là tiếp tuyến của (O) nên OA ⊥ AC => OAC = 90°

Vì MC là tiếp tuyến của (O) nên OM ⊥ MC => OMC = 90°

=> OAC + OMC = 180°. Suy ra OACM là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$

Xét hai tam giác vuông OAC và OMC có

$\begin{cases} OA = OM = R \\ chung_OC \end{cases} \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OMC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ CA = CM $\Rightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{CA}{CE}$. Tương tự ta có $\frac{DM}{DE} = \frac{DB}{DE}$

Mà AC // BD (cùng vuông góc AB) nên $\frac{CA}{DB} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{DM}{DE}$

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Vì $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow AOC = MOC \Rightarrow AOC = \frac{1}{2}AOM$

Tương tự: $BOD = \frac{1}{2}BOM$

Suy ra $AOC + BOD = \frac{1}{2}(AOM + BOM) = 90^o$

Mà $AOC + ACO = 90^o \Rightarrow ACO = BOD$

$\Rightarrow \Delta AOC \sim \Delta BDO(g.g) \Rightarrow \frac{AO}{BD} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow AC.BD = AO.BO = R^2$ (không đổi, đpcm)

Bài 182. [Quảng Ninh – 2016]

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, trên nửa đường tròn lấy điểm C (C không trùng với A, B). Gọi H là hình chiếu của C trên đường thẳng AB. Trên cung CB lấy điểm D (D khác C, B), Hai đường thẳng AD và CH cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác BDEH nội tiếp

b) Chứng minh $AC^2 = AE.AD$

c) Gọi (O') là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (O') cắt CB tại F khác B. Chứng minh EF // AB.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác BDEH nội tiếp

Xét (O) ta có: $\widehat{ABD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{EDB} = 90^o$

GT => $\widehat{CHB} = 90^o$ hay $\widehat{EHB} = 90^o$

Xét tứ giác BDEH có $\widehat{EDB} + \widehat{EHB} = 180^o$

mà $\widehat{EDB}, \widehat{EHB}$ hai góc đối

⇒ tứ giác BDEH nội tiếp (đpcm).

b) Chứng minh $AC^2 = AE.AD$

Xét Δ AEH và Δ ABD có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{AHE} = \widehat{ADB} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta ABD (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AE.AD = AH.AB$ (1)

$\widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét Δ vuông AEH có CH là đường cao

Ta có : $AC^2 = AH.AB$ (hệ thức lượng trong Δ vuông) (2)

(1), (2) => $AC^2 = AE.AD$ (đpcm)

c) Gọi (O') là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B.

Đường tròn (O') cắt CB tại F khác B. Chứng minh EF // AB.

Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{BDF}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{BDF} + \widehat{FDA} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{FDA} = 90^o$

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ACH}$ (vì cùng phụ với góc HCB)

$\Rightarrow \widehat{ACH} + \widehat{FDA} = 90^o$

Lại có $\widehat{ACH} + \widehat{HCB} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{FDA}$ hay $\widehat{ECF} = \widehat{FDE}$

Xét tứ giác ECDF có $\widehat{ECF} = \widehat{FDE}$

mà C, D là hai đỉnh liên tiếp

⇒ tứ giác ECDF nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\widehat{DEF} = \widehat{DCF}$ hay $\widehat{DEF} = \widehat{DCB}$ (góc nội tiếp do cùng chắn cung FD)

mà $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DB)

$\Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{DAB}$

Hai góc ở vị trí đồng vị ⇒ EF//AB (đpcm)

Bài 183. [Yên Bái – 2016 – 2017]

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là giao điểm hai đường cao BD và CE của tam giác ABC (D ∈ AC, E ∈ AB)

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp trong một đường tròn.

b) Đường thẳng AO cắt ED và BD lần lượt tại K và M. Chứng minh AK.AM = AD^2

c) Chứng minh BAH = OAC

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp trong một đường tròn.

Vì HE ⊥ AB, HD ⊥ AC nên HEA = HAD = 90° => HEA + HAD = 180°

Suy ra ADHE là tứ giác nội tiếp

b) Đường thẳng AO cắt ED và BD lần lượt tại K và M. Chứng minh AK.AM = AD^2

Trong nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia tiếp tuyến Ax với đường tròn (O)

Có CAx = CBA . Vì BEC = BDC = 90° nên BEDC là tứ giác nội tiếp => CBA = ADE

=> CAx = ADE => Ax // DE, mà Ax ⊥ OA nên OA ⊥ DE

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADM, ta có AK.AM = AD^2

c) Chứng minh BAH = OAC

Có KDM = KAD (=90° – KDA). (1)

Vì ADHE là tứ giác nội tiếp nên KDM = EAH (2)

Từ (1) và (2) => OAC = BAH

Bài 184. [Yên Bái – 2016 – 2017]

Từ những miếng tôn phẳng hình chữ nhật có chiều dài 1,5 dm và chiều rộng 1,4 dm. Người ta tạo nên mặt xung quanh của những chiếc hộp hình trụ. Trong hai cách làm, hỏi cách nào thì được chiếc hộp có thể tích lớn hơn.

Hướng dẫn

Cách 1: Chu vi đáy hình trụ là 1,5 dm, chiều cao hình trụ là h_1 = 1,4 dm.

Hình trụ này có bán kính đáy $r_1 = \frac{1,5}{2\pi} = \frac{3}{4\pi}(dm)$, diện tích đáy

$S_1 = \pi r_1^2 = \pi.\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 = \frac{9}{16\pi}(dm^2)$

thể tích $V_1 = S_1 h_1 = \frac{9}{16\pi}.1,4 = \frac{63}{80\pi}(dm^3)$

Cách 2: Chu vi đáy hình trụ là 1,4 dm, chiều cao hình trụ là h_2 = 1,5 dm.

Hình trụ này có

$r_2 = \frac{1,4}{2\pi} = \frac{7}{10\pi}(dm); S_2 = \pi r_2^2 = \pi.\left(\frac{7}{10\pi}\right)^2 = \frac{49}{100\pi}(dm^2); V_2 = S_2 h_2 = \frac{49}{100\pi}.1,5 = \frac{147}{200\pi}(dm^3)$

Ta có $V_1 > V_2$ nên cách 1 sẽ cho hình trụ có thể tích lớn hơn.

Bài 185. [Bến Tre 2015 – 2016]

Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O; R), vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Gọi M là điểm bất kì trên cung AB (M ≠ A; M ≠ B). Tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn (O; R) cắt Ax, By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh tứ giác ACMO nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác COD vuông.

c) Chứng minh: AC. BD = R^2

d) Trong trường hợp AM = R. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây MB và cung MB của nửa đường tròn (O; R) theo R.

Hướng dẫn

a) Hình vẽ

Ax là tiếp tuyến tại A => Ax ⊥ AB => $\widehat{OAC} = 90^o$

CD là tiếp tuyến tại M => CD ⊥ OM=> $\widehat{OMC} = 90^o$

=> $\widehat{OAC} + \widehat{OMC} = 90^o + 90^o = 180^o$

Vậy: Tứ giác ACMO nội tiếp được đường tròn.

b) Nửa (O; R) có:

Hai tiếp tuyến CA, CM cắt nhau tại C => OC là phân giác của $\widehat{AOM}$ (1)

Hai tiếp tuyến DB, DM cắt nhau tại D => OD là phân giác của $\widehat{MOB}$ (2)

$\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^o$(kề bù)

Từ (1), (2) và (3)=> $\widehat{COD} = 90^o$ => Δ COD vuông tại O

c) ΔCOD vuông tại O có OM ⊥ CD

=> OM^2 = MC. MD (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà: OM = R; MC = AC; MD = BD (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Nên: OM^2 = MC. MD => R^2 = AC. BD Vậy AC. BD = R^2

d) Khi AM = R => Δ OAM đều => $\widehat{AOM} = 60^o$ => $\widehat{MOB} = 120^o$

=> sđ cung MB = 120^0 => $n^0 = 120^0$

Gọi Sq là diện tích hình quạt chắn cung nhỏ BC, ta có: Sq = $\dfrac{\pi R^2 n}{360}$

$S_q = \dfrac{\pi R^2.120}{360} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

Ta có: OB = OM = R và DB = DM (cmt) => OD là đường trung trực của MB

=> OD ⊥ MB tại H và HB =HM= $\frac{1}{2}BM$

OD là phân giác của $\widehat{MOB}$ => $\widehat{HOM} = \frac{1}{2}\widehat{MOB} = 60^o$

Δ HOM vuông tại H nên:

OH = OM.cos $\widehat{HOM}$ = R.cos 60°= $\frac{1}{2}R$

HM = OM.sin $\widehat{HOM}$ = R. sin60^O= $R\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇔BM=R$\sqrt{3}$

=> $S_{OBM} = \frac{1}{2}BM.OH = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}R$. R$\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi S là diện tích hình viên phân cần tìm, ta có: S = Sq - S_{OBM}

S= $\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Bài 186. [Bình Định 2014 – 2015]

Cho đường tròn tâm O đường kính AB, trên cùng một nửa đường tròn (O) lấy hai điểm G và E (theo thứ tự A, G, E, B) sao cho tia EG cắt tia BA tại D. Đường thẳng vuông góc với BD tại D cắt BE tại C, đường thẳng CA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh tứ giác DFBC nội tiếp.

b) Chứng minh BF = BG

c) Chứng minh: $\frac{DA}{BA} = \frac{DG.DE}{BE.BC}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác DFBC nội tiếp

Ta có:CDB=90° (giả thiết)

CFB=90^O(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>D và F cùng nhìn đoạn BC cố định dưới 1 góc 90^0, nên tứ giác DFBC nội tiếp.

b) Chứng minh BF = BG

Gọi P là giao điểm của CD và BF

Ta có: A là trực tâm của tam giác CPB

=> $PA \perp CB$

Mà $AE \perp CB$ (vì góc AEB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>P, A, E thẳng hang

D và E cùng nhìn đoạn PB cố định dưới 1 góc 90^0

=>Tứ giác PDEB nội tiếp.

=>DEP=DBP=$\frac{1}{2}$ sđ PD(vì EDPB nội tiếp chứng minh trên)

Mà DEP=GBA=$\frac{1}{2}$ sđ GA

=>DBP = GBA

Ta lại có: AGB = AFB = 90^0 (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

AB là cạnh chung

=>Δ AGB=Δ AFB (cạnh huyền – góc nhọn)

=>BG=BF

c) Chứng minh: $\frac{DA}{BA}=\frac{DG.DE}{BE.BC}$

Ta có ADC=90^0(GT)

CEA=90^o(C/M trên)

=>ADC+CEA=180°

=>DAEC nội tiếp

=>BE.BC=BA.BD(vì ΔBED đồng dạng ΔBAC)

=>DA.BE.BC=DA.BA.BD

=> $\frac{DA}{DB}=\frac{DA.DB}{BE.BC}$

Mà DA.DB=DG.DE(Vì ΔDGB đồng dạng ΔDAE)

Nên $\frac{DA}{BA}=\frac{DG.DE}{BE.BC}$

Bài 187. [Bình Định 2015 - 2016]

Cho tam giác ABC (AB <AC) có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R). Vẽ đường cao AH của tam giác ABC, đường kính AD của đường tròn. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C và B xuông đường thẳng AD. M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh các tứ giác ABHF và BMFO nội tiếp.

b) Chứng minh HE // BD.

c) Chứng minh: $S_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC)

Hướng dẫn

a) Chứng minh các tứ giác ABHF và BMFO nội tiếp.

- Dễ chứng minh AHB= BFA=90°=> H và F thuộc đường tròn đường kính AB (quỹ tích cung chứa góc)

Vậy tứ giác ABHF nội tiếp đường tròn đường kính AB - M là trung điểm của BC (gt), suy ra: OM ⊥ BC

khi đó: BFO=BMO=90°□nên M, F thuộc đường tròn đường kính OB(quỹ tích cung chứa góc)Vậy tứ giác BMOF nội tiếp đường tròn đường kính OB

b) Chứng minh HE // BD.

Dễ chứng minh tứ giác ACEH nội tiếp đường tròn đường kính AC, suy ra: CHE=CAE(=$\frac{1}{2}$sđ CE)

Lại có: CAE=CAD=CBD(=$\frac{1}{2}$sđ CD)

nên CHE=CBD và chúng ở vị trí so le trong suy ra: HE // BD

c) Chứng minh: $S_{ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC)

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}$BC.AH=$\frac{1}{2}$BC.AB.sinABC

Mặt khác: trong tam giác ABD có: ABD= 90°□(nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên AB=ADsinD=2Rsin ACB

Tương tự cũng có : AC=2Rsin ABC và BC=2Rsin BAC

Khi đó AB.AC.BC=8R^3.sin BAC.sin CBA.sin ACB (1)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}$BC.AB.sin ABC=$\frac{1}{2}$.2R.sinBAC.2R.sin ACB.sin CBA=2R^2 sinBAC. sin ACB.sin CBA(2)

Từ (1) và (2) => $\frac{S_{ABC}}{AB.BC.CA} = \frac{1}{4R}$

Vậy $S_{ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$

Bài 188. [Bình Dương – 2016 – 2017]

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F.

a) Chứng minh ABC= *ACB =BIC* và tứ giác DENC nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh hệ thức AM.AB = AN.AC và tứ giác BFIC là hình thang cân

c) Chứng minh: tứ giác BMED nội tiếp được trong một đường tròn.

Hướng dẫn

a) Vì ABIC là tứ giác nội tiếp nên *ABC =AIC; ACB =AIB =>ABC +ACB= AIB AIC= BIC*

Vì NE ⊥ AD, NC ⊥ CD nên *NED =NCD=90°=> NED+ NCD* =180°

Suy ra tứ giác DENC là tứ giác nội tiếp

b) + Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC có

AM. AB = AH^2 ; AN. AC = AH^2 ⇒ AM. AB = AN. AC

+ Có IAC=90^0 - AIC; BAF=90^0 –ABH; AIC= ABH =>IAC=BAF

Suy ra số đo hai cung IC và BF bằng nhau ⇒ IC = BF.

Mặt khác vì ABFI và ABIC nội tiếp nên BAF= BIF; IAC =IBC;BIF= IBC

Suy ra IF // BC ⇒ BCIF là hình thang có hai cạnh bên bằng nhau

Mà IF < BC nên BCIF là hình thang cân

c) Có ΔAEN đồng dạng ΔACD(g.g)

$$=> \frac{AE}{AC} = \frac{AN}{AD} => AE.AD = AN.AC = AM.AB$$

$$<=> \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AD}$$

Xét Δ AME và Δ ADB có

$$\begin{cases} \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AD} \\ Chung\ MAE \end{cases} => \text{tam giác AME đồng dạng với tam giác ADB(c.g.c)}$$

=>AME=ADB=>BME+ADB=180°

Suy ra BMED nội tiếp đường tròn.

Bài 189. [Bình Dương – 2015 – 2016]

Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh AC. Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N. Đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính MC tại D.

a) Chứng minh tứ giác BADC nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn đó.

b) Chứng minh DB là phân giác của góc ADN.

c) Chứng minh OM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính MC.

d) BA và CD kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) BAC=BDC=90° (gt)

Nên tứ giác BADC nội tiếp đường tròn tâm O là trung điểm của BC.

b) ADB= BDN(= ACB)

(hai góc nội tiếp cùng chắn một cung trong các đường tròn ngoại tiếp tứ giác BADC, NMDC) nên DB là phân giác góc AND.

c) OM ⊥ AC (OM là đường trung bình tamgiác ABC)

Nên suy ra MO là tiếp tuyến đường tròn đường kính MC.

d) MN ⊥ BC (góc MNC nội tiếp nửa đường tròn đường kính MC)

PM ⊥ BC (M là trực tâm tam giác PBC)

Suy ra P, M, N thẳng hàng.

Bài 190. [Bình Phước – 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC vuông tại A, có cạnh AB = 6cm, $\widehat{C} = 60^0$. Hãy tính các cạnh còn lại và đường cao, đường trung tuyến hạ từ A của tam giác ABC.

Hướng dẫn

Tam giác ABC vuông tại A nên :

+ B + C = 90^0 =>B = 30^0

+ AC = AB.tanB = 6.tan30^0 = $6.\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}(cm)$

$+BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}(cm)$

$+AB.AC = BH.\text{AH} \Rightarrow \text{AH} = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{6.2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3(cm)$

$+AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(cm)$

Bài 191. [Bình Phước – 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O;R), các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O;R) cắt nhau tại E, AE cắt (O;R) tại D (khác điểm A).

a) Chứng minh tứ giác OBEC nội tiếp đường tròn .

b) Từ E kẻ đường thẳng d song song với tiếp tuyến tại A của (O;R), d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh AB.AP = AD.AE

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh EP = EQ và $\widehat{PAE} = \widehat{MAC}$

d) Chứng minh AM.MD = $\frac{BC^2}{4}$

Hướng dẫn

a) (O) có :

- BE là tiếp tuyến tại B=>BE $\perp$ OB=>OBE=90° nhìn đoạn OE (1)

- CE là tiếp tuyến tại C=> CE $\perp$ OB=>OCE=90° nhìn đoạn OE (2)

Từ (1), (2) tứ giác OBEC nội tiếp đường tròn đường kính OE

b) (O) có:

- ADB = BAx (cùng chắn cung AB) (1)

- PQ // d APE = Bax (so le trong) (2)

Từ (1),(2) góc ADB = APE

Tam giác ABD và tam giác AEP có: ADB = APE (cmt) và EAP chung=>tam giác ABD đồng dạng với tam giác AEP (g.g)

=> $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AP}$ => $AB.AP = AD.AE$(DPCM)

c) (O) có:

Góc BAx = B2 (cùng chắn AB)

Góc B1 = B2 (đối đỉnh)

=>góc BAx=B1

Mà góc BAx = APE (cmt) =>góc B1 = APE=>tam giác BEP cân tại E =>EB=EP(1)

(O) có: CAy = C2 (cùng chắn AC); C1 = C2 (đối nhau) =>CAy = C1

PQ // d=>CAy=AQE (so le trong)

=>C1 = AQE=>tam giác CEQ cân tại E =>EQ=EC (2)

Hai tiếp tuyến EB và EC cắt nhau tại E=>EB=EC (3)

Từ (1)(2)(3)=>EP=EQ(đpcm)

d) Tam giác ABC và tam giác AQP có:

ACB = APQ (cùng bằng Bax) và PAQ chung=>Tam giác ABC với tam giác AQP đồng dạng (g.g)

$$=> \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{2.MC}{2.PE} = \frac{MC}{PE} => \frac{PE}{CM} = \frac{PA}{CA}$$

Tam giác AEP và tam giác AMC có:

$$\frac{PE}{CM} = \frac{PA}{CA} \text{(cmt)}$$

APE=ACM(cùng bằng Bax)

=>Tam giác AEP đồng dạng với tam giác AMC (c.g.c)=>PAE=MAC(đpcm)

d) Gọi N là giao điểm của tia AM và (O) ta có:

BAN = BCN (cùng chắn BN)

AMB = NMC (đối đỉnh) =>tam giác AMB đồng dạng CMN (g.g)

$$=> \frac{AM}{CM} = \frac{MB}{MN} => AM.MN = MB.MC = \frac{BC}{2}.\frac{BC}{2} = \frac{BC^2}{4} (*)$$

(O) có: Góc PAE=MAC(cmt)=>góc BAD=NAC

Góc BAD nội tiếp chắn cung BD

Góc NAC nội tiếp chắn cung CN

=>BD=CN

Tam giác EBC cân tại E góc EBM = ECM góc EBD + DBM = ECN + NCM

Mà EBD = ECN (chắn 2 cung bằng nhau) DBM = NCM

Tam giác BDM và tam giác CNM có:

MB=MC

DBM=NCM

BD=CN

=> Tam giác BDM= tam giác CNM

=>MD=MN(**)

Từ (*) và (**) => AM.MD = $\frac{BC^2}{4}$ (đpcm)

Bài 192. [Bình Thuận 2015 – 2016]

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, D là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn (D khác A và D khác B) . Các tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại C, BC cắt nửa đường tròn (O) tại điểm thứ hai l E. Kẻ DF vuông góc với AB tại F.

a) Chứng minh : Tam giác OACD nội tiếp.

b) Chứng minh:CD^2 = CE.CB

c) Chứng minh:Đường thẳng BC đi qua trung điểm của DF.

d) Gải sử OC = 2R , tính diện tích phần tam giác ACD nằm ngoại nửa đường tròn (O) theo R.

Hướng dẫn

a) Xét tam giác OACD có:

CAO=90(CA là tiếp tuyến)

CDO=90(CD là tiếp tuyến)

=>CAO+CDO=180

=>Tứ giác OACD nội tiếp

b) Xét tam giác CDE và tam giác CBD có:

DCE chung và CDE=CBD(=$\frac{1}{2}$ sđ cung DE)

=> Xét tam giác CDE đồng dạng với tam giác CBD (g.g)

$=> \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD} => CD^2 = CE.CB$

c) Tia BD cắt Ax tại A’ .

Gọi I l giao điểm của Bc v DF. Ta có ADB= 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>ADA=90°, suy ra ΔADA’ vuông tại D.

Lại có CD = CA (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau).

nên suy ra đ ợc CD = C A’, do đó CA = A’C (1).

Mặt khác ta có DF // AA’ (cùng vuông góc với AB)

nên theo định l Ta-lét thì $\frac{ID}{CA'} = \frac{IF}{CA}(= \frac{BI}{BC})(2)$

Từ (1) và (2) suy ra ID = IF Vậy BC đi qua trung điểm của DF.

d) Tính cosCOD=$\frac{OD}{OC} = \frac{1}{2} => COD = 60^o$

$=> AOD = 120^o$

$S_{quat} = \frac{\pi.R.120}{360} = \frac{\pi R}{3}(\text{dv dt})$

Tính CD =R$\sqrt{3}$

$S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2}CD.DO = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2(dvdt)$

$S_{OACD} = 2S_{\Delta OCD} = \sqrt{3}R^2(dvdt)$

Diện tích phần tam giác ACD nằm ngoài nửa đường tròn (O)

$S_{OACD} - S_{quat} = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R}{3}(\text{dv dt})$

Bài 193. [Cà Mau 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao BF, CK của tam giác ABC lần lượt cắt (O) tại D, E.

a) Chứng minh: Tứ giác BCFK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: DE // FK

c) Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng với B, C qua O. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AFK có bán kính không đổi khi A thay đổi trên cung nhỏ PQ (không trùng với các điểm P, Q)

Hướng dẫn

a) Chứng minh BCFK nội tiếp

$\widehat{BKC} = \widehat{BFC} = 90^o$ (CK ⊥ AB và BF ⊥ AC) => BCFK nội tiếp

b) Chứng minh DE // FK

$\widehat{BDE} = \widehat{BCE}$ (cùng chắn cung EB của (O))

$\widehat{BCE} = \widehat{BFK}$ (cùng chắn cung BK của (BCFK))

=> $\widehat{BDE} = \widehat{BFK}$ => $DE//FK$

c) Bán kính đường tròn (AFK) không đổi khi A di động trên cung PQ

Kẻ đường kính AN và lấy điểm M là trung điểm của BC.

$\widehat{ACN} = \widehat{ABN} = 90^o$ =>NC ⊥ AC và NB ⊥ AB mà BH ⊥ AC và CH ⊥ AB

=>NC // BH và NB // CH => BHCN hình bình hành => M là trung điểm HN

Vì OA = ON => OM là đường trung bình Δ AHN => OM = $\frac{AH}{2}$ và OM // AH

Gọi I là trung điểm AH. Ta có $\widehat{AKH} = \widehat{AFH} = 90^o$

=>AKHF nội tiếp đường tròn đường kính AH

=>I là tâm và AI là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tứ giác AKHF hay của ΔAFK.

Vì BC, (O) cố định => M cố định => OM cố định => $AI = \frac{AH}{2} = OM$ cố định

=> đường tròn ngoại tiếp của Δ AFK có bán kính AI = OM cố định.

Vậy khi A di động trên cung nhỏ PQ (không trùng với P, Q) thì đường tròn ngoại tiếp Δ AFK có bán kính không đổi.

Bài 194. [Cần Thơ 2016 – 2017]

Cho Δ ABC có ba góc nhọn. AB < AC và nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi H là chân đường cao từ đỉnh A của Δ ABC và M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O;R) cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh tứ gáic ANMO nội tiếp

b) Gọi K là giao điểm thứ hai cảu đường thẳng AO với đường tròn (O;R). Chứng minh AB.AC = AK.AH

c) Dựng đường phân giác AD của Δ ABC (D thuộc cạnh BC). Chứng minh Δ NAD cân

d) Giả sử BAC=60°, OAH =30°. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH với đường tròn (O;R). Tính theo R diện tích của tứ giác BFKC.

Hướng dẫn

a) Vì AN là tiếp tuyến của (O) nên OAN = 90°

Vì M là trung điểm dây BC của (O) nên OM ⊥ BC ⇒ OMN=90°=>OAN+OMN = 180°

Suy ra ANMO là tứ giác nội tiếp

b) Vì AK là đường kính của (O), C ∈ (O) nên ACK =90°

=>ACK=OHB=90°

Mặt khác vì ABKC là tứ giác nội tiếp nên

AKC=ABH=>tam giác AKC đồng dạng với tam giác ABH (g.g)

=> $\frac{AK}{AB}=\frac{AC}{AH}$ => $AK.AH = AB.AC$

c) Ta có NAB=ACB=>NAD=NAB+BAD=ACB+BAD

Theo công thức góc ngoài ta có NDA=DAC+ACB

Vì AD là phân giác của góc A nên BAD=DAC=>NAD=NDA

Suy ra Δ AND cân tại N

d) Có AF ⊥ FK mà AF ⊥ BC ⇒ BC // FK ⇒ BCKF là hình thang

Gọi P là trung điểm FK ⇒ OP ⊥ FK ⇒ OP ⊥ BC ⇒ O, M, P thẳng hàng

Gọi E là điểm đối xứng với C qua O ⇒ Δ EBC vuông tại B và BEC=BAC=60°

=>EB=EC.cos60=R

BC=EC.sin60=R$\sqrt{3}$ => $OM=\frac{EB}{2}=\frac{R}{2}$

Có Δ AFK vuông tại F và

FAK=30=>FK=AK.sin30=R

AF=AK.cos30= R$\sqrt{3}$ => $OP=\frac{AF}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

MP=OP-OM=$\frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$

Diện tích hình thang BCKF là

$$S_{BCKF}=\frac{1}{2}MP.(BC+KF)=\frac{1}{2}.\frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}(R\sqrt{3}+R)=R^2.\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{R^2}{2}(dvdt)$$

Bài 195. [Đà Nẵng 2016 – 2017]

Cho Δ ABC nhọn có AB < AC và nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AD. Gọi AH là đường cao của Δ ABC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại E

a) Chứng minh ABHE là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh hai đường thẳng HE và AC vuông góc với nhau

c) Gọi F là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng AD và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ HEF.

Hướng dẫn

a) Vì AH ⊥ BC, BE ⊥ AD nên góc AHB = góc AEB = 90°

Suy ra tứ giác ABHE là tứ giác nội tiếp

b) Vì góc ACD là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên góc ACD = 90° ⇒ AC ⊥ CD (1)

Vì ABHE là tứ giác nội tiếp nên góc ABH = góc HED (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện)

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên góc ABC = góc ADC (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC), hay góc ABH = góc EDC

Suy ra góc HED = góc EDC ⇒ EH // DC(2)

Từ (1) và (2) ⇒ HE ⊥ AC

c) Vẽ BK ⊥ AC tại K

Ta có góc AKB = góc AEB = 90° nên AKEB là tứ giác nội tiếp

Suy ra góc BKE = góc BAE (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BE) = góc BAD(3)

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp nên góc BAD = góc BCD (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BD)(4)

Vì AK // CD (cùng ⊥ AC) nên góc BCD = góc KBM (đồng vị)(5)

Vì M là trung điểm cạnh huyền BC của tam giác vuông BKC nên MK = MB = MC ⇒ Δ MKB cân tại M ⇒ góc KBM = góc BKM (6)

Từ (3), (4), (5), (6) có góc BKE = góc BKM ⇒ K, E, M thẳng hang

Mà HE // BK (cùng ⊥ AC) nên $\frac{ME}{MH} = \frac{MK}{MB} = 1$=>ME = MH

Chứng minh tương tự ta có MF = MH

Suy ra ME = MF = MH ⇒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ HEF (đpcm).

Bài 196. [Đà Nẵng 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc BC). Vẽ đường tròn (C) có tâm C, bán kính CA. Đường thẳng AH cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là D.

1. Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (C).

2. Trên cung nhỏ AD của đường tròn (C) lấy điểm E sao cho HE song song với AB. Đường thẳng BE cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là F. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng:

a) BA^2 = BE.BF và BHE=BFC

b) Ba đường thẳng AF, ED và HK song song với nhau từng đôi một.

Hướng dẫn

1. Ta có BAC= 90^0 nên BA là tiếp tuyến với (C).

BC vuông góc với AD nên

H là trung điểm AD. Suy ra BDC=BAC=90°

nên BD cũng là tiếp tuyến với (C)

2.

a) Trong tam giác vuông ABC ta có AB^2 =BH.BC(1)

Xét hai tam giác đồng dạng ABE và FBA

vì có góc B chung và BAE=BFA(cùng chắn cung AE)

suy ra $\frac{AB}{FB} = \frac{BE}{BA} => AB^2 = BE.FB(2)$

Từ (1) và (2) ta có BH.BC = BE.FB

Từ BE.BF= BH.BC $=> \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF}$

2 tam giác BEH và BCF đồng dạng vì có góc B chung và $\frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF} \Rightarrow$BHE=BFC

b) do kết quả trên ta có BFA= BAE

HAC=EHB=BFC , do AB //EH. suy ra DAF=DAC – FAC=DFC – CFA=BFA

⇒ DAF=BAE , 2 góc này chắn các cung AE,DF nên hai cung này bằng nhau

Gọi giao điểm của AF và EH là N. Ta có 2 tam giác HED và HNA bằng nhau

(vì góc H đối đỉnh, HD = HA, EDH=HDN (do AD // AF)

Suy ra HE = HN, nên H là trung điểm của EN. Suy ra HK là đường trung bình của tam giác EAF.

Vậy HK // AF. Vậy ED // HK // AF.

Bài 197. [Đà Nẵng 2015 – 2016]

Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm)

a) Chứng minh rằng ABOC là tứ giác nội tiếp.

b) Cho bán kính đường tròn (O) bằng 3cm, độ dài đoạn thẳng OA bằng 5cm. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

c) Gọi (K) là đường tròn qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại C. Đường tròn (K) và đường tròn (O) cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Chứng minh rằng đường thẳng BM đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Hướng dẫn

a) - Có AB ⊥ OB (t/c tiếp tuyến) ⇒ ABO = 90^0- Có AC ⊥ OC (t/c tiếp tuyến) ⇒ ACO = 90^0

- Xét tứ giác ABOC có ABO + ACO = 90^0 + 90^0 = 180^0 nên nội tiếp được trong đường tròn.

b) - AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AO là đường trung trực của BC.

Gọi H là giao điểm của AO và BC, ta có BC = 2BH.

- ΔABO vuông tại B có BH là đường cao nên OB^2 = OH.AO

$$=> OH = \frac{OB^2}{AO} = \frac{9}{5}cm$$

- ΔOBH vuông tại H ⇒ $BH^2 = OB^2 - OH^2$ ⇒ BH = $\frac{12}{5}cm$

Vậy BC = 2BH = $\frac{24}{5}cm$

c)- Gọi E là giao điểm của BM và AC.

- ΔEMC và ΔECB có MEC = CEB và MCE = EBC (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến CA cùng chắn cung MC của đường tròn (O))

⇒ ΔEMC ∽ΔECB (g-g) ⇒ EC^2 = EM.EB (*)

- ΔEMA và ΔEAB có $\widehat{MEA} = \widehat{AEB}$ (a) và :

+ Có $\widehat{MAE} = \widehat{MCB}$ (3) (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến CB cùng chắn cung MC của đường tròn (K))

+ Có $\widehat{MCB} = \widehat{ABE}$ (4) (Góc nt và góc tạo bởi tia tiếp tuyến BA cùng chắn cung MB của đường tròn (O))

+ Từ (3) và (4) ⇒ $\widehat{MAE} = \widehat{ABE}$(b)

- Từ (a) và (b) ⇒ ΔEMA ∽ΔEAB (g-g) ⇒ EA^2 = EM.EB (**)

- Từ (*) và (**) ⇒ $EC^2 = EA^2$ ⇒ EC = EA. Vậy BM đi qua trung điểm E của AC.

Bài 198. [Đak Lak 2013 – 2014]

Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. M là một điểm trên đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại P, Q

a) Chứng minh rằng: tứ giác APMO nội tiếp

b) Chứng minh rằng : AP + BQ = PQ

c) Chứng minh rằng : $AP.BQ=AO^2$

d) Khi điểm M di động trên đường tròn (O), tìm các vị trí của điểm M sao cho diện tích tứ giác APQB nhỏ nhất

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác APMQ, ta có:

$\widehat{OAP} = \widehat{OMP} = 90^o$ (vì PA, PM là tiếp tuyến của (O))

Vậy tứ giác APMO nội tiếp.

b) Ta có AP = MP (AP, MP là tiếp tuyến của (O))

BQ = MQ (BQ, MQ là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow$ AP+BQ=MP+MQ=PQ

c) Ta có OP là phân giác góc *AOM* (AP, MP là tiếp tuyến của (O))

OQ là phân giác góc *BOM* (BQ, MQ là tiếp tuyến của (O))

Mà góc *AOM* +góc *BOM* =180^0 (hai góc kề bù) $\Rightarrow = POQ = 90^o$

Xét ΔPOQ, ta có: $POQ = 90^0$ (cmt), $OM\ PQ \perp$ (PQ là tiếp tuyến của (O) tại M)

$\Rightarrow$ MP.MQ=OM^2 (hệ thức lượng)

Lại có MP=AP;MQ=BQ (cmt), OM=*AO* (bán kính)

Do đó AP.BQ=AO^2

d) Tứ giác APQB có: AP//BQ(AP$\perp$AB,BQ$\perp$AB), nên tứ giác APQB là hình thang vuông

$=> S_{APQB} = \dfrac{(AP+BQ)AB}{2} = \dfrac{PQ.AB}{2}$

Mà AB không đổi nên S_{APQB} đạt GTNN

$\Leftrightarrow$PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$PQ=AB$\Leftrightarrow$PQ//AB$\Leftrightarrow$OM vuông AB

$\Leftrightarrow$M là điểm chính giữa cung AB.Tức là M trùng M_1 hoặc M trùng M_2 (hình vẽ) thì S_{APQB} đạt GTNN là $\dfrac{AB^2}{2}$

Bài 199. [Đồng Nai 2013 – 2014]

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), bán kính R , BC=a, với a và R là các số thực dương. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Các góc CAB,ABC,BCA đều là góc nhọn.

a) Tính OI theo a và R.

b) Lấy điểm D thuộc đoạn AI , với D khác A, D khác I. Vẽ đường thẳng qua D song song với BC cắt cạnh AB tại điểm E. Gọi F là giao điểm của tia CD và đường tròn (O), với F khác C. Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nột tiếp đường tròn.

c) Gọi J là giao điểm của tia AI và đường tròn (O) , với J khác A. Chứng minh rằng AB.BJ=AC.CJ

Hướng dẫn

a) Tính OI theo a và R.

Ta có: I là trung điểm của BC (gt)

Nên IB=IC=$\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$ và OI $\perp$ BC(lên hệ đường kính và dây)

Xét tam giác OIC vuông tại I

Áp dụng định lý Pytago tính được $OI=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$

b) Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nột tiếp đường tròn.

Ta có: $\widehat{ABC}=\widehat{AED}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{ABC}=\widehat{AFC}$ (cùng nội tiếp chắn cung AC)

=> $\widehat{AED}=\widehat{AFC}$ hay $\widehat{AED}=\widehat{AFD}$

Tứ giác ADEF có $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$ (cmt)

Nên tứ giác ADEF nội tiếp đường tròn

(E, F cùng nhìn AD dưới 2 góc bằng nhau)

c) Chứng minh rằng AB.BJ=AC.CJ

Chứng minh: tam giác AIC đồng dạng với tam giác BIJ(g-g)

=> $\frac{AI}{BI} = \frac{AC}{BJ}$ (1)

Chứng minh:tam giác AIB đồng dạng với tam giác CIJ(g-g)

=> $\frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CJ}$ (2)

Mà BI=CI(I là trung điểm BC)(3)

Từ (1);(2);(3) => $\frac{AB}{CJ} = \frac{AC}{BJ}$ => $AB.BJ = AC.CJ$

Bài 200. [Hà Nam 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AB > AC. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là D. Kẻ DM vuông góc với AB tại M.

a) Chứng minh tứ giác BDHM nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh DA là tia phân giác của $\widehat{MDC}$

c) Gọi N là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng AC, chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

d) Chứng minh $AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2 = 8R^2$

Hướng dẫn

a) AD ⊥ BC ; DM ⊥ AB (giả thiết)

=> $\widehat{DHB} = \widehat{DMB} = 90^0$ .Hay 4 điểm B, D, H, M nằm trên đường tròn đường kính

Nên tứ giác BDHM nội tiếp đường tròn đường kính BD

b) Tứ giác BDHM nên $\widehat{MDH} = \widehat{MBH}$

$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

$\widehat{MDA} = \widehat{ADC}$ hay DA là tia phân giác của $\widehat{MDC}$

c) Chứng minh tương tự câu a ta có tứ giác DHCN nội tiếp => $\widehat{DHN} = \widehat{DCN}$

Mà $\widehat{DCN} = \widehat{ABD}$ (vì ABDC là tứ giác nội tiếp)

Tứ giác BDHM nội tiếp

=> $\widehat{ABD} + \widehat{DHM} = 180^o$

=> $\widehat{DHN} + \widehat{DHM} = 180^o$

Hay ba điểm M, H, N thẳng hàng.

d) Kẻ đường kính AE

Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ => $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ => *cung* BE=cung CD=>BE=CD

Tương tự EC = BD

Áp dụng định lí Pi ta go ta có:

$AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2 = AB^2 + BE^2 + AC^2 + CE^2$

$= AE^2 + AE^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2$

Bài 201. [Hà Nội 2016 – 2017]

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$

c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh HK // DC

d) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác BECF là hình chữ nhật.

Hướng dẫn

a) Vì AB là tiếp tuyến của (O) nên AB ⊥ BO ⇒ góc ABO = 90°

Vì H là trung điểm của dây DE của (O) nên OH ⊥ DE ⇒ góc AHO = 90°

Suy ra góc ABO + góc AHO = 180° ⇒ AHOB là tứ giác nội tiếp

Suy ra bốn điểm A, H, O, B nằm trên cùng một đường tròn.

b) Có góc ABD = góc AEB (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Xét Δ ABD và Δ AEB có chung góc BAE, góc ABD = góc AEB nên

Tam giác ABD đồng dạng với tam giác AEB(g-g)=> $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EB}$

c) Vì ABOH là tứ giác nội tiếp nên góc OAH = góc OBH

Vì EK // AO nên góc OAH = góc HEK

Suy ra góc OBH = góc HEK ⇒ BHKE là tứ giác nội tiếp ⇒ góc KHE = góc KBE

Vì BDCE là tứ giác nội tiếp nên góc KBE = góc CDE

Suy ra góc KHE = góc CDE ⇒ KH // CD

d) Gọi F' là giao điểm của BP và đường tròn (O).

Gọi AQ là tiếp tuyến thứ 2 của (O)

Vì BDQC là tứ giác nội tiếp nên góc QDC = góc QBC(1)

Vì ABOQ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO nên góc QBC = góc QAO (2)

Từ (1), (2) ⇒ góc QDC = góc OAQ ⇒ APDQ là tứ giác nội tiếp

⇒ góc PDA = góc PQA (3)

Có góc PDA = góc EDC = góc EBC (4)

Ta có Δ ABP = Δ AQP (c.g.c) ⇒ góc PQA = góc PBA (5)

Từ (3), (4), (5) ⇒ góc PBA = góc EBC

Suy ra góc PBE = góc ABC = 90° ⇒ góc F'BE = 90° ⇒ F'E là đường kính của (O)

⇒ F' ∈ OE ⇒ F' ≡ F

Vì FBEC là tứ giác nội tiếp nên góc FCE = 180° – góc FBE = 90°

Tứ giác FBEC có góc FCE = góc FBE = góc BEC = 90° nên là hình chữ nhật.

Bài 202. [Hà Nội 2014 – 2015]

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R) (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

a) Chứng minh tứ giác AMBN là hình chữ nhật.

b) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF.

d) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn

c) OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

OF // AP nên OF là đường trung bình của tam giác ABP

Suy ra F là trung điểm của BP.

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP.

Xét 2 tam giác NOF = OFB (c-c-c) nên ONF=90°

Tương tự ta có OME=90° nên ME // NF vì cùng vuông góc với MN

d) $2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN = 2R(PB + BQ) - AM.AN$

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra $\frac{AB}{QB} = \frac{BP}{BA} => AB^2 = BP.BQ$

Nên áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có PB+ BQ$\geq 2\sqrt{PB.BQ} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có:

$$AM.AN \leq \frac{AM^2 + AN^2}{2} = \frac{MN^2}{2} = 2R^2$$

Do đó, $2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2 => S_{MNPQ} \geq 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi AM =AN và PQ = BP hay MN vuông góc AB.

Bài 203. [Hà Nội 2015 – 2016]

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh tứ giác ACMD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh CA.CB=CH.CD.

c) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

d) Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Tứ giác ACMD có ACD=AMD= 90° Nên tứ giác ACMD nội tiếp

b) Xét 2 tam giác vuông : ΔACH và ΔDCB đồng dạng

(Do có CDB =MAB (góc có cạnh thẳng góc))

Nên ta có: $\frac{CA}{CH} = \frac{CD}{CB} => CA.CB = CH.CD$

c) Do H là trực tâm của ΔABD

Vì có 2 chiều cao DC và AM giao nhau tại H , nên AD ⊥ BN

Hơn nữa ANB = 90^0 vì chắn nửa đường tròn đường kính AB.

Nên A, N, D thẳng hàng.

Gọi tiếp tuyến tại N cắt CD tại J ta chứng minh JND=NDJ.

Ta có JND=NBA cùng chắn cung AN .

Ta có NDJ =NBA góc có cạnh thẳng góc

$\Rightarrow$ JND=NDJ.Vậy trong tam giác vuông ΔDNH J là trung điểm của HD.

d) Gọi I là giao điểm của MN với AB. CK cắt đường tròn tâm O tại điểm Q.

Khi đó JM, JN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.

Gọi F là giao điểm của MN và JO. Ta có KFOQ là tứ giác nội tiếp.

=>FI là phân giác *KFQ*.

Ta có: $KFQ = KOQ \Rightarrow KFI = FOI$

=>tứ giác KFOI nội tiếp

$\Rightarrow IKO = 90^o$ =>IK là tiếp tuyến đường tròn tâm O

Vậy MN đi qua điểm cố định I (với IK là tiếp tuyến của đường tròn tâm O)

Bài 204. [Hà Tĩnh 2013 – 2014]

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với các đường tròn (O) (M, N ∈ (O)). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

a) Chứng minh tứ giác ANHM nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh AN^2 = AB.AC.

c) Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh EH // NC.

Hướng dẫn

a) Vì AN, AM là tiếp tuyến của (O) nên ANO=AMO =90°. Gọi J là trung điểm AO.

Vì H là trung điểm dây BC nên OH ⊥ BC ⇒ $AHO = 90°$

Suy ra A, O, M, N, H thuộc đường tròn tâm J đường kính AO

Suy ra AMHN là tứ giác nội tiếp đường tròn (J)

b) Có ANB= ACN (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp)

=>Tam giác ANB đồng dạng với tam giác CAN(g-g)

$$=> \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN} => AN^2 = AB.AC$$

c) Gọi I là giao điểm của MN và AC.

Ta có MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (J) và (O), I ∈ MN nên phương tích của I đối với (J) và (O) bằng nhau ⇒ $IA.IH = IB.IC => \frac{IB}{IA} = \frac{IH}{IC}$

Vì BE // AN nên $\frac{IB}{IA} = \frac{IE}{IN} => \frac{IE}{IN} = \frac{IH}{IC} => EH // NC$

Bài 205. [Hà Tĩnh 2015 – 2016]

Cho tam giác nhọn ABC, đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi H là giao điểm của BN và CM.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Gọi K là giao điểm của đường thẳng BC với đường thẳng AH. Chứng minh ΔBHK đồng dạng ΔACK.

c) Chứng minh: $KM + KN \le BC$. Dấu " =" xảy ra khi nào?

Hướng dẫn

a) Theo giả thiết ta có BMC=BNC=90° (Do cùng chắn một nữa đường tròn)

$=> AMH = ANH = 90^o$

⇒Tứ giác AMHN nội tiếpđường tròn.

b) Vì BN⊥ AC, CM ⊥AB,⇒H là trực tâm ΔABC.

=>AK⊥BC=>AKB=ANB=90°=>Tứ giác ABKN nội tiếp đường tròn.

=>KAC=NBC(cùng chắn cung KN)

ΔBHK và ΔACK có:

HBK=KAC,HKB=AKC=90°

=>ΔBHK đồng dạng ΔACK (g-g)

c) Từ M kẻ đường vuông góc với BC cắt đường tròn tại =>BC là trung trung trực của MP (tính chất đối xứng của đường tròn)=>DK=KI

Ta có các tứ giác ABKN, BMHK nội tiếp=>ABN=AKN=HKM

=>MKB=NKC(cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Mặt khác BC là trung trực của MP nên MKB=BKP=>BKP=NKC

=>3 điểm P, K, N thẳng hàng suy ra KM + KN = KP+ KN = PN ≤ BC (do PN là dây còn BC là đường kính).

Dấu "=" xảy ra khi K trùng O, khi đó ΔABC cân tại A

Bài 206. [Hà Nội 2013 – 2014]

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (AB < AC, d không đi qua tâm O).

a) Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.

b) Chứng minh AN^2 = AB.AC. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4 cm, AN = 6 cm.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh MT // AC

d) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác AMON có hai góc đối

ANO=90°

AMO=90^0 nên là tứ giác nội tiếp

b) Hai tam giác ABM và AMC đồng dạng nên ta có AB.AC=AM^2=AN^2=6^2=36

$=> AC = \frac{6^2}{AB} = \frac{6^2}{4} = 9(cm)$

$=> BC = AC - AB = 9 - 4 = 5(cm)$

c) $MTN = \frac{1}{2}MON = AON$ (cùng chắn cung MN trong đường tròn (O)), và AIN=AON))

(do 3 điểm N, I, M cùng nằm trên đường tròn đường kính AO và cùng chắn cung 90°)

Vậy AIN=MTI=TIC nên MT//AC do có 2 góc so le bằng nhau.

d) Xét ΔAKO có AI vuông góc với KO.

Hạ OQ vuông góc với AK. Gọi H là giao điểm của OQ và AI thì H là trực tâm của ΔAKO , nên KMH vuông góc với AO. Vì MHN vuông góc với AO nên đường thẳng KMHN vuông góc với AO, nên KM vuông góc với AO. Vậy K nằm trên đường thẳng cố định MN khi BC di chuyển.

Cách giai khác: Ta có $KB^2 = KC^2 = KI.KO$. Nên K nằm trên trục đẳng phương của 2 đường tròn tâm O và đường tròn đường kính AO. Vậy K nằm trên đường thẳng MN là trục đẳng phương của 2 đường tròn trên.

Bài 207. [Hà Tĩnh 2016 – 2017 đề 2]

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tia Ax vuông góc với AB. Từ điểm M trên tại Ax kẻ tiếp tuyến MP với nửa đường tròn (P là tiếp điểm khác A). Đoạn AP cắt OM tại K, MB cắt nửa đường tròn tại Q (Q khác B).

a) Chứng minh AMPO, AMQK là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh hai tam giác MQO và MKB đồng dạng.

c) Gọi H là hình chiếu của P trên AB, I là giao điểm của MB và PH. Chứng minh: KI vuông góc với AM.

Hướng dẫn

a) Ta có Ax và MP là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn nên $\widehat{MAO} = \widehat{MPO} = 90^o$ do đó tứ giác AMPO nội tiếp.

Ta có:

$$\begin{cases} MA = MP(Tinh \text{ chat 2 tiep tuyen cat nhau}) \\ \text{OA=OP(ban kinh)} \\ \text{O} \neq \text{M} \end{cases}$$

=>OM là trung trực của đoạn AP

=> $\widehat{AKM} = 90^o (1)$

Lại có: $\widehat{APB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\widehat{MQA} = 90^o (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKM} = \widehat{MQA} = 90^o$ cùng nhìn AM nên tứ giác AMQK nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{ABQ} = \widehat{MAQ}$ (cùng chắn cung AQ của nửa đường tròn)

Mà $\widehat{MAQ} = \widehat{MKQ}$ (do tứ giác MQKA nội tiếp – câu a))

=> $\widehat{ABQ} = \widehat{MKQ}$ =>tứ giác QKOB nội tiếp=> $\widehat{KOQ} = \widehat{QBK}$ (cùng chắn cung KQ)

Xét hai tam giác MQO và MKB có $\widehat{BMK}$ chung; $\widehat{KOQ} = \widehat{QBK}$ (CM trên) nên hai tam giác MQO và MKB đồng dạng.

c) ***Cách 1:***

BP cắt tia Ax tại C, ta có MO song song BC (vì cùng vuông góc với AP) mà AO = OB nên AM=MC

Lại có PH song song với AC nên theo định lý Ta lét ta có: $\frac{IP}{MC}=\frac{IB}{BM}=\frac{IH}{AM}$ => $IP=IH$

Từ đó dễ thấy KI là đường trung bình của tam giác APH, do đó KI song song với AB => KI ⊥AM

Cách 2:

Ta có $\widehat{IQK}$ phụ với $\widehat{KQA}$; $\widehat{IPK}$ phụ với $\widehat{PAH}$;mà $\widehat{PAH}=\widehat{AMK}$ (cùng phụ với $\widehat{MAK}$)

Nhưng $\widehat{AMK}=\widehat{AQK}$ (do tứ giác MQKA nội tiếp-câu b). Do đó $\widehat{KQI}=\widehat{IPK}$

=>tứ giác KQPI nội tiếp => $\widehat{QPK}=\widehat{QIK}$ (cùng chắn cung KQ) mà $\widehat{QPK}=\widehat{QBA}$ => $\widehat{QBA}=\widehat{QIK}$

=>KI song song với AB (có cặp góc đồng vị bằng nhau) => KI ⊥ AM.

Bài 208. [Hải Dương 2016 – 2017]

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố dịnh thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh AD. AE = AC.AB

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp Δ CDN

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ AEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB

Hướng dẫn

a) Có ADB= ANB = 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>Tam giác ADB đồng dạng với tam giác ACE(g-g)

$=> \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} => AD.AE = AC.AB$

b) + Có AN ⊥ EB, EC ⊥ AB , EC giao AN tại F nên F là trực tâm của tam giác AEB

⇒ BF ⊥ EA

Mà BD ⊥ EA ⇒ B, D, F thẳng hang

+ Tứ giác ADFC có hai góc đối bằng 90° nên là tứ giác nội tiếp, suy ra DCF=DAF

Tương tự ta có: NCF=NBF

Mà DAF=NBF (cùng phụ với góc AEB) =>DCF=NCF

Suy ra CF là phân giác của góc DCN

Tương tự ta cũng có DF là phân giác của góc NDC

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DCN

c) Gọi J là giao của (I) với đoạn AB.

Có FAC=CEB(=90°-ABE)=> tam giác FAC đồng dạng với tam giác BEC(g-g)

$=> \frac{FC}{BC} = \frac{AC}{EC} => CF.CE = BC.AC$

Vì AEFJ là tứ giác nội tiếp nên FJC=FEA(=180°-AJF)

=>Tam giác CFJ đồng dạng với tam giác CAE(g-g)=> $\frac{CF}{CA}=\frac{CJ}{CE}$ => $CF.CE=CA.CJ$

Suy ra BC.AC = CA.CJ ⇒ BC = CJ ⇒ C là trung điểm BJ (vì J ≠ B)

Suy ra J là điểm cố định

Có IA = IJ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ, là đường cố định.

Bài 209. [Hải Dương 2015 – 2016]

Cho đường tròn (*O*) đường kính *AB* cố định và đường kính *CD* thay đổi không trùng với *AB*. Tiếp tuyến tại *A* của đường tròn (*O*) cắt các đường thẳng *BC* và *BD* lần lượt tại *E* và *F*. Gọi *P* và *Q* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AE* và *AF*.

a) Chứng minh *ACBD* là hình chữ nhật.

b) Gọi *H* là trực tâm của tam giác *BPQ*. Chứng minh *H* là trung điểm của *OA*.

c) Xác định vị trí của đường kính *CD* để tam giác *BPQ* có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ACBD là hình chữ nhật

Hình vẽ ý 1 Hình vẽ ý 2 và 3

ACB=ADB=90 (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

CAD=CBD=90(Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra Chứng minh ACBD là hình chữ nhật

b) Chứng minh *H* là trung điểm của *OA*

Tam giác BEF vuông tại B có đường cao BA nên AB^2 = AE. AF

=> $\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AF}$ => $\frac{AE}{2OA}=\frac{AB}{2AQ}$ => $\frac{AE}{OA}=\frac{AB}{AQ}$

EAO=BAQ=90=> tam giác AEO đồng dạng với tam giác ABQ

=>AEO=ABQ. Mặt khác HPF=ABQ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên AEO=HPF. Hai góc này ở vị trí đồng vị lên PH//OE

P là trung điểm của EA $\Rightarrow$ H là trung điểm của OA

c) Xác định vị trí của *CD* để tam giác *BPQ* có diện tích nhỏ nhất

Ta có: $S_{\Delta BPQ} = \dfrac{AB.PQ}{2} = R.PQ = R(AP + AQ) = \dfrac{R}{2}(\text{AE} + AF)$

$\geq \dfrac{R}{2}.2\sqrt{AE.\text{A F}}$

$= R.\sqrt{AB^2} = R.AB = 2R^2$

$S_{\Delta BPQ} = 2R^2 <=> AE = AF$

⇔tam giác BEF vuông cân tại B⇔ tam giác BCD vuông cân tại B=> CD vuông AB

Vậy $S_{\Delta BPQ}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2R^2$ khi CD vuông AB

Bài 210. [Hải Phòng 2013 – 2014]

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D ∈ BC, E ∈ AC, F ∈ AB)

a) Chứng minh các tứ giác BDHF, BFEC nội tiếp.

b) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (F nằm giữa M và E). Chứng minh $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$.

c) Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD.

Hướng dẫn

a**) Chứng minh các tứ giác BDHF, BFEC nội tiếp.**

+) Xét tứ giác BDHF có:

BFH=90° (CF là đường cao của ΔABC)

HDB=90° (AD là đường cao của ΔABC)

=>BFH+HDB=180°

Mà BFH và HDB là 2 góc đối nhau=>tứ giác BDHF nội tiếp

Ta có:

BFC=90° (CF là đường cao của ΔABC)

BEC=90° (BE là đường cao của ΔABC)

Suy ra bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC

Hay tứ giác BFEC nội tiếp.

b) Chứng minh $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$.

Vì tứ giác BFEC nội tiếp=>AFN=ACB(cùng bù với góc BFE)

Mà CAN=$\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{MB}$ +sđ $\overset{\frown}{AM}$)(tính chất góc nội tiếp trong (O))

AFN=$\frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AN}$ + sđ $\overset{\frown}{MB}$) (tính chất góc có đỉnh bên trong đường (O))

=> $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

c) Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD

Xét ΔAMF và ΔABM có:

MAB chung

AMF=ABM (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$ trong (O))

Do đó ΔAMF ∽ ΔABM (g.g)

$=> \frac{AF}{AM} = \frac{AM}{AB} => AM^2 = AF.AB$ (1)

Xét ΔAFH và ΔADB có:

BAD chung

AFH=ADB=90° (CF và AD là các đường cao của ΔABC)

Do đó ΔAFH ∽ ΔADB (g.g)

$=> \frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AB} => AM.AD = AF.AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM^2 = AH.AD => \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$

Xét ΔAHM và ΔAMD có:

MAD chung

$\frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$ (CM trên)

Do đó ΔAHM ∽ ΔAMD (c.g.c)

=>AMH=ADM(3)

Vẽ đường thẳng xy là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMHD tại M.

Ta có: $\widehat{xMH} = \widehat{ADM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{xMH} = \widehat{AMH}$

Hay MA trùng với tia Mx

Suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMHD.

Bài 211. [Hải Phòng 2016 – 2017]

Cho Δ ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ AH ⊥ BC tại H. Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác AHCK nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh góc AHK = góc ABC và AH^2 = AI.AK

c) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AI và AK. Chứng minh rằng: Nếu AH = AM + AN thì ba điểm A, O, H thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Vì AH ⊥ HC, AK ⊥ KC nên góc AHC = góc AKC = 90° ⇒ góc AHC + góc AKC = 180°

Suy ra AHCK là tứ giác nội tiếp

b) Vì AHCK là tứ giác nội tiếp nên góc AHK = góc ACK (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

Mặt khác góc ABC = góc ACK (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC của (O))

Suy ra góc AHK = góc ABC. (1)

Vì góc AHB = góc AIB = $90^o + 90^o = 180^o$ nên AHBI là tứ giác nội tiếp ⇒ góc ABH = góc AIH hay góc ABC = góc AIH (2)

Từ (1) và (2) ⇒ góc AHK = góc AIH (3)

Chứng minh tương tự, ta có góc AHI = góc AKH (4)

Từ (3) và (4) có tam giác AIH đồng dạng với tam giác AHK(g-g)

$$=> \frac{AI}{AH} = \frac{AH}{AK} => AH^2 = AI.AK \text{ (đpcm)}$$

c) Vì M, N là trung điểm của AI, AK nên

$$AH = AM + AN = \frac{AI}{2} + \frac{AK}{2} = \frac{AI + AK}{2} => AH^2 = \frac{(AI + AK)^2}{4}$$

Kết hợp với ý b, ta có

$\frac{(AI+AK)^2}{4} = AI.AK <=> (AI+AK)^2 = 4.AI.AK$

$<=> (AI-AK)^2 = 0$

$<=> AI = AK$

Gọi J là giao điểm của 2 tiếp tuyến tại B, C của (O). Có Δ OBJ = Δ OCJ (cạnh huyền–cạnh góc vuông) ⇒ JO là phân giác của góc BJC và JB = JC

Suy ra OJ là đường trung trực của BC ⇒ OJ ⊥ BC

Vì AI = AK, AI ⊥ IJ, AK ⊥ KJ nên A thuộc đường phân giác của góc IJK ⇒ A ∈ OJ

Suy ra AO ⊥ BC, mà AH ⊥ BC nên A, O, H thẳng hàng.

Bài 212. [Hải Phòng 2014 – 2015]

Cho đường tròn (O) cố định và tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt ở D' và E'

a) Chứng minh rằng tứ giác BEDC là tứ giác nội tiếp và DE // D'E'

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với DE

c) Cho các điểm B và C cố định. Chứng minh rằng khi A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE không đổi.

Hướng dẫn

a) * Có BD và CE là các đường cao của ΔABC => BD ⊥ AC, CE ⊥ AB

=>BDC=90° ;BEC=90°

+ Tứ giác BEDC có BDC=90° ;BEC=90° mà 2 góc này cùng chắn cạnh BC => tứ giác BEDC nội tiếp (điều phải chứng minh)

* Tứ giác BEDC nội tiếp => $\widehat{E_1} = \widehat{B_1} = \frac{sd\ \overset{\frown}{DC}}{2}$(1)

* Xét đường tròn (O) có $\widehat{B_1} = \widehat{D'_1} = \frac{sd\ \overset{\frown}{E'C}}{2}$(2)

Từ (1) và (2) => $\widehat{D'_1} = \widehat{E_1}$ mà đây là 2 góc đồng vị => DE // D'E' (điều phải chứng minh)

b) * Tứ giác BEDC nội tiếp => $\widehat{B_2} = \widehat{C_2} = \frac{sd\ \overset{\frown}{ED}}{2}$

* Trong đường tròn (O) có => $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ => số đo cung AE' = số đo cung AD' => A là điểm chính giữa cung D'E' => AO đi qua trung điểm của D'E'

=> AO ⊥ D'E' , mà DE // D'E'=>OA ⊥ DE (đpcm)

c) * Ta có tứ giác AEHD có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^o$ => AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHD => AH đồng thời là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE

=> $\frac{AH}{2}$ là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE.

* Vẽ đường kính AN của đường tròn (O) => $\widehat{NCA} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> NC ⊥ AC => NC // BD

* Chứng minh tương tự có BN // CE => Tứ giác BHCN là hình bình hành.

* Gọi M là giao điểm của BC và HN => M là trung điểm HN => AH = 2.OM

Mặt khác M là trung điểm của BC nên OM ⊥ BC OM là khoảng cách từ O đến BC, mà BC cố định, O cố định nên OM không đổi

=> AH không

Bài 213. [Hòa Bình 2015 – 2016]

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho AB > AC (A khác C). Từ A vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB, F thuộc AC)

a) Chứng minh rằng AEHF là hình chữ nhật và OA ⊥ EF

b) Tia FE cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng Δ APH cân

Hướng dẫn

a) Có $BAC = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì HE ⊥ AB, HF ⊥ AC nên AEH=AFH = 90°

Tứ giác AEHF có 3 góc vuông nên nó là hình chữ nhật

Gọi I là giao OA và EF. Vì Δ OAB cân ở O nên EAI=ABO (1)

AEHF là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn ⇒ AEI=AHF (2)

Vì AE // HF (cùng ⊥ AC) nên AHF=EAH=90°- ABO (3)

Từ (1), (2), (3) ⇒ EAI+ AEI = 90° ⇒ Δ AEI vuông tại I ⇒ OA ⊥ EF

b) Gọi Q là giao của tia EF với (O). Vì OA ⊥ PQ nên A là điểm chính giữa cung PQ

⇒ Δ APQ cân tại A ⇒ APQ=AQP

Vì APBQ là tứ giác nội tiếp nên ABP=AQP

Suy ra ABP=APQ=APE=>tam giác ABP đồng dạng với tam giác APE (g-g)

$$=> \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AE} => AP^2 = AE.AB$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB có AH^2 = AE. AB

⇒ $AP^2 = AH^2$ ⇒ AP = AH ⇒ Δ APH cân ở A.

Bài 214. [Hòa Bình 2014 – 2015]

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Kẻ EF vuông góc với AD (F ∈ AD)

a) Chứng minh rằng tia CA là phân giác của góc BCF.

b) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng: CM.DB = DF.DO

Hướng dẫn

a) Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên BCA=BDA(1)

Có ACD=90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)=> ECD+EFD=180°

Suy ra ECDF là tứ giác nội tiếp>ECF=EDF(2)

Từ (1) và (2) =>BCA=FCA

=>CA là phân giác của góc BCF

b) Vì Δ CED vuông tại C nên CM = ME = MD ⇒ 2CM = DE

Tam giác DEF đồng dạng với tam giác DAB

$$=> \frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} => DE.DB = DA.DF => 2CM.\mathrm{DB} = 2\,\mathrm{DO}.\mathrm{DF} => \mathrm{CM}.\mathrm{DB} = \mathrm{DO}.\mathrm{DF}$$

Bài 215. [Hưng Yên 2016 – 2017]

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn lấy điểm C sao cho C khác A. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD (D là tiếp điểm) và cát tuyến CMN (M nằm giữa N và C) với đường tròn. Gọi H là giao điểm và CO và AD.

a) Chứng minh các điểm C, A, O, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh CH.CO = CM.CN

c) Tiếp tuyến tại Mcuar đường tròn (O) cắt CA, CD thứ tự tại E, F. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt CA, CD thứ tự tại P, Q. Chứng minh PE + QF ≥ PQ.

Hướng dẫn

a) Vì CA, CD là tiếp tuyến của (O) (gt)

Nên góc CAO = CDO = 90^0 (theo tính chất tiếp tuyến)

Suy ra 4 điểm C, A, O, D cùng thuộc 1 đường tròn. (điều phải chứng minh).

Cách 2: có góc CAO = CDO = 90^0 nên góc CAO + CDO = 180^0

Suy ra 4 điểm C, A, O, D cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh được tam giác COD vuông tại A có đường cao DH nên

$CH.CO = CD^2$ (1)

Ta chứng minh được Δ CMD đồng dạng với Δ CDN

Nên có $CM.CN = CD^2$ (2)

(1) và (2) ta co dpcm.

c) Ta có OFQ= MDO (cùng phụ với góc FDM)

$MDA = AOE = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AM}$ (1)

Tứ giác AODC nội tiếp => ADO=ACO (Cùng chắn cung AO)

Mà ACO =AOP (cùng phụ với góc P) => ADO=APO (2)

Từ (1) và (2) suy ra POE=MDO=OFQ (3)

Tam giác CPQ cân tại C => P=Q (4)

Từ (3) và (4) ta có tam giác POE đồng dạng với tam giác QFO

$\Leftrightarrow \frac{PO}{QF} = \frac{PE}{QO} <=> QF.PE = OP.\mathrm{OQ} = \mathrm{OP}^2$

Theo Cô-si có $QF + PE \geq 2\sqrt{QF.PE} = 2\sqrt{OP^2} = 2.OP = PQ$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi QF = PE (Tức là M là giao điểm của OC và (O)).

Bài 216. [Hưng Yên 2014 – 2015]

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Hạ các đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

a) Chứng minh tứ giác ABHK nội tiếp đường tròn . Xác định tâm đường tròn đó.

b) Chứng minh : HK // DE.

c) Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ CHK không đổi.

Hướng dẫn

a) Tứ giác ABHK có AKB=AHB=90° .

Suy ra Tứ giác ABHK nội tiếp đường tròn đường kính AB.Tâm O' của đường tròn náy là trung điểm của AB.

b) Theo câu a) Tứ giác ABHK nội tiếp (J) với J là trung điểm của AB

Nên BAH = BKH (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BH của (J))

Mà BAH = BAD (A, H, D thẳng hàng)

BAD = BED (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD của (O))

Suy ra BKH = BED . Hai góc này ở vị trí đồng vị nên HK // DE.

c) - Gọi T là giao của hai đường cao AH và BK.

Dễ CM được tứ giác CHTK nội tiếp đường tròn đường kính CT.

(do CHT=CKT=90°).

Do đó CT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK. (*)

- Gọi F là giao của CO với (O) hay CF là đường kính của (O).

Ta có CAF=90° (góc nội tiếp chắn nửa (O)) => FA $\perp$ CA

Mà BK $\perp$ CA (gt). Nên BK // FA hay BT // FA (1)

Ta có CBF=90° (góc nội tiếp chắn nửa (O)) => FB $\perp$ CB

Mà AH $\perp$ CB (gt). Nên AH // FB hay AT // FB (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác AFBT là hình bình hành (hai cặp cạnh đối //)

Do J là trung điểm của đường chéo AB

Nên J cũng là trung điểm của đường chéo FT(tính chất về đường chéo hbh).

Xét tam giác CTF có O là trung điểm của FC, J là trung điểm của FT

Nên OJ là đường trung bình=> $OJ=\frac{1}{2}CT$ (**)

Từ (*) và (**) ta có độ dài của OJ bằng độ dài bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK.

Mà độ dài của OJ là khoảng cách từ tâm O đến dây AB (J là trung điểm của dây AB). Do (O) và dây AB cố định nên độ dài của OJ không đổi.

Vậy độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK không đổi.

Bài 217. [Hưng Yên 2015 – 2016]

Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm *O* và AB<AC . Vẽ đường kính *AD* của đường tròn (*O*). Kẻ *BE* và *CF* vuông góc với *AD* (*E*, *F* thuộc *AD*). Kẻ *AH* vuông góc với *BC* (*H* thuộc *BC*).

a) Chứng minh bốn điểm *A*, *B*, *H*, *E* cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh *HE* song song với *CD*.

c) Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh *ME* = *MF*.

Hướng dẫn

a) Theo bài có AEB= AHB= 90°.

Suy ra bốn điểm *A*, *B*, *H*, *E* cùng thuộc một đường tròn.

b) Tứ giác ABH nội tiếp đường tròn ⇒ BAE= EHC (1)

Mặt khác, BCD=BAE (góc nội tiếp cùng chắn BD)(2)

Từ (1) và (2) suy ra BCD=EHC

=>HE//CD

c) Gọi *K* là trung điểm của *EC*, *I* là giao điểm của *MK* với *ED*.

Khi đó *MK* là đường trung bình của Δ*BCE*

=>MK // BE mà BE ⊥ AD (gt)

=>MK ⊥ AD hay MK ⊥ EF (3)

Lại có CF ⊥ AD (gt) ⇒ MK // CF hay KI // CF.

ΔECF có KI // CF, KE = KC nên IE = IF (4)

Từ (3) và (4) suy ra MK là đường trung trực của EF

⇒ ME = MF

Bài 218. [Khánh Hòa 2015 – 2016]

Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Hai đường tròn $(B;BA)$ và $(C;CA)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E.

a) Chứng minh BC là tia phân giác của ABD

b) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: $AD^2 = 4BI.CI$

c) Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.

d) Chứng minh rằng số đo MEN không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a.

Hướng dẫn

a) C/m: ΔABC = ΔDBC (ccc) ⇒ ABC=DBC hay: BC là phân giác của ABD

b) Ta có: AB = BD (=bk(B))

CA = CD (=bk(C))

Suy ra: BC là trung trực của AD hay BC ⊥ AD ⇒AI⊥B

Ta lại có: BC ⊥ AD tại I ⇒ IA = ID (đlí)

Xét ΔABC vuông tại A (gt) có: AI⊥BC, suy ra: AI^2 = BI.CI hay: $\frac{AD^2}{4} = BI.CI \Rightarrow AD^2 = 4BI.CI$

c) Ta có: DME=DAM (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

DNE =DAN (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

Suy ra: DME+ DNE=DAM+DAN

Trong ΔMNE có: MEN+EMN+ENM = 180° , suy ra: MEN+DAM+DAN = 180°

Hay: MEN+MAN =180° ⇒ tứ giác AMEN nội tiếp.

d) Trong ΔAMN có: MAN+AMN+ANM = 180° , mà: MEN+MAN =180°

suy ra: MEN=AMN+ANM

Ta lại có: $AND = ACB = \frac{1}{2}ACD, AMD = ABC = \frac{1}{2}ABD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà: ΔABC vuông tại A nên: MEN = 90° (không đổi)

Vậy số đo góc MEN không phụ thuộc vào đường thẳng a.

Bài 219. [Kiên Giang 2015 – 2016]

Cho tam giác ABC nhọn (AB <AC) ba đường cao AP, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BCMN nội tiếp

b) Chứng minh tam giác ANM đồng dạng với tam giác ACB

c) Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh BD = BE

d) Giả sử AB = 4 cm, AC = 5 cm, BC = 6 cm. Tính MN

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác BCMN nội tiếp

Ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^O$

=>M và N cùng nhìn BC dưới một góc không đổi bằng 90^0

=>tứ giác BCMN nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh tam giác ANM đồng dạng với tam giác ACB

Xét tam giác ANM và ACB có:

Góc A chung

Góc ANM = góc ACB (cùng bù với góc BNM)

=>tam giác ANM đồng dạng với tam giác ACB

c) Kẻ tiếp tuyến BD với đường tròn đường kính AH (D là tiếp điểm) kẻ tiếp tuyến BE với đường tròn đường kính CH (E là tiếp điểm). Chứng minh BD = BE

+ Chứng minh tam giác BDH đồng dạng với tam giác BMD (góc – góc)

=> $BD^2 = BH.BM$

+ Tương tự ta chứng minh được BE^2 = BH.BM

=>BD = BE

d) Giả sử AB = 4 cm, AC = 5 cm, BC = 6 cm. Tính MN

Đặt $AN = x \Rightarrow NB = 4 - x$ (điều kiện 0 < x < 4)

Áp dụng định lý Pythago ta có:

$CN^2 = AC^2 - AN^2 = BC^2 - BN^2 \Leftrightarrow 5^2 - x^2 = 6^2 - (4-x)^2 \Leftrightarrow x = 0,625$ (tmdk)

Vậy AN = 0,625

Tam giác ANM đồng dạng với tam giác ACB (cmt)

$$=> \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} => MN = \frac{AN.BC}{AC} = \frac{0,625.6}{5} = 0,75(cm)$$

Bài 220. [Kon Tum -2014 – 2015].

Cho Δ***ABC*** vuông tại A và đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB. Biết BH=2cm, HC=6cm. Tính diện tích hình quạt AOH (ứng với cung nhỏ AH).

Hướng dẫn

$AB^2 = HB.BC = (HB + HC)HB = (2+6)^2 = 16$ ⇒AB=4(cm)⇒OA=2(cm)

Cos∠ABH=HB/AB=2/4=1/2⇒∠ABH=60°

⇒∠AOH=2∠ABH=120°

$S_{quat\ \text{AOH}} = \dfrac{OA^2.\pi.120^o}{360^o} = \dfrac{4\pi}{3}(cm^2)$

Bài 221. [Kon Tum 2014 – 2015]

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD của đường tròn (O) cắt nhau tại N bên trong đường tròn (C, D nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Hai tiếp tuyến Cx và Dy của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

a) Chứng minh tứ giác DNCP nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn

a)DNCP nội tiếp

$\angle ACB=\angle ADB=90°$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AC\perp PB$ và $BD\perp PA\Rightarrow\angle PAN=\angle PCN=90°\Rightarrow$Tứ giác DNCP nội tiếp đường tròn đường kính PN

b)P,M,N thẳng hang

A,D,C,B cùng thuộc (O)$\Rightarrow$tứ giác ADCB nội tiếp$\Rightarrow\angle OBC=\angle PDC$

Mà $\angle PDC=\angle MNC$(cùng chắn cung PC của đường tròn (DNCP))

$\angle OCB=\angle OBC$(OCB cân tại O) và $\angle MCN=\angle OCB$(cùng phụ $\angle OCN$)

$\Rightarrow\angle MNC=\angle MCN\Rightarrow$ MCN cân tại M$\Rightarrow$MN=MC

vì MD=MC (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow$MN=MC=MD

$\Rightarrow$ DCN nội tiếp đường tròn tâm M

Mặt khác DCN nội tiếp đường đường kính PN(vì tứ giác DNCP nội tiếp)

$\Rightarrow$M là trung điểm PN$\Rightarrow$Vậy P,M,N thẳng hàng (đpcm)

Bài 222. [Lạng Sơn 2013 – 2014]

Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C). Gọi E là trung điểm của dây BC.

a) Chứng minh: MAOE là tứ giác nội tiếp.

b) MO cắt đường tròn tại I (I nằm giữa M và O). Tính $\widehat{AMI}+2\widehat{MAI}$

c) Tia phân giác góc BAC cắt dây BC tại D. Chứng minh: $MD^2 = MB.MC$

Hướng dẫn

a) Chứng minh MAOE là tứ giác nội tiếp.

Do E là trung điểm của dây cung BC nên $\widehat{OEM}=90^o$ (quan hệ giữa đường kính và dây cung)

Do MA là tiếp tuyến nên $\widehat{OAM}=90^0$,tứ giác MAOE có $\widehat{OEM}+\widehat{OAM}=180^o$ nên nội tiếp đường tròn.

b) Tính $\widehat{AMI}+2\widehat{MAI}$

Ta có: $2\widehat{MAI}=\widehat{AOI}$ (cùng chắn cung AI)

$\widehat{OAM}+\widehat{AMO}=90^o$ (do tam giác MAO vuông tại A)

$\Rightarrow \widehat{AMI}+2\widehat{MAI}=90^o$

c) Chứng minh $MD^2 = MB.MC$

Do tam giác MAB đồng dạng với tam giác MCA (g.g) nên $MA^2 = MB.MC$

Gọi K là giao điểm của phân giác AD với đường tròn (O)

Có $\widehat{MDA}=\frac{1}{2}(sd\overset{\frown}{KC}+sd\overset{\frown}{BA})=\frac{1}{2}(sd\overset{\frown}{KB}+sd\overset{\frown}{BA})=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{KA}$

(vì AD là phân giác góc BAC nên cung KB = cung KC)

Mặt khác: $\widehat{MAD}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{KA}$ (Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Nên tam giác MAD cân: MA = MD

Vậy $MD^2 = MB.MC$ (đpcm)

Bài 223. [Lạng Sơn 2014 – 2015]

Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB; AC lần lượt tại M và N.Gọi H là giao điểm của BN cà CM, K là trung điểm của AH.

a) Chứng minh rằng tứ giác AMHN nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh AM.AB = AN.AC

c) Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn

a) Có $\widehat{BMC} = 90^o$ (Nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AMH} = 90^o$

Có $\widehat{BNC} = 90^0$ (Nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ANH} = 90^0$ (Do kề bù)

Vậy AMH+ANH=180° nên tứ giác AMHN nội tiếp

b) Xét ΔAMC và ΔANB có $\widehat{AMC} = \widehat{ACB} = 90^o$ (chứng minh ý a)

Có góc A chung nên ΔAMC đồng dạng Δ ANB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow AM.AB = AN.AC$

c) Có H là trực tâm của Δ ABC $\Rightarrow AH$ vuông góc BC

$\Rightarrow \widehat{CAH} + \widehat{ACB} = 90^o$ (1)

KN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông NHA

$\Rightarrow \widehat{KNA} = \widehat{KAN}$ (2)

Δ ONC cân tại O nên $\widehat{ONC} = \widehat{OCN}$ (3)

Từ 1, 2, 3 ta có: $\widehat{KAN} + \widehat{ONC} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{KNO} = 90^o$ hay KN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O

Bài 224. [Lạng Sơn 2015 – 2016]

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có ba góc nhọn. Kẻ cac đường cao BE; CF (Điểm E trên AC, điểm F trên AB) gọi H là giao điểm của BE với CF

a) Chứng minh rằng các tứ giác AFHE và BFEC nội tiếp

b) Gọi S là trung điểm AH. Chứng minh rằng ∠ ESF = ∠ BOC và hai tam giác ESF và BOC đồng dạng.

c) Kẻ OM vuông góc với BC(M nằm trên BC) Chứng minh rằng SM vuông góc với EF

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác AFHE có ∠ AFH = 900 ; ∠ AEH = 90°

=> ∠ AFH + ∠ AEH = 180^0 nên tứ giác AFHE nội tiếp

Xét tứ giác BFEC có ∠ BFC = 90^0 nên F thuộc đường trong đường kính BC

∠ BEC = 90^0 nên E thuộc đường tròn đường kính BC

Vậy 4 điểm B,C,E,F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay BFEC nội tiếp

b) Ta có tứ giác AFHE nội tiếp (ý a) => ∠ ESF = 2∠ EAF(cùng chắn cung EHF)

Mà ∠ BOC = 2 EAF trong đường tròn tâm O nên ∠ ESF = ∠ BOC

Xét Δ ESF và Δ BOC có ∠ ESF = ∠ BOC (chứng minh trên)

c)

Bài 225. [Lào Cai 2013 – 2014]

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A sao cho OA = 3R. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn (O ; R) (P, Q là 2 tiếp điểm). Lấy M thuộc đường tròn (O ; R) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn (O ; R). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

a) Chứng minh tứ giác APOQ là tứ giác nội tiếp và $KA^2 = KN.KP$

b) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O ; R). Chứng minh NS là tia phân giác của góc PNM

c) Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R

Hướng dẫn

a) tứ giác APOQ có tổng hai góc đối bằng 1800.

PM//AQ suy ra

$\widehat{PMN} = \widehat{KAN}$ (So le trong)

$\widehat{PMN} = \widehat{APK}$ (cùng chắn cung PN)

$\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{APK}$

Tam giác KAN và tam giác KPA có góc K chung

$\widehat{KAN} = \widehat{KPA}$ nên hai tam giác đồng dạng (g-g)

$\frac{KA}{KP} = \frac{KN}{KA} => KA^2 = KN.KP$

b) PM//AQ mà SQ ⊥ AQ (t/c tiếp tuyến) nên SQ ⊥ PM suy ra $\overset{\frown}{PS} = \overset{\frown}{SM}$

Nên $\widehat{PNS} = \widehat{SNM}$ hay NS là tia phân giác của góc $\widehat{PNM}$

c) Gọi H là giao điểm của PQ với AO

G là trọng tâm của tam giác APQ nên $AG = \frac{2}{3}AH$

mà $OP^2 = OA.OH$ nên $OH = \frac{OP^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$ nên $AH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3}$

do đó $AG = \frac{2}{3}.\frac{8R}{3} = \frac{16R}{9}$

Bài 226. [Long An 2013 – 2014]

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm, AH là chiều cao của tam giác ABC. Tính độ dài AC và AH

Bài 2:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Ba đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H (với E thuộc BC, F thuộc AC, G thuộc AB).

a) Chứng minh các tứ giác AFHG và BGFC là các tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I và M lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp của tứ giác AFHG và BGFC. Chứng minh MG là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn tâm O. Chứng minh: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Hướng dẫn

Bài 1

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 16 \Rightarrow AC = 4(cm)$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}(cm)$

Bài 2

a) Chứng minh tứ giác AFHG và BGFC nội tiếp.

Ta có:

$\widehat{AGH} = 90^o (gt)$

$\widehat{AFH} = 90^o (gt)$

$\widehat{AGH} + \widehat{AFH} = 180^o$

$\Rightarrow AFHG$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $\widehat{BGC} = \widehat{BFC} = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác BGFC nội tiếp (Vì tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90o)

b) Gọi I và M lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHG và BGFC. Chứng minh MG là tiếp tuyến của đường tròn tâm (I).

$\widehat{IGA} = \widehat{IAG}$ **(**tam giác IAG cân tại I) (1)

$\widehat{GBM} = \widehat{BGM}$ (tam giác MGB cân tại M) (2)

$\widehat{IAG} + \widehat{GBM} = 90^o$ (3)

Từ (1), (2) và (3) => $\widehat{IGA} + \widehat{BGM} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{IGM} = 90^o \Rightarrow MG \perp IG \Rightarrow MG$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm I

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn tâm O. Chứng minh: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Kẻ đường kính AK của đường tròn tâm O

$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + DC^2$ (4)

Tam giác ABK vuôn tại B

$\Rightarrow AB^2 + BK^2 = AK^2 = 4R^2$(5)

Tứ giác BCKD là hình thang (BC//DK do cùng vuông góc với AD) (6)

Tứ giác BCKD nội tiếp đường tròn (O) (7)

Từ (6), (7) $\Rightarrow BCKD$ là hình thang cân.

$\Rightarrow DC = BK$ (8)

Từ (4), (5), (8) $\Rightarrow EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Bài 227. [Long An 2014 – 2015]

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao (H ∈ BC) có AH = 6cm ; HC = 8cm . Tính độ dài AC , BC và AB .

Bài 2:

Cho đường tròn (O;R) và một điểm S nằm ngoài đường tròn (O) . Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SB với đường tròn (O) . (A và B là hai tiếp điểm)

a) Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp và SO vuông góc AB.

b) Vẽ đường thẳng a đi qua S và cắt (O) tại hai điểm M và N (với a không đi qua tâm O, M nằm giữa S và N).Gọi H là giao điểm của SO và AB; I là trung điểmcủa MN. Hai đường thẳng OI và AB cắt nhau tại E.

+) Chứng minh: $OI.OE = R^2$

+) Cho SO=2R và $MN = R\sqrt{3}$. Hãy tính SM theo R.

Hướng dẫn

Bài 1.

Ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 100 \Rightarrow AC = 10(cm)$

Mà $AC^2 = BC.HC \Rightarrow BC = \dfrac{CA^2}{HC} = 12,5(cm)$

$AB.AC = AH.BC \Rightarrow AB = \dfrac{AH.BC}{AC} = 7,5(\text{cm})$

Bài 2

a) Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp và SO vuông góc AB.

Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp. (0,5)

SA và SB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{SAO} = \widehat{SBO} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{SAO} + \widehat{SBO} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác SAOB là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh SO vuông góc AB **. (0,5)**

SA và SB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) O $\Rightarrow$ SA=SB

Mà OA=OB=R

$\Rightarrow SO$ là đường trung trực AB

$\Rightarrow SO$ vuông AB

b)

+) Chứng minh: $OI = OE = R^2$ (1,0)

Tam giác AOI vuông tại A có AH là đường cao

$\Rightarrow OA^2 = OH.OS = R^2$ (1)

I là trung điểm MN,MN không qua $O \Rightarrow OI$ vuông MN

Xét tam giác OHE vuông tại H và tam giác OIS vuông tại I có:

$\widehat{EOH}$ chung

$\Delta\ OHE \backsim \Delta OIS\left(g-g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OS} = \dfrac{OH}{OI} \Rightarrow OI.OE = OH.OS(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $OI.OE = R^2$

+) Cho SO=2R và $MN = R\sqrt{3}$. Hãy tính SM theo R.

Tam giác OIM vuông tại I $\Rightarrow OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = \dfrac{R}{2}$

Tam giác OIS vuông tại I $\Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 - OI^2} = \sqrt{4R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}$

$SM = SI - IM = \dfrac{R\sqrt{15}}{2} - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$

Bài 228. [Long An 2015 – 2016]

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao (H ∈ BC) có BC = 10 cm, AC = 8 cm. Tính độ dài AB , BH và số đo góc C (số đo góc C làm tròn đến độ).

Bài 2:

Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. Lấy điểm *C* trên đường thẳng *AB* sao cho *B* nằm giữa *A, C*. Kẻ tiếp tuyến *CK* với nửa đường tròn tâm *O* (*K* là tiếp điểm), tia *CK* cắt tia tiếp tuyến *Ax* của nửa đường tròn tâm *O* tại *D* (tia tiếp tuyến *Ax* nằm trên nửa mặt phẳng bờ *AB* chứa nửa đường tròn tâm *O*).

a) Chứng minh tứ giác *AOKD* là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AOKD*.

b) Chứng minh: $CO.CA = CK^2 + CK.DK$

c) Kẻ ON ⊥AB thuộc đoạn thẳng *CD*). Chứng minh $\dfrac{AD}{DN} - \dfrac{DN}{CN} = 1$

Hướng dẫn

Bài 1:

*** Tính** *AB:*

Áp dụng định lí Py-ta-go vào Δ vuông *ABC* :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 8^2 = 36$

Vậy $AB = \sqrt{36} = 6(cm)$

*** Tính *BH* :** Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông *ABC* **:**

$AB^2 = BC.BH \Rightarrow BC = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{6^2}{10} = 3,6(cm)$

*** Tính** $\widehat{C}$ **:**

$\sin\ \widehat{C} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{6}{10} => \widehat{C} \approx 37^o$

Bài 2:

a) Chứng minh tứ giác *AOKD* **là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác** *AOKD***.**

AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm *O* $\Rightarrow \widehat{DAO} = 90^O$

CK là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm *O* $\Rightarrow \widehat{DKO} = 90^o$

Xét tứ giác *AOKD*, ta có:

$\widehat{DAO}+\widehat{DKO}=180^o$

Vậy tứ giác *AOKD* là tứ giác nội tiếp.

Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AOKD* là trung điểm của đoạn *DO*.

b) Chứng minh: $CO.CA=CK^2+CK.DK$

Xét hai tam giác *COK* và *CDA* có: $\widehat{CKO}=\widehat{CAD}=90^0$ (gt)

C chung

$\Delta COK \backsim \Delta CDA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{CO}{CD}=\dfrac{CK}{CA}\Rightarrow CO.CA=CK.CD$

$\Rightarrow CO.CA=CK.(CK+DK)=CK^2+CK,DK$

c) Kẻ $ON\perp AB$ (N thuộc đoạn thẳng CD). Chứng minh : $\dfrac{AD}{DN}-\dfrac{DN}{CN}=1$

Ta có: $ON\,//\,DA$ (cùng vuông góc với *AB*)

Góc $\widehat{ADO}=\widehat{DON}$ (so le trong)

Mặt khác góc $\widehat{ADO}=\widehat{ODN}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Vậy $\widehat{DON}=\widehat{ODN}\Rightarrow \Delta DON$ cân tại N $\Rightarrow NO=ND$

Tam giác CAD có ON//AD nên $\Delta CAD \backsim \Delta CON \Rightarrow \dfrac{CD}{CN}=\dfrac{AD}{ON}$

$\dfrac{CN+DN}{CN}=\dfrac{AD}{DN}(Do\ \text{DN=ON})\Rightarrow 1+\dfrac{DN}{CN}=\dfrac{AD}{DN}\Rightarrow \dfrac{AD}{DN}-\dfrac{DN}{CN}=1$

(đpcm)

Bài 229. [Nam Định 2013 – 2014]

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm), tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm của BE với đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh : $AE^2=EK.\text{EB}$

b) Chứng minh 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M. Chứng minh $\frac{AE}{EM}-\frac{EM}{CM}=1$

Hướng dẫn

a) Chứng minh $AE^2 = EK.EB$

+Chỉ ra Δ AEB vuông tại A (gt AE là tiếp tuyến của (O)

+Chỉ ra $\widehat{AKB}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

suy ra AK là đường cao của tam giác vuông AEB.

+Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông AEB ta có: $AE^2 = EK.EB$

b) Chứng minh 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

+Chỉ ra tứ giác AHKE nội tiếp:

Ta có: EO là đường trung trực của đoạn thẳng AD (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Nên ta có: EO vuông góc với AD nên $\widehat{EHA}=90^o$

Ta lại có $\widehat{EKA}=90^o$

Nên suy ra tứ giác AHKE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHK}=\widehat{EAK}$

+Chỉ ra góc $\widehat{EBA}=\widehat{EAK}$ (do cùng phụ với góc AEB)

+Suy ra tứ giác BOHK nội tiếp suy ra 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M. Chứng minh $\frac{AE}{EM}-\frac{EM}{CM}=1$

+Chỉ ra ΔOEM cân tại M: do có góc $\widehat{EOM} = \widehat{MEO}$ (vì cùng bằng góc AEO)

suy ra ME = MO.

+Có OM và AE cùng vuông góc với AB nên OM // AE, áp dụng định lý Ta- lét trong ΔCEA ta có: $\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{OM}$

Ta có:

$$\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{OM} \Rightarrow \frac{CE - CM}{CM} = \frac{AE - OM}{OM} \Rightarrow \frac{EM}{CM} = \frac{AE}{OM} - 1 \Rightarrow \frac{AE}{OM} - \frac{EM}{CM} = 1$$

Mà ME = MO nên suy ra $\frac{AE}{EM} - \frac{EM}{CM} = 1$

Bài 230. [Nam Định 2015 – 2016]

Cho đường tròn tâm O, điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AED tới (O) (B, C là các tiếp điểm; E nằm giữa A và D). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Chứng minh $AB^2 = AE.AD$ và AE .AD = AH. AO

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ICD thuộc (O).

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp

+ Ta có AB là tiếp tuyến của (O)$\Rightarrow$ AB$\perp$OB $\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^o$

+ Ta có AC là tiếp tuyến của (O)⇒AC⊥OC⇒ $\widehat{ACO} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o + 90^o = 180^o$

+ Vậy tứ giác ABOC là một tứ giác nội tiếp (vì có tổng 2 góc đối bằng 1800)

b) Chứng minh AB^2 = AE.AD và AE.AD = AH.AO.

+ Ta có góc $\widehat{ABE} = \widehat{ADB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn cung EB của (O))

+ Xét Δ ABE và Δ ADB có: BAE chung và góc $\widehat{ABE} = \widehat{ADB} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ADC$ (g. g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE (1)$

+ Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên suy ra AB = AC và AO là tia phân giác của góc BAC.

Suy ra Δ ABC cân tại A có AO là đường phân giác đồng thời là đường cao⇒ OA⊥ BC

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong Δ vuông ABO ta có $AB^2 = AH.AO$ (2)

Từ (1) và (2)⇒ $AB^2 = AE.AD$ và AE.AD = AH.AO. (đpcm).

b) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ICD thuộc (O)

+ Gọi F là giao điểm thứ 2 của tia BI với đường tròn (O). Suy ra góc $\widehat{CBF} = \widehat{DBF}$ ⇒ CF=DF (theo hệ quả của góc nôi tiếp: 2 góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau). ⇒ FC = FD (3)

+ Ta có FID là góc ngoài tại đỉnh I của Δ BID. Suy ra góc $\widehat{FID} = \widehat{FBD} + \widehat{BDI}$

Mà góc $\widehat{BDI} = \widehat{IDC}$ (vì ID là tia phân giác của góc BDC); góc $\widehat{FBD} = \widehat{FBC}$ (vì IB là tia phân giác của góc DBC)

Góc $\widehat{FBC} = \widehat{FDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CF của (O)).

+ Suy ra góc $\widehat{FID} = \widehat{IDC} + \widehat{CDF} + \widehat{FDI} \Rightarrow$ Δ IDF cân tại F ⇒ FD = FI. (4)

+ Từ (3) và (4) suy ra FD = FI = FC. Suy ra F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ICD (đpcm).

Bài 231. Cho ΔABC có các đường cao BD và CE.Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại hai điểm M và N.

1. Chứng minh:BEDC nội tiếp.
2. Chứng minh: góc $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$.
3. Chứng minh: DE // với tiếp tuyến tai A của đường tròn ngoại tiếp tam giác.
4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .Chứng minh: OA là phân giác của góc $\widehat{MAN}$.
5. Chứng tỏ: $AM^2 = AE.AB$.

Hướng dẫn

1) Chỉ ra $\widehat{BEC} = \widehat{BDE} = 90^0$

2) Chỉ ra $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ $\widehat{BED}$)

3) Gọi tiếp tuyến tại A của (O) là đường thẳng xy.

Do xy.là tiếp tuyến, AB là dây cung nên $\widehat{xAB} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{ACB} = \widehat{AED} \Rightarrow xy//DE$.

4) Chứng minh OA là phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

Do $xy//DE \Rightarrow xy//MN$ mà $OA \perp xy \Rightarrow OA \perp MN \Rightarrow OA$ là đường trung trực của MN .(Đường kính vuông góc với một dây)$\Rightarrow \Delta AMN$ cân ở $A \Rightarrow AO$ là phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

5) Chứng minh : $AM^2 = AE.AB$.

Do ΔAMN cân ở $A \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{AMN}$ (Góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta MAE \backsim \Delta BAM\,(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{AE}{MA} \Rightarrow AM^2 = AE.AB$

Bài 232. Cho (O) đường kính AC . Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn tâm O' , đường kính BC . Gọi M là trung điểm của đoạn AB . Từ M vẽ dây cung $DE \perp AB$; DC cắt đường tròn tâm O' tại I.

1) Tứ giác $ADBE$ là hình gì?

2) Chứng minh $DMBI$ nội tiếp.

3) Chứng minh $B; I; E$ thẳng hàng và $MI = MD$.

4) Chứng minh $MC.DB = MI.DC$

5) Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O').

Hướng dẫn

1) Ta có: $MA = MB, AB \perp DE \Rightarrow DM = ME \Rightarrow ADBE$ là hình bình hành.

Mà $BD = BE$ (AB là đường trung trực của DE) nên $ADBE$ là hình thoi.

2) Chứng minh $DMBI$ nội tiếp .

Ta có: BC là đường kính, $I \in (O') \Rightarrow \widehat{BID} = 90^0$ mà góc $\widehat{DMB} = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BID} + \widehat{DMB} = 180^0 \Rightarrow$ $DMBI$ nội tiếp

3) Chứng minh $B; I; E$ thẳng hàng .

Do $AEBD$ là hình thoi $BE // AD$ mà $AD \perp DC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp DC$.

Mặt khác $BI \perp DC \Rightarrow B, E, I$ thẳng hàng.

• Chứng minh $MI = MD$:

Do M là trung điểm DE mà ΔEID vuông ở I nên MI là đường trung tuyến của tam giác vuông DEI suy ra $MI = MD$.

4) Chứng minh $MC.DB = MI.DC$.

Xét ΔMCI và ΔDCB có: góc C chung; $\widehat{BDI} = \widehat{IMB}$ (cùng chắn cung MI do $DMBI$ nộ tiếp)

Nên $\Delta MCI \backsim \Delta DCB(g.g) \Rightarrow MC.DB = MI.DC$

5) Chứng minh MI là tiế tuyếp của (O').

Ta có $\Delta O'IC$ cân nên $\widehat{O;IC} = \widehat{O'CI}$ mà tứ giác $MBID$ nội tiếp nên $\widehat{MIB} = \widehat{MDB}$ (cùng chắ cung MB)

ΔBDE cân ở $B \Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{MEB}$.

Do tứ giác $MECI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MCI}$ (cùng chắ cung MI)

Từ đó suy ra góc $\widehat{O'IC} = \widehat{MIB} \Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{BIO'} = \widehat{O'IC} + \widehat{BIO'} = 90^0$

Vậy $MI \perp O'I$ tại I nên MI là tiếp tuyến của (O') .

Bài 233. Cho ΔABC có góc $\widehat{A} = 90^0$. Trên AC lấy điểm M sao cho $AM < MC$ .Vẽ đường tròn tâm O đường kính CM ; đường thẳng BM cắt (O) tại $D; AD$ kéo dài cắt (O) tại S .

1) Chứng minh $BADC$ nội tiếp.

2) BC cắt (O) ở E. Chứng minh ME là phân giác của góc $\widehat{AED}$.

3) Chứng minh CA là phân giác của góc $\widehat{BCS}$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $BADC$ nội tiếp:

Chỉ ra $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^0$.

2) Chứng minh ME là phân giác của góc $\widehat{AED}$.

• Chỉ ra $AMEB$ nội tiếp.

Góc $\widehat{ABM} = \widehat{AEM}$ (cùng chắn cung AM)

Góc $\widehat{ABM} = \widehat{ACD}$ (Cùng chắn cung MD)

Góc $\widehat{ACD} = \widehat{DEM}$ (Cùng chắn cung MD) nên $\widehat{AEM} = \widehat{MED}$

3) Chứng minh CA là phân giác của góc $\widehat{BCS}$.

Góc $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (Cùng chắn cung AB)

Góc $\widehat{ADB} = \widehat{DMS} + \widehat{DSM}$ (góc ngoài ΔDMS)

Mà góc $\widehat{DSM} = \widehat{DCM}$ (Cùng chắn cung MD); $\widehat{DMS} = \widehat{DCS}$ (Cùng chắn cung DS)

$\Rightarrow \widehat{MDS} + \widehat{DSM} = \widehat{SDC} + \widehat{DCM} = \widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{SCA}$ (đpcm)

Bài 234. Cho ΔABC có góc $\widehat{A} = 90^0$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM > MC$. Dựng đường tròn tâm O đường kính MC ; đường tròn này cắt BC tại E . Đường thẳng BM cắt (O) tại D và đường thẳng AD cắt (O) tại S.

1) Chứng minh $ADCB$ nội tiếp.

2) Chứng minh ME là phân giác của góc $\widehat{AED}$.

3) Chứng minh góc $\widehat{ASM} = \widehat{ACD}$.

5) Chứng minh ba đường thẳng $BA; EM; CD$ đồng quy.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $ADCB$ nội tiếp : Chỉ ra $\widehat{MDC} = \widehat{BDC} = 90^0$

2) Chứng minh ME là phân giác của góc $\widehat{AED}$.

Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (Cùng chắn cung AD)

- Do $MECD$ nội tiếp nên $\widehat{MCD} = \widehat{MED}$ (Cùng chắn cung MD)
- Do MC là đường kính ; $E \in (O) \Rightarrow \widehat{MEC} = 90^0 = \widehat{MEB}$

$\Rightarrow ABEM$ nội tiếp nên $\widehat{MEA} = \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MED}$ (đpcm) .

3) Chứng minh góc $\widehat{ASM} = \widehat{ACD}$.

Ta có $\widehat{ASM} = \widehat{SMD} + \widehat{SDM}$ (Góc ngoài tam giác SMD)

Mà góc $\widehat{SMD} = \widehat{SCD}$ (Cùng chắn cung SD) và Góc $\widehat{SDM} = \widehat{SCM}$ (Cùng chắn cung SM)

$\Rightarrow \widehat{SMD} + \widehat{SDM} = \widehat{SCD} + \widehat{SCM} = \widehat{MCD}$. Vậy góc $\widehat{ASM} = \widehat{ACD}$.

4) Chứng minh $AB; ME; CD$ đồng quy.

Gọi giao điểm $AB; CD$ là K. Ta chứng minh 3 điểm $K; M; E$ thẳng hàng.

• Do $CA \perp AB$ (gt); $BD \perp DC$ (cmt) và AC cắt BD ở $M \Rightarrow M$ là trực tâm của tam giác KBC

$\Rightarrow KM$ là đường cao thứ 3 nên $KM \perp BC$. Mà $ME \perp BC$ (cmt) nên $K; M; E$ thẳng hàng $\Rightarrow$đpcm.

Bài 235. Cho ΔABC có 3 góc nhọn và $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD và đường kính AA'. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AA'.

1) Chứng minh $AEDB$ nội tiếp.

2) Chứng minh $DB.A'A = AD.A'C$.

3) Chứng minh $DE \perp AC$.

4) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $MD = ME = MF$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $AEDB$ nội tiếp: Chỉ ra $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^0$.

2) Chứng minh $DB.A'A = AD.A'C$.

Chỉ ra $\Delta DBA \backsim \Delta A'CA$ (góc $\widehat{ABC} = \widehat{AA'C}$) nên $DB.A'A = AD.A'C$.

3) Chứng minh $DE \perp AC$.

Do $ABDE$ nội tiếp nên góc $\widehat{EDC} = \widehat{BAE}$ (Cùng bù với góc $\widehat{BDE}$). Mà góc $\widehat{BAE} = \widehat{BCA'}$ (cùng chắn cung BA') suy ra góc $\widehat{CDE} = \widehat{DCA'} \Rightarrow DE // A'C$. Mà góc $\widehat{ACA'} = 90^0 \Rightarrow DE \perp AC$

4) Chứng minh $MD = ME = MF$.

• Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$. Do $M;N$ là trung điểm $BC, AC \Rightarrow MN // AC$ (Tính chất đường trung bình)

Do $DE \perp AC \Rightarrow MN \perp DE$ (Đường kính đi qua trung điểm một dây…)

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của $DE \Rightarrow ME = MD$.

• Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow MI // AB$ (tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \widehat{A'AC}$ (Cùng chắn cung A'C).

Do $ADFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{FDC}$ (Cùng chắn cung FC)

$\Rightarrow \widehat{A'BC} = \widehat{FDC} \Rightarrow DF // BA'$ mà $\widehat{ABA'} = 90^0 \Rightarrow MI \perp DF$.

Đường kính $MI \perp DF \Rightarrow MI$ là đường trung trực của $DF \Rightarrow MD = MF$.

Vậy $MD = ME = MF$.

Bài 236. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC . Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC. P là trung điểm $AB;Q$ là trung điểm FE .

1) Chứng minh $MFEC$ nội tiếp.

2) Chứng minh $BM.EF = BA.EM$.

3) Chứng minh $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

4) Chứng minh góc $\widehat{PQM} = 90^0$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $MFEC$ nội tiếp: Chỉ ra $\widehat{MFC} = \widehat{MEC} = 90^0$

2) Chứng minh $BM.EF = BA.EM$.

Ta có góc $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ (Vì cùng chắn cung AM)

Do $MFEC$ nội tiếp nên góc $\widehat{ACM} = \widehat{FEM}$ (Cùng chắn cung FM).

$\Rightarrow$Góc $\widehat{ABM} = \widehat{FEM}$. (1)

Ta lại có góc $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (Cùng chắn cung AB).

Do $MFEC$ nội tiếp nên góc $\widehat{FME} = \widehat{FCM}$ (Cùng chắn cung FE).$\Rightarrow$Góc $\widehat{AMB} = \widehat{FME}$.(2)

Từ (1)và(2) suy ra $\Delta EFM \backsim \Delta ABM\left(g.g\right) \Rightarrow BM.EF = BA.EM$.

3) Chứng minh $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

Ta có $\Delta EFM \backsim \Delta ABM$ (theo c/m trên) $\Rightarrow \dfrac{AB}{FE} = \dfrac{AM}{MF}$ mà $AM = 2AP; FE = 2FQ$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{2AP}{2FQ} = \dfrac{AM}{MF} \Rightarrow \dfrac{AP}{FQ} = \dfrac{AM}{FM}$ và góc $\widehat{PAM} = \widehat{MFQ}$ (suy ra từ $\Delta EFM \backsim \Delta ABM$)

Suy ra $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ\left(c.g.c\right)$

4) Chứng minh góc $\widehat{PQM} = 90^0$.

Do góc $\widehat{AMP} = \widehat{FMQ} \Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{AMF}$ nên $\Delta PQM \backsim \Delta AFM \Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{AFM} = 90^0$

Bài 237. Cho (O) đường kính BC, điểm A nằm trên cung BC. Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Dựng hình vuông $ABED$; AE cắt (O) tại điểm thứ hai F. Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại G.

1) Chứng minh $BGDC$ nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn này.

2) Chứng minh ΔBFC vuông cân và F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

3) Chứng minh $GEFB$ nội tiếp.

4) Chứng minh $C; F; G$ thẳng hàng và G cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Có nhận xét gì về I và F

Hướng dẫn

1) Chứng minh $BGDC$ nội tiếp

Chỉ ra $\widehat{GBC} = \widehat{GDC} = 90^0$. Tâm I là trung điểm GC.

2) Chứng minh ΔBFC vuông cân

Góc $\widehat{BCF} = \widehat{FAB}$ (Cùng chắn cung BF) mà góc $\widehat{FAB} = 45^0$ (tính chất hình vuông)

Nên $\widehat{BCF} = 45^0$. Vì BC là đường kính nên $\widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow \Delta BFC$ vuông cân tại F.

• Chứng minh F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD:

Ta chứng minh F cách đều các đỉnh $B; C; D$.

Do ΔBFC vuông cân nên $BC = FC$.

Xét hai tam giác FEB và FED có: EF chung; góc $\widehat{BEF} = \widehat{FED} = 45^0; BE = ED$ (hai cạnh của hình vuông $ABED$) $\Rightarrow \Delta BFE = \Delta EFD \Rightarrow BF = FD = DF$

3) Chứng minh $GEFB$ nội tiếp.

Do ΔBFC vuông cân ở F $\Rightarrow$ Cung $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{GBF} = 45^0$ (Góc giữa tiếp tuyến BG và dây BF)

Mà góc $\widehat{FED} = 45^0$ (tính chất hình vuông)$\Rightarrow$Góc $\widehat{FED} = \widehat{GBF} = 45^0$.

Ta lại có góc $\widehat{FED} + \widehat{FEG} = 180^0 \Rightarrow \widehat{GBF} + \widehat{FEG} = 180^0 \Rightarrow$ $GEFB$ nội tiếp.

4) Chứng minh $C;F;G$ thẳng hàng

Do $GEFB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFG} = \widehat{BEG} = 90^0$. Do ΔBFG vuông cân ở F nên $\widehat{BFC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BFG} + \widehat{CFB} = 180^0 \Rightarrow F,G,C$ thẳng hàng.

+ Do $\widehat{GBC} = \widehat{GDC} = 90^0$ $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BGDC$ là $F \Rightarrow G$ nằn trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

+ Dễ dàng chứng minh được $I \equiv F$.

Bài 238. Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn cắt nhau tại D. Từ D kẻ đường thẳng song song với AB , đường này cắt đường tròn ở E và F,cắt AC ở I (E nằm trên cung nhỏ BC).

1) Chứng minh $BDCO$ nội tiếp.

2) Chứng minh $DC^2 = DE.DF$.

3) Chứng minh $DOIC$ nội tiếp.

4) Chứng minh I là trung điểm FE .

Hướng dẫn

1) Chứng minh $BDCO$ nội tiếp: Chỉ ra $\widehat{DBO}=\widehat{DCO}=90^0$

2) Chứng minh $DC^2=DE.DF$:

Xét hai tam giác DEC và ΔDCF có :

Góc $\widehat{D}$ chung;

$\widehat{ECD}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EC}$ (Góc giữa tiếp tuyến và một dây)

$\widehat{EFC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EC}$ (Góc nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{ECD}=\widehat{DFC}\Rightarrow \Delta DCE\backsim\Delta DFC\Rightarrow DC^2=DE.DF$

3) Chứng minh $DOIC$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BC}$ (Góc nội tiếp) (1)

$\widehat{BOC}=sd\overset{\frown}{BC}$ (Góc ở tâm); $OB=OC;DB=DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

OD chung $\Rightarrow \Delta BOD=\Delta COD\Rightarrow \widehat{BOD}=\widehat{COD}$

$\Rightarrow \widehat{DOC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BC}$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow \widehat{DOC}=\widehat{BAC}$.

Do $DF//AB\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{DIC}$ (Đồng vị) $\Rightarrow \widehat{DOC}=\widehat{DIC}\Rightarrow DOIC$ nội tiếp.

4) Chứng minh I là trung điểm FE .

Do $DOIC$ nội tiếp $\Rightarrow$ góc $\widehat{OID}=\widehat{OCD}$ (cùng chắn cung OD)

Mà $\widehat{OCD}=90^0$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OID}=90^0\Rightarrow OI\perp ID\Rightarrow OI\perp FE$.

Bán kính OI vuông góc với dây cung $EF\Rightarrow$I là trung điểm EF .

Bài 239. Cho (O), dây cung AB. Từ điểm M bất kỳ trên cung $AB(M\neq A$ và $M\neq B)$,kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H. Gọi MQ là đường cao của ΔMAN .

1) Chứng minh 4 điểm $A;M;H;Q$ cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh $NQ.NA=NH.NM$

3) Chứng minh MN là phân giác của góc $\widehat{BMQ}$.

4) Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN. Xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ.AN + MP.BN$ có giác trị lớn nhất.

Hướng dẫn

1) Chứng minh 4 điểm $A;M;H;Q$ cùng nằm trên một đường tròn.

- Chỉ ra $\widehat{AQM} + \widehat{AHM} = 180^0$

2) Chứng minh $NQ.NA = NH.NM$: Chỉ ra $\Delta NQM \backsim \Delta NAH\left(g.g\right) \Rightarrow NQ.NA = NH.NM$

3) Chứng minh MN là phân giác của góc $\widehat{BMQ}$.

- Cách 1: Gọi giao điểm MQ và AB là I. Chứng minh tam giác MIB cân ở M
- Cách 2: Góc $\widehat{QMN} = \widehat{NAH}$ (Cùng phụ với góc $\widehat{ANH}$)

  Góc $\widehat{NAH} = \widehat{NMB}$ (Cùng chắn cung NB)$\Rightarrow$đpcm

4) Xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ.AN + MP.BN$ có giác trị lớn nhất.

Ta có :

$$2S_{\Delta MAN} = MQ.AN \ ; \ 2S_{\Delta MBN} = MP.BN$$

Suy ra $2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} = MQ.AN + MP.BN$

Ta lại có: $2S_{DMAN} + 2S_{\Delta MBN} = 2(S_{\Delta MAN} + S_{\Delta MBN}) = 2S_{AMBN} = 2\dfrac{AB.MN}{2} = AB.\text{MN}$

Vậy: $MQ.AN + MP.BN = AB.MN$

Mà AB không đổi nên tích $AB.MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow$MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ MN là đường kính

$\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung AB .

Bài 240. Cho $(O;R)$ và $(I;r)$ tiếp xúc ngoài tại A $(R>r)$. Dựng tiếp tuyến chung ngoài BC, B nằm trên đường tròn tâm O và C nằm trên đường tròn tâm (I). Tiếp tuyến BC cắt tiếp tuyến tại A của hai đường tròn ở E.

1) Chứng minh ΔABC vuông ở A.

2) OE cắt AB ở N; IE cắt AC tại F. Chứng minh $N;E;F;A$ cùng nằm trên một đường tròn.

3) Chứng tỏ: $BC^2 = 4.Rr$

4) Tính diện tích tứ giác $BCIO$ theo $R;r$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh ΔABC vuông ở A:

Do BE và AE là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $AE = BE$.

Tương tự $AE = EC \Rightarrow AE = EB = EC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở A.

2) Chứng minh $N;E;F;A$ cùng nằm trên một đường tròn.

-Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì EO là phân giác của tam giác cân AEB

Nên EO là đường trung trực của $AB \Rightarrow OE \perp AB$ hay góc $\widehat{ENA} = 90^0$

Tương tự góc $\widehat{EFA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ENA} + \widehat{EFA} = 180^0$ mà đây là 2 góc đối nhau nên tứ giác $ANEF$ nội tiếp, suy ra 4 điểm $N;E;F;A$ cùng nằm trên một đường tròn

3) Chứng tỏ: $BC^2 = 4.Rr$

Ta có tứ giác $FANE$ có 3 góc vuông (cmt) $\Rightarrow FANE$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta OEI$ vuông ở E và $EA \perp OI$ (tính chất tiếp tuyến). Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

$AH^2 = OA.AI$ (bình phương đường cao bằng tích hai hình chiếu)

Mà $AH = \frac{BC}{2}$ và $OA = R; AI = r \Rightarrow \frac{BC^2}{4} = R.r \Rightarrow BC^2 = Rr$.

4) $S_{BCIO} = ?$

Ta có $BCIO$ là hình thang vuông $\Rightarrow S_{BCIO} = \frac{OB + IC}{2}.BC \Rightarrow S\frac{(r+R)\sqrt{rR}}{2}$

Bài 241. Trên hai cạnh góc vuông xOy lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. Một đường thẳng qua A cắt OB tại M (M nằm trên đoạn OB). Từ B hạ đường vuông góc với AM tại H, cắt AO kéo dài tại I.

1) Chứng minh $OMHI$ nội tiếp.

2) Tính góc $\widehat{OMI}$.

3) Từ O vẽ đường vuông góc với BI tại K. Chứng minh $OK = KH$.

4) Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $OMHI$ nội tiếp.

Sử dụng tổng hai góc đối.

2) Tính góc $\widehat{OMI}$.

Do $OB \perp AI; AH \perp AB$ (gt) và $OB \cap AH = \{M\}$

Nên M là trực tâm của tam giác $\widehat{ABI}$.

$\Rightarrow IM$ là đường cao nên $MI \perp AB$.

$\Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{ABO}$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mà ΔOAB vuông có $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân ở O

$\Rightarrow \widehat{OBA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{OMI} = 45^0$

3) Chứng minh $OK = KH$.

Ta có $\widehat{OHK} = \widehat{HOB} + \widehat{HBO}$ (góc ngoài ΔOHB)

Do $AOHB$ nội tiếp (vì góc $\widehat{AOB} = \widehat{AHB} = 90^0$)

$\Rightarrow$Góc $\widehat{HOB} = \widehat{HAB}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{HB}$) và $\widehat{OBH} = \widehat{OAH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{OH}$)

$\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{HAB} + \widehat{HAO} = \widehat{OAB} = 45^0$.

$\Rightarrow \Delta OKH$ vuông cân ở $K \Rightarrow OH = OK$.

4) Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.

Do $OK \perp KB \Rightarrow OKB = 90^0; OB$ không đổi khi M di động $\Rightarrow K$ nằm trên đường tròn đường kính OB

Khi $M \equiv O$ thì $K \equiv O$ Khi $M \equiv B$ thì K là điểm chính giữa cung AB. Vậy quỹ tích điểm K là $\frac{1}{4}$ đường tròn đường kính OB.

Bài 242. Cho (O) đường kính AB và dây CD vuông góc với AB tại F. Trên cung BC lấy điểm M. Nối A với M cắt CD tại E.

1) Chứng minh AM là phân giác của góc $\widehat{CMD}$.

2) Chứng minh $EFBM$ nội tiếp.

3) Chứng minh: $AC^2 = AE.AM$.

4) Gọi giao điểm CB với AM là N; MD với AB là I. Chứng minh $NI//CD$.

5) Chứng minh N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCIM.

Hướng dẫn

1) Chứng minh AM là phân giác của góc $\widehat{CMD}$.

Do $AB \perp CD \Rightarrow AB$ là phân giác của tam giác cân $COD \Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{AOD}$.

Các góc ở tâm $\widehat{AOC}$ và $\widehat{AOD}$ bằng nhau nên các cung bị chắn bằng nhau

$\Rightarrow$ cung $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow$ các góc nội tiếp chắn các cung này bằng nhau. Vậy $\widehat{CMA} = \widehat{AMD}$.

2) Chứng minh $EFBM$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{EFB} = 90^0$ (Do $AB \perp EF$)

$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{EFB} = 180^0$. đpcm.

3) Chứng minh: $AC^2 = AE.AM$.

Chứng minh $\Delta ACE \backsim \Delta AMC$ ($\hat{A}$ chung;góc $\widehat{ACD} = \widehat{AMD}$ cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ và $\widehat{AMD} = \widehat{CMA}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AMC}$).

4) Chứng minh $NI//CD$.

Do cung $AC = AD \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{AMD}$ (Góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau) hay $\widehat{NMI} = \widehat{NBI} \Rightarrow M$ và B cùng làm với hai đầu đoạn thẳng NI những góc bằng nhau $\Rightarrow MNIB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NMB} + \widehat{NIM} = 180^0$ mà $\widehat{NMB} = 90^0$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{NIB} = 90^0$ hay $NI \perp AB$.

Mà $CD \perp AB$ (gt) $\Rightarrow NI//CD$.

5) Chứng tỏ N là tâm đường tròn nội tiếp ΔICM.

Ta phải chứng minh N là giao điểm 3 đường phân giác của ΔCIM.

- Theo cmt ta có MN là phân giác của $\widehat{CMI}$

• Do $MNIB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{NIM} = \widehat{NBM}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MN}$)

Góc $\widehat{MBC} = \widehat{MAC}$ (cùng chắn cung CM)

Ta lạ có $\widehat{CAN} = 90^0$ (góc nội tiếp $\widehat{ACB} = 90^0$); $\widehat{NIA} = 90^0$ (vì $\widehat{NIB} = 90^0$)

$\Rightarrow ACNI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{CIN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CN}$) $\Rightarrow \widehat{CIN} = \widehat{NIM} \Rightarrow IN$ là phân giác $\widehat{CIM}$.

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCIM .

Bài 243. Cho (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến $AB; AC$ và cát tuyến ADE . Gọi H là trung điểm DE .

1) Chứng minh $A; B; H; O; C$ cùng nằm trên 1 đường tròn.

2) Chứng minh HA là phân giác của góc $\widehat{BHC}$.

3) Gọi I là giao điểm của BC và DE . Chứng minh $AB^2 = AI.AH$.

4) BH cắt (O) ở K . Chứng minh $AE // CK$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh: $A; B; O; C; H$ cùng nằm trên một đường tròn:

H là trung điểm $EB \Rightarrow OH \perp ED$ (đường kính đi qua trung điểm của dây …) $\Rightarrow \widehat{AHO} = 90^0$.

Mà $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^0$ (Tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow A; B; O; H; C$ cùng nằm trên đường tròn đường kính OA.

2) Chứng minh HA là phân giác của góc $\widehat{BHC}$.

Do $AB; AC$ là 2 tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAO} = \widehat{OAC} \\ AB = AC \end{cases}$.

$\Rightarrow$ cung $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ (hai dây băng nhau của đường tròn đường kính OA)

mà $\widehat{BHA} = \widehat{BOA}$ (Cùng chắn cung AB) và $\widehat{COA} = \widehat{CHA}$ (cùng chắn cung AC) mà cung $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{BOH} \Rightarrow \widehat{CHA} = \widehat{AHB}$. đpcm.

3) Xét hai tam giác ABH và AIB có:

Góc $\widehat{A}$ chung, $\widehat{CBA} = \widehat{BHA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta AIB$. đpcm.

4) Chứng minh $AE // CK$.

Do góc $\widehat{BHA}=\widehat{BCA}$ (cùng chắ cung AB) và sđ $\widehat{BKC}=\frac{1}{2}$Sđ $\overset{\frown}{BC}$ (góc nội tiếp)

Sđ $\widehat{BCA}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC}$ (góc giữa tiếp tuyến và 1 dây cung)

$\Rightarrow \widehat{BHA}=\widehat{BKC}\Rightarrow CK//AB$

Bài 244. Cho (O) đường kính $AB=2R$; xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là 1 đường kính bất kỳ. Gọi giao điểm của $AC;AD$ với xy theo thứ tự là $M;N$.

1) Chứng minh $MCDN$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AC.AM=AD.AN$.

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN$ và H là trung điểm MN . Chứng minh rằng $AOIH$ là hình bình hành.

4) Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

Hướng dẫn

1) Chứng minh $MCDN$ nội tiếp:

ΔAOC cân ở $O\Rightarrow \widehat{OCA}=\widehat{CAO}$; góc $\widehat{CAO}=\widehat{ANB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{AMB}$)

$\Rightarrow$góc $\widehat{ACD}=\widehat{ANM}$.

Mà góc $\widehat{ACD}+\widehat{DCM}=180^0$ $\Rightarrow \widehat{DCM}+\widehat{DNM}=180^0\Rightarrow DCMB$ nội tiếp.

2) Chứng minh: $AC.AM=AD.AN$

Chỉ ra $\Delta ACD\backsim\Delta ANM$.

3) Chứng minh $AOIH$ là hình bình hành.

Xác định I:

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN\Rightarrow I$ là giao điểm dường trung trực của CD và $MN\Rightarrow IH\perp MN$, $IO\perp CD$. Do $AB\perp MN;IH\perp MN\Rightarrow AO//IH$.

Vậy cách dựng I: Từ O dựng đường vuông góc với CD.Từ trung điểm H của MN dựng đường vuông góc với MN.Hai đường này cách nhau ở I.

• Do H là trung điểm $MN\Rightarrow AH$ là trung tuyến của tam giác vuông $AMN\Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{NAH}$.

Mà $\widehat{ANM}=\widehat{BAM}=\widehat{ACD}$ (cmt)$\Rightarrow \widehat{DAH}=\widehat{ACD}$.

Gọi K là giao điểm AH và DO do $\widehat{ADC}+\widehat{ACD}=90^0 \Rightarrow \widehat{DAK}+\widehat{ADK}=90^0$ hay ΔAKD vuông ở $K \Rightarrow AH \perp CD$ mà $OI \perp CD \Rightarrow OI//AH$. Vậy $AHIO$ là hình bình hành.

4) Quỹ tích điểm I:

Do $AOIH$ là hình bình hành $\Rightarrow IH = AO = R$ không đổi $\Rightarrow CD$ quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng R.

Bài 245. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là 1 điểm trên cung nhỏ BC . Kẻ $DE;DF;DG$ lần lượt vuông góc với các cạnh $AB;BC;AC$. Gọi H là hình chiếu của D lên tiếp tuyến Ax của (O) .

1) Chứng minh $AHED$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm của AH với HB và với (O) là P và $Q;ED$ cắt (O) tại M . Chứng minh $HA.DP = PA.DE$

3) Chứng minh $QM = AB$.

4) Chứng minh $DE.DG = DF.DH$.

5) Chứng minh $E;F;G$ thẳng hàng.(đường thẳng Sim sơn)

Hướng dẫn

1) Chứng minh AHED nội tiếp (Sử dụng hai điểm H;E cùng làm hành với hai đầu đoạn thẳng AD…)

2) Chứng minh $HA.DP = PA.DE$:

Xét hai tam giác vuông đồng dạng: HAP và EPD (Có $\widehat{HPA}=\widehat{EPD}$ đối đỉnh)

3) Chứng minh $QM = AB$:

Do $\Delta HPA \backsim \Delta EDP \Rightarrow \widehat{HAB}=\widehat{HDM}$

Mà sđ $\widehat{HAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$;

Sđ $\widehat{HDM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{QM} \Rightarrow$ cung $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{QM} \Rightarrow AB = QM$

4) Chưng minh : $DE.DG = DF.DH$.

Xét hai tam giác DEH và DFG có:

Do $EHAD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HAE}=\widehat{HDE}$ (cùng chắn cung HE) (1)

Và $\widehat{EHD}=\widehat{EAD}$ (cùng chắn cung ED) (2)

Vì $\widehat{F}=\widehat{G}=90^0 \Rightarrow DFGC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDG}=\widehat{FCG}$ (cùng chắn cung FG) (3)

$\widehat{FGD}=\widehat{FCD}$ (cùng chắn cung FD) (4)

Nhưng $\widehat{FCG}=\widehat{BCA}=\widehat{HAB}$ (5). Từ (1)(3)(5) $\Rightarrow \widehat{EDH}=\widehat{FDG}$ (6).

Từ (2);(4) và $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}$ (cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{EHD}=\widehat{FGD}$ (7)

Từ (6)và (7) $\Rightarrow \Delta EDH \backsim \Delta FDG \Rightarrow \dfrac{ED}{DF}=\dfrac{DH}{DG}$ $\Rightarrow$đpcm.

5) Chứng minh : $E;F;G$ thẳg hàng:

Ta có $\widehat{BFE}=\widehat{BDE}$ (cmt)và $\widehat{GFC}=\widehat{CDG}$ (cmt)

Do $ABCD$ nộ tiếp$\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{BMC}=180^0$.

Do $GDEA$ nội tiếp$\Rightarrow \widehat{EDG}+\widehat{EAG}=180^0$ $\Rightarrow \widehat{EDG}=\widehat{BDC}$ mà $\widehat{EDG}=\widehat{EDB}+\widehat{BDG}$ và

$\widehat{BCD}=\widehat{BDG}+\widehat{CDG}$ $\Rightarrow \widehat{EDB}=\widehat{CDG} \Rightarrow \widehat{GFC}=\widehat{BEF} \Rightarrow E;F;G$ thẳg hàng.

Bài 246. Cho ΔABC có $\widehat{A}=90^0, AB<AC$. Gọi I là trung điểm BC . Qua I kẻ $IK\perp BC$(K nằm trên BC) . Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $MA=AK$.

1) Chứng minh $ABIK$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O .

2) Chứng minh góc $\widehat{BMC}=2.\widehat{ACB}$.

3) Chứng tỏ $BC^2=2AC.KC$

4) AI kéo dài cắt đường thẳng BM tại N . Chứng minh $AC=BN$.

5) Chứng minh $NMIC$ nội tiếp.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $ABIK$ nội tiếp : HS tự làm.

2) Chứng minh $\widehat{BMC}=2\widehat{ACB}$

do $AB\perp MK$ và $MA=AK$ (gt) $\Rightarrow \Delta BMK$ cân ở $B \Rightarrow \widehat{BMA}=\widehat{AKB}$

Mà $\widehat{AKB}=\widehat{KBC}+\widehat{KCB}$ (Góc ngoài tam giác KBC).

Do I là trung điểm BC và $KI\perp BC$ (gt) $\Rightarrow \Delta KBC$ cân ở K.

$\Rightarrow \widehat{KBC}=\widehat{KCB}$ Vậy $\widehat{BMC}=2\widehat{ACB}$

3) Chứng minh: $BC^2 = 2AC.KC$

Xét 2 tam giác vuông ACB và ICK có góc C chung $\Rightarrow \Delta ACB \backsim \Delta ICK$

$\Rightarrow \frac{AC}{IC} = \frac{CB}{CK} \Rightarrow IC = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{BC}{2}} = \frac{BC}{CK} \Leftrightarrow BC^2 = 2AC.KC$. đpcm

4) Chứng minh $AC = BN$

Do $\widehat{AIB} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA}$ (góc ngoài ΔIAC) và ΔIAC cân ở I $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \widehat{AIB} = 2\widehat{IAC}$ (1).

Ta lạ có $\widehat{BKM} = \widehat{BMK}$ và $\widehat{BKM} = \widehat{AIB}$ (tứ giác AKIB nội tiếp và đây là hai góc cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{BMK}$ (2) mà $\widehat{BMK} = \widehat{MNA} + \widehat{MAN}$ (góc ngoài tam giác MNA)

Do ΔMNA cân ở M(gt) $\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MNA} \Rightarrow \widehat{BMK} = 2\widehat{MNA}$ (3)

Từ(1);(2);(3) $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{MNA}$ và $\widehat{MAN} = \widehat{IAC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \ldots$

5) Chứng minh $NMIC$ nội tiếp:

do $\widehat{MNA} = \widehat{ACI}$ hay $\widehat{MNI} = \widehat{MCI} \Rightarrow$ hai điểm $N;C$ .....

Bài 247. Cho (O) đường kính AB cố định, điểm C di động trên nửa đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt tại M . Gọi $H;K$ là hình chiếu của M lên AC và AB .

1) Chứng minh $MOBK$ nội tiếp.

2) Chứng minh tứ giác $CKMH$ là hình vuông.

3) Chứng minh $H;O;K$ thẳng hàng.

4) Gọi giao điểm HK và CM là I . Khi C di động trên nửa đường tròn thì I chạy trên đường nào?

Hướng dẫn

1) Chứng minh : $BOMK$ nội tiếp:

Ta có $\widehat{BCA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

CM là tia phân giác của góc $\widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{MCB} = 45^0$.

$\Rightarrow$ cung $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = 90^0$.

$\Rightarrow$ dây $AM = MB$ có O là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB$ hay góc $\widehat{BOM} = \widehat{BKM} = 90^0$

$\Rightarrow BOMK$ nội tiếp.

2) Chứng minh $CHMK$ là hình vuông:

Do tam giác vuông HCM có 1 góc bằng 45^0 nên ΔCHM vuông cân ở $H \Rightarrow HC = HM$, tương tự $CK = MK$. Do $\widehat{C} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90^0 \Rightarrow CHMK$ là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau $\Rightarrow CHMK$ là hình vuông.

3) Chứng minh H, O, K thẳng hàng:

Gọi I là giao điểm HK và MC. Do $MHCK$ là hình vuông $\Rightarrow HK \perp MC$ tại trung điểm I của MC. Do I là trung điểm $MC \Rightarrow OI \perp MC$ (đường kính đi qua trung điểm một dây…)

Vậy $HI \perp MC; OI \perp MC$ và $KI \perp MC \Rightarrow H; O; I$ thẳng hàng.

4) Do góc $\widehat{OIM} = 90^0; OM$ cố định $\Rightarrow I$ nằm trên đường tròn đường kính OM.

-Giới hạn: Khi $C \equiv B \Rightarrow I \equiv Q$; Khi $C \equiv A \Rightarrow I \equiv P$.

Vậy khi C di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên cung tròn PHQ của đường tròn đường kính OM.

Bài 248. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 2a$,chiều rộng $BC = a$ .Kẻ tia phân giác của góc ACD ,từ A hạ AH vuông góc với đường phân giác nói trên.

1) Chứng minh $AHDC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O mà ta phải định rõ tâm và bán kính theo a.

2) HB cắt AD tại I và cắt AC tại M;HC cắt DB tại N. Chứng tỏ $HB = HC$ và $AB.AC = BH.BI$.

3) Chứng tỏ MN song song với tiếp tuyến tại H của (O)

4) Từ D kẻ đường thẳng song song với BH; đường này cắt HC ở K và cắt (O) ở J. Chứng minh $HOKD$ nội tiếp.

Hướng dẫn

1) HS tự làm.

2) Xét hai ΔHCA và ΔABI có $\widehat{A} = \widehat{H} = 90^0$ và $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ (cùng chắn cung AH)

$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Delta HCA \backsim \Delta ABI \Rightarrow \dfrac{HC}{AB} = \dfrac{AC}{BI}$ mà $HB = HC \Rightarrow$ đpcm

3) Gọi tiếp tuyến tại H của (O) là Hx.

+ Do $AH = HD; AO = HO = DO \Rightarrow \Delta AHO = \Delta HOD \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{HOD}$

Mà ΔAOD cân ở $O \Rightarrow OH \perp AD$ và $OH \perp Hx$ (tính chất tiếp tuyến) nên $AD // Hx$ (1)

+ Do cung $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{HD} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{HBD} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{ACH}$ hay $\widehat{MBN} = \widehat{MCN}$ hay 2 điểm B;C cùng làm với hai đầu đoạn MN những góc bằng nhau $\Rightarrow MNCB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{NBC}$ (cùng chắn cung NC) mà $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ (cùng chắn cung DC) $\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{DAC}$

$\Rightarrow MN // DA$ (2). Từ(1)và (2)$\Rightarrow MN // Hx$.

4) Chứng minh $HOKD$ nội tiếp:

Do $DJ // BH \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{BDJ}$ (so le)$\Rightarrow$ cung $BJ = HD = AH = \dfrac{AD}{2}$ mà cung $AD = BC$

$\Rightarrow$ cung $BJ = JC \Rightarrow H; O; J$ thẳng hàng .

HJ là đường kính $\Rightarrow \widehat{HDJ} = 90^0$. Góc $\widehat{HJD} = \widehat{ACH}$ (cùng chắn 2 cung bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{OJK} = \widehat{OCK} \Rightarrow CJ$ cùng làm vớ hai đầu đoạn OK những góc bằng nhau

$\Rightarrow OKCJ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KOC} = \widehat{KJC}$ (cùng chắn cung KC); $\widehat{KJC} = \widehat{DAC}$ (cùng chắn cung DC)

$\Rightarrow \widehat{KOC} = \widehat{DAC} \Rightarrow OK // AD$ mà $AD \perp HJ \Rightarrow OK \perp HO \Rightarrow HDKC$ nội tiếp.

Bài 249. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB,bán kính $OC \perp AB$ .Gọi M là 1 điểm trên cung BC. Kẻ đường cao CH của tam giác ACM .

1. Chứng minh $AOHC$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ ΔCHM vuông cân và OH là phân giác của góc $\widehat{COM}$.
3. Gọi giao điểm của OH với BC là I. MI cắt (O) tại D. Chứng minh rằng: $CDBM$ là hình thang cân.
4. BM cắt OH tại N. Chứng minh ΔBNI và ΔAMC đồng dạng,từ đó suy ra: $BN.MC = IN.MA$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $AOHC$ nội tiếp: HS tự chứng minh.

2. Chứng minh ΔCHM vuông cân:

Do $OC \perp AB$ trại trung điểm O$\Rightarrow$ cung $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = 90^0$.

Ta lại có:

Sđ $\widehat{CMA} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC} = 45^0 \Rightarrow \Delta CHM$ vuông cân ở M.

+ Chứng minh OH là phân giác của góc $\widehat{COM}$:

Do ΔCHM vuông cân ở H $\Rightarrow CH = HM$; $CO = OB$ (bán kính);OH chung

$\Rightarrow \Delta CHO = \Delta HOM \Rightarrow \widehat{COH} = \widehat{HOM}$. đpcm.

3. Chứng minh : $CDBM$ là hình thang cân:

Do ΔOCM cân ở O có OH là phân giác $\Rightarrow OH$ là đường trung trực của CM mà $I \in OH \Rightarrow \Delta ICM$ cân ở $I \Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{IMC}$ mà $\widehat{ICM} = \widehat{MDB}$ (cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{IDB}$ hay $CM // DB$.

Do ΔIDB cân ở I $\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{IBD}$ và $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ (cùng chắn cung CM) nên $\widehat{CDB} = \widehat{MBD} \Rightarrow CDBM$ là hình thang cân.

4. Chứng minh ΔBNI và ΔAMC đồng dạng:

Do OH là đường trung trực của CM và $N \in OH \Rightarrow CN = NM$.

Do $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMB} = 90^0$ hay $NM \perp AM$ mà $CH \perp AM \Rightarrow CH // NM$.

$\widehat{CMH} = 45^o \Rightarrow \widehat{NHM} = 45^o \Rightarrow \Delta MNH$ vuông cân ở M

Vậy CHMN là hình vuông $\Rightarrow \widehat{INB} = \widehat{CMA} = 45^o$.

+ Do CMBD là thang cân $\Rightarrow CD = BM \Rightarrow$ cung $CD = BM$ mà cung $AC = CB \Rightarrow$cung $AD = CM$ nên $\widehat{CAM} = \widehat{CBM}$ (cùng chắn cung CM) $\Rightarrow \Delta INB = \Delta CMA$. đpcm

Bài 250. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong $(O;R)$ .Trên cạnh AB và AC lấy hai điểm M;N sao cho $BM = AN$.

1. Chứng tỏ ΔOMN cân.
2. Chứng minh : $OMAN$ nội tiếp.
3. BO kéo dài cắt AC tại D và cắt (O) ở E. Chứng minh $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.
4. Đường thẳng CE và AB cắt nhau ở F. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt FC tại I; AO kéo dài cắt BC tại J. Chứng minh BI đi qua trung điểm của AJ.

Hướng dẫn

1. Chứng minh ΔOMN cân:

Do ΔABC là tam giác đều nội tiếp trong $(O) \Rightarrow AO$ và BO là phân giác của $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{OBM} = 30^o$

; $OA = OB = R$ và $BM = AN$ (gt) $\Rightarrow \Delta OMB = \Delta ONA$

$\Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta OMN$ cân ở O.

2. Chứng minh $OMAN$ nội tiếp:

do $\Delta OBM = \Delta ONA$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{ANO}$

mà $\widehat{BMO} + \widehat{AMO} = 180^0 \Rightarrow \widehat{ANO} + \widehat{AMO} = 180^0 \Rightarrow AMON$ nội tiếp.

3. Chứng minh $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.

Do BO là phân giác của Δ đều $\Rightarrow BO \perp AC$ hay ΔBOD vuông ở D.

Áp dụng hệ thức Pitago ta có:

$$BC^2 = DB^2 + CD^2 = (BO + OD)^2 + CD^2 = BO^2 + 2.OB.OD + OD^2 + CD^2 \quad (1)$$

Mà $OB = R$, ΔAOC cân ở O có $\widehat{OAC} = 30^o$.

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^o \Rightarrow \widehat{AOE} = 60^o \Rightarrow \Delta AOE$ là tam giác đều có $AD \perp OE \Rightarrow OD = ED = \dfrac{R}{2}$

Áp dụng Pitago ta có: $OD^2 = OC^2 - CD^2 = R^2 - CD^2$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow BC^2 = R^2 + 2.R.\dfrac{R}{2} + CD^2 - CD^2 = 3R^2$.

4. Gọi K là giao điểm của BI với AJ.

Ta có $\widehat{BCE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) có $\widehat{B} = 60^o \Rightarrow \widehat{BFC} = 30^o$.

$\Rightarrow BC = \dfrac{1}{2}BF$ mà $AB = BC = AB = AF$. Do $AO \perp AI$ (tính chất tiếp tuyến) và $AJ \perp BC \Rightarrow AI // BC$ có A là trung điểm $BF \Rightarrow I$ là trung điểm CF. Hay $FI = IC$.

Do $AK // FI$. Áp dụng hệ quả Talét trong ΔBFI có: $\dfrac{AK}{EI} = \dfrac{BK}{BI}$

Do $KJ // CI$. Áp dụng hệ quả Talét trong ΔBIC có: $\dfrac{KJ}{CJ} = \dfrac{BK}{BI}$

$\frac{AK}{FI}=\frac{KJ}{CI}$. Mà $FI=CI\Rightarrow AK=KJ$. (đpcm)

Bài 251. Cho ΔABC vuông tại A, nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Gọi M là trung điểm cạnh AC. Đường tròn tâm I đường kính MC cắt cạnh BC ở N và cắt (O) tại D.

1. Chứng minh $ABNM$ nội tiếp và $CN.AB=AC.MN$.
2. Chứng tỏ B,M,D thẳng hàng và OM là tiếp tuyến của (I).
3. Tia IO cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh $BMOE$ là hình bình hành.
4. Chứng minh NM là phân giác của góc $\widehat{AND}$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $ABNM$ nội tiếp: (dùng tổng hai góc đối)

Chứng minh: $CN.AB=AC.MN$.

Chứng minh hai tam giác vuông ABC và NMC đồng dạng.

2. Chứng minh $B;M;D$ thẳng hàng.

Ta có $\widehat{MDC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I) hay $MD\perp DC$.

$\widehat{BDC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

Hay $BD\perp DC$. Qua điểm D có hai đường thẳng BD và DM cùng vuông góc với $DC\Rightarrow B;M;D$ thẳng hàng.

+ Chứng minh OM là tiếp tuyến của (I):

Ta có MO là đường trung bình của ΔABC (vì M;O là trung điểm của AC;BC-gt)

$\Rightarrow MO//AB$ mà $AB\perp AC$ (gt) $\Rightarrow MO\perp AC\Rightarrow MO\perp IC, M\in(I)\Rightarrow MO$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

3. Chứng minh $BMOE$ là hình bình hành:

$MO//AB\Rightarrow MO//BE$. Mà I là trung điểm $MC;O$ là trung điểm $BC\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\Delta MBC\Rightarrow OI//BM$ hay $OE//BM\Rightarrow BMOE$ là hình bình hành.

4. Chứng minh MN là phân giác của góc $\widehat{AND}$:

Do $ABNM$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MBA}=\widehat{MNA}$ (cùng chắn cung AM)

$\widehat{MBA}=\widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AD)

Do $MNCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{MND}$ (cùng chắn cung MD)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{MND} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 252. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi I là điểm bất kỳ trên đường chéo AC. Qua I kẻ các đường thẳng song song với $AB; BC$,các đường này cắt $AB; BC; CD; DA$ lần lượt ở $P; Q; N; M$.

1. Chứng minh $INCQ$ là hình vuông.
2. Chứng tỏ $NQ//DB$.
3. BI kéo dài cắt MN tại $E; MP$ cắt AC tại F. Chứng minh $MFIN$ nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm.
4. Chứng tỏ $MPQN$ nội tiếp. Tính diện tích của nó theo a.
5. Chứng minh $MFIE$ nội tiếp.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $INCQ$ là hình vuông:

$MI//AP//BN$ (gt) $\Rightarrow MI = AP = BN \Rightarrow NC = IQ = PD$

ΔNIC vuông ở N có $\widehat{ICN} = 45^o$ (Tính chất đường chéo hình vuông)

$\Rightarrow \Delta NIC$ vuông cân ở N $\Rightarrow INCQ$ là hình vuông.

2. Chứng minh : $NQ//DB$.

Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow DB \perp AC$

Do $IQCN$ là hình vuông $\Rightarrow NQ \perp IC$

Hay $NQ \perp AC \Rightarrow NQ//DB$.

3. Chứng minh $MFIN$ nội tiếp:

Do $MP \perp AI$ (tính chất hình vuông) $\Rightarrow \widehat{MFI} = 90^0; \widehat{MIN} = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow$ hai điểm $F; I$ cùng làm với hai đầu đoạn MN…..$\Rightarrow MFIN$ nội tiếp.

Tâm của đường tròn này là giao điểm hai đường chéo hình chữ nhật $MFIN$.

4. Chứng minh $MPQN$ nội tiếp:

Do $NQ//PM \Rightarrow MNQP$ là hình thang, có $PN = MQ \Rightarrow MNQP$ là thang cân.

Dễ dàng chứng minh thang cân nội tiếp.

Tính $S_{MNQP} = S_{MIP} + S_{MNI} + S_{NIQ} + S_{PIQ} = \frac{1}{2}S_{AMIP} + \frac{1}{2}S_{MDNI} + \frac{1}{2}S_{NIQC} + \frac{1}{2}S_{PIQB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2$

5. Chứng minh $MFIE$ nội tiếp:

Chỉ ra các tam giác vuông $\Delta BPI = \Delta IMN$ (do $PI = IM; PB = IN; \widehat{P} = \widehat{I} = 90^0$).

$\Rightarrow \widehat{PIB} = \widehat{IMN}$ mà $\widehat{PBI} = \widehat{EIN}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{IMN} = \widehat{EIN}$

Ta lại có $\widehat{IMN} + \widehat{ENI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EIN} + \widehat{ENI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IEN} = 90^0$

mà $\widehat{MFI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IEM} + \widehat{MFI} = 180^0 \Rightarrow FMEI$ nội tiếp.

Bài 253. Cho hình vuông $ABCD$, N là trung điểm $DC; BN$ cắt AC tại F, Vẽ đường tròn tâm O đường kính BN. (O) cắt AC tại E. BE kéo dài cắt AD ở $M; MN$ cắt (O) tại I.

1. Chứng minh $MDNE$ nội tiếp.
2. Chứng tỏ ΔBEN vuông cân.
3. Chứng minh MF đi qua trực tâm H của ΔBMN .
4. Chứng minh $BI = BC$ và ΔIEF vuông.
5. Chứng minh ΔIEF là tam giác vuông.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $MDNE$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{NEB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{MEN} = 90^0; \widehat{MDN} = 90^0$ (t/c hình vuông)

$\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MDN} = 180^0$. đpcm

2. Chứng minh ΔBEN vuông cân:

Ta có: ΔNEB vuông (cmt)

Do $CBNE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ENB} = \widehat{BCE}$ (cùng chắn cung BE) mà $\widehat{BCE} = 45^o$ (t/c hình vuông) $\Rightarrow \widehat{ENB} = 45^o$ $\Rightarrow$đpcm.

3. Chứng minh MF đi qua trực tâm H của ΔBMN .

Ta có $\widehat{BIN} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtròn)

$\Rightarrow BI \perp MN$. Mà $EN \perp BM$ (cmt) $\Rightarrow$BI và EN là hai đường cao của ΔBMN $\Rightarrow$Giao điểm của EN và BI là trực tâm H. Ta phải chứng minh $M;H;F$ thẳng hàng.

Do H là trực tâm $\Delta BMN \Rightarrow MH \perp BN$ (1)

$\widehat{MAF} = 45^o$ (t/c hình vuông); $\widehat{MBF} = 45^o$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{MAF} = \widehat{MBF} = 45^o \Rightarrow MABF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{MFB} = 180^0$ mà $\widehat{MAB} = 90^0 \left(gt\right) \Rightarrow \widehat{MFB} = 90^0$ hay $MF \perp BM$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow M;H;F$ thẳng hàng.

4. Chứng minh $BI = BC$:

Xét 2Δ vuông BCN và ΔBIN có cạnh huyền BN chung; $\widehat{NBC} = \widehat{NEC}$ (cùng chắn cung NC).

Do $\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90^0 \Rightarrow MEFN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NEC} = \widehat{FMN}$ (cùng chắn cung FN);

$\widehat{FMN} = \widehat{IBN}$ (cùng phụ với góc $\widehat{INB}$) $\Rightarrow \widehat{IBN} = \widehat{NBC} \Rightarrow \Delta BCN = \Delta BIN \Rightarrow BC = BI$.

*Chứng minh ΔIEF vuông:

Ta có $\widehat{EIB} = \widehat{ECB}$ (cùng chắn cung EB) và $\widehat{ECB} = 45^o \Rightarrow \widehat{EIB} = 45^o$ ❶

Do $\widehat{HIN} + \widehat{HFN} = 180^0 \Rightarrow IHFN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HIF} = \widehat{HNF}$ (cùng chắn cung HF);mà $\widehat{HNF} = 45^o$ (do ΔEBN vuông cân) $\Rightarrow \widehat{HIF} = 45^o$ ❷. Từ❶và ❷ $\Rightarrow \widehat{EIF} = 90^0$ $\Rightarrow$đpcm

5. Chứng minh BM là đường trung trực của QH:

Do $AI = BC = AB$ (gt và cmt) $\Rightarrow \Delta ABI$ cân ở B. Hai Δvuông ABM và ΔBIM có cạnh huyền BM chung; $AB = BI \Rightarrow \Delta ABM = \Delta BIM \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MBI}; \Delta ABI$ cân ở B có BM là phân giác $\Rightarrow$BM là đường trung trực của QH.

*Chứng minh MQBN là thang cân:

Tứ giác $AMEQ$ có $\widehat{A} + \widehat{QEN} = 180^0$ (do $EN \perp BM$ theo cmt)

$\Rightarrow AMEQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MQE}$ (cùng chắn cung ME) mà $\widehat{MAE} = 45^o$ và $\widehat{ENB} = 45^o$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{MQN} = \widehat{BNQ} = 45^o \Rightarrow MQ//BN$. Ta lại có $\widehat{MBI} = \widehat{ENI}$ (cùng chắn cung EN) và $\widehat{MBI} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{IBN} = \widehat{NBC}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{QBN} = \widehat{ABM} + \widehat{MBN} = \widehat{ABM} + 45^o$ (vì $\widehat{MBN} = 45^o$) $\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MNE} + \widehat{ENB} = \widehat{MBI} + 45^o$

$\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{QBN} \Rightarrow MQBN$ là thang cân.

Bài 254. Cho ΔABC có 3 góc nhọn $(AB < AC)$ .Vẽ đường cao AH. Từ H kẻ $HK; HM$ lần lượt vuông góc với $AB; AC$ .Gọi J là giao điểm của AH và MK.

1. Chứng minh $AMHK$ nội tiếp.
2. Chứng minh $JA.JH = JK.JM$.
3. Từ C kẻ tia $Cx \perp AC$ và Cx cắt AH kéo dài ở D. Vẽ $HI; HN$ lần lượt vuông góc với DB và DC. Chứng minh rằng : $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$
4. Chứng minh $M; N; I; K$ cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $AMHK$ nội tiếp: Dùng tổng hai góc đối.

2. Chứng minh: $JA.JH = JK.JM$.

Xét hai tam giác: ΔJAM và ΔJHK có: $\widehat{AJM} = \widehat{KJH}$ (đối đỉnh).

Do $AKHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{HKM}$ (cùng chắn cung HM)

$\Rightarrow \Delta JAM \backsim \Delta JKH \Rightarrow JA.JH = JK.JM$. đpcm

3. Chứng minh $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$

vì $AKHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{HAM}$ (cùng chắn cung HM)

Mà $\widehat{HAM} = \widehat{MHC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ACH}$).

Do $\widehat{HMC} = \widehat{MCN} = \widehat{CNH} = 90^0$ (gt) $\Rightarrow MCNH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH // CN$ hay

$\widehat{MHC} = \widehat{HCN} \Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{HCN}$.

4. Chứng minh: $M; N; I; K$ cùng nằm trên một đường tròn.

✦Do $BKHI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKI} = \widehat{BHI}$ (cùng chắn cung BI); $\widehat{BHI} = \widehat{IDH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{IBH}$)

✦Do $IHND$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{INH}$ (cùng chắn cung IH) $\Rightarrow \widehat{BKI} = \widehat{HNI}$

✦Do $AKHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AHM}$ (cùng chắn cung AM); $\widehat{AHM} = \widehat{MCH}$ (cùng phụ với $\widehat{HAM}$)

✦Do $HMCN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MCH} = \widehat{MNH}$ (cùng chắn cung MH) $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{MNH}$

mà $\widehat{BKI} + \widehat{AKM} + \widehat{MKI} = 180^0 \Rightarrow \widehat{HNI} + \widehat{MNH} + \widehat{MKI} = 180^0$ hay $\widehat{IKM} + \widehat{MNI} = 180^0 \Rightarrow M; N; I; K$ cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 255. Cho ΔABC vuông tại A . Đường cao AH. Đường tròn tâm H,bán kính HA cắt đường thẳng AB tại D và cắt AC tại E; Trung tuyến AM của ΔABC cắt DE tại I.

1. Chứng minh $D;H;E$ thẳng hàng.
2. Chứng minh $BDCE$ nội tiếp.Xác định tâm O của đường tròn này.
3. Chứng minh $AM \perp DE$.
4. Chứng minh $AHOM$ là hình bình hành.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $D;H;E$ thẳng hàng:

Do $\widehat{DAE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm H) $\Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow D;E;H$ thẳng hàng.

2. Chứng minh $BDCE$ nội tiếp:

ΔHAD cân ở H(vì $HD = HA =$ bán kính của đt tâm H) $\Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{HAD}$ mà $\widehat{HAD} = \widehat{HCA}$ (Cùng phụ với $\widehat{HAB}$)

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BCE} \Rightarrow$ Hai điểm D;C cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BE…

✦Xác định tâm O:

O là giao điểm hai đường trung trực của BE và BC.

3. Chứng minh: $AM \perp DE$:

Do M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = MC = MB = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$

mà $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ADE}$.

Ta lại có: $\widehat{ADE} + \widehat{AED} = 90^0$ (vì $\widehat{A} = 90^0$) $\Rightarrow \widehat{CAM} + \widehat{AED} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AIE} = 90^0$. Vậy $AM \perp ED$.

4. Chứng minh $AHOM$ là hình bình hành:

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp $BECD \Rightarrow OM$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow OM // AH$.

Do H là trung điểm DE (DE là đường kính của đường tròn tâm H) $\Rightarrow OH \perp DE$ mà $AM \perp DE \Rightarrow AM // OH \Rightarrow AHOM$ là hình bình hành.

Bài 256. Cho ΔABC có 2 góc nhọn,đường cao AH . Gọi K là điểm dối xứng của H qua AB; I là điểm đối xứng của H qua AC. $E;F$ là giao điểm của KI với AB và AC .

1. Chứng minh $AICH$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AI = AK$.
3. Chứng minh các điểm: $A;E;H;C;I$ cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh $CE;BF$ là các đường cao của ΔABC.
5. Chứng tỏ giao điểm 3 đường phân giác của ΔHFE chính là trực tâm của ΔABC.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $AICH$ nội tiếp:

+ Do I đối xứng với H qua $AC \Rightarrow AC$ là trung trực của $HI \Rightarrow AI = AH$ và $HC = IC; AC$ chung

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta AIC\left(ccc\right)$

$\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AIC}$ mà $\widehat{AHC} = 90^0$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AIC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIC} + \widehat{AHC} = 180^0 \Rightarrow AICH$ nội tiếp.

2. Chứng minh $AI = AK$:

Theo chứng minh trên ta có: $AI = AH$. Do K đối xứng với H qua AB nên AB là đường trung trực của $KH \Rightarrow AH = AK \Rightarrow AI = AK\left(= AH\right)$

3. Chứng minh $A;E;H;C;I$ cùng nằm trên một đường tròn:

Do $E \in AB$ và AB là trung trực của $KH \Rightarrow EK = EH; EA$ chung;

$AH = AK \Rightarrow \Delta AKE = \Delta AHE \Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{EHA}$ mà ΔAKI cân ở A (theo c/m trên $AK = AI$)

$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AIK} \Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{AIE} \Rightarrow$ hai điểm I và K cung làm với hai đầu đoạn AE…

$\Rightarrow A;E;H;I$ cùng nằm trên một đường tròn ký hiệu là (***C***)

Theo cmt thì $A;I;CV;H$ cùng nằm trên đường tròn (***C'***) $\Rightarrow$ (***C)*** và ***(C')*** trùng nhau vì có chung 3 điểm $A;H;I$ không thẳng hàng)

4. Chứng minh: $CE;BF$ là đường cao của ΔABC.

Do $AEHCI$ cùng nằm trên một đường tròn có $\widehat{AIC} = 90^0 \Rightarrow AC$ là đường kính $\Rightarrow \widehat{AEC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Hay CE là đường cao của ΔABC.

Chứng minh tương tự ta có BF là đường cao…

5. Gọi M là giao điểm AH và EC.Ta chứng minh M là giao điểm 3 đường phân giác của ΔHFE .

$EBHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MHE} = \widehat{MBE}$ (cùng chắn cungEM)

$BEFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{ECF}$ (Cùng chắn cung EF)

$HMFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FCM} = \widehat{FMH}$ (cùng chắn cung MF)

$\Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{MHF}$ $\Rightarrow$HA là pg…

Chứng minh tương tự có EC là phân giác của ΔHFE $\Rightarrow$đpcm.

Bài 257. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp trong (O) . Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC .Trên tia đối tia MB lấy $MK = MC$ và trên tia BA lấy $AD = AC$.

1. Chứng minh: $\widehat{BAC} = 2.\widehat{BKC}$
2. Chứng minh $BCKD$ nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn này.
3. Gọi giao điểm của DC với (O) là I. Chứng minh $B;O;I$ thẳng hàng.
4. Chứng minh $DI = BI$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $\widehat{BAC} = 2.\widehat{BKC}$:

$\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (cùng chắn cung BC)

$\widehat{BMC} = \widehat{MKC} + \widehat{MCK}$ (góc ngoài ΔMKC)

Mà $MK = MC$ (gt) $\Rightarrow \Delta MKC$ cân ở $M \Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MCK}$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = 2.\widehat{BKC} \Rightarrow \widehat{BAC} = 2.\widehat{BKC}$.

2. Chứng minh $BCKD$ nội tiếp:

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{ADC} + \widehat{ACD}$ (góc ngoài ΔADC) mà

$AD = AC$ (gt) $\Rightarrow \Delta ADC$ cân ở $A \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{BAC} = 2.\widehat{BDC}$

Nhưng ta lại có: $\widehat{BAC} = 2.\widehat{BKC}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BKC} \Rightarrow BCKD$ nội tiếp.

+ Xác định tâm:

Do $AB = AC = AD \Rightarrow A$ là trung điểm $BD \Rightarrow$ trung tuyến $CA = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta BCD$ vuông ở C.

Do $BCKD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DKB} = \widehat{DCB}$ (cùng chắn cung BD). Mà $\widehat{BCD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BKD} = 90^0 \Rightarrow DBKD$ vuông ở K có trung tuyến $KA \Rightarrow KA = \frac{1}{2}BD \Rightarrow AD = AB = AC = AK \Rightarrow A$ là tâm đường tròn…

3. Chứng minh $B;O;I$ thẳng hàng:

Do góc $\widehat{BCI} = 90^0$,mà $B;C;I \in (O) \Rightarrow BI$ là đường kính $\Rightarrow B;O;I$ thẳng hàng.

4. Chứng minh $BI = DI$:

+ Cách 1: Ta có $\widehat{BAI} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nử đường tròn) hay $AI \perp DB$,có A là trung điểm $\Rightarrow AI$ là đường trung trực của $BD \Rightarrow \Delta IBD$ cân ở $I \Rightarrow ID = BI$

+ Cách 2: $\widehat{ACI} = \widehat{ABI}$ (cùng chắn cung AI) ΔADC cân ở $D \Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{ADI}$

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{IBD} \Rightarrow DBID$ cân ở I $\Rightarrow$đpcm.

Bài 258. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong (O) .Gọi I là điểm chính giữa cung AB (Cung AB không chứa điểm $C;D$). IC và ID cắt AB ở $M;N$.

1. Chứng minh $D;M;N;C$ cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh $MA.MB = MI.MC$

3. DI kéo dài cắt đường thẳng BC ở F ;đường thẳng IC cắt đường thẳng AD ở E. Chứng minh : $EF//AB$.

4. Chứng minh: $IA^2 = IN.ID$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $D;M;N;C$ cùng nằm trên một đường tròn.

Sđ $\widehat{IMB} = \frac{1}{2}$ sđcung($\overset{\frown}{IB} + \overset{\frown}{AD}$)

Sđ $\widehat{NCD} = \frac{1}{2}$ Sđcung $\overset{\frown}{DI}$

Mà cung $\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{IA} \Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{NCD} \Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{NCD}$.

Ta lại có $\widehat{IMN} + \widehat{DMN} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{NCD} + \widehat{DMN} = 180^0 \Rightarrow MNCD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $MA.MB = MI.MC$

Xét ΔMBC và ΔMAI có:

$\widehat{IAB} = \widehat{ICB}$ (cùng chắn cung BI)

$\widehat{IMA} = \widehat{BMC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta MCB \Rightarrow$đpcm.

3. Chứng minh $EF//AB$:

Do $\widehat{IDA}=\widehat{ICB}$ (cùng chắn hai cung hai cung bằng nhau $IA=IB$) hay $\widehat{EDF}=\widehat{ECF}$

$\Rightarrow$ hai điểm D và C cùng làm với hai đầu đoạn EF… $\Rightarrow EDCF$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EFD}=\widehat{ECD}$ (cùng chắn cung ED),mà $\widehat{ECD}=\widehat{IMN}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EFD}=\widehat{FMN}\Rightarrow EF//AB$.

4. Chứng minh: $IA^2=IN.ID$.

Ta có: $\Delta AIN \backsim \Delta DIA$ vì: góc I chung; $\widehat{IAN}=\widehat{IDA}$ (hai góc nội tiếp chắ hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$đpcm.

Bài 259. Cho hình vuông $ABCD$,trên cạnh BC lấy điểm E . Dựng tia $Ax\perp AE$, Ax cắt cạnh CD kéo dài tại F . Kẻ trung tuyến AI của $\Delta AEF, AI$ kéo dài cắt CD tại K . Qua E dựng đường thẳng song song với AB ,cắt AI tại G .

1. Chứng minh $AECF$ nội tiếp.
2. Chứng minh: $AF^2=KF.CF$
3. Chứng minh: $EGFK$ là hình thoi.
4. Chứng minh: khi E di động trên BC thì $EK=BE+DK$ và chu vi ΔCKE có giá trị không đổi.
5. Gọi giao điểm của EF với AD là J. Chứng minh: $GJ\perp JK$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh $AECF$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{FAE}=\widehat{DCE}=90^0$ (gt) ..... $\Rightarrow AECF$ nội tiếp

2. Chứng minh: $AF^2=KF.CF$.

Do $AECF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DCA}=\widehat{FEA}$ (cung chắn cung AF). Mà $\widehat{DCA}=45^o$
(Tính chất hình vuông)

$\Rightarrow \widehat{FEA}=45^o\Rightarrow \Delta FAE$ vuông cân ở A có $FI=IE\Rightarrow AI\perp FE\Rightarrow \widehat{FAK}=45^o$.

$\Rightarrow \widehat{FKA}=\widehat{ACF}=45^o$ .Và $\widehat{KFA}$ chung $\Rightarrow \Delta FKA\backsim\Delta FCA\Rightarrow \dfrac{FA}{FC}=\dfrac{FK}{FA}\Rightarrow$ đpcm.

3. Chứng minh: $EGFK$ là hình thoi.

-Do AK là đường trung trực của $FE\Rightarrow \Delta GFE$ cân ở G

$\Rightarrow \widehat{GFE} = \widehat{GEF}$. Mà $GE//CF$ (cùng vuông góc với AD) $\Rightarrow \widehat{GEF} = \widehat{EFK}$ (so le)

$\Rightarrow \widehat{GFI} = \widehat{IFK} \Rightarrow FI$ là đường trung trực của $GK \Rightarrow GI = IK$,mà $IF = IE \Rightarrow GFKE$ là hình thoi.

4. Chứng minh $EK = BE + DK$:

Tam giác ADF và ΔABE có $AD = AB; AF = AE$.(ΔAEF vuông cân)

$\Rightarrow \Delta ADF = \Delta ABE \Rightarrow BE = DF$ mà $FD + DK = FK$ và $FK = KE$ (hình thoi) $\Rightarrow KE = BE + DK$

✦C/m chu vi tam giác CKE không đổi:

Gọi chu vi là $C = KC + EC + KE = KC + EC + BE + DK = (KC + DK) + (BE + EC) = 2BC$ không đổi.

5. Chứng minh $IJ \perp JK$:

Do $\widehat{JIK} = \widehat{JDK} = 90^0 \Rightarrow IJDK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{JIK} = \widehat{IDK}$ (cùng chắn cung IK) , $\widehat{IDK} = 45^o$ (t/c hình vuông)

$\Rightarrow \widehat{JIK} = 45^o \Rightarrow \Delta JIK$ vuông vân ở $I \Rightarrow JI = IK$,mà $IK = GI$

$\Rightarrow JI = IK = GI = \frac{1}{2}GK \Rightarrow \Delta GJK$ vuông ở J hay $GJ \perp JK$.

Bài 260. Cho ΔABC . Gọi H là trực tâm của tam giác. Dựng hình bình hành $BHCD$. Gọi I là giao điểm của HD và BC .

1. Chứng minh: $ABDC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, nêu cách dựng tâm O.
2. So sánh $\widehat{BAH}$ và $\widehat{OAC}$.
3. CH cắt OD tại E. Chứng minh $AB.AE = AH.AC$.
4. Gọi giao điểm của AI và OH là G. Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC.

Hướng dẫn

1. Chứng minh : $ABDC$ nội tiếp:

Gọi các đường cao của ΔABC là $AN; BM; CN$.

•Do $\widehat{AQH} + \widehat{HMA} = 180^0 \Rightarrow AQHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{QHM} = 180^0$

mà $\widehat{QHM} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{BHC} = \widehat{CDB}$ (2 góc đối của hình bình hành)

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{CDB} = 180^0 \Rightarrow ABDC$ nội tiếp.

•Cách xác định tâm O:

Do $CD//BH$ (t/c hình bình hành)

Và $BH \perp AC \Rightarrow CD \perp AC$ hay $\widehat{ACD} = 90^0$,mà $A;D;C$ nằm trên đường tròn

$\Rightarrow AD$ là đường kính. Vậy O là trung điểm AD .

2. So sánh $\widehat{BAH}$ và $\widehat{OAC}$:

$\widehat{BAN} = \widehat{QCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) mà $CH//BD$ (do $BHCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow \widehat{QCB} = \widehat{CBD}$ (so le); $\widehat{CBD} = \widehat{DAC}$ (cùng chắn cung CD) $\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

3. Chứng minh: $AB.AE = AH.AC$:

Xét hai tam giác ABH và ACE có $\widehat{EAC} = \widehat{HCB}$ (cmt); $\widehat{ACE} = \widehat{HBA}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \Delta ABH \backsim \Delta ACE \Rightarrow$ đpcm

4. Chứng minh: G là trọng tâm của ΔABC , ta phải chứng minh G là giao điểm ba đường trung tuyến hay $GJ = \frac{1}{3}AI$.

Do $IB = IC \Rightarrow OI \perp BC$ mà $AH \perp BC \Rightarrow OI//AH$ .Theo định lý TaLét trong ΔAGH

$\Rightarrow \frac{OI}{AH} = \frac{GI}{AG}$. Do I là trung để $HD \Rightarrow O$ là trung để $AD \Rightarrow \frac{OI}{AH} = \frac{1}{2}$ (T/c đường trung bình)

$\Rightarrow \frac{OI}{AH} = \frac{GI}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow GI = \frac{1}{2}AI$. Hay $GJ = \frac{1}{3}AI \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔABC .

Bài 261. Cho (O) và cung $\overset{\frown}{AB} = 90^0$. C là một điểm tuỳ ý trên cung lớn AB . Các đường cao $AI; BK; CJ$ của ΔABC cắt nhau ở H. BK cắt (O) ở $N; AH$ cắt (O) tại M. BM và AN gặp nhau ở D .

1) Chứng minh: $B; K; C; J$ cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: $BI.KC = HI.KB$.

3) Chứng minh: MN là đường kính của (O).

4) Chứng minh $ACBD$ là hình bình hành.

5) Chứng minh: $OC // DH$.

Hướng dẫn

1) Xét tứ giác $BJKC$ có $\widehat{CJB} = \widehat{CKB} = 90^0 (gt)$ mà đây là hai góc có đỉnh kề nhau, cùng nhìn cạnh BC suy ra tứ giác $BJKC$ nội tiếp.

2) Chỉ ra ΔBIH đồng dạng ΔBKC (g.g) nên $BI.KC = HI.KB$.

3) Chỉ ra $\widehat{ANB} = 45^0$ (góc nt chắn cung AB) mà $\widehat{NKA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NAK} = 45^0$.

Tương tự: $\widehat{ACB} = 45^0, \widehat{AIC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CAM} = 45^0 \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MAC} + \widehat{CAN} = 90^0 \Rightarrow MN$ là đường kính của (O) .

4) Chỉ ra $AD // CB$ (cùng vuông góc AM) , $AC // BD$ (cùng vuông BN) .

5) Ta có: $\widehat{COM} = 2.\widehat{CAM} = 90^0 \Rightarrow OC \perp MN$.

Xét tam giác NHD có: $\begin{cases} AM \perp ND \\ DM \perp NH \end{cases} \Rightarrow M$ là trực tâm tam giác nên $DH \perp MN \Rightarrow DH // OC$ (cùng vuông góc MN)

Bài 262. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi N là một điểm bất kỳ trên CD sao cho $CN < ND$. Vẽ đường tròn tâm O đườn kính BN. (O) cắt AC tại $F; BF$ cắt AD tại $M; BN$ cắt AC tại E .

1) Chứng minh ΔBFN vuông cân.

2) Chứng minh : $MEBA$ nội tiếp .

3) Gọi giao điểm của ME và NF là Q. MN cắt (O) ở P . Chứng minh $B;Q;P$ thẳng hàng.

Chứng tỏ $ME//PC$ và $BP = BC$.

4) Chứng minh ΔFPE là tam giác vuông.

Hướng dẫn

1) Chỉ ra BN là đường kính của $(O) \Rightarrow \widehat{BFN} = 90^0$.

Chỉ ra tứ giác $BFNC$ nội tiếp nên $\widehat{FNB} = \widehat{FCB} = 45^0$ (tính chất hình vuông) .

Suy ra ΔFNB vuông cân.

2) Chứng minh MEBA Nội tiếp

Chỉ ra $\widehat{MAE} = \widehat{MBE} = 45^0$.

3) Chứng minh B;Q;P thẳng hàng:

Do MABE nt$\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{NEB} = 180^0$ mà $\widehat{MAB} = 90^0$ (t/c hình vuông) $\Rightarrow \widehat{MEB} = 90^0$ hay ME⊥BN.

Theo chứng minh trên: $NF \perp BM \Rightarrow Q$ là trực tâm của $\Delta BMN \Rightarrow BQ \perp MN$ (1)

⇒Ta lại có BPN=1v(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay BP⊥MN(2).

Từ (1)và(2)⇒B;Q;P thẳng hàng.

+ Chứng minh: $MF//PC$.

Do $\widehat{MFN} = \widehat{MEN} = 90^0 \Rightarrow MFEN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FNM} = \widehat{FEM}$ (cùng chắn cung MF)

Mà $\widehat{FNP} = \widehat{FNM} = \widehat{FCD}$ (cùng chắn cung PF của (O)

$\Rightarrow \widehat{FEM} = \widehat{FCP} \Rightarrow ME//CP$

+ Chứng minh: $BP = BC$:

Do $ME//CP$ và $ME \perp BN \Rightarrow CP \perp BN$.Đường kính MN vuông góc với dây CP⇒ BN là đường trung trực của CP hay ΔBCP cân ở $B \Rightarrow BC = BP$.

4) Chứng minh ΔFPE vuông:

•Do FPNB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FPB} = \widehat{FNB} = 45^o$ (cmt)

•Dễ dàng cm được QENP nội tiếp (Hai góc đối tổng bằng 180^0) $\Rightarrow \widehat{QPE} = \widehat{QNE} = 45^o \Rightarrow$ đpcm.

Bài 263. Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy bốn điểm $A; B; C; D$ sao cho $AB = DB$; AB và CD cắt nhau ở E. BC cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở Q; DB cắt AC tại K.

1) Chứng minh CB là phân giác của góc ACE.

2) Chứng minh: $AQEC$ nội tiếp.

3) Chứng minh: $KA.KC = KB.KD$

4) Chứng minh: $QE // AD$.

Hướng dẫn

1/C/m CB là phân giác của góc ACE:

Do ABCD nội tiếp ⇒BCD+BAD=2v

Mà BCE+BCD=2V⇒BCE=BAD.

Do AB=AC(gt)⇒ΔBAD cân ở B⇒BAD=BDA.ta lại có BDA=BCA (Cùng chắn cung AB)⇒BCE=BCA ⇒đpcm.

2/C/m AQEC nội tiếp:

Ta có sđ QAB=$\frac{1}{2}$SđAB(góc giữa tiếp tuyến và một dây)

Sđ ADB=Sđ$\frac{1}{2}$AB

⇒QAB=ADB=BCE(cmt) ⇒QAE=QCD⇒hai điểm A và C cùng làm với hai đầu đoạn QE…⇒đpcm

3/C/m: KA.KC=KB.KD.

C/m ΔKAB∽ΔKDC.

4/C/m:QE//AD:

Do AQEC nt⇒QEA=QCA(cùng chắ cung QA) mà QCA=BAD(cmt) ⇒QEA=EAD⇒QE//AD.

Bài 264. Cho (O) và tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy hai điểm B và C sao cho $AB = BC$. Kẻ cát tuyến BEF với đường tròn. CE và CF cắt (O) lần lượt ở M và N. Dựng hình bình hành $AECD$.

1) Chứng minh : D nằm trên đường thẳng BF.

2) Chứng minh : $ADCF$ nội tiếp.

3) Chứng minh: $CF.CN = CE.CM$.

4) Chứng minh: $MN // AC$.

5) Gọi giao điểm của AF với MN là I. Chứng minh: DF đi qua trung điểm của NI.

Hướng dẫn

1) Chứng minh:D nằm trên đường thẳng BF.

Do ADCE là hình bình hành ⇒ DE và AC là hai đường chéo.

Do B là trung điểm của AC ⇒ B cũng là trung điểm DE hay DBE thẳng hàng.

Mà B;E;F thẳng hàng $\Rightarrow$ D nằm trên BF.

2) Chứng minh ADCF nội tiếp:

Do ADCF là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{CAE}$ (so le)

Sđ $\widehat{CAE} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AE}$ (góc giữa tt và một dây) mà $\widehat{EFA} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AE}$

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{EFA} \Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{DCA}$

$\Rightarrow$ hai điểm F và C cùng làm với 2 đầu đoạn AD…..$\Rightarrow$đpcm

3) Chứng minh: $CF.CN = CE.CM$. Ta chứng minh $\Delta CEF \backsim \Delta CNM$.

4) Chứng minh: $MN // AC$.

Do ADCF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DFC}$ (cùng chắn cung CD).

Mà ADCE là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ACE}$ (so le), ta lại có $\widehat{CFD} = \widehat{NME}$ (cùng chắ cung EN) $\Rightarrow$ $\widehat{ACM} = \widehat{CMN} \Rightarrow AC // MN$.

5) Chứng minh: DF đi qua trung để NI:

Gọi giao để của NI với FE là J

Do NI//AC(vì MN//AB)

$\Rightarrow$NJ//CB,theo hệquả Talét $\Rightarrow \frac{JE}{FB} = \frac{NJ}{BC}$

Tương tự : IJ//AB$\Rightarrow$ $\frac{JF}{FB} = \frac{JI}{AB}$

$\frac{JI}{AB} = \frac{NJ}{BC}$ Mà AB=AC (gt)$\Rightarrow$ JI=NJ

Bài 265. Cho (O;R) và đường kính AB;CD vuông góc với nhau.Gọi M là một điểm trên cung nhỏ CB.

1. C/m:ACBD là hình vuông.
2. AM cắt CD ;CB lần lượt ở P và I.Gọi J là giao điểm của DM và AB.C/m IB.IC=IA.IM
3. Chứng tỏ IJ//PD và IJ là phân giác của góc CJM.
4. Tính diện tích ΔAID theo R.

Hướng dẫn

1/C/m:ACBD là hình vuông:

Vì O là trung điểm của AB;CD nên ACBD là hình bình hành.

Mà AC=BD(đường kính) và AC⊥DB (gt)⇒hình bình hành ACBD là hình vuông.

2/C/m: IB.IC=IA.IM

Xét 2 ΔIAC và IBM có CIA=MIB(đ đ)

IAC=IBM(cùng chắn cung CM)

⇒ΔIAC∽ΔIBM⇒đpcm.

3/•C/m IJ//PD.

Do ACBD là hình vuông⇒ CBO=45°.

Và cung AC=CB=BD=DA.

⇒AMD=DMB=45°

⇒IMJ=IBJ=45°⇒M và B cùng làm với hai đầu đoạn IJ…⇒MBIJ nội tiếp.

⇒IJB+IMB=2v mà IMB=1v⇒ IJB =1v hay IJ⊥AB.Mà PD⊥AB(gt)⇒ IJ//PD

• C/m IJ là phân giác của góc CMJ:

-Vi IJ⊥AB hay AJI=1v và ACI=1v(t/c hình vuông)⇒ACIJ nội tiếp

⇒ IJC=IAC(cùng chắn cung CI) mà IAC=IBM(cùng chắn cungCM)

-Vì MBJI nội tiếp ⇒MBI=MJI(cùng chắn cung IM)

⇒ IJC= IJM⇒đpcm.

4/Tính diện tích ΔAID theo R:

Do CB//AD(tính chất hình vuông) có I∈CB⇒ khoảng cách từ đến AD chính bằng CA.Ta lại có ΔIAD và ΔCAD chung đáy và đường cao bằng nhau. ⇒$S_{IAD}=S_{CAD}$.Mà $S_{ACD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.⇒ $S_{IAD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB.CD$ (diện tích có 2 đường chéo vuông góc)⇒$S_{ABCD}=\frac{1}{2}2R.2R=2R^2$⇒$S_{IAD}=R^2$.

Bài 266. Cho ΔABC(A=1v).Kẻ AH⊥BC.Gọi O và O' là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC.Đường thẳng O O' cắt cạnh AB;AC tạ M;N.

1. C/m: Δ OHO' là tam giác vuông.
2. C/m:HB.HO'=HA.HO
3. C/m: ΔHOO'∽ΔHBA.
4. C/m:Các tứ giác BMHO;HO'NC nội tiếp.
5. C/m ΔAMN vuông cân.

Hướng dẫn

1/C/m:ΔOHO' vuông:

Do AHB=1v và O là tâm đường tròn nội tiếp ΔAHB⇒O là giao để ba đường phân giác của tam giác⇒AHO=OHB=45°.

Tương tự AHO'=O'HC=45°.

⇒O'HO=45°+45°=90°.

hay ΔO'HO vuông ở H.

2/C/m: HB.HO'=HA.HO

Do ΔABC vuông ởA và AH⊥BC⇒ABH=CAH (cùng phụ với góc C) mà OB;O'A lầ lượt là Phân giác của hai góc trên⇒OBH=O'AH và OHB=O'HA=45°.

⇒ΔHBO∽ΔHAO'⇒$\frac{HB}{HA}=\frac{OH}{O'H}$(1)⇒đcm.

3/c/m ΔHOO'∽ΔHBA.

Từ(1)⇒$\frac{HB}{HA}=\frac{HO}{HO'}$⇒$\frac{HO'}{HA}=\frac{HO}{HB}$(Tính chấ tỉ lệ thức). Các cặp cạnh HO và HO' của ΔHOO' tỉ lệ với các cặp cạnh của ΔHBA và góc xen giữ BHA=O'HO=1v ⇒ΔHOO'∽ΔHBA.

4/C/m:•BMOH nt:Do Δ HOO'∽ΔHBA⇒O'OH=ABH mà O'OH+MOH=2v⇒MBH+MOH=2v⇒đcm.

•C/m NCHO' nội tiếp: ΔHOO'∽ΔHBA(cmt) và hai tam giác vuông HBA và HAC có góc nhọn ABH=HAC (cùng phụ với góc ABC) nên ΔHBA∽ΔHAC ⇒ΔHOO' ∽ΔHAC⇒OO'H=ACH.

Mà OO'H=NO'H=2v ⇒NCH+NO'H=2v ⇒đcm.

5/C/m ΔAMN vuông cân:Do OMBH nt⇒OMB+OHB=2v mà AMO+OMB=2v⇒AMO=OHB mà OHB=45°⇒AMO=45°.Do ΔAMN vuông ởA có AMO=45°.⇒ΔAMN vuông cân ởA.

Bài 267. Cho nửa đường tròn O,đường kính AB=2R,gọi I là trung điểm AO.Qua I dựng đường thẳng vuông góc với AB,đường này cắt nửa đường tròn ở K.Trên IK lấy điểm C,AC cắt (O) tại M;MB cắt đường thẳng IK tại D.Gọi giao điểm của IK với tiếp tuyến tại M là N.

1. C/m:AIMD nội tiếp.
2. C?m CM.CA=CI.CD.
3. C/m ND=NC.
4. CB cắt AD tại E. C/m E nằm trên đường tròn (O) và C là tâm đường tròn nội tiếp ΔEIM.
5. Giả sử C là trung điểm IK.Tính CD theo R.

Hướng dẫn

1/C/m AIMD nội tiếp:

Sử dụng hai điểm I;M cùng làm với hai đầu đoạn AD…

2/c/m: CM.CA=CI.CD.

C/m hai ΔCMD và CAI đồng dạng.

3/C/m CD=NC:

sđNAM=$\frac{1}{2}$sđ cung AM

(góc giữa tt và một dây)

sđMAB= $\frac{1}{2}$ sđ cung AM

⇒NAM=MAB

Mà MBA=ACI(cùng phụ với góc CAI);CAI=KCM(đ đ)⇒NCM+NMC ⇒ΔNMC cân ở N⇒NC=NM.
Do NMD+NMC=1v NCM+NDM=1v và NCM=NMC ⇒NDM=NMD⇒ΔNMD cân ở N⇒ND=NM⇒NC=ND(đpcm)

4/C/m C là tâm đường tròn nội tiếp ΔEMI.Ta phải c/m C là giao điểm 3 đường phân giác của ΔEMI

(HS tự chứng minh)

5/Tính CD theo R:

Do KI là trung trực của AO⇒ΔAKO cân ở K⇒KA=KO mà KO=AO(bán kính) ⇒ΔAKO là Δ đều⇒KI= $\frac{R\sqrt{3}}{2}$⇒CI=KC=$\frac{KI}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{4}$. Áp dụng PiTaGo trong tam giác vuông ACI có:

CA=$\sqrt{CI^2+AI^2}=\sqrt{\frac{3R^2}{16}+\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{7}}{4}$⇒ΔCIA∽ΔBMA(hai tam giác vuông có góc CAI chung)

$\Rightarrow \frac{CA}{BA} = \frac{IA}{MA}$ $\Rightarrow$MA=$\frac{AB \times AI}{AC}$ = 2R.$\frac{R}{2}:\frac{R\sqrt{7}}{4}$ =

=$\frac{4R\sqrt{7}}{7}$ $\Rightarrow$MC=AM-AC=$\frac{9R\sqrt{7}}{28}$

áp dụng hệ thức câu 2$\Rightarrow$CD=$\frac{3R\sqrt{3}}{4}$.

Bài 268. Cho ΔABC.Gọi P là một điểm nằm trong tam giác sao cho góc PBA=PAC.Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống AB;AC.

1. C/m AHPK nội tiếp.
2. C/m HB.KP=HP.KC.
3. Gọi D;E;F lần lượt là trung điểm của PB;PC;BC.Cmr:HD=EF; DF=EK
4. C/m:đường trung trực của HK đi qua F.

Hướng dẫn

1/C/m AHPK nội tiếp(sử dụng tổng hai góc đối)

2/C/m: HB.KP=HP.KC

C/m hai Δ vuông HPB và KPC đồng dạng.

3/•C/m HD=FE:

Do FE//DO và DF//EP (FE và FD là đường trung bình của ΔPBC)$\Rightarrow$DPEF là hình bình hành.$\Rightarrow$DP=FE.Do D là trung điểm của BP$\Rightarrow$DH là trung tuyến của Δ vuông HBP$\Rightarrow$HD=DP$\Rightarrow$DH=FE

•C/m tương tự có:DF=EK.

4/C/m đường trung trực của HK đi qua F.

Ta phải C/m EF là đường trung trực của HK. Hay cần c/m FK=FH.

Do HD=DP+DB$\Rightarrow$HDP=2ABP(góc ngoài tam giác cân ABP)

Tương tự KEP=2ACP

Mà ABP=ACD(gt)

$\Rightarrow$ HDP=KEP(1)

Do PEFD là hình bình hành(cmt)$\Rightarrow$PDF=PEF(2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow$HDF=KEF mà HD=FE;KE=DF$\Rightarrow$ΔDHF∽ΔEFK(cgc)$\Rightarrow$FK=FH

$\Rightarrow$đcm.

Bài 269. Cho hình bình hành ABCD(A>90°).Từ C kẻ CE;Cf;CG lần lượt vuông góc với AD;DB;AB.

1. C/m DEFC nội tiếp.
2. C/m:CF^2=EF.GF.
3. Gọi O là giao điểm AC và DB.Kẻ OI⊥CD.Cmr: OI đi qua trung điểm của AG.
4. Chứng tỏ EOFG nội tiếp.

Hướng dẫn

1/C/mDEFC nội tiếp: (Sử dụng hai điểm E;F cùng làm với hai đầu đoạn thẳng CD).

2/C/m: CF^2=EF.GF: Xét 2 ΔECF và CGF có:

-Do DE FC nt⇒FCE=FDE(cùng chắn cung FE);FDE=FBC(so le).Do GBCF nt (tự c/m)⇒FBC=FGC(cùng chắn cung FC)⇒FGC=FCE.

-Do GBCF nt⇒GBF=GCF(cùng chắn cùngG) mà GBF=FDC(so le).DoDEFC nội tiếp ⇒FDC=FCE(cùng chắn cùngC)⇒FCG=FEC⇒ΔECF∽ΔCGF⇒đcm.

3/C/m O đi qua trung để AG. Gọi giao để của đường tròn tâm O đường kính AC là J

Do AG//CJ và CG⊥AG⇒AGCJ là hình chữ nhật

⇒AG=CJ . Vì OI⊥CJ nên I là trung để CJ (đường kính ⊥ với 1 dây…⇒đcm.

4/C/m EOFG nộ tiếp:

•Do CEA=AGC=1v⇒AGCE nt trong (O)⇒AOG=2GCE (góc nt bằng nửa góc ở tâm cùng chắn 1 cung;Và EAG+GCE=2v(2góc đối của tứ giác nt).Mà ADG+ADC=2v (2góc đối của hbh)

⇒EOG=2.ADC(**1**)

•Do DEFC nt⇒EFD=ECD(cùng chắn cungDE); ECD=90°-EDC (2 góc nhọn củ Δ vuông EDC)(✱);

Do GBCF nt⇒GFB=GBC (cùng chắn cung GB);BCG=90°-GBC(✱✱).

Từ(✱)và(✱✱)⇒EFD+GFB=90°-EDC+90°-GBC=180°-2ADC

mà EFG=180°-(EFD+GFB)=180°-180°+2ADC=2ADC(**2**)

Từ(**1**) và (**2**)⇒EOG=EFG⇒EOFG nt.

Bài 270. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B.Các đường thẳng AO cắt (O) lần lượt ở C và D;đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt ở E và F.

1. C/m:C;B;F thẳng hàng.
2. C/m CDEF nội tiếp.
3. Chứng tỏ DA.FE=DC.EA
4. C/m A là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDE.
5. Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O);(O')

Hướng dẫn

1/C/m:C;B;F thẳng hàng: Ta có:ABF=1v;ABC=1v(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
⇒ABC+ABF=2v⇒C;B;F thẳng hàng.

2/C/mCDEF nội tiếp:Ta có AEF=ADC=1v⇒E;D cùng làm với hai đầu đoạn CF…

⇒đpcm

3/C/m: DA.FE=DC.EA. Hai Δ vuông DAC và EAF có DAC=EAF(đ đ)

⇒Δ DAC ∽Δ EAF⇒đcm.

4/C/m A là tâm đường tròn ngoạ tiế ΔBDE.Ta phả c/m A là giao để 3 đường phân giác củ ΔDBE. **(Xem các bài trước)**

5/Để DE là tiế tuyến chung của 2 đường tròn cần đề kiện là:

Nếu DE là tiếp tuyến chung thì OD⊥DE và O'E⊥DE.

Vì OA=OD ⇒ΔAOD cân ở O⇒ODA=OAD.Tương tự ΔO'AE cân ở O'⇒O'AE=O'EA.

Mà O'AE=OAD (đđ) ⇒ODO'=OEO'⇒D và E cùng làm với hai đầu đoạn thẳng OO' những góc bằng nhau⇒ODEO' nt ⇒ODE+EO'O=2v.

Vì DE là tt của (O) và (O')⇒ODE=O'ED=1v⇒EO'O=1v⇒ODEO' là hình chữ nhật ⇒DA=AO'=OA=AE(t/c hcn) hay OA=O'A.

Vậ để DE là tt chung của hai đường tròn thì hai đường tròn có bán kính bằng nhau.(hai đường tròn bằng nhau)

Bài 271. Cho (O;R).Một cát tuyến xy cắt (O) ở E và F.Trên xy lấy điểm A nằm ngoài đoạn EF,vẽ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O).Gọi H là trung điểm EF.

1. Chứng tỏ 5 điểm:A;B;C;O;H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đường thẳng BC cắt OA ở I và cắt đường thẳng OH ở K.C/m: OI.OA=OH.OK=R^2.
3. Khi A di động trên xy thì I di động trên đường nào?
4. C/m KE và KF là hai tiếp tuyến của (O)

Hướng dẫn

1/ C/m:A;B;C;H;O cùng nằm trên một đường tròn:

Ta có ABO=ACO(tính chất tiếp tuyến).Vì H là trung điểm dây FE nên OH⊥FE (đường kính đi qua trung điểm 1 dây) hay kính AO.

OHA=1v⇒5 điểm A;B;O;C;H cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

2/C/m: OI.OA=OH.OK=R^2

•Do ΔABO vuông ở B có BI là đường cao. Áp dung hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: OB^2=OI.OA ;mà OB=R.⇒OI.OA=R^2.(1)

•Xét hai Δ vuông OHA và OIK có IOH chung.⇒ΔAHO∽ΔKIO⇒$\frac{OA}{OK}=\frac{OH}{OI}$

⇒OI.OA=OH.OK (2).

Từ(1) và (2)⇒đcm.

4/C/m KE và KF là hai tt của đường tròn (O).

-Xét hai ΔEKO và EHO. Do OH.OK=R^2=OE^2⇒$\frac{OH}{OE}=\frac{OE}{OK}$ và EOH chung

⇒ΔEOK∽ΔHOE(cgc)⇒OEK=OHE mà OHE=1v⇒OEK=1v hay OE⊥EK để E nằm trên (O)⇒EK là tt của (O)

Bài 272. Cho ΔABC (AB<AC) có hai đường phân giác CM,BN cắt nhau ở D. Qua A kẻ AE và AF lần lượt vuông góc với BN và CM. Các đường thẳng AE và AF cắt BC ở I;K.

1. C/m AFDE nội tiếp.
2. C/m: AB.NC=BN.AB
3. C/m FE//BC
4. Chứng tỏ ADIC nội tiếp. Chú ý bài toán vẫn đúng khi AB>AC

Hướng dẫn

1/C/m AFDE nội tiếp.(Hs tự c/m)

2/c/m: AB.NC=BN.AB

Do D là giao điểm các đường phân giác BN và CM của ΔABN $\Rightarrow \frac{BD}{DN} = \frac{AB}{AN}$ (1)

Do CD là phân giác của Δ CBN$\Rightarrow \frac{BD}{DN} = \frac{BC}{CN}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BC}{CN} = \frac{AB}{AN}$ ⇒đpcm

3) C/m FE//BC

Do BE là phân giác của ABI và BE⊥AI⇒BE là đường trung trực của AI. Tương tự CF là phân giác của ΔACK và CF⊥AK⇒CF là đường trung trực của AK⇒ E là F lần lượt là trung điểm của AI và AK⇒ FE là đường trung bình của ΔAKI⇒FE//KI hay EF//BC.

4/C/m ADIC nt:

Do AEDF nt⇒DAE=DFE (cùng chắn cung DE)

Do FE//BC⇒EFD=DCI(so le)

DAI=DCI⇒ADIC nội tiếp

Bài 273. Cho ΔABC(A=1v);AB=15;AC=20 (cùng đơn vị đo độ dài). Dựng đường tròn tâm O đường kính AB và (O') đường kính AC. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm thứ hai D.

1. Chứng tỏ D nằm trên BC.
2. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ DC.AM cắt DC ở E và cắt (O) ở N. C/m DE.AC=AE.MC
3. C/m AN=NE và O;N;O' thẳng hàng.
4. Gọi I là trung điểm MN.C/m góc OIO'=90°.
5. Tính diện tích tam giác AMC.

Hướng dẫn

1/Chứng tỏ:D nằm trên đường thẳng BC:Do ADB=1v;ADC=1v(góc nt chắn nửa đường tròn) ⇒ADB+ADC=2v⇒D;B;C thẳng hàng.

-Tính DB: Theo PiTaGo trong Δ vuông ABC có: BC=$\sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.Ap dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC có: AD.BC=AB.AC⇒AD=20.15:25=12

2/C/m: DE.AC=AE.MC.Xét hai tam giác ADE và AMC.Có ADE=1v(cmt) và AMC=1v (góc nt chắn nửa đường tròn).Do cung MC=DB(gt)⇒DAE=MAC(2 góc nt chắn 2 cung bằng nhau)

⇒ΔDAE∽ΔMAC⇒$\frac{DA}{MA} = \frac{DE}{MC} = \frac{AE}{AC}$ (1)⇒Đcm.

3/C/m:AN=NE:

Do BA⊥AO'(ΔABC Vuông ởA)⇒BA là tt củ (O')⇒sđAE=$\frac{1}{2}$sđAM

SđED=sđ$\frac{1}{2}$ (MC+AD) mà cung MC=DM⇒cung MC+AD=AM

$\Rightarrow$ AED =BAC $\Rightarrow\Delta$BAE cân ở B mà BM$\perp$AE$\Rightarrow$NA=NE.

•C/m O;N;O' thẳg hàng:ON là đường TB củ ΔABE$\Rightarrow$ON//BE và OO'//BE

$\Rightarrow$O;N;O' thẳg hàng.

4/Do OO'//BC và cung MC=MD $\Rightarrow$O'M$\perp$BC$\Rightarrow$O'M$\perp$OO'$\Rightarrow\Delta$NO'M vuông ở O' có O'I là trung tuyế $\Rightarrow\Delta$INO' cân ở I$\Rightarrow$IO'M=INO' mà INO'=ONA(đđ;ΔOAN cân ở O$\Rightarrow$ONA=OAN$\Rightarrow$OAI=IO'O$\Rightarrow$OAO'I nt$\Rightarrow$OAO'+OIO'=2v mà OAO'=1v $\Rightarrow$OIO'=1v.

5/ Tính diệ tích ΔAMC.Ta có $S_{AMC}=\frac{1}{2}$AM.MC .Ta có BD=$\frac{AB^2}{BC}=9\Rightarrow$DC=16

Ta lạ có DA^2=CD.BD=16.9$\Rightarrow$AD=12;BE=AB=15$\Rightarrow$DE=15-9=6$\Rightarrow$AE=$\sqrt{AD^2+DE^2}=6\sqrt{5}$

Từ1) tính AM;MC rồ tính S.

Bài 274. Trên (O;R),ta lần lượt đặt theo một chiều,kể từ điểm A một cung AB=60°, rồi cung BC=90° và cung CD=120°.

1. C/m ABCD là hình thang cân.
2. Chứng tỏ AC$\perp$DB.
3. Tính các cạnh và các đường chéo của ABCD.
4. Gọi M;N là trung điểm các cạnh DC và AB.Trên DA kéo dài về phía A lấy điểm P;PN cắt DB tại Q.C/m MN là phân giác của góc PMQ.

Hướng dẫn

1/C/m:ABCD là hình thang cân:Do cung BC=$90^o\Rightarrow$BAC=45° (góc nt bằng nửa cung bị chắn).do cung AB=60°;BC=90°;CD=$120^o\Rightarrow$

AD=$90^o\Rightarrow$ACD=$45^o\Rightarrow$BAC=ACD=45°.$\Rightarrow$AB//CD.

Vì cung DAB=150°.Cung ABC =150°.$\Rightarrow$ BCD=CDA. $\Rightarrow$ABCD là thang cân.

2/C/mAC$\perp$DB:

Gọi I là giao điểm của AC và BD.sđAID=$\frac{1}{2}$sđ cung(AD+BC)=180°=90°.$\Rightarrow$AC$\perp$DB.

3/Do cung AB=$60^o\Rightarrow$AOB=$60^o\Rightarrow\Delta$AOB là tam giác đều$\Rightarrow$AB=R.

Do cung BC=$90^o\Rightarrow$BOC=$90^o\Rightarrow\Delta$BOC vuông cân ở O$\Rightarrow$BC=AD=R$\sqrt{2}$ Do cung CD=120°

$\Rightarrow$DOC=120°.Kẻ OK$\perp$CD$\Rightarrow$DOK=60o$\Rightarrow$sin $60^o=\frac{DK}{OD}\Rightarrow$DK=$\frac{R\sqrt{3}}{2}$. $\Rightarrow$CD=2DK=R$\sqrt{3}$

-Tính AC:Do ΔAIB vuông cân ở I$\Rightarrow$2IC^2=$AB^2\Rightarrow$IA=AB$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ Tương tự IC=$\frac{R\sqrt{6}}{2}$; AC =

DB=IA+IC $=\frac{R\sqrt{2}}{2}+\frac{R\sqrt{6}}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})R\sqrt{2}}{2}$

4/PN cắt CD tại E;MQ cắt AB tại I;PM cắt AB tại J.

•Do JN//ME $\Rightarrow$ $\frac{JN}{ME}=\frac{PN}{PE}$

Do AN//DE $\Rightarrow \frac{AN}{DE}=\frac{PN}{PE}\Rightarrow \frac{AN}{DE}=\frac{JN}{ME}$

•Do NI//ME $\Rightarrow \frac{NI}{ME}=\frac{NQ}{QE}$

NB//ME $\Rightarrow \frac{NB}{DE}=\frac{NQ}{QE}\Rightarrow \frac{NI}{ME}=\frac{NB}{DE}$

Vì NB=NA $\Rightarrow \frac{JN}{ME}=\frac{NI}{ME}$

⇒NI=NJ.Mà MN⊥AB(tc thang cân)⇒ΔJMI cân ởp M⇒MN là phân giác…

Bài 275. Cho Δ đều ABC có cạnh bằng a.Gọi D là giao điểm hai đường phân giác góc A và góc B của tam giấcBC.Từ D dựng tia Dx vuông góc với DB.Trên Dx lấy điểm E sao cho ED=DB(D và E nằm hai phía của đường thẳng AB).Từ E kẻ EF⊥BC. Gọi O là trung điểm EB.

1. C/m AEBC và EDFB nội tiếp,xác định tâm và bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác trên theo a.
2. Kéo dài FE về phía F,cắt (D) tại M.EC cắt (O) ở N.C/m EBMC là thang cân.Tính diện tích.
3. c/m EC là phân giác của góc DAC.
4. C/m FD là đường trung trực của MB.
5. Chứng tỏ A;D;N thẳng hàng.
6. Tính diện tích phần mặt trăng được tạo bởi cung nhỏ EB của hai đường tròn.

Hướng dẫn

1/Do ΔABC là tam giác đều có D là giao điểm 2 đường phân giác góc A và B⇒BD=DA=DC mà DB=DE⇒A;B;E;C cách đều D⇒AEBC nt trong (D).

Tính DB.Ap dụng công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều ta có:

DB=$\frac{AB}{2Sin\frac{180^o}{n}}=\frac{AB}{2\sin 60^o}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do góc EDB=EFB=1v⇒EDFB nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính EB.Theo Pi Ta Go trong tam giác vuông EDB có:$EB^2=2ED^2=2.(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2$.

⇒EB=$\frac{a\sqrt{6}}{3}$⇒OE=$\frac{a\sqrt{6}}{6}$

2/C/m EBMC là thang cân:

Góc EDB=90° là góc ở tâm (D) chắn cung EB⇒Cung EB=90°⇒góc ECN=45°.⇒ΔEFC vuông cân ở F⇒FEC=45°⇒MBC=45^o(=MEC=45°) ⇒EFC=CBM=45°⇒BM//EC.Ta có ΔFBM vuông cân ở F⇒BC=EM ⇒EBMC là thang cân.

Do EBMC là thang cân có hai đường chéo vuông góc⇒$S_{EBMC}=\frac{1}{2}$BC.EM (BC=EM=a)⇒$S_{EBMC}=\frac{1}{2}a^2$.

3/C/m EC là phân giác của góc DCA:

Ta có ACB=60°;ECB=45°⇒ACE=15°.

Do BD;DC là phân giác của Δđều ABC ⇒DCB=ACD=30° và ECA=15° ⇒ECD=15° ⇒ECA=ECD⇒EC là phân giác của góc ECA.

4/C/m FD là đường trung trực của MB:

Do BED=BEF+FED=45° và FEC=FED+DEC=45°⇒BEF=DEC và DEC=DCE=15°.Mà BEF=BDF(cùng chắn cung BF) và NED=NBD(cùng chắn cung ND)⇒NBD=BDF⇒BN//DF mà BN⊥EC(góc nt chắn nửa đường tròn (O) ⇒DF ⊥EC.Do DC//BM(vì BMCE là hình thang cân)⇒DF⊥BM nhưng ΔBFM vuông cân ở F⇒FD là đường trung trực của MB.

5/C/m:A;N;D thẳng hàng: Ta có BND=BED=45° (cùng chắn cung DB) và ENB=90^o(cmt);ENA là góc ngoài ΔANC⇒ENA=NAC+CAN=45°

⇒ENA+ENB+BND=180°⇒A;N;D thẳng hàng.

6/Gọi diện tích mặt trăng cần tính là:**S**.

Ta có: **S** =$S_{\text{nửa (O)}}$-$S_{\text{viên phân EDB}}$

•$S_{(O)}=\pi.OE^2=\pi.(\frac{a\sqrt{6}}{6})^2=\frac{a^2\pi}{6}\Rightarrow S_{\frac{1}{2}(O)}=\frac{a^2\pi}{12}$

•$S_{\text{quạt EBD}}=\frac{\pi\times BD^2.90^o}{360^o}=\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{a^2\pi}{12}$

•$S_{\Delta EBD}=\frac{1}{2}DB^2=\frac{a^2}{6}$

•$S_{\text{viên phân}}=S_{\text{quạt EBD}}-S_{\Delta EDB}=\frac{a^2\pi}{12}-\frac{a^2}{6}=\frac{a^2(\pi-2)}{12}$

• **S** $=\frac{a^2\pi}{12}-\frac{a^2(\pi-2)}{12}=\frac{a^2}{6}$.

Bài 276. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC.Gọi a là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn;BA kéo dài cắt tiếp tuyến Cy ở F.Gọi D là điểm chính giữa cung AC;DB kéo dài cắt tiếp tuyến Cy tại E.

1. C/m BD là phân giác của góc ABC và OD//AB.
2. C/m ADEF nội tiếp.
3. Gọi I là giao điểm BD và AC.Chứng tỏ CI=CE và IA.IC=ID.IB.
4. C/m góc AFD=AED

Hướng dẫn

1/* C/mBD là phân giác của góc ABC:Do cung AD=DC(gt)⇒ABD=DBC(hai góc nt chắn hai cung bằng nhau)⇒BD là phân giác của góc ABC.

*Do cung AD=DC ⇒góc AOD=DOC(2 cung bằng nhau thì hai góc ở tâm bằng nhau).

Hay OD là phân giác của Δ cân AOC⇒OD⊥AC.

Vì BAC là góc nt chắn nửa đường tròn ⇒BA⊥AC

$\Rightarrow OD//BA$

2/C/m ADEF nội tiếp:

Do ADB=ACB(cùng chắn cung AB)

Do ACB=BFC(cùng phụ với góc ABC)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AFE}$

Mà ADB+ADE=2v⇒AFE+ADE=2v⇒ADEF nội tiếp.

3/C/m: *CI=CE:

Ta có:sđ DCA= $\frac{1}{2}$ sđ cung AD(góc nt chắn cung AD) Sđ ECD= $\frac{1}{2}$ sđ cung DC (góc giữa tt và 1 dây)

Mà cung AD=DC⇒DCA=ECD hay CD là phân giác của ΔICE.Nhưng CD⊥DB (góc nt chắn nửa đt)⇒CD vừa là đường cao,vừa là phân giác của ΔICE⇒ΔICE cân ở C⇒IC=CE.

*C/m ΔIAD∽ΔIBC(có DAC=DBC cùng chắn cung DC)

4/Tự c/m:

Bài 277. Cho nửa đtròn (O);đường kính AD.Trên nửa đường tròn lấy hai điểm B và C sao cho cung AB<AC.AC cắt BD ở E.Kẻ EF⊥AD tại F.

1. C/m:ABEF nt.
2. Chứng tỏ DE.DB=DF.DA.
3. C/m:I là tâm đường tròn nội tiếp ΔCJD.
4. Gọi I là giao điểm BD với CF.C/m BI^2=BF.BC-IF.IC

Hướng dẫn

1/Sử dụng tổng hai góc đối.

2/c/m: DE.DB=DF.DA

Xét hai tam giác vuông BDA và FDE có góc D chung.

⇒ΔBDA∽ΔFDE⇒đpcm.

3/C/m IE là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔFBC: HS tự cm

4/ C/m: BI^2=BF.BC-IF.IC

Gọi M là trung điểm ED.

*C/m:BCMF nội tiếp: Vì FM là trung tuyến của tam giác vuông FED⇒FM=EM=MD= $\frac{1}{2}$ ED⇒Các tam giác FEM;MFD cân ở M⇒MFD=MDF và EM F=MFD+MDF=2MDF(góc ngoài ΔMFD)

Vì CA là phân giác của góc BCF⇒2ACF=BCF.Theo cmt thì MDF=ACF

⇒BMF=BCF⇒BCMF nội tiếp.

*Ta có BFM∽ΔBIC vì FBM=CBI(BD là phân giác củ FBC-cmt) và BMF=BCI(cmt) $\Rightarrow \frac{BF}{BI} = \frac{BM}{BC}$

⇒BF.BC=BM.BI❶

*Δ IFM∽ΔIBC vì BIC=FIM(đ?).Do BCMF nộ tiế⇒CFM=CBM(cùng chắ cung CM)⇒ $\frac{IB}{FI}=\frac{IC}{IM}$

⇒IC.IF=IM.IB ❷

Lấ ❶trừ❷ vếtheo vế ⇒ BF.BC-IF.IC=BM.IB-IM.IB=IB.(BM-IM)=BI.BI=BI^2.

Bài 278. Cho (O) đường kính AB;P là một điểm di động trên cung AB sao cho PA<PB. Dựng hình vuông APQR vào phía trong đường tròn.Tia PR cắt (O) tại C.

1. C/m ΔACB vuông cân.
2. Vẽ phân giác AI của góc PAB(I nằm trên(O);AI cắt PC tại J.C/m 4 điểm J;A;Q;B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng tỏ: CI.QJ=CJ.QP.

Hướng dẫn

1/ C/mΔABC vuông cân:

Ta có ACB=1v(góc nt chắn nửa đt) Và APB=1v ;Do APQR là hvuông có PC là đường chéo ⇒PC là pg của góc APB⇒ cung AC=CB ⇒dây AC=CB ⇒ΔABC vuông cân.

2/C/m JANQ nội tiếp:

Vì APJ=JPQ=45°.(t/c hv);PJ chung;AP=PQ⇒ΔPAJ=ΔQPJ

⇒ góc PAJ=PQJ mà JAB=PAJ và PQJ+JQB=2v⇒ JAB+JQB=2v⇒JQBA nt.

3/C/m: CI.QJ=CJ.QP.

Ta cần chứng minh ΔCIJ∽ΔQPJ vì AIC=APC(cùng chắn cung AC) và APC=JPQ=45°⇒JIC=QPJ

Hơn nữa PCI=IAP(cùng chắn cung PI);IAP=PQJ(cmt)⇒ PQJ=ICJ

Bài 279. Cho nử (O) đường kính AB=2R.Trên nửa đường tròn lấy điểm M sao cho cung AM<MB.Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M cắ tt Ax và By lần lượt ở D và C.

1. Chứng tỏ ADMO nội tiếp.
2. Chứng tỏ AD.BC=R^2.
3. Đường thẳng DC cắt đường thẳng AB tại N;MO cắt Ax ở F;MB cắt Ax ở E. Chứng minh: AMFN là hình thang cân.
4. Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn để DE=EF

Hướng dẫn

1/C/m ADMO nt: Sử dụng tổng hai góc đối.

2/C/m: AD.BC=R^2.

✱C/m:DOC vuông ở O: Theo tính chất hai tt cắt nhau ta có ADO=MDO ⇒MOD=DOA.

Tương tự MOC=COB.Mà : MOD+DOA+MOC+COB=2v

⇒AOD+COB=DOM+MOC=1v hay DOC=1v.

✱Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DOC có OM là đường cao ta có:DM.MC=OM^2.

Mà DM=AD;MC=CB (t/c hai tt cắt nhau) và OM=R ⇒đcm.

3/Do AD=MD (t/c hai tt cắt nhau)và ADO=ODM ⇒OD là đường trung trực của AM hay DO⊥AM.

Vì FA⊥ON;NM⊥FO (t/c tt) và FA cắt MN tại D

⇒D là trực tâm của ΔFNO⇒DO⊥FN.Vậy AM//FN.

Vì ΔOAM cân ở O⇒OAM=OMA. Do AM//FN ⇒FNO=MAO và AMO=NFO ⇒FNO=NFO

Vậy FNAM là thang cân.

4/Do DE=FE nên EM là trung tuyến của Δ vuông FDM⇒ED=EM.❶ Vì DMA=DAM và DMA+EMD=1v;DAM+DEM=1v⇒EDM=DEM hay ΔEDM cân ở D hay DM=DE❷.

Từ❶và ❷⇒ΔEDM là Δ đều ⇒ODM=60°⇒AOM=60°. Vậy M nằm ở vị trí sao cho cung AM=1/3 nửa đường tròn.

Bài 280. Cho hình vuông ABCD,E là một điểm thuộc cạnh BC.Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE ,đường này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh:BHCD nt.
2. Tính góc CHK.
3. C/m KC.KD=KH.KB.
4. Khi E di động trên BC thì H di động trên đường nào?

Hướng dẫn

1/ C/m BHCD nt (Sử dụng H và C cùng làm với hai đầu đoạn thẳng DB…)

2/Tính góc CHK:

Do BDCE nt ⇒DBC=DHK(cùng chắn cung DC) mà DBC=45° (tính chất hình vuông)⇒DHC=45° mà DHK=1v(gt)⇒CHK=45°.

3/C/m KC.KD=KH.KB.

Chứng minh hai tam giác vuông

KCB và KHD đồng dạng.

4/Do BHD=1v không đổi ⇒E di chuyển trên BC thì H di động trên đường tròn đường kính DB.

Bài 281. Cho (O), từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tt AB và AC với đường tròn. Kẻ dây CD//AB. Nối AD cắt đường tròn (O) tại E.

1. C/m ABOC nội tiếp.
2. Chứng tỏ AB^2=AE.AD.
3. C/m góc $\widehat{AOC} = \widehat{ACB}$ và ΔBDC cân.
4. CE kéo dài cắt AB ở I. C/m IA=IB.

Hướng dẫn

1/C/m: ABOC nt:(HS tự c/m)

2/C/m: AB^2=AE.AD. Chứng minh ΔADB ∽ ΔABE , vì có $\widehat{E}$ chung.

Sđ $\widehat{ABE} = \frac{1}{2}$ sđcung $\overset{\frown}{BE}$ (góc giữ tt và 1 dây)

Sđ $\widehat{BDE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BE}$ (góc nt chắ $\overset{\frown}{BE}$)

3/C/m $\widehat{AOC} = \widehat{ACB}$

* Do ABOC nt$\Rightarrow$ $\widehat{AOC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắ cung AC); vì AC = AB (t/c 2 tt cắ nhau) $\Rightarrow$ ΔABC cân ởA$\Rightarrow$ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{ACB}$

* sđ $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BEC}$ (góc giữ tt và 1 dây); sđ $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BEC}$ (góc nt)

$\Rightarrow$ $\widehat{BDC} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ (do CD//AB) $\Rightarrow$ $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ $\Rightarrow$ ΔBDC cân ởB.

4/ Ta có $\hat{I}$ chung; $\widehat{IBE} = \widehat{ECB}$ (góc giữ tt và 1 dây; góc nt chắ cung BE)$\Rightarrow$ ΔIBE∽ΔICB$\Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{IB}{IC} \Rightarrow$ IB^2=IE.IC❶

Xét 2 ΔIAE và ICA có $\hat{I}$ chung; sđ $\widehat{IAE} = \frac{1}{2}$sđ($\overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{BE}$) mà ΔBDC cân ởB$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow$sđ $\widehat{IAE}$ =

sđ ($\overset{\frown}{BC}$-$\overset{\frown}{BE}$) = $\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CE}$= sđ $\widehat{ECA}$

$\Rightarrow$ ΔIAE∽ΔICA$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IA}$ $\Rightarrow$$IA^2$=IE.IC ❷

Từ❶và❷$\Rightarrow$$IA^2$=$IB^2$$\Rightarrow$ IA=IB

Bài 282. Cho ΔABC (AB=AC); BC=6; Đường cao AH=4(cùng đơn vị độ dài), nội tiếp trong (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của (O).
2. Kẻ đường kính CC'. Tứ giác ACA'C' là hình gì?
3. Kẻ AK⊥CC'. C/m AKHC là hình thang cân.
4. Quay ΔABC một vòng quanh trục AH. Tính diện tích xung quanh của hình được tạo ra.

Hướng dẫn

1/Tính OA:ta có BC=6; đường cao AH=4 $\Rightarrow$ AB=5; ΔABA' vuông ở B$\Rightarrow$$BH^2$=AH.A'H

$\Rightarrow$A'H=$\frac{BH^2}{AH} = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow$AA'=AH+HA'=$\frac{25}{4}$ $\Rightarrow$AO=$\frac{25}{8}$

2/ACA'C' là hình gì?

Do O là trung điểm AA' và CC'$\Rightarrow$ACA'C' là

Hình bình hành. Vì AA'=CC'(đường kính của đường tròn)$\Rightarrow$AC'A'C là hình chữ nhật.

3/ C/m: AKHC là thang cân:

◆ ta có AKC=AHC=1v⇒AKHC nội tiếp.⇒HKC=HAC(cùng chắn cung HC) mà ΔOAC cân ở O⇒OAC=OCA⇒HKC=HCA⇒HK//AC⇒AKHC là hình thang.

◆ Ta lại có:KAH=KCH (cùng chắn cung KH)⇒ KAO+OAC=KCH+OCA⇒Hình thang AKHC có hai góc ở đáy bằng nhau.Vậy AKHC là thang cân.

4/ Khi Quay Δ ABC quanh trục AH thì hình được sinh ra là hình nón. Trong đó BH là bán kính đáy; AB là đường sinh; AH là đường cao hình nón.

$Sxq=\frac{1}{2}p.d=\frac{1}{2}.2\pi.BH.AB=15\pi$

$V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}\pi BH^2.AH=12\pi$

Bài 283. Cho(O) và hai đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm OA. Qua I vẽ dây MQ⊥OA (M∈ cung AC ; Q∈ AD). Đường thẳng vuông góc với MQ tại M cắt (O) tại P.

1. C/m: a/ PMIO là thang vuông.
   b/ P; Q; O thẳng hàng.
2. Gọi S là Giao điểm của AP với CQ. Tính Góc CSP.
3. Gọi H là giao điểm của AP với MQ. Cmr:
   a/ $MH.MQ= MP^2$.
   b/ MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔQHP.

Hướng dẫn

1/ a/ C/m MPOI là thang vuông.

Vì OI⊥MI; CO⊥IO(gt)

⇒CO//MI mà MP⊥CO ⇒MP⊥MI⇒MP//OI⇒MPOI là thang vuông.

b/ C/m: P; Q; O thẳng hàng:

Do MPOI là thang vuông ⇒IMP=1v hay QMP=1v⇒ QP là đường kính của (O)⇒ Q; O; P thẳng hàng.

2/ Tính góc CSP:

Ta có

sđ $CSP=\frac{1}{2}$sđ(AQ+CP) (góc có đỉnh nằm trong đường tròn) mà cung CP = CM

và CM=QD ⇒ CP=QD ⇒ sđ $CSP=\frac{1}{2}$sđ(AQ+CP)=sđCSP=$\frac{1}{2}$sđ(AQ+QD) =$\frac{1}{2}$sđAD=45°. Vậy CSP=45°.

3/ a/ Xét hai tam giác vuông: MPQ và MHP có : Vì Δ AOM cân ở O; I là trung điểm AO; MI⊥AO⇒ΔMAO là tam giác cân ở M⇒ ΔAMO là tam giác đều ⇒ cung AM=60° và MC = CP =30°⇒ cung MP = 60°. ⇒ cung AM=MP ⇒ góc MPH= MQP (góc nt chắn hai cung bằng nhau.)⇒ ΔMHP∽ΔMQP⇒ đcm.

b/ C/m MP là tiế tuyế củ đường tròn ngoạ tiế Δ QHP.

Gọ J là tâm đròn ngoạ tiế ΔQHP.Do cung AQ=MP=60°⇒ ΔHQP cân ởH và QHP=120°⇒J nằ trên đường thẳg HO⇒ ΔHPJ là tam giác đ?u mà HPM=30°⇒MPH+HPJ=MPJ=90° hay JP⊥MP tạ P nằ trên đường tròn ngoạ tiế ΔHPQ ⇒đcm.

Bài 284. Cho (O;R) và một cát tuyến d không đi qua tâm O.Từ một điểm M trên d và ở ngoài (O) ta kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đườmg tròn; BO kéo dài cắt (O) tại điểm thứ hai là C.Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống d. Đường thẳng vuông góc với BC tại O cắt AM tại D.

1. C/m A; O; H; M; B cùng nằm trên 1 đường tròn.
2. C/m AC//MO và MD=OD.
3. Đường thẳng OM cắt (O) tại E và F. Chứng tỏ MA^2=ME.MF
4. Xác định vị trí của điểm M trên d để ΔMAB là tam giác đều.Tính diện tích phần tạo bởi hai tt với đường tròn trong trường hợp này.

Hướng dẫn

1/Chứng minh OBM=OAM=OHM=1v

2/◆ C/m AC//OM: Do MA và MB là hai tt cắt nhau ⇒BOM=OMB và MA=MB ⇒MO là đường trung trực của AB⇒MO⊥AB.

Mà BAC=1v (góc nt chắn nửa đtròn)⇒CA⊥AB. Vậy AC//MO.

◆C/mMD=OD. Do OD//MB (cùng ⊥CB)⇒DOM=OMB(so le) mà OMB=OMD(cmt)⇒DOM=DMO⇒ΔDOM cân ở D⇒đpcm.

3/C/m: MA^2=ME.MF: Xét hai tam giác AEM và MAF có góc M chung.

Sđ EAM=$\frac{1}{2}$sd cungAE(góc giữa tt và 1 dây)

Sđ AFM=$\frac{1}{2}$sđcungAE(góc nt chắn cungAE) ⇒EAM=A FM ⇒ΔMAE∽ΔMFA⇒đcm.

4/◆Vì AMB là tam giác đ?u⇒góc OMA=30°⇒OM=2OA=2OB=2R

◆Gọ diệ tích cầ tính là S.Ta có S=S_{OAMB}-$S_{quạ\ AOB}$

Ta có AB=AM=$\sqrt{OM^2-OA^2}$ =R$\sqrt{3}$⇒S AMBO=$\frac{1}{2}$BA.OM= $\frac{1}{2}$.2R. R$\sqrt{3}$ = $R^2\sqrt{3}$ ⇒ $S_{quạ}$=$\frac{\pi R^2.120}{360}$ = $\frac{\pi R^2}{3}$⇒S= $R^2\sqrt{3}$ - $\frac{\pi R^2}{3}$ = $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)R^2}{3}$

Bài 285. Cho nử (O) đường kính AB, vẽ các tiếp tuyến Ax và By cùng phía với nửa đường tròn. Gọi M là để chính giữa cung AB và N là một điểm bất kỳ trên đoạn AO. Đường thẳng vuông góc với MN tại M lần lượt cắt Ax và By ở D và C.

1. C/m AMN=BMC.
2. C/mΔANM=ΔBMC.
3. DN cắt AM tại E và CN cắt MB ở F. C/m FE⊥Ax.
4. Chứng tỏ M cũng là trung điểm DC.

Hướng dẫn

1/C/m AMN=BMA.

Ta có AMB=1v(góc nt chắn nửa đtròn) và do NM⊥DC⇒NMC=1v

Vậy AMB=AMN+NMB=NMB+BMC=1v⇒ AMN=BMA.

2/C/m ΔANM=ΔBCM:

Do cung AM=MB=90°.⇒dây AM=MB và MAN=MBA=45°.

(ΔAMB vuông cân ở M)⇒MAN=MBC=45°.

Theo c/mt thì CMB=AMN⇒ ΔANM=ΔBCM (gcg)

3/C/m EF⊥Ax.

Do ADMN nt⇒AMN=AND (cùng chắn cung AN)

Do MNBC nt⇒BMC=CNB(cùng chắn cung CB)

⇒ AND=CNB

Mà AMN=BMC (chứng minh câu 1)

Ta lại có AND+DNA=1v⇒CNB+DNA=1v ⇒ENC=1v mà EMF=1v ⇒EMFN nội tiếp

⇒EMN= EFN (cùng chắn cung NE)⇒ EFN=FNB

⇒ EF//AB mà AB⊥Ax ⇒ EF⊥Ax.

4/C/m M cũng là trung điểm DC:

Ta có NCM=MBN=45°.(cùng chắn cung MN).

⇒ΔNMC vuông cân ở M⇒ MN=NC. Và ΔNDC vuông cân ở N⇒NDM=45°.

⇒ΔMND vuông cân ở M⇒ MD=MN⇒ MC= DM ⇒đcm.

Bài 286. Từ một điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy điểm C và kẻ CD⊥AB; CE⊥MA; CF⊥MB. Gọi I và K là giao điểm của AC với DE và của BC với DF.

1. C/m AECD nt.
2. C/m:CD^2=CE.CF
3. Cmr: Tia đối của tia CD là phân giác của góc FCE.
4. C/m IK//AB.

Hướng dẫn

1/C/m: AECD nt: (dùng phương pháp tổng hai góc đối)

2/C/m: CD^2=CE.CF.

Xét hai tam giác CDF và CDE có:

-Do AECD nt⇒CED=CAD(cùng chắn cung CD)

-Do BFCD nt⇒CDF=CBF(cùng chắn cung CF)

Mà sđ CAD=$\frac{1}{2}$sđ cung BC(góc nt chắn cung BC)

Và sđ CBF=$\frac{1}{2}$sđ cung BC(góc giữa tt và 1 dây)⇒FDC=DEC❶

Do AECD nt và BFCD nt ⇒DCE+DAE=DCF+DBF=2v.

Mà MBD=DAM(t/c hai tt cắt nhau)⇒DCF=DCE❷.

Từ ❶và ❷⇒ΔCDF∽ΔCED⇒đcm.

3/Gọ tia đối của tia CD là Cx,Ta có góc xCF=180°-FCD và

xCE=180°-ECD. Mà theo cmt có: FCD= ECD⇒ xCF= xCE.⇒đcm.

4/C/m: IK//AB.

Ta có CBF=FDC=DAC(cmt)

Do ADCE nt⇒CDE=CAE(cùng chắn cung CE)

ABC+CAE(góc nt và góc giữ tt…cùng chắn 1 cung)⇒CBA=CDI.

Trong ΔCBA có BCA+CBA+CAD=2v hay KCI+KDI=2v⇒DKCI nội tiếp

⇒ KDC=KIC (cùng chắn cung CK)⇒KIC=BAC⇒KI//AB.

Bài 287. Cho (O; R) đường kính AB, Kẻ tiếp tuyến Ax và trên Ax lấy để P sao cho P>R. Từ P kẻ tiếp tuyến PM với đường tròn.

1. C/m BM/ / OP.
2. Đường vuông góc với AB tạo O cắt tia BM tại N. C/m OBPN là hình bình hành.
3. AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau ở J. C/m I; J; K thẳng hàng.

Hướng dẫn

1/ C/m:BM//OP:

Ta có MB⊥AM (góc nt chắn nửs đtròn) và OP⊥AM (t/c hai tt cắt nhau)

⇒ MB//OP.

2/ C/m: OBNP là hình bình hành:

Xét hai Δ APO và OBN có A=O=1v; OA=OB(bán kính) và do NB//AP ⇒ POA=NBO (đồng vị⇒ΔAPO=ΔONB⇒ PO=BN. Mà OP//NB (cmt) ⇒ OBNP là hình bình hành.

3/ C/m:I; J; K thẳng hàng:

Ta có: PM⊥OJ và PN//OB(do OBNP là hbhành) mà ON⊥AB⇒ON⊥OJ⇒I là trực tâm của ΔOPJ⇒IJ⊥OP.

-Vì PNOA là hình chữ nhật ⇒P; N; O; A; M cùng nằm trên đường tròn tâm K, mà MN//OP⇒ MNOP là thang cân⇒NPO= MOP, ta lại có NOM = MPN (cùng chắn cung NM) ⇒ $\widehat{IPO}=\widehat{IOP}$ ⇒ΔIPO cân ở I. Và KP=KO⇒IK⊥PO. Vậ K; I; J thẳg hàng.

Bài 288. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB; đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt nửa đường tròn tại C. Kẻ tiếp tuyến Bt với đường tròn. AC cắt tiếp tuyến Bt tại I.

1. C/m ΔABI vuông cân
2. Lấy D là 1 điểm trên cung BC, gọi J là giao điểm của AD với Bt. C/m AC.AI=AD.AJ.
3. C/m JDCI nội tiếp.

4. Tiếp tuyến tại D của nửa đường tròn cắt Bt tại K. Hạ DH⊥AB. Cmr: AK đi qua trung điểm của DH.

Hướng dẫn

1/C/m ΔABI vuông cân (Có nhiều cách-sau đây chỉ C/m 1 cách):

-Ta có ACB=1v(góc nt chắn nửa đtròn)⇒ΔABC vuông ở C.

Vì OC⊥AB tại trung điểm O⇒AOC=COB=1v

⇒ cung AC=CB=90°. ⇒CAB=45°. (góc nt bằng nửa số đo cung bị chắn)

ΔABC vuông cân ở C. Mà Bt⊥AB có góc CAB=45° ⇒ ΔABI vuông cân ở B.

2/C/m: AC.AI=AD.AJ.

Xét hai ΔACD và AIJ có góc A chung sđ góc CDA=$\frac{1}{2}$sđ cung AC =45°.

Mà Δ ABI vuông cân ở B⇒AIB=45°.⇒CDA=AIB⇒ ΔADC∽ΔAIJ⇒đcm

3/ Do CDA=CIJ (cmt) và CDA+CDJ=2v⇒ CDJ+CIJ=2v⇒CDJI nộ tiế.

4/Gọ giao để của AK và DH là N . Ta phải C/m:NH=ND

-Ta có: ADB=1v và DK=KB(t/c hai tt cắt nhau) ⇒KDB=KBD.

Mà KBD+DJK= 1v và KDB+KDJ=1v⇒KJD=JDK⇒ΔKDJ cân ở K ⇒KJ=KD ⇒KB=KJ.

-Do DH⊥ và JB⊥AB (gt)⇒DH//JB. Áp dụg hệ quả Ta lét trong các tam giác AKJ và AKB ta có:

$\frac{DN}{JK}=\frac{AN}{AK};\frac{NH}{KB}=\frac{AN}{AK}\Rightarrow\frac{DN}{JK}=\frac{NH}{KB}$ mà JK=KB⇒DN=NH.

Bài 289. Cho (O) và hai đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Trên OC lấy điểm N; đường thẳng AN cắt đường tròn ở M.

1. Chứng minh: NMBO nội tiếp.
2. CD và đường thẳng MB cắ nhau ở E. Chứng minh CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài góc AMB
3. C/m hệ thức: AM.DN=AC.DM
4. Nếu ON=NM. Chứng minh MOB là tam giác đều.

Hướng dẫn

1/C/m NMBO nội tiếp: Sử dụng tổng hai góc đối.

2/C/m CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài góc AMB:

-Do AB⊥CD tại trung điểm O của AB và CD.⇒Cung AD=DB=CB=AC=90°.

⇒sđAMD=$\frac{1}{2}$sđcungAD=45°.

sđDMB=$\frac{1}{2}$sđcung DB=45°.⇒AMD=DMB=45°.

Tương tựCAM=45°⇒EMC=CMA=45°.

Vậy CM và MD là phân giác của góc trong và góc ngoài góc AMB.

3/C/m: AM.DN=AC.DM.

Xét hai tam giác ACM và NMD có CMA=NMD=45°.(cmt)

Và CAM=NDM(cùng chắn cung CM)⇒ΔAMC∽ΔDMN⇒đcm.

4/Khi ON=NM ta c/m ΔMOB là tam giác đều.

Do MN=ON⇒ΔNMO cân ở N⇒NMO=NOM.

Ta lạ có: NMO+OMB=1v và NOM+MOB=1v⇒OMB=MOB.

Mà OMB=OBM ⇒OMB=MOB=OBM⇒ΔMOB là tam giác đều.

Bài 290. Cho (O) đường kính AB, và d là tiếp tuyến của đường tròn tại C. Gọi D; E theo thứ tự là hình chiếu của A và B lên đường thẳng d.

1. C/m: CD=CE.
2. Cmr: AD+BE=AB.
3. Vẽ đường cao CH của ΔABC.Chứng minh AH=AD và BH=BE.
4. Chứng tỏ:CH^2=AD.BE.
5. Chứng minh:DH//CB.

Hướng dẫn

1/C/m: CD=CE:

Do AD⊥d;OC⊥d;BE⊥d⇒AD//OC//BE.Mà OH=OB

⇒OC là đường trung bình của hình thang ABED⇒ CD=CE.

2/C/m AD+BE=AB.

Theo tính chất đường trung bình

của hình thang ta có:OC=$\frac{BE+AD}{2}$⇒BE+AD=2.OC=AB.

3/C/m BH=BE.Ta có:

sđ BCE=$\frac{1}{2}$sdcung CB(góc giữa tt và một dây)

sđ CAB=$\frac{1}{2}$sđ cung CB(góc nt)⇒ECB=CAB;ΔACB cuông ở C⇒HCB=HCA

⇒HCB=BCE⇒ ΔHCB=ΔECB (ch-gn) ⇒HB=BE.

-C/m tương tự có AH=AD.

4/C/m: CH^2=AD.BE.

ΔACB có C=1v và CH là đường cao ⇒CH^2=AH.HB. Mà AH=AD;BH=BE

⇒ CH^2=AD.BE.

5/C/m DH//CB.

Do ADCH nội tiếp ⇒ CDH=CAH (cùng chắn cung CH) mà CAH=ECB (cmt)

⇒ CDH=ECB ⇒DH//CB.

Bài 291. Cho ΔABC có: A=1v. D là một điểm nằm trên cạnh AB. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD;AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F và G.

1. C/m CAFB nội tiếp.
2. C/m AB.ED=AC.EB
3. Chứng tỏ AC//FG.
4. Chứng minh rằng AC;DE;BF đồng quy.

Hướng dẫn

1/C/m CAFB nội tiếp (Sử dụng Hai điểm A; F cùng làm với hai đầu đoạn thẳng BC)

2/C/m ΔABC và ΔEBD đồng dạng.

3/C/m AC//FG:

Do ADEC nội tiếp ⇒ACD=AED(cùng chắn cung AD).

Mà DFG=DEG(cùng chắn cung GD)⇒ACF=CFG⇒AC//FG.

4/C/m AC; ED; FB đồng quy:

AC và FB kéo dài cắt nhau tại K.Ta phải c/m K; D; E thẳng hàng.

BA⊥CK và CF⊥KB; AB∩CF=D⇒D là trực tâm của ΔKBC⇒KD⊥CB. Mà DE⊥CB(góc nt chắn nửa đường tròn)⇒Qua điểm D có hai đường thẳng cùng vuông góc với BC⇒Ba điểm K;D;E thẳng hàng.⇒đpcm.

Bài 292. Cho (O;R) và một đường thẳng d cố định không cắt (O).M là điểm di động trên d.Từ M kẻ tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn. Hạ OH⊥d tại H và dây cung PQ cắt OH tại I;cắt OM tại K.

1. C/m: MHIK nội tiếp.
2. 2/C/m OJ.OH=OK.OM=R^2.
3. CMr khi M di động trên d thì vị trí của I luôn cố định.

Hướng dẫn

1/C/m MHIK nội tiếp. (Sử dụng tổng hai góc đối)

2/C/m: OJ.OH=OK.OM=R^2.

-Xét hai tam giác OIM và OHK có O chung.

Do HIKM nội tiếp⇒IHK=IMK(cùng chắn cung IK) ⇒ΔOHK∽ΔOMI

$\Rightarrow \frac{OH}{OM} = \frac{OK}{OI}$⇒OH.OI=OK.OM ❶

OPM vuông ở P có đường cao PK.

Áp dụg hệ thức lượng trong tam giác vuông có: OP^2=OK.OM❷.

Từ❶và ❷⇒đcm.

4/Theo cm câu 2 ta có OI=$\frac{R^2}{OH}$mà R là bán kính nên không đổi.

d cố định nên OH không đổi ⇒OI không đổi. Mà O cố định ⇒I cố định.

Bài 293. Cho Δ vuông ABC(A=1v) và AB<AC. Kẻ đường cao AH.Trên tia đối của tia HB lấy HD=HB rồ từ C vẽ đường thẳng CE⊥AD tại E.

1. C/m AHEC nội tiếp.
2. Chứng tỏ CB là phân giác của góc ACE và ΔAHE cân.
3. C/m HE^2=HD.HC.
4. Gọ I là trung điểm AC.HI cắt AE tại J. Chứg minh: DC.HJ=2IJ.BH.
5. EC kéo dài cắt AH ở K. Cmr AB//DK và tứ giác ABKD là hình thoi.

Hướng dẫn

1/C/m AHEC nt (sử dụng hai để E và H…)

2/C/m CB là phân giác của ACE

Do AH⊥DB và BH=HD ⇒ΔABD là tam giác cân ở A ⇒BAH=HAD mà BAH=HCA (cùng phụ với góc B).

Do AHEC nt ⇒HAD=HCE (cùng chắn cung HE) ⇒ACB=BCE⇒đcm

-C/m ΔHAE cân: Do HAD=ACH(cmt) và AEH=ACH(cùng chắn cung AH) ⇒HAE=AEH⇒ΔAHE cân ở H.

3/C/m: HE^2=HD.HC. Xét 2 ΔHED và HEC có H chung.

Do AHEC nt ⇒DEH=ACH(cùng chắn cung AH) mà ACH=HCE(cmt) ⇒DEH=HCE ⇒ΔHED∽ΔHCE⇒đcm.

4/C/m DC.HJ=2IJ.BH:

✷Do HI là trung tuyến của tam giác vuông AHC⇒HI=IC⇒ΔIHC cân ở I ⇒IHC=ICH.

Mà ICH=HCE(cmt)⇒IHC=HCE⇒HI//EC.

Mà I là trung điểm của AC⇒JI là đường trung bình của ΔAEC⇒JI=$\frac{1}{2}$EC.

✷Xét hai ΔHJD và EDC có:

-Do HJ//EC và EC⊥AE⇒HJ⊥JD ⇒HJD=DEC=1v và HDJ=EDC⇒ΔJDH~ΔEDC⇒ $\frac{JH}{EC}=\frac{HD}{DC}$

⇒JH.DC=EC.HD mà HD=HB và EC=2JI⇒đpcm

5/Do AE⊥KC và CH⊥AK AE và CH cắt nhau tạt D⇒D là trực tâm của ΔACK⇒KD⊥AC mà AB⊥AC(gt)⇒KD//AB

-Do CH⊥AK và CH là phân giác của ΔCAK(cmt)⇒ΔACK cân ở C và AH=KH;

Ta lại có BH=HD(gt),mà H là giao điểm 2 đường chéo của tứ giác ABKD⇒ ABKD là hình bình hành. Nhưng DB⊥AK⇒ ABKD là hình thoi.

Bài 294. Cho tam giác ABC vuông cân ở A.Trong góc B, kẻ tia Bx cắt AC tại D, kẻ CE ⊥Bx tại E . Hai đường thẳng AB và CE cắt nhau ở F.

1. C/m FD⊥BC,tính góc BFD
2. C/m ADEF nội tiếp.

3. Chứng tỏ EA là phân giác của góc DEF
4. Nếu Bx quay xung quanh điểm B thì E di động trên đường nào?

Hướng dẫn

1/ C/m: FD⊥BC: Do BEC=1v;BAC=1v(góc nt chắn nửa đtròn).Hay BE⊥FC; và CA⊥FB.Ta lại có BE cắt CA tại D⇒D là trực tâm của ΔFBC⇒FD⊥BC.

Tính góc BFD:Vì FD⊥BC và BE⊥FC nên BFD=ECB(Góc có cạnh tương ứng vuông góc).Mà ECB=ACB(cùng chắn cung AB) mà ACB=45°⇒BFD=45°

2/C/m:ADEF nội tiếp:Sử dụng tổng hai góc đối.

3/C/m EA là phân giác của góc DEF.

Ta có AEB=ACB(cùng chắn cung AB).Mà ACB=45^o(ΔABC vuông cân ở A)

⇒AEB=45°.Mà DEF=90°⇒FEA=AED=45°⇒EA là phân giác…

4/Nêu Bx quay xung quanh B :

-Ta có BEC=1v;BC cố định.

-Khi Bx quay xung quanh B Thì E di động trên đường tròn đường kính BC.

-Giới hạn:Khi Bx≡ BC Thì E≡C;Khi Bx≡AB thì E≡A. Vậy E chạy trên cung phần tư AC của đường tròn đường kính BC.

Bài 295. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < BC)$, ngoại tiếp đường tròn tâm I. Hình chiếu của điểm I lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu vuông góc của điểm B lên cạnh AC là Q. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Q, P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ.

1) Chứng minh các tam giác BMR và BIP đồng dạng.

2) Chứng minh đường thẳng PR song song với đường thẳng AC.

3) Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

Hướng dẫn

a) Do AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $AM = AN$, suy ra tam giác AMN cân tại A. Từ đó

$$\widehat{BMR} = 180^0 - \widehat{AMN} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \angle BAC\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\widehat{BIC} = 180^0 - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180^0 - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{BCA}) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Do đó: $\widehat{BMR} = \widehat{BIC}$. (1)

Do $QA = QD$ và $BQ \perp AD$ nên tam giác ABD cân tại B. Từ đó $\widehat{ABR} = \widehat{DBR} = 90^0 - \widehat{BAC}$

Suy ra: $\widehat{BRM} = 180^0 - \widehat{BMR} - \widehat{MBR} = 180^0 - \left(90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) - \left(90^0 - \widehat{BAC}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

Mặt khác, ta cũng có (chú ý rằng C, P, I thẳng hàng)

$$\widehat{BPI} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \frac{1}{2}\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Do đó $\widehat{BRM} = \widehat{BPI}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có ΔBMR" $\Delta BIP(g.g)$

b) Do ΔBMR" ΔBIP (theo câu a) nên ta có $\frac{BM}{BR} = \frac{BI}{BP}$ (3)

và $\widehat{MBR} = \widehat{IBP}$ (4)

Từ (4), ta suy ra $\widehat{MBR} + \widehat{RBI} = \widehat{IBP} + \widehat{RBI}$ hay $\widehat{MBI} = \widehat{RBP}$. (5)

Từ (3) và (5), ta suy ra ΔBMI" ΔBRP (c-g-c). Do đó $\widehat{BRP} = \widehat{BMI} = 90^0$. Suy ra $RP \perp RQ$. Mặt khác, ta cũng có $BQ \perp AC$ nên $PR // AC$.

c) Ta có: $\widehat{RND} = 180^0 - \widehat{ANM} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

Lại có:

$$\widehat{PDN} = \widehat{ADB} + \widehat{BDP} = \widehat{ADB} + \frac{1}{2}\widehat{BDC} = \widehat{ADB} + \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{ADB}\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{ADB} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Do đó $\widehat{RND} = \widehat{PDN}$.

Mặt khác, theo chứng minh câu **b**), ta có $PR // DN$ nên tự giác $DNRP$ là hình thang. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tứ giác $DNRP$ là hình thang cân. Từ đó $\widehat{NPR} = \widehat{DRP} = \widehat{RDN}$ (6)

Tam giác RAD có RQ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên cân tại R.

Suy ra : $\widehat{RDN} = \widehat{RAN}$ (7).

Từ (6) và (7), ta có $\widehat{RPN} = \widehat{RAN}$. Lại có $\widehat{NRP} = \widehat{RNA}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{RNP} = 180^0 - \widehat{NRP} - \widehat{RPN} = 180^0 - \widehat{RNA} - \widehat{RAN} = \widehat{NRA}$

Mà hai góc RNP và NRA ở vị trí so le trong nên $RA // PN$. Tứ giác $ARPN$ có PR // AN và $RA // PN$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo RN và AP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy MN đi qua trung điểm của AP.

Bài 296. Cho đường tròn tâm O đường kính Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C không trùng với A, B và $CA > CB$). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) taij A , tại C cắt nhau ở điểm D , kẻ CH vuông góc với AB (H thuộc AB) , DO cắt AC tại E .

a) Chứng minh tứ giác $OECH$ nội tiếp.

b) Đường thẳng CD cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh: $2\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90°$.

c) Chứng minh: $AF.BH = AH.BF$.

d) BD cắt CH tại M . Chứng minh: $EM//AB$.

Hướng dẫn

a) ΔOAC cân tại O (vì $OA = OC$) mà OD là phân giác của $\widehat{AOC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OD cũng là đường cao $\Rightarrow$ $OD \perp AC \Rightarrow \widehat{OEC} = 90°$

Tứ giác $OECH$ có : $\widehat{OEC} + \widehat{OHC} = 90° + 90° = 180°$ $\Rightarrow OECH$ nội tiếp.

b) Ta có : $\widehat{BAC} = \widehat{BCF}$ (1) (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Mặt khác : $\widehat{BCA} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 90°$

ΔCHB vuông tại H $\Rightarrow \widehat{BCH} + \widehat{ABC} = 90°$. Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BCH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BCF} = \widehat{BCH}\left(= \widehat{BAC}\right) \Rightarrow$ $\widehat{HCF} = 2\widehat{BCF}$

Vì ΔHCF vuông tại H nên : $\widehat{HCF} + \widehat{CFB} = 90° \Rightarrow 2\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90°$ (đpcm)

c) Theo câu b) $\widehat{BCF} = \widehat{BCH}$ $\Rightarrow$ CB là phân giác của $\widehat{HCF}$. Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có : $\dfrac{BH}{BF} = \dfrac{CH}{CF}$ (3)

Vì $CA \perp CB \Rightarrow CA$ là phân giác của góc ngoài tại đỉnh C của ΔCHF , theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có: $\dfrac{AH}{AF} = \dfrac{CH}{CF}$ (3)

Từ (3) và (4) ta có : $\dfrac{BH}{BF} = \dfrac{AH}{AF} \Rightarrow AF.BH = AH.BF$ (đpcm)

d) Ta có : $BC//OD$ (cùng vuông góc với AC)$\Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{DOA}$ (hai góc đồng vị)

Xét ΔCBH và ΔDOA có : $\widehat{H} = \widehat{A} = 90°$; $\widehat{CBH} = \widehat{DOA}$ (theo trên)

Suy ra : $\Delta CBH \backsim \Delta DOA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{AO} = \dfrac{CH}{DA}$ thay $AO = \dfrac{AB}{2}$ vào ta được :

$\dfrac{2BH}{AB} = \dfrac{CH}{DA}$ (5)

Vì $MH // DA$ (cùng vuông góc với AB) nên theo hệ quả định lí Talet ta có:

$\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{MH}{DA} \Rightarrow \dfrac{2BH}{AB} = \dfrac{2MH}{DA}$ (6)

Từ (5) và (6) ta có : $\dfrac{CH}{DA} = \dfrac{2MH}{DA} \Rightarrow CH = 2MH$. Suy ra M là trung điểm của CH

Vì AC là một dây của (O) , $OD \perp AC$ tại $E \Rightarrow E$ là trung điểm của AC

Suy ra EM là đường trung bình của $\Delta ACH \Rightarrow EM // AH \Rightarrow EM // AB$ (đpcm).

Bài 297. Cho đường tròn (O) đường kính AC .Trên bán kính OC lấy điểm B tùy ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, kẻ BI vuông góc với CD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BMDI$ nội tiếp.

b) Tứ giác $ADBE$ là hình gì? Vì sao?

c) $MI^2 = MB.MC$.

d) Chứng minh I , B, E thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có: $DE \perp AC$ (giả thiết);

$BI \perp CD$ (giả thiết).

Suy ra: $\widehat{BMD} = 90°$ và $\widehat{BID} = 90°$.

Do đó: $\widehat{BMD}+\widehat{BID}=90°+90°=180°$.

Tứ giác $BMDI$ có tổng số đo hai góc đối bằng $180°$ nên $BMDI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có:

M là trung điểm của đoạn AB (giả thiết).

$AC\perp DE$ (giả thiết)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của dây cung DE (đường kính vuông góc với dây không đi qua tâm).

Tứ giác $ADBE$ có hai đường chéo AB và DE cắt nhau tại M nên tứ giác $ADBE$ là hình bình hành.

Lại có: $AB\perp DE$ (giả thiết).

Suy ra: $ADBE$ là hình thoi.

c) Ta có: ΔDIE vuông tại I, có IM là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE.

Do đó: $MI=DM\ \left(=\frac{1}{2}DE\right)$.

Lại có: $\widehat{ADC}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \Delta ADC$ vuông tại D.

$\Rightarrow DM^2=MA.MC$ (hệ thức giữa đường cao và hình chiếu).

Mà: $MA=MB$ (giả thiết);

Suy ra: $DM^2=MB.MC$.

Lại có: $MI=DM$ (chứng minh trên).

Do đó: $MI^2=MB.MC$ (đpcm).

d) Ta có: $\widehat{ADC}=90°$ (chứng minh ở ý c) $\Rightarrow$ $AD\perp DC$.

Mà: $BI\perp DC$ (giả thiết).

Suy ra: $BI\,//\,AD$. (1)

Lại có: Tứ giác $ADBE$ là hình thoi (chứng minh ở ý b) $\Rightarrow$ $EB\,//\,AD$. (2)

Từ (1) và (2), ta thấy qua điểm B có hai đường thẳng là EB và BI cùng song song với AD

Suy ra hai đường thẳng là EB và BI trùng nhau (theo tiên đề Ơclit).

Do đó I, B, E thẳng hàng (đpcm).

Bài 298. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Lấy điểm D tùy ý trên nửa đường tròn ($D \neq A$ và $D \neq B$). Dựng hình bình hành $ABCD$ .Từ D kẻ DM vuông góc AC tại M và từ B kẻ BN vuông góc với đường thẳng AC tại N .

a) Chứng minh bốn điểm D, M, B, C nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $AD.ND = BN.DC$

c) Tìm vị trí D trên nửa đường tròn sao cho $BN.AC$ lớn nhất.

Hướng dẫn

a)Vì D thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$

Lại có $AD//BC$ (vì $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (hai góc so le trong)

Xét tứ giác $MBCD$ có : $\widehat{DBC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$

$\widehat{DBC}, \widehat{DMC}$ là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh CD

$\Rightarrow MBCD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ Bốn điểm D, M, B, C nằm trên một đường tròn.

b)Xét tứ giác $ABND$ có : $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$

$\widehat{ADB}, \widehat{ANB}$ là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AB

$\Rightarrow ABND$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DNB} + \widehat{DAB} = 180^\circ$

Mà $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ $\Rightarrow \widehat{DNB} = \widehat{CDA}$

Xét ΔDAC và ΔNBD có :

$\widehat{DNB} = \widehat{CDA}$ (cmt)

$\widehat{DAC} = \widehat{NBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DN)

$\Rightarrow \Delta DAC \# \Delta NBD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DA}{NB} = \dfrac{DC}{ND}$ $\Rightarrow DA.ND = DC.NB$.

c) Kẻ $DH \perp AB$

Ta có : $BN.AC = 2.S_{\Delta ABC} = S_{ABCD} = DH.AB$

$BN.AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow DH.AB$ lớn nhất $\Leftrightarrow DH$ lớn nhất.

Ta có : $DH \le DO$ (với O là tâm đường tròn đường kính AB)

$\Rightarrow DH$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $DH = DO$ $\Leftrightarrow H \equiv O$ $\Leftrightarrow D$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$.

Bài 299. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Điểm M nằm ngoài đường tròn sao cho C là hình chiếu của M trên tia AB có $AC > AB$. MA; MB cắt đường tròn lần lượt ở D và N, CN cắt đường tròn tại E, DN cắt AB tại K. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AMCN$ nội tiếp

b) $\widehat{BMC} = \widehat{BDN}$

c) $DE \perp AB$

d) $AC.BK = BC.AK$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$\widehat{MCA} = 90^o$ (gt)

$\widehat{MNA} = \widehat{BNA} = 90^o$ vì AB là đường kính

Suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{MNA} = 90^o$ hay tứ giác $AMCN$ nội tiếp

b) Do tứ giác $AMCN$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BMC} = \widehat{CAN}$ mặt khác $\widehat{CAN} = \widehat{BDN}$ vì cùng chắn cung BN. Vậy $\widehat{BMC} = \widehat{BDN}$

c) Ta có:

$\widehat{ECA} = \widehat{NMA}$ (cùng chắn cung AN)

$\widehat{NED} = \widehat{NAD}$ (cùng chắn cung ND)

Suy ra $\widehat{ECA} + \widehat{NED} = \widehat{NAM} + \widehat{NMA} = 90^o$. Vậy $DE \perp AB$

d) Ta có $\widehat{MCB}=\widehat{MDB}=90^0$ nên tứ giác $CMDB$ nội tiếp suy ra $\widehat{CMB}=\widehat{CDB}$ mà $\widehat{CDB}=\widehat{CAN}=\widehat{BDN}$ nên $\widehat{BDC}=\widehat{BDK}$ hay BD là phân giác trong của $\widehat{KDC}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong của ΔKDC ta có: $\frac{DK}{DC}=\frac{BK}{BC}$ (1)

Mặt khác $BD\perp AD$ nên AD là phân giác ngoài của $\widehat{KDC}$ suy ra $\frac{DK}{DC}=\frac{AK}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{AC}=\frac{BK}{BC}$ hay $AK.BC=BK.AC$.

Bài 300. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F; tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác EFMK là tứ giác nội tiếp

2) AI^2 =IM .IB

3) Δ BAF là tam giác cân và tứ giác AKFH là hình thoi

4) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn

Hướng dẫn

1) Ta có $\widehat{AMB}=\widehat{AEB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn ½ đường tròn)

Suy ra tứ giác EFMK có $\widehat{FEK}=\widehat{FMK}=90^0$ nên tứ giác EFMK nội tiếp

2)

+) Xét hai tam giác AIB và MIA có

1. *Î chung*

$\widehat{IAB} = \widehat{IMA} = 90^0$ (gt)

Suy ra ΔAIB ~ ΔMIA

Suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow AI^2 = IM.IB$ (đpcm)

3) Ta có: $\widehat{HAE} = \widehat{EAM}$ (gt) mà $\widehat{HAE} = \widehat{ABE}$ và $\widehat{EAM} = \widehat{EBM}$

Suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{EBM}$. Vậy BE vừa là đường cao vừa là đường phân giác góc B nên Δ BAF cân ở B

+) Theo chứng minh trên E là trung điểm AF. Hơn nữa ΔHAK có AE vừa là phân giác vừa là đường cao nên ΔHAK cân tại A. Suy ra $AH = AK$ và E là trung điểm HK

Vậy tứ giác AKFH là hình thoi

4) Ta có tứ giác AKFI là hình thang (lí giải vì sao chứ ta chưa có trong đề)

Để tứ giác AKFI nội tiếp thì nó phải là hình thang cân

Tức là: $\widehat{MIA} = \widehat{IAM}$

Mà ΔAMI vuông ở M nên ΔAME phải là tam giác vuông cân suy ra $\widehat{MIA} = \widehat{IAM} = 45^0$ hay M là điểm chính giữa của cung AB

Vậy M là điểm chính giữa cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp một đường tròn

Bài 301. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B,C là tiếp điểm) và một cát tuyến ADE của (O) sao cho ADE nằm giữa hai tia AO và AB; $D, E \in (O)$. Đường thẳng qua D và song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại P, Q

1) gọi H là giao điểm của BC với OA. Chứng minh OEDH là tứ giác nội tiếp

2) gọi K là điểm đối xứng của B qua E. chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

1) Chứng minh OEDH là tứ giác nội tiếp.

Ta có:AB=AC (AB;AC là hai tiếp tuyến của (O)), OB=OC (bán kính)

Nên OA là trung trực của BC

Xét $\Delta AOB: \widehat{ABO} = 90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O)), $BH \perp OA$ (OA là trung trực của BC)

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO \qquad (a)$

Xét ΔABD và ΔAEB: $\widehat{ABD} = \widehat{AED} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{BD}$ (góc nội tiếp bởi tia tiếp tuyến và dây)

$\widehat{BAD}$ (góc chung), vậy ΔABD đồng dạng ΔAEB (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE\,(b)$

Từ (a) và (b) suy ra $\Rightarrow AH.AO = AD.AE \Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AO}$

Xét ΔAHD và ΔAEO: $\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AO}(cmt), \widehat{HAD}(chung)$. Vậy ΔAHD đồng dạng ΔAEO (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$. Do đó tứ giác OEDH là tứ giác nội tiếp (đpcm)

2) chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng

ta có: ΔODE cân tại O (do OD=OE) $\Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{AEO}$ mà

$\widehat{AHD} = \widehat{AEO}(cmt) \Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{AHD}$ Lại có $\widehat{EDO} = \widehat{EHO}$ (tứ giác OEDH nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{EHO} \Rightarrow 90^0 - \widehat{AHD} = 90^0 - \widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{BHA} - \widehat{ADH} = \widehat{BHO} - \widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BHE}$

Nên HB là phân giác trong của ΔDHE, mà $HA \perp HB(cmt)$ nên HA là phân giác ngoài của $\Delta DHE \Rightarrow \frac{HD}{HE} = \frac{ID}{IE} = \frac{AD}{AE}(c)$ (I là giao điểm của HB và DE)

$\Delta DIP, DP//BE(gt) \Rightarrow \frac{DP}{BE} = \frac{ID}{IE}(d)$ (hệ quả ta lét)

$\Delta ABE, DQ//BE(gt) \Rightarrow \frac{DQ}{BE} = \frac{AD}{AE}(e)$ (hệ quả ta lét)

Từ (c), (d), (e) $\Rightarrow \frac{DP}{BE} = \frac{DQ}{BE} \Rightarrow DP = DQ$

Gọi K' là giao điểm của AP và BE. $\Delta AEK', DP//EK'(gt) \Rightarrow \frac{DP}{EK'} = \frac{AD}{AE}\,(f)$

Từ (e); (f) $\Rightarrow \frac{DQ}{BE} = \frac{DP}{EK'}$ mà $DP = DQ(cmt) \Rightarrow BE = EK'$

Mặt khác $BE = EK(gt) \Rightarrow K' \equiv K$. Vậy A, P, K thẳng hàng (dpcm)

Bài 302. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E ($D \neq B, E \neq C$). BE cắt CD tại H. Kéo dài AH cắt BC tại F.

1.Chứng minh các tứ giác $ADHF$ và $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.

2.Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác $HMFN$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh các tứ giác $ADHE$ và $BDHF$ là tứ giác nội tiếp (Tự làm)

2) Các đoạn thẳng BH và DF cắt nhau tại M, CH và EF cắt nhau tại N. Biết rằng tứ giác $HMFN$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

$\widehat{BAC} + \widehat{DHE} = \widehat{MFN} + \widehat{BHC} = 180°$ (tứ giác $ADHE$; $HMFN$ nội tiếp)

Mà $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{MFN} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2}$

Lại có $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}; \widehat{F_2} = \widehat{C_1}; \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (tứ giác $BHDF$; $CEHF$; $BCED$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{F_2} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 2\widehat{B_1}$, mặt khác $\widehat{B_1} = 90° - \widehat{BAC}$ (ΔABE, $\widehat{AEB} = 90°$)

$\widehat{BAC} = 2\widehat{B_1} = 2\left(90^0 - \widehat{BAC}\right) \Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

Bài 303. Cho đường tròn (O) có tâm O. Dây cung AB cố định không phải đường kính. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm C, E sao cho góc CIA và EIB là các góc nhọn. CI cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C. EI cắt đường tròn (O) tại điểm F khác E. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại M; các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E và F cắt nhau tại N. Nối OM cắt CD tại P và ON cắt EF tại Q. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $PQNM$ nội tiếp.

2) MN song song AB.

Hướng dẫn

1) Ta có: $OC = OD$ (bán kính), $MC = MD$ (MC, MD là hai tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $CD \Rightarrow OM \perp DP$.

Xét ΔODM: $\widehat{ODM} = 90°$ (MD là tiếp tuyến của (O) tại D), $OM \perp DP$ (cmt)

$\Rightarrow OD^2 = OP.OM$ (a)

Chứng minh tương tự ta có: $OF^2 = OQ.ON$ (b). Lại có $OD = OF$ (bán kính)

Từ $a), b), c) \Rightarrow OP.OM = OQ.ON \Rightarrow \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{ON}{OM}$

Xét ΔOPQ và ΔONM có: $\hat{O}$ (góc chung); $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{ON}{OM}$ (cmt)

Vậy $\Delta OPQ \backsim \Delta ONM$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{OPQ} = \widehat{ONM} \Rightarrow$ tứ giác $PQNM$ nội tiếp.

2) Tứ giác $OPIQ$ có: $\widehat{OPI} = \widehat{OQI} = 90°$ (theo câu a)

Vậy tứ giác $OPIQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QOI} = \widehat{QPI}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{QI}$)

Lại có $\widehat{ONM} = \widehat{OPQ}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{QOI} + \widehat{ONM} = \widehat{QPI} + \widehat{OPQ} = \widehat{OPI} = 90°$ (do $OM \perp DP$)

$\Rightarrow \Delta ONT$ vuông tại T (T là giao điểm của OI và MN)

$\Rightarrow OI \perp MN$, mặt khác $OI \perp AB$ (vì $IA = IB = \dfrac{1}{2}AB$ (gt)). Vậy $AB // MN$.

Bài 304. Cho đường tròn (O) đường kính BC, dây AD vuông góc BC tại H. Gọi E, F theo

thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi $(I), (K)$ theo thứ tự là các

đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, tam giác HCF.

a) Xác định vị trí tương đối của các đường tròn: (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).

b) Tứ giác $AEHF$ hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh: $AE.AB = AF.AC$

d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

e) Xác định vị trí điểm H để EF có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn

a) $\Delta BEH, \widehat{BEH} = 90^0 \Rightarrow \Delta BEH$ nội tiếp đường tròn đường kính $BH \Rightarrow I$ là trung điểm BH,

Do đó $OI = OB - IB$ nên (I) và (O) tiếpxúctrong.

$\Delta CFH, \widehat{CFH} = 90^0 \Rightarrow \Delta CFH$ nội tiếp đường tròn đường kính $CH \Rightarrow K$ là trung điểm CH, do đó $OK = OC - KC$ nên (K) và (O) tiếp xúc trong.

Lại có: $IK = IH + KH$ nên (I) và (K) tiếp xúc ngoài.

b) Tứ giác $AEHF$: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0\,(gt); \widehat{EAF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Vậy tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.

c) Ta có: $\Delta AHB, \widehat{AHB} = 90^0, HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE.AB^{(a)}$

$\Delta AHC, \widehat{AHC} = 90^0, HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF.AC^{(b)}$

Từ (a) và (b) suy ra $AE.AB = AF.AC$ (đpcm)

d) Ta có: $\widehat{FEH} = \widehat{AHE}$ (vì tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật)

$\widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ (vì ΔIHE cân tại I)

$\widehat{FEI} = \widehat{FEH} + +\widehat{IEH} = \widehat{AHE} + \widehat{IHE} = \widehat{AHB} = 90^0 (AD \perp BC)$ suy ra EF là tiếp tuyến của (I) tại E. Chứng minh tương tự có EF là tiếp tuyến của (K) tại F. Vậy EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K) (đpcm)

e) Vì $EF = AH$ (do $AEHF$ là hình chữ nhật) nên EF lớn nhất $\Leftrightarrow AH$ lớn nhất. Mà $AH = \frac{1}{2}AD (do\, BC \perp AD)$ nên AH lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ là đường kính của (O)

$\Leftrightarrow H \equiv 0$. Vậy khi $H \equiv 0$ thì EF lớn nhất bằng bán kính của (O).

Bài 305. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Gọi D là trung điểm của BC, E là một điểm di động trên đoạn thẳng AD. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của E lên các cạnh AB, AC. Kẻ HI vuông góc với DK (với $I \in DK$). Đường thẳng DK cắt đường thẳng vuông góc với AB tại B ở F.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, H, E, I, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính số đo góc HIB.

c) Chứng minh rằng ba điểm B, E, I thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của E trên AD để diện tích tam giác ABI lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a

Hướng dẫn

a) + Chứng minh $AHEK$ là hình vuông.

Ta có $AHEK$ là hình chữ nhật có đường chéo AE là đường phân giác nên $AHEK$ là hình vuông. Do đó A, H, E, K thuộc đường tròn đường kính HK.

Lại có góc HIK bằng $90°$ nên I thuộc đường tròn đường kính HK.

Do đó, A, H, E, K, I cùng thuộc đường tròn đường kính HK.

b) Xét hai tam giác BDF và CDK

Ta có $\angle BDF = \angle CDK$ (đối đỉnh)

$DB = DC$ (D là trung điểm BC)

$\angle FBD = \angle KCD$ (do $FB // AC$ và đây là hai góc so le trong)

Do đó $\Delta BDF = \Delta CDK$ (g.c.g). Suy ra $BF = CK$.

Lại có $BH = AB - AH = AC - AK = CK \Rightarrow BF = BH$

Mà $BF \perp AB$ nên tam giác BHF vuông cân tại B. Do đó $\angle HFB = 45°$.

Tứ giác $BHIF$ có $\angle HIF = \angle HBF = 90°$ nên tức giác $BHIF$ nội tiếp đường tròn.

Do đó $\angle HIB = \angle HFB = 45°$.

c) Ta có $\angle HAE = 45°$ (do tứ giác $AHEK$ là hình vuông). Vì A, H, E, K, I thuộc đường tròn đường kính HK (câu a)

Suy ra $\angle HIE = \angle HAE = 45°$. Mặt khác $\angle HIB = 45° (cmt)$. Do đó tia IB trùng tia IE.

Suy ra B, E, I thẳng hàng.

d) Tam giác ABI vuông tại I nên $S_{ABI} = \frac{1}{2}AI.BI \le \frac{1}{2}.\frac{AI^2 + BI^2}{2} = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}a^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $AI = BI \Leftrightarrow I \equiv D \Leftrightarrow E \equiv D$.

Vậy diện tích tam giác lớn nhất là $\frac{1}{4}a^2$ khi chỉ khi $E \equiv D$.

Bài 306. Cho ba điểm A, B, C cố định, thẳng hàng, B nằm giữa A, C. Vẽ đường tròn $(O; R)$ sao cho $(O; R)$ luôn nhận BC làm dây cung $(BC < 2R)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AF và AE đến $(O; R)$, (F nằm trong nửa mặt phẳng bờ là AO có chứa dây BC). Gọi I là trung điểm của dây BC, EF cắt dây BC tại N và cắt AO tại K. Chứng minh

a) $AF^2 = AB.AC$

b) 5 điểm A, E, O, I, F cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Khi đường tròn $(O; R)$ thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn

a) Xét ΔACF và ΔAFB có

$\angle CAF = \angle BAF$ (gócchung)

$\angle ACF = \angle AFB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BF)

Vậy $\Delta ACF \sim \Delta AFB \Rightarrow \dfrac{FA}{AC} = \dfrac{AB}{FA} \Rightarrow FA^2 = AB.AC$

b) Xét $(O;R)$ cócác tiếp tuyến AF và AE

$\Rightarrow \angle AEO = \angle AFO = 90^0$

$\Rightarrow F;E$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Lại có xét $(O;R)$ có I là trung điểm của dây BC

$\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \angle OIA = 90^0$

$\Rightarrow I$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Vậy 5 điểm A,E,O,I,F cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Vì B,C cố định và I cố định nên đường tròn ngoại tiếp ΔKOI luôn đi qua một điểm cố định I khi đường tròn $(O;R)$ thay đổi

Bài 307. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ cắt nhau tại A và B $(R > r)$. Haiđiểm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài CD cắt đường thẳng AB tại K $(C \in (O))$ và $D \in (O')$).

a) Chứng minh $KC^2 = KA.KB$

b) Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường thẳng qua D song song với AC tại E. Chứng minh K là trung điểm của AE

c) Chứng minh $BE < R + r$

Hướng dẫn

<u>a) Chứng minh</u> $KC^2 = KA.KB$

ΔACK và ΔCBK có: $\widehat{AKC} = \widehat{CKB}$ (góc chung), $\widehat{ACK} = \widehat{CBK}$ (góc nội tiếp và góc …)

Vậy $\Delta ACK \sim \Delta CBK \Rightarrow \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KB}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA.KB$

<u>b) Chứng minh K là trung điểm của AE</u>

Chứng minh tương tự câu a) có $KD^2 = KA.KB \Rightarrow KC^2 = KD^2 \Rightarrow KC = KD = \frac{1}{2}CD(a)$

Tứ giác ACED có: $AD//CE, AC//DE(gt)$ nên tứ giác ACED là hình bình hành

Suy ra AE và CD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (b)

Từ a) và b) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AE

c) Chứng minh $BE < R + r$

Tứ giác $CDO'O$ có: $OC//O'D\left(OC \perp CD, O'D \perp CD\right)$ vì CD là tiếp tuyến của (O) và (O'), nên tứ giác $CDO'O$ là hình thang.

Gọi I là trung điểm $O'O$, K là trung điểm CD(theo trên) $\Rightarrow IK$ là đường trung bình hình thang $CDO'O \Rightarrow 2KI = OC + O'D = R + r(1)$

Gọi H là giao điểm của AB và $O'O$

$\Rightarrow AH \perp OO', AB = 2AH$ ((O) và $\left(O'\right)$ cắt nhau tại A và B)

Vì $AE = 2AK$ (câu b), $AB = 2AH \Rightarrow BE = 2\left(AK + AH\right) = 2KH$ (2)

Mặt khác ΔKHI vuông tại H $\left(AH \perp OO'\right) \Rightarrow KH < KI \Rightarrow 2KH < 2KI$ (3)

Từ 1), 2), 3) $\Rightarrow BE < R + r$

Bài 308. Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C $(O \notin d)$. Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh 5 điểm O, M, A, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) BC cắt MN tại K. AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O). Chứng minh điểm K là điểm cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{AMO}=\widehat{ANO}=90^\circ$ (AM, AN là các tiếp tuyến của (O))

$\widehat{AIO}=90^\circ$ (vì $IB=IC=\frac{1}{2}BC \Rightarrow OI\perp BC$).

Do đó các tam giác: $\Delta AMO, \Delta ANO, \Delta AIO$ nội tiếp đường tròn đường kính OA. Vậy 5 điểm O, M, A, N, I cùng nằm trên một đường tròn đường kính OA.

b) Xét ΔAMC và ΔABM có: $\hat{A}$ (góc chung), $\widehat{ACM}=\widehat{AMB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn cung $\overset{\frown}{MB}$ của (O)).

Do đó $\Delta AMC\sim\Delta ABM \Rightarrow \frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AM}\Rightarrow AM^2=AB.AC\,(a)$.

Xét ΔAHK và ΔAIO có: $\hat{A}$ (góc chung), $\widehat{AHK}=\widehat{AIO}=90^\circ$ (AM, AN là tiếp tuyến của (O) nên $OA\perp MN$).

Do đó $\Delta AHK\sim\Delta AIO\Rightarrow\frac{AK}{AH}=\frac{AO}{AI}\Rightarrow AK=\frac{AH.AO}{AI}(b)$.

ΔAMO có: $\widehat{AMO}=90^\circ$, $MH\perp OA\Rightarrow AH.AO=AM^2(c)$.

Từ $(a),(b),(c)\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$.

Vì A, B, C cố định nên I cố định và AB, AC, AI không đổi.

$\Rightarrow AK$ không đổi. Mặt khác A cố định, $K\in d\Rightarrow K$ là điểm cố định khi (O) thay đổi.

c) Ta có: $\widehat{EMH}+\widehat{HMQ}=\widehat{PMQ}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $\widehat{MQD}+\widehat{HMQ}=90^\circ$ (ΔHMQ vuông tại H). Suy ra $\widehat{EMH}=\widehat{MQD}(d)$.

Lại có: $\widehat{QMD}+\widehat{DME}=\widehat{PMQ}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $\widehat{MEH}+\widehat{DME}=90^\circ$ ($EH\perp MD$). Suy ra $\widehat{MEH}=\widehat{QMD}(e)$.

Từ $(d),(e)\Rightarrow\Delta EMH\sim\Delta MQD\Rightarrow\frac{ME}{MQ}=\frac{MH}{DQ}(1)$.

Mặt khác: $\Delta MHP \sim \Delta QHM\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{HQ} = \dfrac{MH}{2DQ}(2)$ (vì $HQ = 2DQ$ (gt))

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{ME}{2MQ} \Rightarrow MP = \dfrac{1}{2}ME$.

Vậy P là trung điểm của ME.

Bài 309. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một dây cung MN quay xung quanh trung điểm H của OB. Gọi I là trung điểm của MN. Từ A kẻ tia $Ax \perp MN$, cắt MN tại K. Tia BI cắt Ax tại C.

a) Chứng minh $OI \perp MN$, từ đó suy ra tứ giác $CMBN$ là hình bình hành.

b) Chứng minh C là trực tâm ta giác AMN.

c) Khi MN quay xung quanh H thì C di động trên đường nào?

Hướng dẫn

a) Xét đường tròn (O) có MN là dây cung không đi qua tâm

I là trung điểm của MN

Xét ΔABC có O là trung điểm của AB

$OI // AC$ (cùng $\perp MN$)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC

Tứ giác $CMBN$ có I là trung điểm của MN, I là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $CMBN$ là hình bình hành.

b) Xét đường tròn (O) có $\widehat{ANB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hay $BN \perp AN$ mà $BN // MC$ ($CMBN$ là hình bình hành) $\Rightarrow MC \perp AN$

Mặt khác $AC \perp MN$ (gt) $\Rightarrow C$ là trực tâm của ΔAMN

c) $\Delta BOC: HB = HO = \frac{OB}{2}, IB = IO = \frac{BC}{2}$ nên HI là đường trung bình của $\Delta BOC \Rightarrow HI // OC$

hay $MN // OC$ mà $MN \perp \text{Ax} \Rightarrow OC \perp \text{Ax}$ hay $\widehat{ACO} = 90^0$

Vì AO cố định $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AO

Phần đảo: Lấy điểm C' bất kỳ thuộc đường tròn đường kính AO, gọi I' là trung điểm của BC', đường thẳng HI' cắt đường tròn (O) lần lượt tại M' và N'

$\Delta BOC'$ có H là trung điểm của OB, I' là trung điểm của BC'

$\Rightarrow HI'$ là đường trung bình của $\Delta BOC'$

$\Rightarrow HI' // \text{OC}'$

Xét đường tròn đường kính OA có $\widehat{AC'O} = 90^0$ (góc nội tiếp chứn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AC' \perp \text{OC}'$ mà $HI' // \text{OC}'$

$\Rightarrow AC' \perp HI'$ hay $\Rightarrow AC' \perp M'N'$

Bài 310. Cho đường tròn $(O;R)$. Hai đường kính cố định của (O) là AB và CD vuông góc với nhau. M là một điểm thuộc cung nhỏ AC của (O). K và H lần lượt là hình chiếu của M trên CD và AB.

a) Tính $\sin^2 \widehat{MBA} + \sin^2 \widehat{MAB} + \sin^2 \widehat{MCD} + \sin^2 \widehat{MDC}$

b) Chứng minh $OK^2 = AH.(2R - AH)$

c) Tìm vị trí điểm M để giá trị của $P = MA.MB.MC.MD$ lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Tính $\sin^2 \widehat{MBA} + \sin^2 \widehat{MAB} + \sin^2 \widehat{MCD} + \sin^2 \widehat{MDC}$

Ta có: $\widehat{AMB}=\widehat{CMD}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{MBA}+\widehat{MAB}=\widehat{MCD}+\widehat{MDC}=90^\circ$

$\Rightarrow \sin\widehat{MBA}=\cos\widehat{MBA},\sin\widehat{MDC}=\cos\widehat{MCD}$

Do đó:

$\sin^2\widehat{MBA}+\sin^2\widehat{MAB}+\sin^2\widehat{MCD}+\sin^2\widehat{MDC}$

$=\left(\sin^2\widehat{MBA}+\cos^2\widehat{MBA}\right)+\left(\sin^2\widehat{MCD}+\cos^2\widehat{MCD}\right)=2$

b) Chứng minh $OK^2=AH.(2R-AH)$

$\Delta AMB,\widehat{AMB}=90^\circ,MH\perp AB$

$\Rightarrow MH^2=AH.BH=AH.(AB-AH)=AH.(2R-AH)\ (a)$

Mặt khác tứ giác $OHMK$ có $\widehat{O}=\widehat{K}=\widehat{H}=90^\circ$ (gt) nên tứ giác $OHMK$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow MH=OK\ (b)$.

Từ (a), (b) $\Rightarrow OK^2=AH(2R-AH)$ (đpcm)

c) Tìm vị trí điểm M để giá trị của $P=MA.MB.MC.MD$ lớn nhất.

$\Delta AMB,\widehat{AMB}=90^\circ,MH\perp AB\Rightarrow MA.MB=AB.MH=2R.MH$

$\Delta CMD,\widehat{CMD}=90^\circ,MK\perp CD\Rightarrow MC.MD=CD.MK=2R.MK$

Do đó $P=MA.MB.MC.MD=4R^2.MH.MK$

Lại có $MH.MK\le\dfrac{MH^2+MK^2}{2}=\dfrac{HK^2}{2}=\dfrac{OM^2}{2}=\dfrac{R^2}{2}$

Nên $P=4R^2.MH.MK\le 4R^2.\dfrac{R^2}{2}=2R^4$. Đẳng thức xảy ra khi $MH=MK\Leftrightarrow$ tứ giác $OHMK$ là hình vuông $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ AC.

Bài 311. Cho AB đường kính của $(O;R)$. C là một điểm thay đổi trên đường tròn C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ tại M, MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C,H,O,I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của $(O;R)$

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Hướng dẫn

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $IA = IC = \frac{1}{2}AC$ (gt)

$\Rightarrow OI \perp AC \Rightarrow \widehat{OIC} = 90^\circ$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính OC

Lại có $\widehat{OHC} = 90^\circ \left(CH \perp AB\right) \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OC (đpcm)

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của $\left(O;R\right)$

$OM \perp AC\left(OI \perp AC\right), IA = IC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow OM$ là trung trực AC

$\Rightarrow \Delta OCM = \Delta OAM\left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OAM} = 90^\circ$ (AM là tiếp tuyến $\left(O\right)$)

$\Rightarrow MC \perp OC \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

Gọi D là giao điểm của MB và AC.

$\widehat{ACM} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$ của $\left(O\right)$)

Lại có $\widehat{ACB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{ACH}=\widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \widehat{ACM}=\widehat{ACH}\Rightarrow CD$ là phân giác $\widehat{MCK}$ của ΔMCK

Mặt khác $CB\perp CD\left(\widehat{ACB}=90^\circ\right)\Rightarrow CB$ là phân giác ngoài của ΔMCK

Do đó ta có $\dfrac{KD}{MD}=\dfrac{KB}{MB}\ (a)$

Xét $\Delta ABM, KH//AM\left(CH\perp AB, AM\perp AB\right)\Rightarrow \dfrac{KB}{MB}=\dfrac{KH}{AM}\ (b)$

Xét $\Delta ADM, CK//AM\left(CH\perp AB, AM\perp AB\right)\Rightarrow \dfrac{KD}{MD}=\dfrac{KC}{AM}(c)$

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow \dfrac{KH}{AM}=\dfrac{KC}{AM}\Rightarrow KH=KC$ (đpcm)

d) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE=BC$

Khi đó $P_{ABC}=AB+AC+BC=2R+AC+CE=2R+AE$ nên P_{ABC} đạt max $\Leftrightarrow AE$ đạt max

ΔBCE vuông cân tại $C\Rightarrow \widehat{AEB}=45^\circ$

Vì AB cố định nên E thuộc cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AB, do đó AE đạt max $\Leftrightarrow AE$ là đường kính của cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AB

$\Leftrightarrow \widehat{ABE}=90^\circ\Leftrightarrow \widehat{ABC}=45^\circ\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O)

Khi đó ΔABE vuông cân tại E, nên $AE=AB\sqrt{2}=2\sqrt{2}R$

Vây chu vi tam giác ABC đạt GTLN là $2\left(\sqrt{2}+1\right)R$ khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

Bài 312. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A,B; H thuộc AB. Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E.

a) Kẻ AN, BM vuông góc với đường thẳng DE (N, M trên đường thẳng DE). Chứng minh rằng $DN=EM$.

b) Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

Hướng dẫn

a) Gọi I là giao điểm của (O) và (C). Vì (O) và (C) cắt nhau tại D, E nên OC là trung trực của $DE \Rightarrow OC \perp DE$ và $ID = IE = \frac{1}{2}DE$.

Xét tứ giác $ABMN$ ta có:

$AN // OI // BM$ $(AN \perp DE;\ OC \perp DE;\ BM \perp DE)$.

$OA = OB = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow IN = IM = \frac{1}{2}MN$ mà $ID = IE = \frac{1}{2}DE$ (theo trên)

Do đó $DN = IN - ID = IM - IE = EM$: ĐPCM.

b) Gọi K là giao điểm của DE và CH, F là trung điểm của $CE \Rightarrow OF \perp CE$ (Liên hệ đường kính và dây cung).

Ta có $\Delta CIK \backsim \Delta CHO \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{CK}{CO} \Rightarrow CI.CO = CH.CK$ (a).

$\Delta COF \backsim \Delta CEI \Rightarrow \frac{CO}{CE} = \frac{CF}{CI} \Rightarrow CI.CO = CE.CF = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CH^2$ (b).

Từ (a; b) Suy ra $CH.CK = \frac{1}{2}CH^2 \Rightarrow CH = 2CK$.

Vậy K là trung điểm của CH, tức DE đi qua trung điểm của CH (ĐPCM).

Bài 313. Cho hai đường tròn (O,R) và (O',r) tiếp xúc ngoài tại B. Tiếp tuyến chung ngoài AD cắt đường nối tâm tại M, $A \in (O), D \in (O')$. Tiếp tuyến chung của hai đường

tròn tại B cắt AD tại P. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, E là giao điểm của PC và AH, C là điểm đối xứng với B qua O.

a) Chứng minh $EH = EA$.

b) Tính AH theo R và $OP = d$.

c) Tính AD theo R và r.

d) Giả sử $AD = DM = 4cm$, tính R và r.

e) Gọi $(O_1; R_1)$ tiếp xúc ngoài với AD đồng thời tiếp xúc ngoài với (O, R) và (O, r).

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Hướng dẫn

a) Theo giả thiết $OA = OB = R$, (1)

+ Vì PA, PB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) nên $PA = PB$, (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra OP là đường trung trực của đoạn AB, $(2a)$.

Ta có ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, suy ra $CA \perp AB$, $(2b)$.

Từ $(2a),(2b)$ suy ra $CA // OP$.

+ Gọi giao điểm của CA và BP là Q.

Xét ΔCBQ có O là trung điểm của CB, $CA // OP$. Do đó $BP = PQ = \frac{1}{2}BQ$, $(2c)$

Theo giả thiết BQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nên $BQ \perp CB$; $AH \perp CB$, (theo giả thiết). Do vậy $BQ // AH$.

+ Xét ΔQCB có $CE // QP$, suy ra $\frac{CE}{CP}=\frac{AE}{QP}$, (định lý Talet) $(3a)$.

+ Xét ΔCPB có $EH // PB$, suy ra $\frac{CE}{CP}=\frac{EH}{PB}$, (định lý Talet) $(3b)$.

Từ $(3a),(3b)$ ta có $\frac{AE}{QP}=\frac{EH}{PB}$, kết hợp $(2c)$ suy ra $AE=EH$.

b) Cho $OP=d$, tính AH theo R.

Xét ΔCBQ có $AH//QB \Rightarrow \frac{AH}{QB}=\frac{CA}{CQ} \Rightarrow AH=\frac{CA.QB}{CQ}$. Tính CA,QB,CQ.

+ Xét $\Delta CBQ: OP$ là đường trung bình (vì $BP=PQ=\frac{1}{2}BQ$, $OB=OC=\frac{1}{2}CB$)

$\Rightarrow CQ=2OP=2d$.

+ ΔCBQ vuông tại B: theo a) $CA\perp AB \Rightarrow BC^2=CA.CQ \Rightarrow CA=\frac{BC^2}{CQ}=\frac{2R^2}{d}$.

+ ΔOBP vuông tại B: $PB^2=OP^2-OB^2 \Rightarrow PB=\sqrt{d^2-R^2} \Rightarrow QB=2BP=2\sqrt{d^2-R^2}$.

Vậy

c) Tính AD theo R và r.

Ta có: $\widehat{APB}+\widehat{DPB}=180^\circ$

Theo a) $PA=PB$, OP là đường trung trực của AB, suy ra OP là tia phân giác của góc $\widehat{APB}$

$\Rightarrow \widehat{APB}=2\widehat{OPB}$

Tương tự PO' là tia phân giác góc $\widehat{DPB}$ $\Rightarrow \widehat{DPB}=2\widehat{O'PB}$.

Do đó: $\widehat{APB}+\widehat{DPB}=180^\circ \Rightarrow 2\widehat{OPB}+2\widehat{O'PB}=180^\circ \Rightarrow \widehat{OPO'}=90^\circ$.

$\Delta OPO'$ vuông tại P có $PB\perp OO' \Rightarrow PB^2=OB.O'B=R.r \Rightarrow PB=\sqrt{R.r}$.

Mà $AD=AP+PD=PB+PB=2PB$ (vì $PA=PB, PB=PD$).

Nên $AD=2PB=2\sqrt{R.r}$.

d) Giả sử $AD=DM=4cm$, tính R và r.

Theo c) $AD=2\sqrt{R.r}$, mà $AD=4cm$ suy ra $2\sqrt{R.r}=4 \Rightarrow R.r=4$, $(4a)$

Xét ΔMOA có $O'D//OA$ suy ra $\frac{O'D}{OA}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r}{R}=\frac{1}{2} \Rightarrow R=2r$, $(4b)$.

Từ $(4a),(4b)$ suy ra $2r^2=4 \Rightarrow r=\sqrt{2}cm; R=2\sqrt{2}cm$.

e) Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$, ($(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài với AD đồng thời tiếp xúc ngoài với (O,R) và (O,r)).

Theo c) Hai đường tròn (O,R) tiếp xúc ngoài với (O',r) ta có: $AD=2\sqrt{R.r}$, $(5a)$.

Chứng minh tương tự, áp dụng cho đường tròn (O,R) tiếp xúc ngoài với (O_1,R_1) ta có: $AP=\sqrt{R.R_1}$, $(5b)$.

Tương tự với đường tròn (O,R_1) tiếp xúc ngoài với (O',r), ta có: $PD=\sqrt{R_1.r}$, $(5c)$.

Từ $(5a),(5b),(5c)\Rightarrow AD=AP+PD$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{R.r}=2\sqrt{R.R_1}+2\sqrt{R_1.r}$

$\Leftrightarrow \sqrt{R.r}=\sqrt{R_1}.\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R.r}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$.

Bài 314. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Đường thẳng BD và các tiếp tuyến với (O) tại A, C đồng qui tại S. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) AB.DC = AD.BC

b) $\frac{SB}{SD} = \frac{IB}{ID} = \frac{AB.CB}{AD.CD}$

Hướng dẫn

a) $\Delta SAB \backsim \Delta SDA$ nên: $\frac{SA}{SD} = \frac{AB}{DA} = \frac{SB}{SA}$ (1)

$\Delta SCB \backsim \Delta SDC$ nên: $\frac{SC}{SD} = \frac{CB}{DC} = \frac{SB}{SC}$ (2)

Do SA = SB và từ (1) và (2): $\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow AB.DC = AD.BC$

b) Từ (1) và (2): $\frac{SB}{SD} = \frac{SB.SC}{SD.SA} = \frac{AB.CB}{AD.CD}$.

Tương tự phần a) Từ $\Delta IAB \backsim \Delta IDC$ và $\Delta ICB \backsim \Delta IDA \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AB.CB}{AD.CD} \Rightarrow$ đpcm

Bài 315. Cho ΔABC vuông cân ở A. AD là trung tuyến thuộc cạnh huyền, M là một điểm thay đổi trên đoạn AD. Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống AB và AC. H là hình chiếu vuông góc của N xuống đường thẳng PD.

a) Xác định vị trí của N để ΔAHB có diện tích lớn nhất.

b) CmR: Khi M thay đổi, HN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Kẻ BE // AC cắt PD tại E $\Rightarrow$ BE = PC = BN $\Rightarrow$ $\widehat{NEB} = \widehat{NHB} = 45^0$.

Mặt khác: $\widehat{AHN} = \widehat{APN} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^0$, HN là phân giác của $\widehat{AHB}$.

$\Rightarrow S^2_{AHB} = \frac{1}{4}AH^2.BH^2 \le \frac{1}{4}\left(\frac{AH^2+BH^2}{2}\right)^2 = \frac{AB^4}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ AH = BH $\Leftrightarrow$ H ≡ D ≡ M.

b) HN luôn đi qua điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB (HN là phân giác $\widehat{AHB}$).

Bài 316. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Một góc $\widehat{xBy} = 45^0$ quay xung quanh B sao cho Bx cắt cạnh AD tại M, By cắt cạnh CD ở N (M, N không trùng với D). Gọi E, F tương ứng là giao điểm của BM, CN với AC.

a) CmR: các tứ giác ABFM, BCNE, MEFN nội tiếp.

b) CmR: MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định và chu vi ΔMND không đổi.

c) Tìm vị trí của M, N và nêu cách dựng các điểm đó để ΔMND có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn

a) $\widehat{FBM} = \widehat{FAM} = 45^0 \Rightarrow$ ABFM nội tiếp. Tương tự: BCNE nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{BEN} + \widehat{BCN} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BEN} = 90^0$. Tương tự: $\widehat{MFN} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b) Lấy điểm K trên tia đối của tia AD sao cho AK = CN:

$\Rightarrow$ BK = CN và $\widehat{KBM} = \widehat{KBA} + \widehat{ABM} = \widehat{NBC} + \widehat{ABM}$

$= 90^0 - \widehat{NBM} = 45^0 = \widehat{NBM}$

$\Rightarrow$ ΔKMB = ΔNBM (c.g.c)$\Rightarrow$ BA = BL $\Rightarrow$ MN tiếp xúc với (B, a)

Lại có: ΔKBM = ΔNMB $\Rightarrow$ KM = MN. Từ đó, suy ra:

$P_{\Delta MND}$ = MN + ND + MD = KA + AM + MD + DN = CD + ND + MD + MA = 2a.

c) Có: MD + ND + MN = 2a $\Rightarrow$ MD + ND + $\sqrt{MD^2+ND^2}$ = 2a

$$\Rightarrow 4a^2 = \left(MD+ND+\sqrt{MD^2+ND^2}\right)^2 \ge \left(MD+ND+\frac{MD+ND}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(MD+ND)^2$$

$$\ge 4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.MD.ND$$ Mà: MD.ND = $2S_{MND} \Rightarrow S_{MND} \le \frac{a^2}{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ MD = ND $\Leftrightarrow$ $\widehat{MBA} = \widehat{NBC} = 22,5^0$

Bài 317. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn (M khác A và B). Hạ MH $\perp$ AB tại H. Gọi P, Q, I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MAH, MBH, AMB.

a) Chứng minh điểm I là trực tâm của ΔMPQ

b) Tìm quĩ tích điểm I khi điểm M di động trên nửa đường tròn

c) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn để chu vi ΔPHQ lớn nhất

Hướng dẫn

a) Dễ thấy: A, P, I thẳng hàng và B, Q, I thẳng hàng.

Gọi K ≡ MP ∩ AB: $\widehat{KMB} = \widehat{KMH} + \widehat{BMH}$, $\widehat{MKB} = \widehat{KMA} + \widehat{MAB}$

Mặt khác: $\widehat{KMH} = \widehat{KMA}$ và $\widehat{BMH} = \widehat{MAB}$

Suy ra: ΔBMK cân tại B có BI là phân giác $\Rightarrow$ BI $\perp$ MK

Tương tự: L ≡ AB ∩ MQ $\Rightarrow$ ΔAML cân $\Rightarrow$ AI $\perp$ ML $\Rightarrow$ đpcm

b) Thuận: $\widehat{AIB} = 180^0 - \dfrac{\widehat{MAB} + \widehat{MBA}}{2} = 180^0 - 45^0 = 135^0$

Vậy điểm I thuộc cung chứa góc 135^0 vẽ trên đoạn AB (thuộc cùng một nửa mặt phẳng chứa M)

Đảo lại: Giả sử I′ là điểm bất kì thuộc cung chứa góc $\Rightarrow$ Kẻ I′N $\perp$ AB, vẽ (I′, I′N) kẻ hai tiếp tuyến AA′ và BB′ với (I′, I′N) gọi M′ là giao của AA′ và BB′. Ta cần chứng minh M′ ∈ (O) hay $\widehat{AM'B} = 90^0$. Ta có:

$\widehat{AIB} = 135^0 \Rightarrow \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = 45^0 \Rightarrow \widehat{M'AB} + \widehat{M'BA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AM'B} = 90^0$.

c) Ta có: $\widehat{PMH} = \widehat{QBH}$ (Góc có cạnh t/ư vuông góc). $\widehat{PHM} = \widehat{QHB} = 45^0$

$\Rightarrow$ ΔMPH ∽ ΔBQH (g.g) nên: $\dfrac{PH}{QH} = \dfrac{MH}{HB} = tg\widehat{MBA} = \dfrac{MA}{MB} \Rightarrow \dfrac{PH}{QH} = \dfrac{MA}{MB}$.

Lại có: $\widehat{AMB} = \widehat{PHQ} = 90^0 \Rightarrow$ ΔHPQ ∽ ΔMAB(c.g.c). Ta có:

$\widehat{HQP} = \widehat{MBA} \Rightarrow \widehat{MBA} + \widehat{HQF} = 180^0$

$\Rightarrow$ BHQF nội tiếp. Từ đó suy ra: $\widehat{MFE} = \widehat{QHB} = 45^0$

ΔMEF cân tại M nên: ME = MF. ΔMQF = ΔMQH (c.g.c) nên: MF = MH và QF = QH.

Tương tự: PH = PE $\Rightarrow$ C_{PQH} = PH + QH + QP = EP + PQ + QF = EF = $\sqrt{2}$MF = $\sqrt{2}$MH

Vậy: C_{PQH} lớn nhất ⇔ MH lớn nhất ⇔ H ≡ O. Khi đó: M là điểm chính giữa nửa đường tròn (O)

Bài 318. Cho đường tròn (O ; R) và P là một điểm nằm bên trong đường tròn. Qua P vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. a) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không đổi

b) Gọi I là trung điểm của BC. Tìm quĩ tích điểm I

Hướng dẫn

a) Kẻ đường kính BE. Ta có AE // CD ⇒ AC = DE. Áp dụng ĐL

Pitago cho Δv.BED: $BD^2 + DE^2 = BD^2 + AC^2 = BE^2 = 4R^2$

Suy ra: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AC^2 + BD^2 = 4R^2$ = Const

c) Thuận: Gọi K là trung điểm của OP ta có: $2IK^2 = IO^2 + IP^2 - \frac{1}{2}PO^2$

Δv.PBC có PI là trung tuyến ⇒ IP = IB ⇒ $OI^2 + IB^2 = OI^2 + IP^2 = OB^2 = R^2$

$\Rightarrow IK = \frac{\sqrt{2R^2 - OP^2}}{2} \Rightarrow$ I thuộc đường tròn $\left(K\ ;\ \frac{\sqrt{2R^2 - OP^2}}{2}\right)$

Đảo lại: Lấy điểm I′ thuộc đường tròn (K). Qua I′ dựng một đường thẳng vuông góc với OI′ gọi giao của đường thẳng này với (O) là B′, C′. Gọi giao điểm của B′P và C′P với (O) là A′, D′. Ta cần chứng minh A′B′ ⊥ C′D′.

IK là trung tuyến của ΔOPI nên: $2IK^2 = IO^2 + IP^2 - \frac{1}{2}PO^2$ mà: $2.IK^2 = \frac{2R^2 - OP^2}{2}$

Suy ra: $\frac{2R^2 - OP^2}{2} = IO^2 + IP^2 - \frac{1}{2}OP^2 \Leftrightarrow OI^2 + IP^2 = R^2 = OB^2$. Mặt khác: $OI^2 + IB^2 = OB^2$

Suy ra: IP = IB. Hay: $IP = \frac{1}{2}BC$. ⇒ ΔPCB vuông tại P. Vậy: A′B′ ⊥ C′D′

Bài 319. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên một đường thẳng d sao cho AB = 2, BC = 4. Một đường tròn di động (O) có tâm O và đi qua B, C. Gọi AT, AT′ là hai tiếp tuyến kẻ từ A đến (O), với T, T′ là hai tiếp điểm.

a) Tìm quĩ tích các điểm T và T′

b) Vẽ đường kính MB của (O). Gọi P ≡ AM ∩ (O). Chứng minh: $AM.AP = AO^2 - OC^2$

c) Tìm quĩ tích các điểm M và P

Hướng dẫn

a) Thuận: Ta chứng minh $T'A^2 = AT^2 = AB.AC = (2\sqrt{3})^2$

Suy ra: T và T′ thuộc đường tròn $(A;\ 2\sqrt{3})$

Đảo: Lấy một điểm T_1 bất kì thuộc $(A;\ 2\sqrt{3})$. Qua T_1 vẽ một đường thẳng vuông góc với AT_1 cắt trung trực của BC tại O′. Ta cần chứng minh AT_1 là tiếp tuyến của (O′ ; O′B): Kẻ tiếp tuyến AT_2 Ta có:

$AT_2^2 = AB.AC = AT_1^2 \Rightarrow O'T_1 = O'T_2 \Rightarrow OT_1$ là bán kính (O′). Suy ra: AT_1 là tiếp tuyến của (O′).

b) Ta có: $AT^2 = AM.AP$. Mà $AT^2 = OA^2 - OT^2$ hay: $AT^2 = OA^2 - OC^2 \Rightarrow AM.AP = OA^2 - OB^2$

c) Quĩ tích M:

Thuận: ΔBCM vuông tại C ⇒ CM ⊥ d ⇒ M thuộc đường thẳng c vuông góc với d tại C

Đảo: Giả sử M′ thuộc đường thẳng c qua trung điểm I của BC kẻ một đường thẳng vuông góc với d giao với MB tại O_1 Vẽ đường tròn $(O_1 ; O_1B)$. Ta cần chứng minh M thuộc $(O_1 ; O_1B)$.

Ta có: OI // BC ⇒ OI là đường trung bình của ΔBMC ⇒ OB = OM ⇒ M ∈ $(O_1 ; O_1B)$.

* Quĩ tích P:

Thuận: Ta có: $\widehat{APB} = 90^0$ ⇒ P thuộc đường tròn đường kính AB

Đảo: Lấy một điểm P′ bất kì trên đường tròn đường kính AB. Qua C vẽ một đường thẳng vuông góc với d giao với AP tại M. Gọi O_2 là giao của đường trung trực BC với BM, vẽ $(O_2 ; O_2B)$ ta cần chứng minh: P và M thuộc $(O_2 ; O_2B)$: OI là đường trung bình của ΔBMC nên OM = OB ⇒ M thuộc đường tròn. Ta có: $\widehat{BPM} = 90^0$ nên P thuộc đường tròn đường kính BM hay: OP = OB.

Bài 320. Cho hai đường tròn (O, R) và $\left(O', \frac{R}{2}\right)$ tiếp xúc ngoài tại A. Trên đường tròn (O) lấy điểm B sao cho AB = R và điểm M trên cung lớn AB. Tia MA cắt đường tròn (O′) tại điểm thứ hai là N. Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng MN tại Q và cắt đường tròn (O′) tại P.

a) Chứng minh $\Delta OAM \backsim \Delta O'AN$.

b) Chứng minh độ dài đoạn NQ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Tứ giác ABQP là hình gì? tại sao?

d) Xác định vị trí điểm M để diện tích tứ giác ABQN đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó theo R.

Hướng dẫn

a) Dễ dàng chứng minh được $\Delta OAM \backsim \Delta O'AN$.

b) Từ a) suy ra: $\frac{MA}{NA} = \frac{OA}{O'A}$.

$\Rightarrow \frac{MA}{MA + NA} = \frac{MA}{MN} = \frac{OA}{OA + O'A} = \frac{2}{3}$

Mặt khác: $AB // NQ \Rightarrow \frac{AB}{NQ} = \frac{MA}{MN}$.

Hay: $\frac{R}{NQ} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow NQ = \frac{3R}{2} = \text{const}$.

c) Dễ thấy: ABQP là hình thang vì AB // NQ.

Ta có: $\widehat{ABQ} = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{AB}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AO'M} = \widehat{APN}$

Mà: $\widehat{APN} = \widehat{PAB}$(so le trong) $\Rightarrow \widehat{ABQ} = \widehat{BAP} \Rightarrow$ ABQP là hình thang cân.

d) Kẻ $AH \perp QN$. Ta có: $S = S_{ABQN} = \frac{1}{2}(AB + QN).AH = (1,5R + R).AH = 2,5R.AH$. Do đó:

S max $\Leftrightarrow$ AH max. Mà $AH \le AN \Leftrightarrow H \equiv N \Leftrightarrow AN \perp NQ \Leftrightarrow AN \perp AB$ tại A $\Leftrightarrow \widehat{MAB} = 90^0 \Leftrightarrow$ M là điểm đối xứng của điểm B qua điểm O.

Khi đó, ΔAMB vuông tại A, ta có: $AM^2 = MB^2 - AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AM = R\sqrt{3}$.

Mặt khác: Do $\frac{AM}{MN} = \frac{3}{2} \Rightarrow AN = \frac{1}{2}AM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy: Max $S_{ANQB} = \frac{5R}{4}.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}R^2}{8}$

Bài 321. Cho đường tròn (I ; R) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm A′, B′, C′.

a) Gọi các giao điểm của (I) với các đoạn IA, IB, IC lần lượt là M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng A′M, B′N, C′P đồng qui.

b) AI kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D (khác A). chứng minh rằng: $\frac{IB.IC}{ID} = 2R$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: A′M, B′N, C′P là ba phân giác của ΔA′B′C′.

b) Gọi H là trung điểm của BI. Ta có: $\widehat{DBC} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{A}$

$\widehat{DIB} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B})$. Mặt khác: $\widehat{DBI} = \frac{1}{2}\widehat{B} + \widehat{DBC} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{A})$

Suy ra: $\widehat{DBI} = \widehat{DIB} \Rightarrow$ ΔDBI cân tại D ⇒ DH là phân giác $\widehat{D}$

$\Rightarrow \widehat{HDI} = \frac{1}{2}\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{ACI} \Rightarrow$ ΔHDI ∽ ΔA′CI. Suy ra:

$\frac{ID}{IC} = \frac{IH}{IA'} = \frac{2IH}{2IA'} = \frac{IB}{2IA'} \Rightarrow IB.IC = ID.2IA' = ID.2R \Rightarrow \frac{IB.IC}{ID} = 2R$

Bài 322. Cho ΔABC vuông ở A (AC > AB) hạ AH ⊥BC tại H. Đường tròn (H, HA) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q (P, Q ≠ A).

a) Chứng minh P, H, Q thẳng hàng và tứ giác BPCQ nội tiếp

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: AM ⊥ PQ

Hướng dẫn

a) $\widehat{PAQ} = 90^0$, PQ là đường kính (A, HA)

$\Rightarrow$ Ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

ΔAHQ cân tại H: $\widehat{A}_1 = \widehat{Q}$ mà $\widehat{C} = \widehat{A}_1$ (Cùng phụ với $\widehat{CAH}$)

Nên: $\widehat{C} = \widehat{Q} \Rightarrow$ BPCQ nội tiếp.

b) ΔMAB cân $\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{BAM} = \widehat{Q} + \widehat{H}_1$, $\widehat{P}_1 = \widehat{C} + \widehat{H}_2$.

Mà $\widehat{C} = \widehat{Q}$, $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{P}_1 = \widehat{BAM}$

Do đó: $\widehat{P}_1 + \widehat{A}_3 = \widehat{MAB} + \widehat{A}_3 = 90^0 \Rightarrow \widehat{AEP} = 90^0$

Vậy: PQ $\perp$ AM tại E.

Bài 323. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và một điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng có bờ BC chứa điểm A dựng hai đường tròn đường kính HB và HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

a) Chứng minh AE. AB = AF. AC.

b) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đường kính HB và HC

c) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh ba điểm I, A, K thẳng hàng.

d) Đường thẳng IK cắt tiếp tuyến kẻ từ B của nửa đường tròn (O) tại M. Chứng minh MC, AH, EF đồng qui.

Hướng dẫn

a) ΔBEH có trung tuyến O'E ứng với cạnh BH bằng

$\frac{1}{2}BH$ nên ΔBEH vuông tại E. Suy ra: $HE \perp AB$.

Tương tự: $HF \perp AC$.

Áp dụng hệ thức lượng với hai tam giác vuông AHB và AHC,

ta có:

$AH^2 = AE.AB$, $AH^2 = AF.AC$. Suy ra: $AE.AB = AF.AC$.

b) Tứ giác AFEH là hình chữ nhật vì có ba góc vuông.

Gọi D là giao điểm của AE và EF, ta có: DA = DH = DE = DF.

$\Delta O_1ED = \Delta O_1HD$ (c.c.c). Suy ra: $\widehat{O_1ED} = \widehat{O_1HD} = 90^0$.

Do đó: $EF \perp O'E$ tại E nên: EF là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

Tương tự: EF là tiếp tuyến $(O_2) \Rightarrow$ EF là tiếp tuyến chung

c) Theo tính chất đối xứng ta có: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$

$\Rightarrow \widehat{IAH} + \widehat{HAK} = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) = 2.\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow$ Ba điểm I, A, K thẳng hàng.

d) SB // AH $\Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{A}_2$ (So le) = $\widehat{A}_1 \Rightarrow \Delta MBA$ cân tại A $\Rightarrow$ MA = MB

Mặt khác: $\widehat{MBA} + \hat{S} = 90^0$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_5$ và $\widehat{MBA} = \widehat{A}_1 \Rightarrow \hat{S} = \widehat{A}_5 \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại A $\Rightarrow$ MA = MS

Suy ra: MA = MS. Giả sử MC cắt AH tại D'. Theo ĐL Ta lét: $\frac{AD'}{MS} = \frac{CD'}{CM} = \frac{HD'}{MB}$ mà MS = MB nên: AD' = D'H $\Rightarrow$ D'H = D'A mặt khác: DH = DA $\Rightarrow$ D $\equiv$ D'.

Vậy: AH, EF, MC đồng qui tại tại D.

Bài 324. Cho ΔABC vuông ở A (AC > AB) đường cao AH. Đường tròn (H; HA) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q (P, Q khác A).

a) Chứng minh: P, H, Q thẳng hàng. Tứ giác BPCQ nội tiếp

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: $AM \perp PQ$.

Hướng dẫn

a) PQ là đường kính đường tròn tâm A bán kính HA.

$\Rightarrow$ Ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{HQA} = \widehat{HAQ}$ (ΔAHQ cân)

Lại có: $\widehat{ACB} = \widehat{HAQ}$ $(= 90^0 - \widehat{CAH})$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AQB} \Rightarrow$ BPCQ nội tiếp.

b) $\widehat{APQ} = \widehat{AHP}$ (ΔAHP cân), $\widehat{CAM} = \widehat{ACM}$ mà $\widehat{ACM} = \widehat{AQP}$

Suy ra: $\widehat{APQ} + \widehat{CAM} = \widehat{APQ} + \widehat{AQP} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^0$. Vậy: $AM \perp PQ$.

Bài 325. Cho A là một điểm bất kì trên nửa đường tròn đường kính BC ($A \neq B, C$). Hạ $AH \perp BC$ tại H. Gọi I, K lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp ΔAHB và ΔAHC. Đường thẳng IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh:

a) $\Delta AIH \backsim \Delta CKH$ và $\Delta HIK \backsim \Delta ABC$

b) ΔMAN là tam giác cân

c) Xác định vị trí của điểm A để chu vi của đường tròn ngoại tiếp ΔMHN đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Dễ thấy: $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ $(= 45^0)$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \left(= \frac{1}{2}\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{BAH} \right) \Rightarrow \Delta AIH \backsim \Delta CKH$ (g.g)

Suy ra: $\frac{HI}{HK} = \frac{CH}{AH}$, $\frac{AH}{CH} = tg\widehat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HI}{HK} = \frac{AB}{AC}$ Lại có:

$\widehat{IHK} = \widehat{BAC} = 90^0$ Suy ra: $\Delta HIK \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

b) $\Delta HIK \backsim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{HKI} \Rightarrow \widehat{NCH} + \widehat{NKH} = 180^0$

$\Rightarrow$ NCHK nội tiếp. Do đó: $\widehat{ANM} = \widehat{KHC} = 45^0$.

Vậy: ΔAMN vuông cân tại A.

c) $\Delta AKH = \Delta AKN$ (g.c.g) $\Rightarrow AN = AH = AM \Rightarrow$ A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.

Do đó: $C_{HMN} = 2\pi AH \Rightarrow C_{HMN}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất mà: $AH \leq OA$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AN = OA \Leftrightarrow H \equiv O$. Khi đó A là điểm chính giữa của nửa (O) và $C_{HMN} = 2\pi R$.

Bài 326. Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Gọi M là một điểm di động trên đoạn OB $(M \neq O, B)$. Tia CM cắt BD tại P và đường tròn tại N $(N \neq C)$. Gọi Q là giao điểm của AN và CD

1) Chứng minh tứ giác $DQPN$ nội tiếp và $PQ // AB$

2) Chứng minh $\Delta ACQ \backsim \Delta MAC$ và diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M thay đổi trên OB

3) Chứng minh $\dfrac{CQ}{AM} = \left(\dfrac{CN}{AN}\right)^2$

4) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CQN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên OB

Hướng dẫn

1) Xét (O): $AB \perp CD\,(gt) \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{BOD} = \widehat{AOD} = 90^0$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD}$ (Vì các góc ở tâm bằng nhau chắn các cung bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{CDB}$ (Vì hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

hay $\widehat{QNP} = \widehat{QDP}$

Xét tứ giác $DQPN$ có: $\widehat{QNP} = \widehat{QDP}$ (cmt)

$\Rightarrow$ Hai đỉnh kề nhau D, N cùng nhìn cạnh PQ dưới 1 góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ tứ giác $DQPN$ nội tiếp (DHNB).

$\Rightarrow \widehat{QPD} = \widehat{QND}$ (Vì là hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{QD}$)

mà $\widehat{AND}=\widehat{ABD}$ (Vì là hai góc nội tiếp cũng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \widehat{QPD}=\widehat{ABD}$. Mà hai góc $\widehat{QPD},\widehat{ABD}$ ở vị trí đồng vị $\Rightarrow PQ\perp CD$

Mà: $AB\perp CD\Rightarrow\ PQ//AB$ (đpcm)

2) Xét (O):

$\widehat{AMC}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AC}+sd\overset{\frown}{BN}\right)$ (Vì là góc có đỉnh nằm trong đường tròn chắn $\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{BN}$)

$\widehat{CAQ}=\widehat{CAN}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{CN}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BC}+sd\overset{\frown}{BN}\right)$ (vì là 2 góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{CN}$)

Mà $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ (cmt) . Suy ra: $\widehat{CAQ}=\widehat{AMC}$

Xét ΔAOC có: $OA=OC=R$ (gt) $\Rightarrow\Delta AOC$ cân tại O $\Rightarrow\widehat{A_1}=\widehat{C_1}$

Xét ΔACQ và ΔMAC có: $\widehat{C_1}=\widehat{A_1},\ \widehat{CAQ}=\widehat{AMC}(cmt)\ \Rightarrow\Delta ACQ\backsim\Delta MAC(g.g)$

$\Rightarrow\frac{AC}{AM}=\frac{CQ}{AC}\Rightarrow AM.CQ=AC^2=const$

Xét tứ giác $ACMQ$ có: $CQ\perp AM(gt)\ \Rightarrow S_{ACMQ}=\frac{1}{2}AM.CQ$

Mà $\Delta ACQ\backsim\Delta MAC(g.g)\Rightarrow\frac{AC}{AM}=\frac{CQ}{AC}\Rightarrow AM.CQ=AC^2=const\ \Rightarrow S_{ACMQ}$ không đổi.

Vậy diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M thay đổi trên OB.

3) Xét (O): $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}(cmt)\Rightarrow\widehat{C_1}=\widehat{N_1}$ (vì hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Xét ΔACQ và ΔANC có: $\widehat{CAN}$ chung, $\widehat{C_1}=\widehat{N_1}$ (cmt) $\Rightarrow\Delta ACQ\backsim\Delta ANC(g.g)$

$\Rightarrow\frac{CQ}{NC}=\frac{AC}{AN}\Rightarrow\frac{CQ}{AC}=\frac{CN}{AN}$

Mà: $\frac{AC}{AM}=\frac{CQ}{AC}$ (câu b) $\Rightarrow\frac{AC}{AM}=\frac{CQ}{AC}=\frac{CN}{AN}=k$

Suy ra: $\frac{AC}{AM}.\frac{CQ}{AC}=\frac{CQ}{AM}=k^2=\left(\frac{CN}{AN}\right)^2$ (đpcm)

4) Kẻ CB và DN kéo dài cắt nhau tại E.

Xét (O): $\widehat{CBD}=\widehat{CND}=90^\circ$ (Vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} DB \perp CE \\ CN \perp DE \end{cases}$.

Mà $CN \cap DB = P \Rightarrow P$ là trực tâm tam giác $CDE \Rightarrow PE \perp CD$

Lại có: $PQ \perp CD \Rightarrow E, P, Q$ thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{CQE} = \widehat{CNE} = 90^0$

$\Rightarrow Q, N$ cùng nhìn cạnh CE dưới 1 góc vuông.

$\Rightarrow Q, N$ cùng thuộc đường tròn tâm I, đường kính CE. (Với I là trung điểm CE)

Hay (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CQN

Do $I \in CE$ hay $I \in CB$ cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CQN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên đoạn OB.

Bài 327. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, A là điểm chính giữa cung BC. M là một điểm nằm trên đoạn OB. E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A; E; M; O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Khi điểm M trên đoạn BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BO$, chứng minh rằng $BE.BA = \frac{1}{3}R^2$

c) Đường thẳng MF cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại điểm K. Chứng minh rằng $BE = FK$.

d) Khi M di chuyển trên đoạn BC. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M, vuông góc với ... luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\widehat{AOB} = 90^0$

Tứ giác AEMO có $\widehat{MEA} + \widehat{MOA} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ Tứ giác AEMO nội tiếp (dhnb) nên A, E, M, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ΔBEM đồng dạng với ΔBAC (g.g)

$\Rightarrow\ BE.BA = BM.BO \Rightarrow BM.BO = \frac{1}{3}R^2$

c) Chứng minh tứ giác AEMF là hình chữ nhật $\Rightarrow ME = \text{AF}$

Chứng minh ΔBEM vuông cân tại E $\Rightarrow BE = EM$

Chứng minh $\Delta \text{AF}K$ vuông cân tại F $\Rightarrow \text{AF} = FK$

Chứng minh BE = FK

d) AO cắt (O) tại I nên I là điểm chính giữa cung AB nên I cố định.

EM cắt CI tại N. Đường thẳng qua M vuông góc với EF tại P.

Chứng minh tứ giác BENI là hình chữ nhật nên BE = IN = EM.

Chứng minh tứ giác MNCF là hình vuông nên MN = MF.

$\Rightarrow \Delta M\text{EF} = \Delta\text{NIM (cgc)} \Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{NMI}$

Mà tổng số đo ba góc trong tam giác MPF bằng 180^0

$\Rightarrow \widehat{PMI} = \widehat{PMF} + \widehat{FMN} + \widehat{NMI} = \widehat{PMF} + 90^0 + \widehat{PFM} = 180^0$

Nên P; M; I thẳng hàng hay đường thẳng qua M vuông góc với EF luôn đi qua điểm I cố định.

Bài 328. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi M, N thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC

1) Chứng minh tứ giác AMHN là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh $\widehat{\text{ABC}} = \widehat{\text{ANM}}$
3) Chứng minh OA vuông góc với MN
4) Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Hướng dẫn

1) - Giải thích $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = 90^0$

-Tính tổng $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 180^0$

- KL : AMHN là tứ giác nội tiếp

2) **Cách 1:**

cm $\widehat{ANM} = \widehat{MHA}$ (do tg AMHN nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHM}$ (cùng phụ với $\widehat{MHB}$) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ANM}$

Cách 2: Cm AM.AB = AN.AC (= AH^2)

$$\Rightarrow \Delta ANM \backsim \Delta ABC\left(cgc\right) \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ANM}$$

(cho điểm tương ứng như cách 1)

3) **Cách 1:** Kẻ đường kính AD

$\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (góc nt chắn cung DC)

$\widehat{ABC} = \widehat{ANM}$ (cmt)

Có $\widehat{DBC} + \widehat{ABC} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đtr)

$\Rightarrow \widehat{ANM} + \widehat{DAC} = 90^0 \Rightarrow AO \perp MN$

Cách 2: Kẻ tiếp tuyến xAy của (O)

c/m: $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$ (góc nt, góc tạo bởi tt và dây cùng chắn cung AC)

$\widehat{ABC} = \widehat{ANM}$ (cmt)

Vậy $\widehat{xAC} = \widehat{ANM}$, ở vị trí slt

$\Rightarrow MN$ // xy mà AO $\perp$ xy (do xAy là TT của (O)) $\Rightarrow AO \perp MN$

(cho điểm tương ứng như cách 1)

4) Có $AN.AC = AH^2 = 2R^2 = AO.AC$

$\Rightarrow AN.AC = AO.AC$

$\Rightarrow \Delta AON \backsim \Delta ADC\left(cgc\right)$

$\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{ADC} = 90^0$

CMTT : $\widehat{AOM} = \widehat{ADB} = 90^0$

Vậy $\widehat{AOM} + \widehat{AON} = 180^0$ $\Rightarrow$ O, M, N thẳng hàng.

Bài 329. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E bất kỳ (E khác A và C). Kẻ CK vuông góc với AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F.

1) Chứng minh tứ giác AHCK là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh KH song song với ED và tam giác ACF là tam giác cân.

3) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Vì $CK \perp AK$ nên $\widehat{AKC} = 90^0$. $CH \perp AB$ tại H nên $\widehat{AHC} = 90^0$. Tứ giác AHCK có :

$\widehat{AHC} + \widehat{AKC} = 180^0$ nên ACHK là tứ giác nội tiếp.

(Tổng 2 góc đối bằng 180^0).

b) Từ CHAK là tứ giác nội tiếp ta suy ra $\widehat{CHK} = \widehat{CAK} = \widehat{CAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC).

Lại có ADCE nội tiếp nên $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Từ đó suy ra $\widehat{CHK} = \widehat{CDE} \Rightarrow HK//DE$.

Do HK// DF, mà H là trung điểm CD (Được suy ra từ quan hệ vuông góc của đường kính AB với dây CD tại H).

Suy ra HK là đường trung bình của tam giác CDF, dẫn đến K là trung điểm FC. Tam giác AFC có AK là đường cao đồng thời cũng là trung tuyến nên CAF là tam giác cân tại K .

c) Tam giác FAC cân tại A nên AF = AC.

Dễ thấy tam giác ACD cân tại A nên AC=AD từ đó suy ra AF =AD hay tam giác AFD cân tại A, hạ $DI \perp AF$.

Ta có $S_{AFD} = \frac{1}{2}DI.AF = \frac{1}{2}DI.AC,$ do AC không đổi nên S_{AFD} lớn nhất khi và chỉ khi DI lớn nhất,

Trong tam giác vuông AID ta có:

$ID \le AD = AC$ hay $S_{AFD} = \frac{1}{2}DI.AF = \frac{1}{2}DI.AC \le \frac{AC^2}{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv A$

khi đó $\widehat{DAF} = 90^0$ dẫn đến tam giác ADF vuông cân tại A, suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{EDA} = 45^0$ hay E là điểm chính giữa cung AB.

Bài 330. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác BFEC là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $AF.AB = AE.AC$

3) BE và CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là M và N. Chứng minh EF // MN

4) Giả sử B và C cố định; A thay đổi. Tìm vị trí của A sao cho tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn

1) Chứng minh được tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn đường kính BC

2) Chứng minh được ΔAHF đồng dạng với ΔABD

$\Rightarrow AF.AB = AH.AD$ (1)

Chứng minh ΔAEH đồgn dạng với ΔADC

Suy ra $AE.AC = AH.AD$ (2)

(1) và (2) suy ra AF.AB = AE.AC

(Hoặc chứng minh ΔAEF đồng dạng với ΔABC)

3) + Chứng minh được $\widehat{MAC} = \widehat{CAD}$ hay $\widehat{MAE} = \widehat{EAH}$ suy ra AE là trung trực của HM, suy ra E là trung điểm của HM

+ Tương tự chứng minh được F là trung điểm của HN

Suy ra FE // MN (đường trung bình)

(Hoặc có thể chứng minh $\widehat{FCB} = \widehat{FEB} = \widehat{NMB}$)

4) $4S_{\Delta AEH} = 2AE.EH \le AE^2 + EH^2 = AH^2$

Chứng minh AH = 2OK, OK không đổi.

Lập luận, kết luận được $S_{\Delta AEH}$ lớn nhất khi AE = EH hay $\widehat{HAE} = 45^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^0$, suy ra vị trí A

Bài 331. Cho (O) đường kính AB = 2R, xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là một đường kính bất kỳ $(AC < CB)$. Gọi giao điểm của AC, AD với xy theo thứ tự là M và N.

1) Chứng minh rằng tứ giác MCDN nội tiếp.

2) Chứng minh AC.AM = AD.AN

3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN và H là trung điểm của MN. Chứng minh rằng tứ giác AOIH là hình bình hành. Khi đường kính CD quya xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

4) Khi góc AHB bằng 60^0. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành khi hình bình hành AHIO quay quanh cạnh AH theo R.

Hướng dẫn

1) CM ΔAOC cân ở O $\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{OCA}$

mà $\widehat{CAO} = \widehat{ANB}$ (cùng phụ với $\widehat{AMB}$) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ANM}$

Ta có: $\widehat{ACD} + \widehat{DCM} = 180^0 \Rightarrow \widehat{DCM} + \widehat{ANM} = 180^0$

Chứng minh DCMN nội tiếp

2) ΔACD và ΔANM có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MAN}: \text{chung} \\ \widehat{ACD} = \widehat{ANM}(\text{cmt})\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD \ \# \ \Delta ANM \ \text{(g - g)}$$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AD}{AM}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AC.AM = AD.AN$

3) Xác định I: I là tâm đườn tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN

$\Rightarrow I$ là giao điểm của đường trung trực của CD và trung trực của MN

$\Rightarrow IH \perp MN$ và $IO \perp CD$

Do $AB \perp MN; IH \perp MN \Rightarrow$ AO // IH

Do H là trung điểm MN $\Rightarrow AH$ là trung điể mcủa tam giác vuông AMN

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{NAH}$

Mà $\widehat{ANM} = \widehat{BAM} = \widehat{ACD}(\text{cmt}) \Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{ACD}$

Gọi K là giao điểm của AH và DO

do $\widehat{ADC}+\widehat{ACD}=1v \Rightarrow \widehat{DAK}+\widehat{ADK}=90^0$ hay ΔAKD vuông ở K

$\Rightarrow AH \perp CD$ mà $OI \perp CD \Rightarrow$ OI // AH

Vậy AHIO là hình bình hành

Do AOIH là hình bình hành $\Rightarrow IH = AO = R$ không đổi

$\Rightarrow CD$ quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng R.

4) Xét ΔABH vuông tại B, $\widehat{AHB}=60^0$

$$\Rightarrow AH = 2R\sin 60^0 = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{xqtru} = 2\pi\frac{R}{2}AH = 2\pi\frac{R}{2}.\frac{4R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi R^2}{3}$$

Bài 332. Cho điểm M cố định nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Qua M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (với A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm bất kì trên cung nhỏ AB của đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB, MA, MB.

1) Chứng minh bốn điểm A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

2) AC cắt DE tại P; BC cắt DF tại Q. Chứng minh $\Delta PAE \# \Delta PDC$ suy ra $PA.PC = PD.PE$

3) Chứng minh AB // PQ

4) Khi điểm C di động trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) thì trọng tâm G của tam giác ABC di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn

1) Xét tứ giác ADCE:

$\widehat{CDA}+\widehat{CEA}=180^0$

Mà $\widehat{CDA}$ và $\widehat{CEA}$ là hai góc đối nhau

Suy ra tứ giác ADCE là tứ giác nội tiếp (dhnb)

Vậy 4 điểm A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn

2) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADCE:

$\widehat{CAE}=\widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Xét ΔPAE và ΔPDC

$\widehat{APE}=\widehat{DPC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{CAE}=\widehat{CDE}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta PAE \# \Delta PDC$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PE}{PC}$ (định nghĩa hai tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow PA.PC=PD.PE$ (đpcm)

3) Chứng minh $\widehat{PDC}=\widehat{ABC}\left(=\widehat{CAE}\right);\widehat{QDC}=\widehat{CAB}\left(=\widehat{CBF}\right)$

Suy ra $\widehat{PDQ}+\widehat{PCQ}=\widehat{CAB}+\widehat{CBA}+\widehat{PCQ}=180^0$

Chứng minh được tứ giác CPDQ nội tiếp

Suy ra $\widehat{CPQ}=\widehat{CAB}\left(=\widehat{CDQ}\right)$ Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AB$ // PQ

4) OM cắt AB tại I. dựng trọng tâm G; lấy H, K thuốc AI và BI sao cho $AH=\dfrac{2}{3}AI;BK=\dfrac{2}{3}=BI$

$\Rightarrow H,K$ cố định

$\dfrac{AH}{AI}=\dfrac{CG}{CI}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GH$ // CA; tương tự GK // CB

Suy ra $\widehat{HGK}=\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ lớn = α không đổi.

Mà H, K cố định

Suy ra G thuộc 1 cung chứa góc α dựng trên đoạn HK (thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M).

Bài 333. Cho **đường** tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm nằm chính giữa cung nhỏ CD.

Đường kính MN của đường tròn (O) cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn CD. (E khác C,D,N); ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.

a) Chứng minh rằng :Tứ giác IKEN nội tiếp

b) Chứng minh: EI.MN=NK.ME

c) NK cắt MP tại Q. Chứng minh: IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$

d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Hướng dẫn

a) Xét đường tròn (O) có đường kính MN, M là điểm chính giữa cung nhỏ CD (gt) nên MN vuông góc với CD tại trung điểm I của CD. Do đó: $\widehat{MID} = 90^0$

Ta có $E \in \left(O; \frac{1}{2}MN\right) \Rightarrow \widehat{MEN} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác IKEN có: $\widehat{MID} + \widehat{MEN} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác IKEN nội tiếp. (theo dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

b) Tứ giác IKEN nội tiếp (cmt) nên $\widehat{MEI} = \widehat{MNK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Xét ΔMEI và ΔMNK có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MEI}=\widehat{MNK}(cmt)\\ \widehat{EMI}chung\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta MEI\sim\Delta MNK(g.g)\Rightarrow\frac{EI}{NK}=\frac{ME}{MN}\Rightarrow EI.MN=NK.ME$$

c) Xét ΔMNP có 2 đường cao ME và PI cắt nhau tại K nên K là trực tâm ΔMNP

Do đó NK vuông góc với MP tại Q. Từ đó suy ra $\widehat{NQP}=90^0$

Xét tứ giác NIQP có: $\widehat{NIP}=\widehat{NQP}=90^0$ mà 2 góc này cùng nhìn NP do đó tứ giác NIQP nội tiếp. Suy ra

$\widehat{QNP}=\widehat{QIP}$ (vì cùng chắn cung PQ) (1)

Tứ giác IKEN nội tiếp (cm a) nên $\widehat{QNP}=\widehat{EIK}$ (cùng chắn cung EK) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QIP}=\widehat{EIK}$. Do đó IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$.

d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Ta có: $\left.\begin{array}{l}ME\perp NP\\ CH\perp NP\end{array}\right\}\Rightarrow ME//CH\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\widehat{DEM}=\widehat{DHC}(dv)\\ \widehat{MEC}=\widehat{ECH}(slt)\end{array}\right.$

Mà $\widehat{DEM}=\widehat{MEC}$ (2 góc nt chắn 2 cung = nhau)

$\Rightarrow\widehat{EHC}=\widehat{ECH}$

$\Rightarrow\Delta EHC$ cân tại E

$\Rightarrow$EN là trung trực của CH

Xét ΔDCH có: IN là trung trực của CD (dễ dãng cm) $\Rightarrow NC=ND$

EN là trung trực của CH (cmt) $\Rightarrow NC=NH$

$\Rightarrow$N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDCH

$\Rightarrow H\in(N;NC)$

Mà N, C cố định => H thuộc đường tròn cố định khi E chạy trên CD

Bài 334. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R;$ C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC<CB.$ Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD}=90^0.$ Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD.

1) Chứng minh CEDF là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh FC.FA = FD.FB

3) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

4) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Hướng dẫn

1) Ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{FCE} = \widehat{FDE} = 90^0$

Tứ giác CEDF có: $\Rightarrow \widehat{FCE} + \widehat{FDE} = 180^0$. KL

2) Xét ΔFCB và ΔFDA có $\widehat{FCB} = \widehat{FDA} = 90^0$ và $\widehat{CFB}$ chung

$\Rightarrow \Delta FCB \ \# \ \Delta FDA$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{FC}{FD} = \dfrac{FB}{FA} \Rightarrow FC.FA = FD = FB$

3) ΔOCA cân tại O nên $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$

ΔICF cân tại I nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

Từ đó $\widehat{ICF} + \widehat{OCA} = \widehat{IFC} + \widehat{OAC} = 90^0$ Vì ΔHAF vuông tại H (do E là trực tâm ΔFAB)

$\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^0 \Rightarrow IC \perp OC$

Kết hợp với $C \in (O)$ suy ra IC tiếp xúc với (O)

4) Gọi T là điểm chính giữa của cung AB không chứa C (T cố định)

IETO là hình bình hành (Vì IE song song và bằng OT)

$\Rightarrow TE = OI = R\sqrt{2}$ (Vì ICOD là hình vuông cạnh E)

Vậy E thuộc $\left(T; R\sqrt{2}\right)$

Bài 335. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA=3R. Qua A, kẻ các tiếp tuyến AP, AQ với đường tròn (O) (P, Q là các tiếp điểm). Qua P kẻ đường thẳng song song với AQ cắt (O) tại M. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh tứ giác APOQ nội tiếp
2) Chứng minh $KA^2 = KN.KP$
3) Kẻ đường kính QS của (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc PNM.
4) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R.

Hướng dẫn

1) Ta có $\begin{cases} AP \perp OP \\ AQ \perp OQ \end{cases} \Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^0$

Tứ giác APOQ có $\widehat{APO} + \widehat{AQO} = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Suy ra Tứ giác APOQ nội tiếp

2) Vì AQ//PM nên góc PMA= góc QAN (s0 le trong)

Mà $\widehat{PAM} = \widehat{APN}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung PN)

NÊN $\widehat{QAN} = \widehat{APN}$

XÉT Δ KAN VÀ ΔKPA có

Góc AKP chung

$\widehat{QAN} = \widehat{APN}$

$\Rightarrow \Delta KAN \sim \Delta KPA(gg)$

Nên $\dfrac{KA}{KP} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$

3) Ta có PM//AQ mà SQ vuông góc với AQ nên SQ $\perp$ PM.

Suy ra S là điểm chính giữa $\overset{\frown}{PM} \Rightarrow \overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{SQ}$

$\Rightarrow \widehat{PNS} = \widehat{SNM}$ hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung băng nhau

Nên NS là tia phân giác của góc PNM.

4) Ta có $KA^2 = KN.KP$

Chứng minh $\Delta KNQ \sim \Delta KPQ(gg) \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

SUY RA KA=KQ nên K là trung điểm của AQ.

Chứng minh H là trung điểm của PQ.

Xét tam giác APQ có hai đường trung tuyến PK,AH cắt nhau tại G $\Rightarrow$ G là trọng tâm

$\Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{16}{9}R$

Bài 336. **Cho** đường tròn (O; R), đường kính AB vuông góc với dây cung MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O; R) sao cho đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O; R) tại điểm K khác A, hai dây MN và BK cắt nhau ở E.

a) Chứng minh rằng AHEK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh CA . CK = CE . CH

c) Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia MK tại F. Chứng minh ΔNFK cân.

d) Giả sử KE = KC. Chứng minh OK // MN

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{AHE} = 90^0$ (theo giả thiết $AB \perp MN$)

$\widehat{AKE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AKE} = 180^0$. Vậy tứ giác AHEK là tứ giác nội tiếp. (Tổng hai góc đối bằng 180^0)

b) Xét hai tam giác CAE và CHK:

+ Có góc C chung

+ $\widehat{EAC} = \widehat{EHK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cùng EK)

Suy ra $\Delta CAE \backsim \Delta CHA$ (g – g)

Suy ra CA . CK = CE . CH

Hoặc cm $\Delta CKE \backsim \Delta CHA$ (g –g)

c) Do đường kính AB vuông góc MN nên B là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{MN}$

Suy ra $\widehat{MKB} = \widehat{NKB}$ (1)

Lại có BK // NF (vì cùng vuông góc với AC) nên $\begin{cases} \widehat{NKB} = \widehat{KNF} (2) \\ \widehat{MKB} = \widehat{MFN} (3) \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MFN} = \widehat{KNF} \Leftrightarrow \widehat{KFN} = \widehat{KNF}$. Vậy ΔKNF cân tại K.

d) Ta có $\widehat{AKB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BKC} = 90^0 \Rightarrow \Delta KEC$ vuông tại K.

Theo giả thiết ta lại có KE = KC nên tam giác KEC vuông cân tại K

$\widehat{BEH} = \widehat{KEC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{OBK} = 45^0$

Mặt khác vì tam giác OBK cân tại O (do OB = OK = R) nên suy ra tam giác OBK vuông cân tại O dẫn đến OK // MN (cùng vuông góc với AB)

Bài 337. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB sao cho AC < BC; E là một điểm thuộc đoạn BC (E khác B và C). Tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Kẻ EH vuông góc với AB tại H.

1) Chứng minh tứ giác ACEH là tứ giác nội tiếp.
2) Tia CH cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng EH // DF.
3) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔCHO đi qua điểm D.
4) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm F trên các đường thẳng CA và CB. Chứng minh rằng AB, DF, IK cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn

$\widehat{ACE} = 90^0; \widehat{AHE} = 90^0$

$\widehat{ACE} + \widehat{AHE} = 180^0$

Hai góc này ở vị trí đối nhau, suy ra ACEH là tứ giác nội tiếp

Tia CH cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh EH // DF

$\widehat{AEH} = \widehat{ACH}$

$\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$

Suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{ADF}$

Hai góc này ở vị trí đồng vị, suy ra EH // DF

Chứng minh rằng: Điểm D thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCHO

Chứng minh HEDB là tgnt suy ra

Chứng minh $\widehat{CHD} = \widehat{CHE} + \widehat{EHD} = \widehat{COD}$

Chứng minh CHOD nội tiếp

Suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCHO

Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D trên các đường thẳng CA và CB. Chứng minh rằng AB, DF, IK cùng đi qua một điểm.

Gọi giao điểm của DF và AB là M

Tứ giác AIFM nội tiếp suy ra $\widehat{IMF} = \widehat{IAF}$

Tứ giác ACBF nội tiếp suy ra $\widehat{CBF} = \widehat{IAF}$, suy ra $\widehat{IMF} = \widehat{KBF}$

Tứ giác BKMF nội tiếp suy ra $\widehat{KBF} + \widehat{KMF} = 180^0$

Tức $\widehat{IMF} + \widehat{KMF} = 180^0$, suy ra đpcm

Bài 338. Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, đường cao $BE,\ CF$ cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC và AD là đường kính của (O). Chứng minh:

a) $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

b) $AE.AC = AF.AB$.

c) $H,\ M,\ D$ thẳng hàng

d) Cho (O) và điểm $B,\ C$ cố định, A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC luôn có ba góc nhọn. Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có bán kính không đổi.

Hướng dẫn

a) Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn (1,0 điểm)

+ Do $BE,\ CF$ là đường cao của ΔABC (gt)

$\Rightarrow BE \perp AC,\ CF \perp AB$

Góc $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$

(không lý giải trừ 0,25)

$E,\ F$ cùng thuộc đường tròn đường kính BC

Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

b) Chứng minh AE.AC = AF.AB (1,0 điểm)

Ta có $BE \perp AC,\ CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$

Do $BFEC$ là tứ giác nội tiếp $\widehat{FBE} = \widehat{FCE}$ (hệ quả góc nội tiếp)

Xét ΔAEB và ΔAFC có: góc $\widehat{AEB} = \widehat{AFC}$; $\widehat{FBE} = \widehat{FCE}$,

ΔAEB đồng dạng ΔAFC (g.g)

$\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$ (đpcm)

c) Chứng minh H, M, D thẳng hàng (1,0 điểm)

Do AD là đường kính của (O) (gt) $\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^0$ (hệ quả góc nội tiếp) $\Rightarrow DC \perp AC$

Lại có $BE \perp AC\ (gt) \Rightarrow BE\ //\ DC \Rightarrow BH\ //\ DC$ (1)

Tương tự ta có: $HC\ //\ BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

Do M là trung điểm của $BC \Rightarrow M$ là trung điểm của HD.

Vậy H, M, D thẳng hàng (đpcm)

d) Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có bán kính không đổi

+CM: $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

ΔAEF nội tiếp đường tròn có bán kính là $\frac{1}{2}AH$ (3)

+ Do O, M lần lượt là trung điểm của AD và HD

OM là đường trung bình của $\Delta AHD \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$

Do (O) và B, C cố định $\Rightarrow O$, M cố định $\Rightarrow OM$ không đổi $\Rightarrow \frac{1}{2}AH$ không đổi (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có bán kính không đổi (đpcm)

Bài 339. Cho đường tròn (O), dây BC cố định. Trên cung lớn BC của (O), lấy điểm A $(A \neq B, A \neq C)$. Hai tiếp tuyến qua B và C của (O) cắt nhau tại E.

1) Chứng minh tứ giác $BOCE$ nội tiếp.

2) AE cắt (O) tại điểm thứ hai là D $(D \neq A)$. Chứng minh $EB^2 = ED.EA$.

3) Gọi F là trung điểm của AD. Đường thẳng qua D và song song với EC cắt BC tại G. Chứng minh FG song song với AC.

4) Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho $AH = AC$. Chứng minh khi điểm A thay đổi trên cung lớn BC thì điểm H di động trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

1) Chứng minh: $\widehat{OBE}=\widehat{OCE}=90^0$

Xét tứ giác $BOCE$ có $\widehat{OBE}+\widehat{OCE}=180^0$ mà chúng là hai góc đối nhau

Suy ra tứ giác $BOCE$ nội tiếp

2) Chứng minh được $\widehat{EBD}=\widehat{EAD}$

Chứng minh $\Delta EBD\backsim\Delta EAB(g-g)\Rightarrow\frac{ED}{EB}=\frac{EB}{EA}\Rightarrow ED.EA=EB^2$.

3) Chứng minh F thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BOCE$ nên $\widehat{BFE}=\widehat{BCE}$

Chứng minh góc $\widehat{BCE}=\widehat{BGD}$.

Từ đó chứng minh $\widehat{BGD}=\widehat{BFD}$

Chứng minh tứ giác $BFGD$ nội tiếp suy ra $\widehat{DFG}=\widehat{DBC}$

Chứng minh $\widehat{DBC}=\widehat{DAC}$

Từ đó suy ra $\widehat{DFG}=\widehat{DAC}$, mà 2 góc ở vị trí đồng vị nên $GF//AC$

4)

Cách 1: Lấy I là điểm chính giữa cung lớn BC nên I cố định và $\widehat{IBC}=\widehat{ICB}$.

Chứng minh $\widehat{IBC}=\widehat{ICB}=\widehat{IAC}=\widehat{IAH}$

Chứng minh $\Delta ACI=\Delta AHI$ $(c-g-c)\Rightarrow IC=IH\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (I,IC).

Cách 2:

ΔAHC cân tại A nên $\widehat{BHC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\frac{1}{4}sdBC=const$.

Suy ra H thuộc cung chứa góc $\frac{1}{4}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ dựng trên BC

Bài 340. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C $(AC>R)$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M trên đường tròn (O) sao cho $AM=\frac{R}{2}$. Tia BM cắt đường thẳng d tại điểm P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1) Chứng minh tứ giác $ACPM$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $NQ\ //\ PC$.

3) a) Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác MAB một vòng quanh AM theo R

b) Gọi H là giao điểm của QN và AB. Gọi E là giao điểm của MB và QN, tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh $AE.AK + BE.BM = 4R^2$.

4) Chứng minh rằng ba điểm B, N và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK thẳng hàng.

Hướng dẫn

1) Chứng minh $\widehat{ACP} = \widehat{AMB} = 90^0$. Từ đó chỉ ra $\widehat{AMP} = 90^0$.

Ta có: $\widehat{AMP} + \widehat{ACP} = 180^0$ Suy ra tứ giác ACPM nội tiếp

2) ***Chứng minh NQ // PC***

Chứng minh được $\widehat{CPA} = \widehat{AMC}$ (1)

Chứng minh tứ giác AMNQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AQN}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AQN} = \widehat{APC} \Rightarrow CP//QN$

3a) ***Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác MAB một vòng quanh AM theo R***

Sử dụng định lí Pitago trong ΔAMB vuông tại M tính $MB = \frac{\sqrt{15}}{2}R$ (đvđd)

Khi quay tam giác vuông AMB một vòng quanh cạnh AM ta được hình nón với đường cao $AM = h$, bán kính của đường tròn đáy là $BM = r$.

Thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{5\pi R^3}{8}$ (đvtt)

3b) ***Chứng minh AE.AK + BE.BM = 4R²***

Chứng minh QN ⊥ AB tại H

Chứng minh ΔAEH ∽ ΔABK (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow AE.AK = AB.AH$

Chứng minh ΔBEH ∽ ΔBAM (g.g) $\Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BM} \Rightarrow BE.BM = AB.BH$

$\Rightarrow AE.AK + BE.BM = AB(AH + HB) = AB^2 = 4R^2$.

4) *Chứng minh rằng ba điểm B, N và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK thẳng hàng.*

Kẻ Nx là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE tại N

(Nx thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng NE chứa điểm A) (3)

Chứng minh được $\widehat{ENx} = \widehat{NKE}$

Chứng minh được $\widehat{NKE} = \widehat{ENA}$

$\widehat{ENx} = \widehat{ENA}$(4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ Tia Nx là tia NA trùng nhau

$\Rightarrow$NA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK tại tiếp điểm N.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE

$\Rightarrow$ AN $\perp$ NI, mà AN $\perp$ BN $\Rightarrow$ N, I, B thẳng hàng

Bài 341. Cho đường tròn $(O;R)$, dây MN cố định $(MN < 2R)$. Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E. Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E), BC cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác B).

1) Chứng minh: Tứ giác AKCE nội tiếp được một đường tròn.

2) Chứng minh: $BM^2 = BK.BC$.

3) Gọi I là giao điểm của AK và MN; D là giao điểm của AC và BI.

a) Chứng minh: D thuộc $(O;R)$.

b) Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của ΔDEK.

4) Xác định vị trí điểm C trên dây MN để khoảng cách từ E đến tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMCK nhỏ nhất.

1) Xét (O) có: $\widehat{AKB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có AB $\perp$ MN tại E (gt) $\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{BEM} = 90^0$

Xét tứ giác AKCE có: $\widehat{AKC} + \widehat{AEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

⇨ Tứ giác AKCE nội tiếp được một đường tròn (dhnb)

2) +) Xét (O) có:

$$\left.\begin{array}{l}\text{AB là đ/kính}\\ \text{MN là dây}\\ \text{AB}\perp\text{MN}\ (\text{gt})\end{array}\right\}\Rightarrow B \text{ là điểm chính giữa } \overset{\frown}{MN}\Rightarrow \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{BN}$$

$\Rightarrow \widehat{MKB}=\widehat{NMB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

+) Xét ΔBMC và ΔBKM có:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}: chung\\ \widehat{MKB}=\widehat{CMB}(cmt)\end{array}\right\}=> \Delta BMC \backsim \Delta BKM\,(g.g)$$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BK}=\dfrac{BC}{BM}$

$\Rightarrow BM^2 = BK.BC$ (T/c TLT) (đpcm)

3) Xét ΔAIB có BK, IE là hai đường cao

Mà $BK\cap IE=\{C\}$ $\Rightarrow C$ là trực tâm của ΔAIB

$\Rightarrow AC$ là đường cao của ΔAIB

$\Rightarrow AC\perp IB$ hay $AD\perp IB\Rightarrow \widehat{ADB}=90^0$

$\Rightarrow D$ thuộc đường tròn đường kính AB

Hay D thuộc $(O;R)$.

+) Chứng minh tứ giác BDCE nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CBE}=\widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

+) Chứng minh $\widehat{KDA}=\widehat{KBA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$ của (O))

$\Rightarrow \widehat{KDC}=\widehat{CDE}\Rightarrow DC$ là tia phân giác của $\widehat{KDE}$

+ Chứng minh tương tự: KC là phân giác của $\widehat{DKE}$ ***(HS ghi chứng minh tương tự GV không trừ điểm)***

+ Chứng minh C là tâm đường tròn nội tiếp ΔDKE

Suy ra điểm C cách đều 3 cạnh của tam giác ΔDKE

4) +) Chứng minh được MB là tiếp tuyến của ΔMCK

+) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMCK

$\Rightarrow MB \perp MO'$ (1)

+) Xét (O) có $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O' \in AM$

Vì B, A, M cố định $\Rightarrow O'$ luôn thuộc đường thẳng cố định AM

+) Kẻ $EH \perp AM \Rightarrow H$ cố định (vì E cố định, AM cố định)

+) Xét ΔO'EH có $\widehat{O'HE} = 90^0$

$\Rightarrow O'E \geq HE$ (qhệ đường vuông góc, đường xiên)

$\Rightarrow \min O'E = HE \Leftrightarrow O' \equiv H$

Mà ta luôn có O' luôn thuộc đường trung trực của MC

$\Rightarrow O'C = O'M$

Vậy khoảng cách O'E nhỏ nhất khi $O' \equiv H \Rightarrow C$ là giao điểm thứ hai của $(H;HM)$ với dây MN trong đó H là chân đường vuông góc của E trên AM

Bài 342. Cho đường tròn tâm O bán kính R, đường kính AB. Điểm H bất kì thuộc đoạn OB, H khác O và B. Dây CD vuông góc với AB tại H. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Nối CO, DO

cắt đường thẳng d tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F (E ≠ C, F ≠ D).

a) Chứng minh tứ giác MNFE nội tiếp

b) Chứng minh ME.MC = NF.ND

c) Tìm vị trí của điểm H để tứ giác AEOF là hình thoi.

d) Lấy điểm K đối xứng với C qua A. Gọi G là trọng tâm tam giác KAB. Chứng minh rằng khi H di chuyển trên đoạn OB thì điểm G thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) Lập luận được OA ⊥ MN nên $MN\ //\ CD$

$\Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{CMN}$

Lập luận được góc $\widehat{DCM} = \widehat{DFE} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{DFE}$

Suy luận được tứ giác $MNEF$ nội tiếp

b) Lập luận chứng minh được tam giác OMN cân tại O $\Rightarrow AM = AN$

Chứng minh được $\Delta NAF \backsim \Delta NDA\ (g.g)$,

suy được $NA^2 = NF.ND$

Chứng minh tương tự: $MA^2 = ME.MC$

Suy được: $ME.MC = NF.ND$

c) Lập luận: để OEAF là hình thoi $\Leftrightarrow AE = AF = OE = OF = R$

Suy luận để được ΔOAE đều $\Leftrightarrow$ góc $\widehat{AOE} = 60^0$ và góc $\widehat{COH} = 60^0$

Lập luận được $OH = OC.\cos 60^0 = \frac{R}{2}$

Suy được H là trung điểm của OB

d) Lấy điểm O' đối xứng với O qua điểm A, suy ra O' cố định, $OA' = OA = R$. Vì O là trung điểm của AB nên suy ra được $G \in KO,\ OG = \frac{1}{3}OK$.

Chứng minh được $\Delta AOC = \Delta AO'K \Rightarrow O'K = OC = R$ không đổi

Kẻ $GI\ //\ O'K,\ (I \in OA)$. Áp dụng định lý Talet suy được

$\frac{OI}{OO'} = \frac{IG}{O'K} = \frac{OG}{OK} = \frac{1}{3} \Rightarrow OI = \frac{2R}{3}; IG = \frac{R}{3}$ suy được điểm I cố định, IG không đổi

Lập luận được G thuộc đường tròn $\left(I; \frac{R}{3}\right)$ cố định

Bài 343. Cho đường tròn (O;R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng OB(M khác O và B). Tia CM cắt đường tròn (O;R) tại E.

1. Chứng minh tứ giác OMED nội tiếp
2. Chứng minh $CM.CE = 2R^2$.
3. Gọi H là giao điểm của BD và CE, K là giao điểm của AE và CD. Chứng minh $HK \perp CD$
4. Chứng minh diện tích tứ giác ACMK không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OB (M khác O và B).

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác OMED nội tiếp

Chứng minh được tứ giác OMED có góc $\widehat{MOD}+\widehat{MED}=180^0$

Suy ra tứ giác OMED nội tiếp

b) Chứng minh $CM.CE=2R^2$

Chứng minh được $\Delta COM \backsim \Delta CED(g-g)$

Suy ra $CM.CE=CO.CD=2R^2$

c) Gọi H là giao điểm của BD và CE, K là giao điểm của AE và CD. Chứng minh HK $\perp CD$

Cminh được $\widehat{KEH}=\widehat{KDH}$

Suy ra được tứ giác KHED nội tiếp

Suy ra được HK $\perp CD$

d) *Chứng minh được* $\Delta CAK \backsim \Delta AMC(g-g)$

Suy ra được $AM.CK=AC^2=2R^2$

Chỉ ra được $S_{ACMK}=\frac{1}{2}AM.CK=R^2$ không đổi

Bài 344. Cho đường tròn (O) với đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B. Gọi M là trung điểm AB, từ M kẻ dây DE vuông góc với AB. Từ B kẻ BF vuông góc với CD (F thuộc CD)

1. Chứng minh: tứ giác BMDF nội tiếp
2. Chứng minh: $CB.CM=CF.CD$.
3. Chứng minh: tứ giác ADBE là hình thoi và 3 điểm B, E, F thẳng hàng.
4. Gọi S là giao điểm của BD và MF, tia CS lần lượt cắt AD, DE tại H và K. Chứng minh: $\frac{DA}{DH}+\frac{DB}{DS}=\frac{DE}{DK}$

Hướng dẫn

Vẽ hình đúng đến câu a

1. Có $\widehat{DMB} = 90^0$(Do $DE \perp AB$)

Có $\widehat{DFB} = 90^0$(Do BF $\perp AB$)

Suy ra $\widehat{DMB} + \widehat{DFB} = 180^0$

Suy ra: tứ giác DMBF nội tiếp

2. Chứng minh: ΔCFB và ΔCMD đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CM} = \dfrac{CB}{CD}$

$\Rightarrow CF.CD = CM.CB$

3. Có $AM = MB$ (M là trung điểm AB)

Có $DE \perp AC \Rightarrow MD = ME$ (Liên hệ đk và dc)

Suy ra: ADBE là hình bình hành (DHNB)

Mà DE ⊥ AB

Vậy ADBE là hình thoi

4. Kẻ AJ // HK (J thuộc DE); BI // HK (J thuộc DE)

Chỉ ra được: $\dfrac{DA}{DH} = \dfrac{DJ}{DK}; \dfrac{DB}{DS} = \dfrac{DI}{DK}$ (Định lí Ta – let)

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DH} + \dfrac{DB}{DS} = \dfrac{DI + DJ}{DK}$

Chứng minh được: DI = EJ (ΔAEJ = ΔBDI)

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DH} + \dfrac{DB}{DS} = \dfrac{EJ + DJ}{DK} = \dfrac{DE}{DK}$

Bài 345. cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R). từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB,AC với B,C là tiếp điểm, và cát tuyến AMN với đường tròn (O). (với MN không đi qua tâm và $AM < AN$).

1. CHứng minh tứ giác ABOC nội tiếp
2. Chứng minh $AM.AN = AB^2$.
3. Tiếp tuyến tại N của (O) cắt đường thẳng BC tại điểm F. chứng minh đường thẳng FM là tiếp tuyến của (O;R)
4. Gọi P là giao điểm của dây BC và dây MN, E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNO và đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABOC (E khác O)

   Chứng minh P,E,O thẳng hàng

Hướng dẫn

Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp

AB là tiếp tuyến của (O) nên AB vuông góc với BO suy ra góc $\widehat{ABO} = 90^0$

Lập luận tương tự có góc $\widehat{AOC} = 90^0$

Vì $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^0$ nên tứ giác ABOC nội tiếp

Chứng minh $AM.AN = AB^2$

Chứng minh được góc $\widehat{ABM} = \widehat{ANB}$

xét ΔABM và ΔANB có góc $\widehat{BAN}$ chung, góc $\widehat{ABM} = \widehat{ANB}$

suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta ANB$

Suy ra $AM.AN = AB^2$

chứng minh đường thẳng FM là tiếp tuyến của (O;R)

Chứng minh $AB^2 = AH.AO$ và $AM.AN = AB^2$ suy ra $AH.AO = AM.AN$

Chứng minh M,N,O,H cùng thuộc một đường tròn (I)

Mà $\widehat{FNO}$ =90^0 nên FO là đường kính của (I)

Lập luận tương tự có FM là tiếp tuyến của (O).

Chứng minh K,D,E thẳng hàng

Chứng minh A,E,F thẳng hàng

Chứng minh EO,FH,AK là đường cao của tam giác OFA

Bài 346. Cho đường tròn (*O; R*) cố định , dây *AB* cố định không đi qua tâm *O*. Qua trung điểm *I* của dây *AB* , kẻ đường kính *PQ* (*P* thuộc cung nhỏ *AB*), *E* là điểm bất kỳ trên cung nhỏ *QB* (*E* không trùng với *B* và *Q*), *QE* cắt *AB* tại *M*, *PE* cắt *AB* tại *D*.

1) Chứng minh rằng tứ giác *DIQE* nội tiếp

2) Chứng minh *ME.MQ = MD.MI* từ đó chứng minh *MB. MA = MD. MI*

3) Kẻ *Ax // PE*, *Ax* cắt *(O)* tại điểm thứ hai *F*. Chứng minh $BE \perp QF$

4) Gọi giao điểm của *BE* và *QF* là *K*. Tìm vị trí trên cung QB sao cho diện tích tứ giác $QABK$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo *R* biết dây $AB = R\sqrt{3}$

Hướng dẫn

a) Vì đường tròn (O) có đường kính PQ đi qua trung điểm của dây AB (AB không đi qua O) nên $PQ \perp AB$ tại $I \Rightarrow \widehat{DIQ} = 90^0$

Lại có: $\widehat{PEQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) hay $\widehat{DEQ} = 90^0$

Xét tứ giác $DIQE$ có tổng số đo hai góc đối: $\widehat{DIQ} + \widehat{DEQ} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác $DIQE$ nội tiếp (đpcm)

b) Xét ΔMED và ΔMIQ có: $\widehat{M}$ chung và $\widehat{DEM} = \widehat{MIQ}\left(= 90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta MED \backsim \Delta MIQ$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MI} = \dfrac{MD}{MQ}$

$\Rightarrow ME.MQ = MD.MI$ (1).

Vì tứ giác $ABEQ$ nội tiếp đường tròn $(O;R) \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MAQ}$ (cùng bù với $\widehat{BEQ}$).

Lại có góc $\widehat{AMQ}$ chung

$\Rightarrow \Delta MEB \backsim \Delta MAQ$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MQ}{MB}$

$\Rightarrow ME.MQ = MA.MB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MA.MB = MD.MI$.

c) Vì đường tròn (O) có đường kính PQ đi qua trung điểm của dây AB nên P là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{BEP}$ (3) (hai góc nội tiếp chắn hai cung AP, BP bằng nhau)

Mặt khác: $PE // AF$ (do $PE // Ax$)

$\Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{EPF}$ (4) (sole trong)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{BEP} = \widehat{EPF}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow BE // PF$

Lại có: $PF \perp QF$ nên $BE \perp QF$ (đpcm).

d) Ta có: $AB = R\sqrt{3}$ mà I là trung điểm của AB nên $IB = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào các tam giác vuông $OIB; QIB$ vuông tại I ta được:

$$IO^2 = OB^2 - IB^2 = R^2 - \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow IO = \frac{R}{2} \Rightarrow QI = \frac{3\mathrm{R}}{2}$$

$$QB^2 = IQ^2 + IB^2 = \left(\frac{3\mathrm{R}}{2}\right)^2 + \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\mathrm{R}^2 \Rightarrow QB = R\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta QAB} = \frac{1}{2}QI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\mathrm{R}}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Do ΔBQK vuông tại K nên $S_{\Delta BKQ} = \dfrac{1}{2}KQ \cdot KB$ (5)

Ta lại có :

$$(KQ - KB)^2 \geq 0 \Rightarrow KQ^2 + KB^2 \geq 2KQ \cdot KB \Rightarrow \frac{1}{2}KQ \cdot KB \leq \frac{KQ^2 + KB^2}{4} = \frac{QB^2}{4} = \frac{3\mathrm{R}^2}{4} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra : $S_{QABK} = S_{QAB} + S_{BKQ} \leq \dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}R^2$

Dấu "=" xảy ra khi $KQ = KB$. Do đó, ΔBQK vuông cân tại K mà B, Q cố định nên K cố định.

Vị trí điểm E cần tìm là giao điểm của BK với đường tròn (O).

Vậy diện tích tứ giác $QABK$ lớn nhất bằng $\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}R^2$ khi E là giao điểm của BK với đường tròn (O) (trong đó K là đỉnh góc vuông của tam giác vuông cân BQK)

Bài 347. Cho (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ tiếp tuyến Bx với đường tròn (O). Trên tia Bx lấy điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm)

a) Chứng minh $OM \perp BC$

b) BC cắt OM tại I. Gọi H là trung điểm AC, tia OH cắt tia MC tại N. Chứng minh bốn điểm O, H, C, I cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh $AN.BM = \dfrac{AB^2}{4}$

d) Vẽ $CE \perp AB (E \in AB)$. Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để ΔOCE có chu vi lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $OM \perp BC$

Xét (O) có:

Tiếp tuyến Bx cắt tiếp tuyến CM tại M (gt)

$\Rightarrow CM = BM$; OM là phân giác $\widehat{CMB}$ và $\widehat{COB}$ (t/c)

Xét ΔCMB có:

$CM = BM$ (cmt)

$\Rightarrow$ ΔCMB cân tại M (t/c)

Xét ΔCMB cân tại M có:

MO là phân giác $\widehat{CMB}$ (t/c)

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của BC (t/c)

$\Rightarrow$ OM $\perp BC$ tại I và $IB = IC$ (đpcm)

b) BC cắt MO tại I. Gọi H là trung điểm AC, tia OH cắt tia MC tại N. Chứng minh bốn điểm O, H, C, I cùng nằm trên một đường tròn.

Xét (O) có:

H là trung điểm dây AC (gt)

=> $\widehat{AOH} = \widehat{COH}$ và $OH \perp AC$

Xét tứ giác $OHCI$ có:

$\widehat{OHC} = \widehat{OIC} = 90^O$ (cmt)

=> O, H, C, I nằm trên đường tròn đường kính OC (đpcm)

c) Chứng minh $AN.BM = \dfrac{AB^2}{4}$

Xét ΔOAN và ΔOCN có:

ON chung

$\widehat{AON} = \widehat{CON}$ (cmt)

$OA = OC \quad (= R)$

$\Rightarrow \Delta OAN = \Delta OCN$ (c-g-c)

$\Rightarrow AN = NC$ (2 cạnh tương ứng)

Ta có $\widehat{AON} = \widehat{CON}$ (cmt)

$\widehat{COM} = \widehat{BOM}$ (cmt)

Mà $\widehat{AON} + \widehat{CON} + \widehat{COM} + \widehat{BOM} = 180^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{CON} + \widehat{COM} = 90^O$

$\Rightarrow \widehat{NOM} = 90^O$

Xét ΔNOM vuông tại O có đường cao OC:

$\Rightarrow OC^2 = CM.CN$

Mà $OC = \dfrac{AB}{2}$; $CM = MB$; $CN = NA$ (cmt)

$\Rightarrow AN.BM = \dfrac{AB^2}{4}$

d) Vẽ $CE \perp AB (E \in AB)$. Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để ΔOCE có chu vi lớn nhất.

Chu vi $\Delta OCE = OC + CE + OE$

$= R + CE + OE$

Có $\underbrace{CE^2 + OE^2}_{OC^2} \geq 2CE.OE$

$\Rightarrow 2OC^2 \geq CE^2 + OE^2 + 2CE + OE$

$\Rightarrow 2R^2 \geq (\text{CE}+\text{OE})^2$

$\Rightarrow \sqrt{2R^2} \geq \sqrt{(\text{CE}+\text{OE})^2}$

Hay $CE + \text{OE} \leq \text{R}\sqrt{2}$

$\Rightarrow R + CE + OE \leq R + \text{R}\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi $\Delta OCE \leq R + \text{R}\sqrt{2}$

Vậy chu vi tam giác đạt giá trị lớn nhất bằng $R + \text{R}\sqrt{2}$

Dấu " = " xảy ra khi $CE = OE \Leftrightarrow \widehat{COE} = 45^O \Leftrightarrow \widehat{BOM} = 22,5^O$

Vậy $M \in Bx : \widehat{BOM} = 22,5^O$

Bài 348. Cho (O), Gọi I là trung điểm của dây AB. Qua I kẻ đường kính MN (M thuộc cung nhỏ AB), P là điểm bất kì trên tia đối của tia BA sao cho góc ANP khác 90^0. Nối PN cắt (O) tại E, ME cắt AB tại D.

a) Chứng minh các điểm D, I, N, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MD.ME = MI.MN$

c) Qua A kẻ đường thăng song song với ME, đường thẳng đó cắt (O) tại F. Chứng minh $BE \perp NF$

d) Tìm vị trí của P để D là trung điểm của BI

Hướng dẫn

a) Xét (O) có: I là trung điểm của dây AB (gt) $\Rightarrow MN \perp AB$ tại I (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow \widehat{NIB} = 90^0$

Ta lại có: $\widehat{MEN} = 90^0$ (góc chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DEN} + \widehat{DIN} = 180^0$, mà hai góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $DINE$ nội tiếp (dhnb)

Hay 4 điểm D, I, N, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét ΔMID và ΔMEN có :

+) $\widehat{M}$ chung

+) $\widehat{MID} = \widehat{MEN} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta MID \sim \Delta MEN$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{ME} = \dfrac{MD}{MN} \Rightarrow MD.ME = MI.MN$

c) Giả sử BE cắt NF tại K.

Ta có : $\widehat{BNF} = \widehat{BAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF của (O))

$\widehat{MDA} = \widehat{BAF}$ (ha góc so le trong của AF // ME)

$\widehat{DMI} = \widehat{EBN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NE của (O))

$\Rightarrow \widehat{BNF} + \widehat{EBN} = \widehat{MDA} + \widehat{DMI} = \widehat{MDI} + \widehat{DMI} = 90^0$

Hay $\widehat{KNB} + \widehat{KBN} = 90^0 \Rightarrow BE \perp NF$

d) Ta có:

*Tứ giác $ABEN$ nội tiếp đường tròn tâm O

Xét ΔPBN và ΔPEA có :

+) $\widehat{P}$ chung

+) $\widehat{PNB} = \widehat{PAE}$ 9hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

$\Rightarrow \Delta PBN \sim \Delta PEA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{PN}{PA} \Rightarrow PB.PA = PE.PN$

*Tứ giác $IDEN$ nội tiếp (cmt), chứng minh tương tự

$\Rightarrow PD.PI = PE.PN$

$\Rightarrow PB.PA = PE.PN = PD.PI$

$\Rightarrow PB.PA = PD.PI$

$\Leftrightarrow PB.(PB + AB) = \left(PB + \frac{AB}{4}\right).\left(PB + \frac{AB}{2}\right)$, (có $ID = DB \Rightarrow ID = DB = \frac{AB}{4}$)

$\Leftrightarrow PB^2 + PB.AB = PB^2 + \frac{3}{4}AB + \frac{1}{8}AB \Leftrightarrow PB = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow PB = BI$

$\Rightarrow$ Để D là trung điểm của IB thì điểm P nằm trên tia đối của BI và $PB = NI$

Bài 349. Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn tâm O vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O), tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AB tại D.

a) Chứng minh các điểm A, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OM \parallel BC$.

c) Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh $AB \cdot AD = 4 \cdot OH \cdot OM$.

d) Cho MC cắt AB và OD lần lượt tại I và J. So sánh OI và HJ.

Hướng dẫn

a) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến tại A và B nên $MA \perp OA; MB \perp OB$

=> $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$ => 4 điểm A, O, B, M cùng thuộc đường tròn đường kính MO

b) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến tại A và B => $MA = MB$ (t/c 2tt cắt nhau)

Lại có $OA = OB$

Suy ra M và O thuộc đường trung trực của AB => MO là đường trung trực của AB

=> $MO \perp AB$ (1)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BAC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $BC \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) => $OM \parallel BC$

c) Vì MO là đường trung trực của AB => $MO \perp AB$ tại H

ΔMAO vuông tại A có $AH \perp OM$ => $OH.OM = OA^2$ (3)(Hệ thức lượng trong tg vuông)

Vì CD là tiếp tuyến của (O) đường kính AC

tại C => $AC \perp CD$ => ΔACD vuông tại C.

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (gg) =>

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ => $AB.AD = AC^2$ mà $AC = 2OA$ =>

$AB.AD = 4OA^2$ (4)

Từ (3) và (4) => $AB \cdot AD = 4 \cdot OH \cdot OM$

d) **+ Chứng minh** $\widehat{OMJ} = \widehat{HDO}$

Xét ΔMBO và ΔCBD có:

$\widehat{MBO} = \widehat{CBD} = 90^0$

$\widehat{MOB} = \widehat{CDB}$ (cùng = $\widehat{MAB}$)

=> $\Delta MBO \sim \Delta CBD(gg)$ => $\frac{MB}{CB} = \frac{OB}{DB}$ => $\frac{MB}{OB} = \frac{BC}{BD}$ (5)

Mặt khác $\widehat{MBC} = \widehat{OBD} (= 90^0 + \widehat{OBC})$ (6)

Từ (5) và (6) => $\Delta MBC \sim \Delta OBD(cgc)$ => $\widehat{BCM} = \widehat{BDO}$ Mà $\widehat{BCM} = \widehat{OMJ}$ (Do $OM \parallel BC$)

Nên $\widehat{HDO} = \widehat{JMO}$

Vì $OH.OM = OA^2$ (câu c) mà $OA = OC$ nên

$OH.OM = OC^2 \Rightarrow \frac{OH}{OC} = \frac{OC}{OM}$ => $\Delta OHC \sim \Delta OCM(cgc)$ => $\widehat{OCH} = \widehat{OMC}$ (7)

Xét tứ giác $OHDC$ có $\widehat{OHD} + \widehat{OCD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ => Tứ giác $OHDC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{HCO}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HO}$) (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\widehat{OMC} = \widehat{HDO} => \widehat{OMJ} = \widehat{HDO}$

+ Do đó $\Delta HDO \sim \Delta JMO(gg) => \widehat{OHD} = \widehat{OJM} => \widehat{OJI} = 90^0$

Xét tứ giác $IHOJ$ có $\widehat{IHO} = \widehat{OJI} = 90^0 => 4$ điểm I, H, O, J cùng nằm trên đường tròn đường kính $IO => HJ \le OI$ (trong đường tròn dây lớn nhất là đường kính)

Dấu " = " xảy ra khi HJ là đường kính $\Leftrightarrow \widehat{HIJ} = 90^0 \Leftrightarrow KO//KC \Leftrightarrow KAC$ là cát tuyến của đường tròn (trái với đề bài)

Vậy $HJ < OI$

Bài 350. Cho $(O;R)$ đường kính AB và $(I;r)$ đường kính AC tiếp xúc ngoài tại A. $(R > r)$. Trung trực của BC cắt (O) tại D và E, cắt BC tại K. Gọi giao điểm của (I) với CE lần lượt là M và N. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $BDCE$ là hình thoi.

b) Tứ giác $DMNE$ nội tiếp được một đường tròn.

c) KM và KN là các tiếp tuyến của $(I;r)$.

d) Xác định tỉ số $\frac{r}{R}$ để tứ giác $KMIN$ là hình vuông.

Hướng dẫn

a) -Ta có DE là đường trung trực của BC $\Rightarrow \begin{cases} DE \perp BC = \{K\} \\ KB = KC \end{cases}$

-Xét đg tròn (O;R) có $\begin{cases} BA \perp DE = \{K\} \\ O \in BA \end{cases}$ Suy ra $KD = KE$

- Xét tứ giác BDCE có $\begin{cases} KD = KE \\ KB = KC \end{cases}$

Nên BDCE là hình bình hành

Lại có $DE \perp BC$

Do đó BDEC là hình thoi.

b) Do BDEC là hình thoi.

$\Rightarrow \widehat{DCK} = \widehat{ECK} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AM} = sd\,\overset{\frown}{AN}$

Ta có $\widehat{NMC} + \widehat{MCK} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{NC} + sd\,\overset{\frown}{AM}}{2} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{NC} + sd\,\overset{\frown}{AN}}{2} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0$

$\Rightarrow MN \perp BC$

Lại có $DE \perp BC = \{K\}$

Suy ra MN // DE => MNED là hình thang (1)

Mà BDCE là hình thoi $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \Delta DCE$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{MIC}$

$\widehat{BOE} = 180^0 - 2\widehat{OBE}$

$\widehat{MIC} = 180^0 - 2\widehat{MCI}$

$Ma`\widehat{OBE} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CED} \quad (2)$

Tư (1) và (2) suy ra DMNE là hình thang cân

⇨ DMNE là tứ giác nội tiếp.

c) Do DMNE là hình thang cân nên giao hai đường chéo thuộc đường trung trực của hai đáy

+ C/m EKMC là tứ giác nội tiếp ($\widehat{EKC} = \widehat{EMC} = 90^0$) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_1} = \widehat{M_4}$

Mà $\widehat{M_4} + \widehat{AMI} = 90^0$

Nên $\widehat{M_1} + \widehat{AMI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KMI} = 90^0 \Rightarrow KM \perp IM = \{M\}$

Lại có $M \in (I)$

Vậy KM là tiếp tuyến của (I)

Tương tự KN là tiếp tuyến của (I)

d) Giả sử MINK là hình vuông nên MI // NK và MI = NK. Có:

$\widehat{BOE} = 180^0 - 2\widehat{OBE}$

$\widehat{MIC} = 180^0 - 2\widehat{MCI}$

$Ma`\widehat{OBE} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{MIC}$

$\Rightarrow \widehat{EOI} = \widehat{MIO} \Rightarrow$ OE//MI

Suy ra NK // OE

+ Áp dụng hệ quả Talet ta có

$$\frac{KN}{OE} = \frac{CK}{CO} = \frac{CB}{2CO} \Rightarrow \frac{MI}{OE} = \frac{CB}{2CO} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2r+2R}{2(2r+R)} \Rightarrow R^2 = 2r^2 \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 351. Cho đường tròn $(O;\mathrm{R})$ đường kính AB. Lấy $M \in (\mathrm{O})$ sao cho góc $\mathrm{ABM} < 45^o$. Vẽ dây cung $MN \perp AB$. Tia BM cắt NA tại P, Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng AB, gọi K là giao điểm của PQ với AB. Chứng minh:

a)Tứ giác $AMPK$ là tứ giác nội tiếp.

b) ΔPKM cân.

c) KM là tiếp tuyến của (O).

d) Xác định M trên (O) để tứ giác $PKNM$ là hình thoi.

Hướng dẫn

a) Tứ giác AMPK là tứ giác nội tiếp

* Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AMP} = 90^0$

* Ta có: P và Q đối xứng với nhau qua AB (gt) => AB là đường trung trực của đoạn PQ

$\Rightarrow PQ \perp AB = \{K\} \Rightarrow \widehat{AKP} = 90^0$

* Xét tứ giác AMPK có:

.) $\widehat{AMP} + \widehat{AKP} = 180^0$

.) $\widehat{AMP}$ và $\widehat{AKP}$ là hai góc ở hai đỉnh đối nhau

* Vậy tứ giác AMPK là tứ giác nội tiếp

b. ΔPKM **cân**

Cách 1

* Ta có: ΔBMN cân tại B => BA là tia phân giác của $\widehat{MBN}$

* Ta có: ΔBPQ cân tại B => BA là tia phân giác của $\widehat{PBQ}$

* Mà 3 điểm P, M, B thẳng hàng => 3 điểm B, N, Q thẳng hàng => 3 điểm A, M, Q thẳng hàng

*Ta có: ΔBMQ vuông tại M CÓ MK là trung tuyến

$\Rightarrow MK = KP = KQ = \frac{1}{2}PQ$

=> ΔPKM cân tại K

Cách 2 (Hong Nguyen đề xuất)

Tứ giác KPMA nội tiếp (theo câu a) $\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{PAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung PK)

Mà: $\widehat{PAK} = \widehat{NAB}$ (đối đỉnh); $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau là $\overset{\frown}{MB}, \overset{\frown}{NB}$)

$\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{MAB}$

Lại có: $\widehat{MAB} = \widehat{MPK}$ (cùng phụ $\widehat{MBA}$)

$\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{KPM}$ => ΔPKM cân tại K

c. KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

* Ta có: ΔPKM cân tại K (cmb) $\Rightarrow \widehat{KPM} = \widehat{KMP}$ (1)

* Ta có: ΔOBM cân tại O (cmb) $\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OMB}$ (2)

* Ta có: $\widehat{AKP} = 90^0 \Rightarrow \Delta PKB$ vuông tại K $\Rightarrow \widehat{KPM} + \widehat{OBM} = 90^0$ (3)

* Từ (1); (2); (3) có $\widehat{KMP} + \widehat{OMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OMK} = 90^0$

=> KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Xác định M trên (O) để tứ giác PKNM là hình thoi

* Giả sử tứ giác PKNM là hình thoi thì $PK = KN = NM = PM \Rightarrow \Delta PKM$ đều

$\Rightarrow \widehat{KPM} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABM} = 30^0 \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AB$ (TSLG) $\Rightarrow AM = R$

* Vậy điểm M trên (O) sao cho $AM = R$ thì tứ giác PKNM là hình thoi

Bài 352. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB; M là điểm di động trên nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB tại H. Gọi P là điểm đối xứng với H qua AM, PH cắt AM tại I; gọi Q là điểm đối xứng của H qua BM, QH cắt BM tại J.

a) Chứng minh $MIHJ$ là hình chữ nhật và suy ra bốn điểm M, I, H, J cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $MI.MA = MJ.MB$.

c) Chứng minh PQ là tiếp tuyến của $(O;R)$.

d) Gọi giao điểm của AQ và BP là K. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (1)

Vì P và Q đối xứng nhau qua MA và MB nên $\widehat{MIH} = \widehat{MJH} = 90^0$ (2)

Từ (1)(2) suy ra tứ giác $MIHJ$ là hình chữ nhật.

+ Vì tứ giác $MIHJ$ là hình chữ nhật nên bốn điểm M, I, H, J cùng nằm trên đường tròn đường kính MH.

b) Chỉ ra $\begin{cases} MI.MA = MH^2 \\ MJ.MB = MH^2 \end{cases}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Từ đó suy ra $MI.MA = MJ.MB$.

c) Chỉ ra $\begin{cases} MP = MH \\ MQ = MH \\ \widehat{PMI} = \widehat{HMI} \\ \widehat{HMJ} = \widehat{QMJ} \end{cases}$ (tính chất đối xứng trục) nên $PM = MQ$

và $\widehat{PMH} + \widehat{HMQ} = 2\left(\widehat{IMH} + \widehat{HMJ}\right) = 2.90^0 = 180^0 \Rightarrow M$ là trung điểm PQ.

Chỉ ra tứ giác $APQB$ là hình thang vuông, có OM là đường trung bình nên

$MO//BQ \Rightarrow MO \perp PQ \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O;R)$.

d) Chỉ ra $IJ//PQ$ (đường trung bình) (3)

Chỉ ra $AP//BQ \Rightarrow \dfrac{AK}{KQ} = \dfrac{AP}{QB} = \dfrac{AH}{HB}$ (4)

Mặt khác ΔAIH đồng dạng ΔHJB (HS tự chứng minh) nên $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AI}{HJ} = \dfrac{AI}{IM}$ (5)

Từ (4)(5) suy ra $\dfrac{AK}{KQ} = \dfrac{AI}{IM} \Rightarrow IK//MQ \Rightarrow IK//PQ$ (6)

Từ (3)(6) suy ra I, K, J thẳng hàng.

Bài 353. Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O,R). Qua điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn này kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại E và F. Nối AM cắt OE By tại P, nối BM cắt OF tại Q. Hạ MH vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $AE.BF = R^2$

c) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng $MK = HK$.

d) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3} < \dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q **cùng nằm trên một đường tròn.**

Ta có EF, EA, FB lần lượt là các tiếp tuyến tại M, A, B của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow$ EM = EA ; FB = FM (tính chất tiếp tuyến tuyến cắt nhau).

Xét EM = EA và OM = OA = R

$\Rightarrow$ OE là đường trung trực của AM

$\Rightarrow OE \perp AM$ tại P và P là trung điểm của AM.

$\Rightarrow \widehat{OPM} = 90^o$

Xét FM = FA và OM = OB = R

$\Rightarrow$ OF là đường trung trực của BM

$\Rightarrow OF \perp BM$ tại Q và Q là trung điểm của BM.

$\Rightarrow \widehat{OQM} = 90^o$

Ta có $MH \perp AB$ tại H (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{OHM} = 90^o$

Do đó: $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} = \widehat{OHM} = 90^o$ hoặc P, Q, H cùng nhìn cạnh OM dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ P, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

$\Rightarrow$ 5 điểm M, P, O, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM. (đpcm)

Chứng minh rằng $AE.BF = R^2$

Ta có: OE là tia hân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2}$

Ta có: OF là tia hân giác của $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{BOF} = \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{BOM}}{2}$

Mà $\widehat{EOF} = \widehat{MOE} + \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{AOM} + \widehat{BOM}}{2}$; $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{EOF} = 90^o$ hoặc ΔEOF vuông tại O.

Xét ΔEOF vuông tại O và $OM \perp EF$ tại M (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow OM^2 = EM.FM$ (hệ thức lượng)

Mà EM = EA ; FB = FM (tính chất tiếp tuyến tuyến cắt nhau); OM = R.

$\Rightarrow R^2 = AE.BF$ (đpcm)

Gọi K là giao điểm của MH **và** BE**. Chứng minh rằng** $MK = HK$**.**

Ta có: $AE \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến); $BF \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến); $MH \perp AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow MH//AE//BF$ hoặc $MK//BF$; $HK//AE$

Xét MK//BF, có:

$$\Delta KEM \backsim \Delta BEF \text{ (Định lý)} \Rightarrow \frac{MK}{BF} = \frac{EM}{EF} \Rightarrow \frac{MK}{EM} = \frac{BF}{EF} = \frac{FM}{EF} \text{ (do BF = MF)}$$

$$\frac{FM}{EF} = \frac{BK}{BE} \text{ (Định lý Ta - let)}$$

Xét KH//AE, có:

$$\Delta BKH \backsim \Delta BEA \text{ (Định lý)} \Rightarrow \frac{BK}{BE} = \frac{KH}{AE} \text{ (tính chất)}$$

Do vậy $\frac{MK}{EM} = \frac{KH}{AE}$, mà AE = EM suy ra MK = KH

Vì r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔEOF nên $S_{EOF} = \frac{1}{2}r\left(OE + OF + EF\right)$

Mà $S_{EOF} = \frac{1}{2}OM.EF = \frac{1}{2}R.EF$

$$\Rightarrow r\left(OE + OF + EF\right) = R.EF \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF}$$

Theo BĐT tam giác ta có

$EF < OE + OF \Leftrightarrow 2EF < OE + OF + EF$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF} < \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Ta cũng có $EF > OE, EF > OF \Leftrightarrow 2EF > OE + OF$

$$\Leftrightarrow 3EF > OE + OF + EF \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF} > \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

Bài 354. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Hướng dẫn

1) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$.

Do đó tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (theo dấu hiệu: tứ giác có hai đỉnh kề nhau nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp).

2) Kẻ đường kính AOD, gọi $J = AO \cap FE$.

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của (O)).

Suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{AFJ} = \widehat{ADB}$.

Do đó $\widehat{FAJ} + \widehat{AFJ} = \widehat{BAD} + \widehat{ADB} = 90^0$. Suy ra $\widehat{AJF} = 90^0$ hay $OA \perp FE$.

3) Ta có $\widehat{APE} = \widehat{AIB}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{PAJ}$).

Lại có tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AEP} = \widehat{ABI}$.

Do đó tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB (g – g).

+)

* Dễ dàng chứng minh được tứ giác $BDCH$ là hình bình hành, suy ra H, K, D thẳng hàng.

* Vì $\widehat{BAI} = \widehat{PAE} \Rightarrow \widehat{PAF} = \widehat{EAJ}$.

Do đó tam giác ACD đồng dạng với tam giác AFH (g – g), suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AF}{AC}(1)$.

Tam giác AFP đồng dạng với tam giác ACI (g – g) nên $\frac{AP}{AI} = \frac{AF}{AC}(2)$

* Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AP}{AI} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow IP//HD$ hay $IP//HK$.

Bài 355. Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tia Ax vuông gócvới AB, trên đó lấy điểm C (C khác A). Kẻ tiếp tuyến CM tới đường tròn (M là tiếp điểm). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt đường thẳng CM tại D.

1) Chứng minh tứ giác AOMC nội tiếp.

2) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) OC cắt MA tại E, OD cắt MB tại F, MH vuông góc AB (H thuộc AB). Chứng minh: $HE^2 + HF^2$ có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

4) Chứng minh ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy.

Hướng dẫn

1) Ta có CD và CA lần lượt là tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) (giả thiết).

$\Rightarrow$ AC $\perp$ AO tại A ; CD $\perp$ OM tại M.

$\Rightarrow \widehat{CAO} = 90^0$; $\widehat{CMO} = 90^0$

Xét tứ giác AOMC có $\widehat{CAO}$; $\widehat{CMO}$ là hai góc đối và $\widehat{CAO}+\widehat{CMO}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác AOMC nội tiếp.

2) Ta có: $\widehat{COM}+\widehat{MOD}=\widehat{COD}=90^0$ (vì $CO\perp OD$ tại O).

$\widehat{COA}+\widehat{COM}+\widehat{MOD}+\widehat{DOB}=180^0.\Rightarrow\widehat{COA}+\widehat{DOB}=180^0.$

Ta có OC là phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow\widehat{COA}=\widehat{COM}.\Rightarrow\widehat{MOD}=\widehat{DOB}.$

Xét ΔMOD và ΔBOD có:

$OM=OB=R;\ \widehat{MOD}=\widehat{DOB}$

OD chung

$\Rightarrow\Delta MOD=\Delta BOD(c.g.c)\Rightarrow\widehat{OMD}=\widehat{OBD}$ (cặp góc tương ứng).

Mà $\widehat{OMD}=90^0$ (vì $CD\perp OM$ tại M)$\Rightarrow\widehat{OBD}=90^0$ hay $OB\perp BD$ tại B.

Vậy BD là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

3) Chứng minh: HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

ΔMOA cân tại O có OE là phân giác của $\widehat{AOM}$ (vì $E\in OC$).

$\Rightarrow$OE cũng là đường trung tuyến của ΔMOA.

$\Rightarrow$E là trung điểm của AM.

Ta có OD là phân giác của $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Xét ΔMOB cân tại O có OF là phân giác của $\widehat{BOM}$ (vì $F\in OD$).

$\Rightarrow$OF cũng là đường trung tuyến của ΔMOB

$\Rightarrow$F là trung điểm của BM

ΔMAH vuông tại H có $HE=\dfrac{AM}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

ΔMBH vuông tại H có $HF=\dfrac{BM}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

ΔMAB vuông tại M có $AM^2+BM^2=AB^2=4R^2$ (định lý Pitago)

$\Rightarrow HE^2+HF^2=\dfrac{AM^2+BM^2}{4}=R^2$

Vậy HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax

4) Ta có E, F lần lượt là trung điểm của cạnh MA, MB

$\Rightarrow$EF là đường trung bình của ΔMAB

$\Rightarrow$EF//AB

$\Rightarrow$EK//AH ($K \in$ EF; $H \in AB$)

$\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MK}{MH} = \frac{1}{2}$ (định lý talet)

$\Rightarrow$ EF giao với MH tại K là trung điểm của MH (*)

Gọi giao điểm của BC với MH là N; giao điểm của tia BM với tia Ax là L

ΔLAB có LB // CO (cùng $\perp$ AM) ; AO = OB = R

$\Rightarrow$ CA = CL (1)

Ta có CA // NH (cùng $\perp$ AB)

$\Rightarrow \frac{CA}{NH} = \frac{BC}{BN}$ (hệ quả định lý talet) (2)

Lại có CL // MN

$\Rightarrow \frac{CL}{NM} = \frac{BC}{BN}$ (hệ quả định lý talet) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$NH = NM $\Rightarrow$N là trung điểm của MH $\Rightarrow$ N trùng với K

$\Rightarrow$BC đi qua trung điểm K của MH (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ Ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy

Bài 356. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (*O*). Hai đường cao *BD* và *CE* của tam giác *ABC* cắt nhau tại *H*. Tia *BD* và tia *CE* cắt đường tròn (*O*) lần lượt tại *M*, *N* (*M* khác *B*, *N* khác *C*).

1) Chứng minh bốn điểm *B*, *C*, *D*, *E* cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: DE / /MN.

3) Đường tròn đường kính *AH* cắt đường tròn (*O*) tại điểm thứ hai là *K* (*K* khác *A*). Tia *KH* cắt đường tròn (*O*) tại điểm thứ hai là *Q*. Tứ giác *BHCQ* là hình gì? Tại sao?

4) Gọi giao điểm của *HQ* và *BC* là *I*. Chứng minh $\frac{OI}{MN} > \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh bốn điểm *B, C, D, E* cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có BD và CE là các đường cao của tam giác ABC (giả thiết)

$\Rightarrow BD \perp AC$ tại D; $CE \perp AB$ tại E

$\Rightarrow \widehat{BDC} = 90^o$; $\widehat{BEC} = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác BEDC có hai đỉnh kề E và D cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông. $\Rightarrow$ Tứ giác BEDC nội tiếp.

$\Rightarrow$ 4 điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: $DE//MN$.

Xét (O) ta có: $\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$)

Xét tứ giác nội tiếp BEDC (cmt) có $\widehat{DEC} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$). Do đó:

$\widehat{DEC} = \widehat{MNC}$

Mà $\widehat{DEC}$; $\widehat{MNC}$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow DE//MN$.

3) Tứ giác *BHCQ* là hình gì? Tại sao?

Xét đường tròn đường kính AH có: $\widehat{AKH} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AKQ} = 90^o$ (K, H, Q thẳng hàng)

Mà $\widehat{AKQ}$ là góc nội tiếp chắn cung AQ của đường tròn (O)

$\Rightarrow$ AQ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{ACQ} = \widehat{ABQ} = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow AC \perp QC$; $AB \perp QB$

Mà $BH \perp AC$; $CH \perp AB$ (tính chất trực tâm)

$\Rightarrow QB // CH$; $QC // BH$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCQ là hình bình hành

4) Chứng minh $\frac{OI}{MN} > \frac{1}{4}$.

Tứ giác BHCQ là hình bình hành (cmt)

$\Rightarrow HQ$ và BC cắt nhau tại I là trung điểm của chúng.

Mà O là trung điểm của đường kính AQ của đường tròn (O)

$\Rightarrow$ OI là đường trung bình của tam giác AQH

$\Rightarrow OI = \frac{AH}{2}$ (tính chất). (1)

Chứng minh được ΔAHM cân tại A nên đường cao AD cũng là đường trung tuyến (tính chất)

$\Rightarrow$ D là trung điểm của HM.

Chứng minh được ΔAHN cân tại A nên đường cao AE cũng là đường trung tuyến (tính chất)

$\Rightarrow$ E là trung điểm của HN.

Do đó MN là đường trung bình của ΔMHN

$\Rightarrow MN = 2ED$ (Tính chất) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{OI}{MN} = \frac{AH}{4ED}$

Mà trong đường tròn đường kính AH có ED là dây cung khác đường kính nên AH > ED

$\Rightarrow \frac{AH}{ED} > 1 \Rightarrow \frac{OI}{MN} > \frac{1}{4}$

Bài 357. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là trung điểm của AO. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), lấy D thuộc Ax, E thuộc By sao cho góc DIE $= 90^0$. Kẻ IF vuông góc với DE (F thuộc DE).

1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \frac{3R^2}{4}$.

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

Ta có Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) (giả thiết); $D \in Ax$

$\Rightarrow AD \perp AB$ tại A $\Rightarrow \widehat{IAD} = 90^o$

Ta có $IF \perp DE$ tại F $\Rightarrow \widehat{IFD} = 90^o$

Cách 1:

$\Rightarrow$ Tứ giác có hai đỉnh A và F cùng nhìn cạnh ID dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn đường kính DI

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn đường kính DI.

Cách 2:

Xét tứ giác $IADF$ có $\widehat{IAD}$, $\widehat{IFD}$ là hai góc đối và $\widehat{IAD} + \widehat{IFD} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \frac{3R^2}{4}$**.**

Xét ΔADI và ΔBIE có

$\widehat{DAI} = \widehat{IBE} = 90^0$ (tính chất của tiếp tuyến)

$\widehat{AID} = \widehat{BEI}$ (cùng phụ với $\widehat{BIE}$ do $\widehat{DIE} = 90^o$)

$\Rightarrow \Delta ADI \sim \Delta BIE \Rightarrow \dfrac{AD}{BI} = \dfrac{AI}{BE} \Rightarrow AD.BE = BI.AI$

Theo giả thiết lại có $AI = \dfrac{R}{2}; BI = \dfrac{3}{2}R \Rightarrow AD.BE = BI.AI = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

Vậy $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{DIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

Tương tự chứng minh được tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BIE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Vậy $\widehat{DFA} + \widehat{BFE} = \widehat{DIA} + \widehat{BIE} = 90^0$ (Vì $\widehat{DIE} = 90^0$)

$\Rightarrow \widehat{AFB} = 180^0 - (\widehat{DFA} + \widehat{BFE}) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AB hay F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Ta có $S_{DIE} = ID.IE \Rightarrow S_{DIE}{}^2 = ID^2.IE^2 = (AD^2 + AI^2)(BI^2 + BE^2)$

Áp dụng B Đ T cosi có: $AD^2 + AI^2 \geq 2AD.AI$; $BI^2 + BE^2 \geq 2BI.BE$

Và có $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$ (cmt)

$\Rightarrow S_{DIE}{}^2 \geq 2AD.AI.2BI.BE = 4(AI.BI)^2 = 4.\left(\dfrac{3R^2}{4}\right)^2 = \dfrac{9R^4}{4} \Rightarrow S_{DIE} \geq \dfrac{3R^2}{2}$

Vậy Min $S_{DIE} = \dfrac{3R^2}{2}$ khi $AD = AI$; $BE = BI$

Vậy diện tích tam giác DIE nhỏ nhất khi D và E thuộc Ax, By sao cho $AD = AI$; $BE = BI$

Bài 358. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH, đường kính AM.

1) Tính $\widehat{ACM}$

2) Chứng minh: $AB.AC = AH.AM$ và $\widehat{BAH} = \widehat{ACO}$

3) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác BCMN là hình gì ? Vì sao ?

4) Vẽ đường kính PQ vuông góc với BC (P thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh các tia AP, AQ lần lượt là các tia phân giác góc trong và góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

Hướng dẫn

1) Do AM là đường kính của (O) (gt) và C thuộc (O) (C khác A và M)

=> $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiêp chắn nửa đường tròn)

2) Xét ΔAHB và ΔACM có : $AH \perp BC(gt) \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^0$ (1)

Ta lại có $\widehat{ACM} = 90^0$ (theo câu a) => $\widehat{ACM} = \widehat{AHB}$ (2)

Xét (O) có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) (3)

Từ (2) và (3) => $\Delta AHB \backsim \Delta ACM$ (g-g)

=> $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AM}$ => $AB.AC = AH.AM$ (đpcm)

$\Delta AHB \backsim \Delta ACM$ => $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$ (hai góc tương ứng) (4)

Ta lại có $OA = OC = R$ => ΔOAC cân tại O

=> $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ (5)

Từ (4) và (5) => $\widehat{BAH} = \widehat{ACO}$ (đpcm)

3) Ta có $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $AN \perp NM$ (6)

$AH \perp BC$ (gt) => $AN \perp BC$ (do $H \in AN$(gt)) (7)

Từ (6) và (7) => NM // BC (t/c)

=> tứ giác BCMN là hình thang (theo định nghĩa) (8)

Ta có : $AH \perp BC$(gt) => $\widehat{NBH} = 90^0 - \widehat{ANB}$ (9)

$\widehat{ACM} = 90^0$ => $\widehat{BCM} = 90^0 - \widehat{ACB}$ (10)

Xét (O) có : $\widehat{ACB} = \widehat{BNA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) (11)

Từ (9), (10), (11) => $\widehat{NBH} = \widehat{BCM}$ (12)

Từ (8) và (12) => tứ giác BCMN là hình thang cân (dhnb)

4) Gọi I là trung điểm của BC, có PQ là đường kính của (O) (gt) và $PQ \perp BC$(gt)

=> $PQ \perp BC$ tại I (định lý).

=> PQ là đường trung trực của đoạn BC.

=> $PB = PC$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng).

=> $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PC}$ (định lý).

=> $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$ (hệ quả) (13)

=> AP là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Dựng Ax là tia đối của tia AB, có $\widehat{PAQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

=> $90^0 = \widehat{PAC} + \widehat{QAC}$ (14)

Ta lại có: $\widehat{xAQ} + \widehat{QAP} + \widehat{BAP} = 180^0$

=> $\widehat{xAQ} + \widehat{BAP} = 90^0$ (15)

Từ (13),(14),(15) => $\widehat{xAQ} = \widehat{QAC}$

=> AQ là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của ΔABC (đpcm)

Bài 359. Cho $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp CD và CE với (O) với D, E nằm trên (O) và điểm E nằm trong đường tròn (O'). Các đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' tại M và N (M, N khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I.

a).Chứng minh bốn điểm C,E,O,D nằm trên 1 đường tròn.

b).Chứng minh $EA.BC = EB.EC$.

c).Khi $OC = 2R$. Tính $\widehat{DOE}$ và diện tích phần của hình tứ giác $OECD$ nằm ngoài (O).

d).Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\dfrac{IM}{MN}} + \sqrt{\dfrac{IN}{MN}}$.

Hướng dẫn

a).Chứng minh bốn điểm C,E,O,D nằm trên 1 đường tròn.

Có CD, CE tiếp xúc đường tròn (O) lần lượt tại D, E nên $\widehat{CDO} = \widehat{CEO} = 90°$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDEO$ nội tiếp đường tròn đường kính OC.

b).Chứng minh $EA.BC = EB.EC$.

ΔEAB, ΔCEB có $\widehat{EBA} = \widehat{CBE}$ (góc chung), $\widehat{AEB} = \widehat{EBC} = \dfrac{1}{2} sđ\, \overset{\frown}{AE}$.

$\Rightarrow \Delta EAB \backsim \Delta CEB \Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{CE}{CB} \Rightarrow EA.BC = EB.EC$.

c).Khi $OC = 2R$. Tính $\widehat{DOE}$ và diện tích phần của hình tứ giác $OECD$ nằm ngoài (O).

ΔOCD vuông tại D có $\sin\widehat{OCD} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{OCD} = 30°$, có $\widehat{DCE} = 2\widehat{OCD} = 60°$, mà $CD = CE$.

$\Rightarrow \Delta CDE$ đều . có $\widehat{DOE} + \widehat{DCE} = 180° \Rightarrow \widehat{DOE} = 120°$

Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích cần tìm, diện tích tứ giác $CDOE$, diện tích hình quạt DOE thì:

$S = S_1 - S_2$

Có $S_1 = \dfrac{1}{2}OC.DE$, $DE = CD = OC.\cos 30° = R\sqrt{3}$, $OC = 2R \Rightarrow S_1 = \dfrac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$.

Có $S_2 = \dfrac{120}{360}\pi R^2 = \dfrac{\pi R^2}{3}$.

Suy ra $S = R^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi R^2}{3} = \dfrac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ (đvdt)

d).Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\dfrac{IM}{MN}} + \sqrt{\dfrac{IN}{MN}}$.

Có $\widehat{IDB} = \widehat{EAB} = \dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{EB}$, $\widehat{EAB} = \widehat{BMI} = \dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{BN} \Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{BMI}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDMI$ nội tiếp đường tròn (do có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện qua hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{BIN} = \widehat{BDM}$.

Có tứ giác $ADBE$ nội tiếp nên $\widehat{BEN} = \widehat{BDM}$.

Suy ra $\widehat{BIN} = \widehat{BEN}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEIN$ nội tiếp.

$\Delta IBN, \Delta DBA$ có $\widehat{BIN} = \widehat{BDA}$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác nội tiếp $BDMI$).

Có $\widehat{IBN} = \widehat{IEN} = \dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{IN}$, $\widehat{IEN} = \widehat{AED}$ (đối đỉnh), $\widehat{AED} = \widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AD}$.

$\Rightarrow \widehat{IBN} = \widehat{ABD}$, mà $\widehat{BIN} = \widehat{BDA}$.

$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{DA}{DB}$

$\Delta MIB,\ \Delta AEB$ có $\widehat{BMI} = \widehat{BAE} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BN}$, có $\widehat{BIM} = \widehat{BEA}$ (lần lượt bù với hai góc bằng nhau).

$\Rightarrow \Delta MIB \backsim \Delta AEB \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{EA}{EB}$

$\Delta CDA, \Delta CBD$ có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AD}$, $\widehat{DCA} = \widehat{BCD}$ (góc chung).

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CBD \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{CD}$

Có $CD = CE$, nên $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CE}$, có $\widehat{ACE} = \widehat{ECB}$ (góc chung).

$\Rightarrow \Delta CAE \backsim \Delta CEB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{EA}{EB}$, mà $\frac{IM}{IB} = \frac{EA}{EB}$.

$\Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{CE}{CB}$, có $\frac{IN}{IB} = \frac{DA}{DB}$, $\frac{DA}{DB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IB} \Rightarrow IM = IN = \frac{1}{2}MN$

Suy ra $\sqrt{\frac{IM}{MN}} + \sqrt{\frac{IN}{MN}} = \sqrt{2}$

Bài 360. **Cho** đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

a) Chứng minh tứ giác $APMO$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $BM // OP$

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $APMO$ nội tiếp một đường tròn.

Ta có: $\widehat{PAO} = 90^0$ và $\widehat{PMO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

nên $\widehat{PAO} + \widehat{PMO} = 180^0$

Suy ra: tứ giác $APMO$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $BM//OP$

Ta có: $OA = OM = R; PA = PM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên OP là trung trực của AM, suy ra: $OP \perp AM$

Mà $MB \perp AM$ (do $\widehat{AMB} = 90^0$ - góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên: $BM//OP$

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

Δ vuông $APO =$ Δ vuông ONB ($OA = OP = R$; $\widehat{O_1} = \widehat{B_1}$ - đồng vị)

Suy ra: $BM = OP$ mà $BM//OP$ nên tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{JPO} = \widehat{POA}$ (so le trong) và $\widehat{POJ} = \widehat{POA}$ (tính chất hai tiếp tuyến) nên $\widehat{POJ} = \widehat{JPO}$

Suy ra: Δ JPO cân tại J

Tứ giác $OAPN$ là hình chữ nhật (có ba góc vuông) nên có hai đường chéo OP và AN cắt nhau tại trung điểm K

Δ JPO cân tại J, có JK là trung tuyến nên cũng là đường cao hay $JK \perp OP$

Trong Δ JPO có: PM là đường cao thứ nhất, ON là đường cao thứ hai, hai đường này cắt nhau tại I nên đường cao thứ ba JK qua I

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 361. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O và cắt đường tròn tại hai điểm B và C phân biệt (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau ở M. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt OA tại H và cắt đường tròn tại hai điểm E và K (E nằm giữa M và K). Gọi I là giao điểm của BC và OM. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $OBMC$ nội tiếp.
2) BC vuông góc với OM và $MC^2 = MI.MO$.
3) $ME.MK = MI.MO$ và tứ giác $OIEK$ nội tiếp.

4) AE, AK là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn

1) Tứ giác $OBMC$ nội tiếp:

Tứ giác $OBMC$ có: $\widehat{MBO}+\widehat{MCO}=180°$. Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $OBMC$ nội tiếp.

2) BC vuông góc với OM và $MC^2 = MI.MO$.

Xét (O) có MB, MC là hai tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại M

nên $MB = MC; OB = OC = R$

Suy ra OM là trung trực BC.

Suy ra $BC \perp OM$.

Xét ΔMCO vuông tại C có CI là đường cao suy ra: $MC^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng).

3) $ME.MK = MI.MO$ và tứ giác $OIEK$ nội tiếp.

Ta chứng minh được: $ME.MK = MC^2$

Mà $MC^2 = MI.MO$

Suy ra $ME.MK = MI.MO$

Suy ra : $\Delta MEI \backsim \Delta MOK\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{MIE} = \widehat{MKO}$

$\Rightarrow OIEK$ nội tiếp (dấu hiệu góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện bằng nhau).

4) AE, AK là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

+ Tứ giác $AMIH$ có $\widehat{AIM} = \widehat{AHM} = 90°$. Suy ra $AMHN$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IH}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$) (1)

Ta có:

$$OI.OM = OB^2 = OE^2 \Rightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{OE}{OM}$$

$$\Rightarrow \Delta OIE \backsim \Delta OEM\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{M_1}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow EIOA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{AIO} = 90°$

$\Rightarrow AE$ là tiếp tuyến (O).

+ $EIOA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EIM}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau).

Mà $\widehat{EIM} = \widehat{EKO}\,(cmt)$

$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EKO} \Rightarrow AEOK$ nội tiếp

$\Rightarrow$ A, E, I, O, K cùng thuộc đường tròn

$\Rightarrow AIOK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{AKO} = 90°$

$\Rightarrow AK$ là tiếp tuyến (O).

Bài 362. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

a) Chứng minh rằng 4 điểm A, P, M, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $BM // OP$

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I, PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh 3 điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có $\widehat{OAP} = \widehat{OMP} = 90°$ (gt) $\Rightarrow \widehat{OAP} + \widehat{OMP} = 180° \Rightarrow A, P, M, O$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Ta có $\begin{cases} PA = PM \\ OA = OM \end{cases} \Rightarrow OP \perp AM$, mà $MB \perp OM$ nên $OP // BM$ (1)

c) Ta có $\begin{cases} \widehat{MOP} = \widehat{OBM} \\ \widehat{MOP} + \widehat{MPO} = \widehat{OBM} + \widehat{ONB} = 90° \end{cases} \Rightarrow \widehat{ONM} = \widehat{OPM} \Rightarrow N, P, M, O$ cùng nằm trên một đường tròn. Do đó A, P, M, O, N cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow \widehat{PAO} = \widehat{AON} = \widehat{APN} = 90^0 \Rightarrow PN // AB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $OBNP$ là hình bình hành.

d) Ta có $PNOA$ là hình chữ nhật nên $KP = KO$

Xét đường tròn (K, KA) có $MN // PO \Rightarrow \widehat{OPI} = \widehat{IOP} \Rightarrow IP = IO$

Tương tự ta có $JP = JO$, vì vậy I, J, K nằm trên đường trung trực đoạn MO. Vậy I, J, K thẳng hàng.

Bài 363. Cho tam giác ABC nhọn $(AB > AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, kẻ hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $CE.CA = CD.CB$. CB và CH vuông góc với AB tại F.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $EFMD$ nội tiếp.

c) Qua D vẽ đường thẳng song song với EF cắt AB tại R, cắt AC kéo dài tại Q. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua M.

d) Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 1 (đvdt), $\widehat{BAC} = 30°$. Tính diện tích tứ giác $BCEF$.

Hướng dẫn

a) $\cos C = \dfrac{CE}{BC} = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CE.CA = CD.CB$.

ΔABC có H là trực tâm $\Rightarrow CH$ là đường cao thứ ba $\Rightarrow CH \perp AB$.

b) $ABDE$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{ADE} = \widehat{BAE}$

ΔMFC cân tại M $\Rightarrow \widehat{MFC} = \widehat{MCF} = \widehat{BAD}$.

Lại có: $\widehat{EFH} = \widehat{HAE}$

Suy ra: $\widehat{BAE} = \widehat{HAE} + \widehat{BAD} = \widehat{EFH} + \widehat{MFC} = \widehat{MFE}$.

Vậy $\widehat{CDE} = \widehat{MFE}$ $\Rightarrow$ tứ giác $EFMD$ nội tiếp.

c) $\Delta DQC \backsim \Delta DBR$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{RD}{DC} = \dfrac{BD}{DQ} \Rightarrow DR.DQ = DB.DC$ (1)

Ta có: $PD.PM = PE.PF = PC.PB \Rightarrow PM(MP - MD) = (PM - MC)(PM + MB)$

$\Rightarrow PM^2 - PM.MD = PM^2 - MB^2 \Rightarrow MB^2 - MD^2 = MD.PD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DR.DQ = DM.DP \Rightarrow$ tứ giác $RMQP$ nội tiếp, nghĩa là đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua M.

d) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A = \cos^2 30° = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{4} S_{ABC} = \dfrac{1}{4}$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{BCEF} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ (đvdt).

Bài 364. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O), A và B là các tiếp điểm. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng MB; C là giao điểm của AE và (O) (C khác A), H là giao điểm AB và MO.

1) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.
2) Chứng minh: $EB^2 = EC.EA$.
3) Chứng minh tứ giác HCEB là tứ giác nội tiếp.
4) Gọi D là giao điểm của MC và (O) (D khác C). Chứng minh ΔABD Là tam giác cân.

Hướng dẫn

1) *Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.*

Xét tứ giác MAOB có:

$\widehat{MAO}+\widehat{MBO}=90^0+90^0=180^0$ và hai góc $\widehat{MAO};\widehat{MBO}$ đối nhau

Suy ra tứ giác MAOB nội tiếp trong một đường tròn.

2) *Chứng minh:* $EB^2=EC.EA$.

Xét ΔEBC và ΔEAB có:

$\widehat{AEB}$ là góc chung

$\widehat{EBC}=\widehat{EAB}$ (trong 1 đường tròn góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \Delta EBC \ \# \ \Delta EAB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EC}=\dfrac{EA}{EB}\Rightarrow EB^2=EA.EC$

3) *Chứng minh tứ giác HCEB là tứ giác nội tiếp.*

+ Chứng minh : $MO\perp AB$.

+ Vì ΔMHB vuông tại H và E là trung điểm của MB nên $HE=EM=EB=\dfrac{1}{2}MB\Rightarrow \Delta EHB$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{EHB}=\widehat{EBH}$.

+ Hơn nữa $\Delta EBC \ \# \ \Delta EAB$ (cm trên) $\Rightarrow \widehat{ECB}=\widehat{EBH}$. Do đó $\Rightarrow \widehat{ECB}=\widehat{EHB}$.

+ Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa BE có $\widehat{ECB}=\widehat{EHB}$, do đó tứ giác ECHB nội tiếp .

4) *Chứng minh* ΔABD *Là tam giác cân.*

Theo câu b ta có $EB^2=EA.EC\Rightarrow EM^2=EA.EC\Rightarrow \dfrac{EM}{EA}=\dfrac{EC}{EM}$.

+ Chứng minh: $\Delta EMA \# \Delta ECM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CME}=\widehat{MAE}$ (1)

+ Ta có : $\widehat{MAE}=\widehat{ADM}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{CME}=\widehat{ADM} \ \Rightarrow AD//MB$.

+ Ta có:

$\widehat{ADB}=\widehat{ECB}$ mà $\widehat{EBA}=\widehat{ECB}$ (do $\Delta EBC \ \# \ \Delta EAB$) nên $\widehat{ADB}=\widehat{EBA}$ (3)

VÌ AD // MB nên $\widehat{DAB}=\widehat{EBA}$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $\widehat{DAB}=\widehat{ADB}$.

Vậy ΔABD Là tam giác cân.

Bài 365. Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MB, MD tới (O) (với B, D là các tiếp điểm). Qua M kẻ đường thẳng không đi qua O, cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A và C (với C nằm giữa A và M). Gọi E là trung điểm AC.

1) Chứng minh rằng: Năm điểm O, E, B, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: $BC.AD = AB.DC$.

3) Chứng minh rằng: Hai tam giác AEB và BCD đồng dạng.

4) Một đường thẳng qua D và song song với MB, cắt BA, BC lần lượt tại I và J.

Chứng minh rằng: $DI = DJ$.

Hướng dẫn

1) Chứng minh rằng: Năm điểm O, E, B, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có E là trung điểm AC nên $OE \perp AC$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

MB, MD là hai tiếp tuyến của (O) nên $MB \perp OB$ và $MD \perp OD$.

Ta có các tam giác BOM vuông tại B, tam giác OEM vuông tại E, tam giác ODM vuông tại D, do đó năm điểm O, E, B, M, D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OM

2) Chứng minh rằng: $BC.AD = AB.DC$.

Ta chứng minh được tam giác MAB đồng dạng với tam giác MBC (g – g), suy ra $\frac{MA}{MB} = \frac{AB}{BC}$.

Ta chứng minh được tam giác MAD đồng dạng với tam giác MDC (g – g), suy ra $\frac{MA}{MD} = \frac{AD}{DC}$.

Mà $MB = MD$ do tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

Nên $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}\Leftrightarrow AB.DC=AD.BC$.

3) Chứng minh rằng: Hai tam giác AEB và BCD đồng dạng.

Ta có $\widehat{BEM}=\widehat{BDM}=\widehat{DBM}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{DM}$ và $\overset{\frown}{BM}$)

Mà $\widehat{BAD}=\widehat{DBM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$)

Nên $\widehat{BAD}=\widehat{BEM}$

Suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{BCD}$ (bù góc $\widehat{BEM}$ và $\widehat{BAD}$)

Xét tam giác AEB và tam giác BCD, có

$\widehat{EAB}=\widehat{BDC}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BC}$)

$\widehat{AEB}=\widehat{BCD}$ (cmt)

Suy ra tam giác AEB đồng dạng tam giác BCD.

4) Một đường thẳng qua D và song song với MB, cắt BA, BC lần lượt tại I và J.

Chứng minh rằng: $DI=DJ$.

Ta có $\widehat{BAC}=\widehat{JBM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$)

Mà $\widehat{JBM}=\widehat{BJI}$ (so le trong và $BM//\mathrm{JI}$)

Từ đó ta chứng minh được ΔABC đồng dạng với ΔJBI (g – g)

Suy ra $\frac{AC}{JI}=\frac{AB}{JB}\Leftrightarrow JI=\frac{AC.JB}{AB}=2.\frac{AE.JB}{AB}$ (1)

Ta có $\widehat{BDJ}+\widehat{DBM}=180^0$ (trong cùng phía và $BM//DJ$)

Mà $\widehat{BEM}=\widehat{BDM}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BM}$)

Nên $\widehat{BDJ}+\widehat{BEM}=180^0$.

Mặc khác $\widehat{AEB}+\widehat{BEM}=180^0$.

Do đó $\widehat{BDJ}=\widehat{AEB}$. Từ đó ta chứng minh được ΔAEB đồng dạng tam giác ΔJDB.

Suy ra $\frac{AE}{DJ}=\frac{AB}{JB}\Leftrightarrow DJ=\frac{AE.JB}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $JI=2DJ$.

Vậy D là trung điểm JI hay $DI=DJ$.

Bài 366. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, điểm F cố định nằm trên tia đối của tia AB và C là điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $AC < CB$. Nối FC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Đường tròn đường kính BI cắt AB tại H. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ICED$ nội tiếp trong một đường tròn

b) Ba điểm H, I, E thẳng hàng

c) $FC.FD + AE.AC + BD.BE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C

d) Khi $OF = 3OA$. Tính tỉ số $\frac{OH}{OF}$.

Hướng dẫn

a) Tứ giác $ICED$ nội tiếp trong một đường tròn

Ta có:

$\widehat{IDE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn)

$\widehat{ICE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn)

nên $\widehat{IDE} + \widehat{ICE} = 180^\circ$ suy ra $ICED$ nội tiếp trong một đường tròn(dấu hiệu nhận biết)

b) Ba điểm H, I, E thẳng hàng

*Xét tam giác BEA có đường cao BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm hay $EI \perp AB$

*Ta có: $\widehat{BHI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn) suy ra $IH \perp AB$

Vậy ba điểm H, I, E thẳng hàng

c) $FC.FD + AE.AC + BD.BE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C

* $\Delta FCA \backsim \Delta FDA$ (g.g) suy ra $FC.FD = FA.FB$

* $\Delta ACB \backsim \Delta AHE$ (g.g) suy ra $AC.AE = AH.AB$

* $\Delta BDA\ \Delta BHE$ (g.g) Suy ra $BD.BE = BH.BA$

Từ đó suy ra: $FC.FD + AE.AC + BD.BE = FA.FB + AB^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm C.

d) Khi $OF = 3OA$. Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OF}$.

Vì H, D thuộc đường tròn đường kính BI nên $\widehat{DHB} = \widehat{DIB}$

Kẻ đường kính DG thì $ADBG$ là hình chữ nhật nên $\widehat{BD} = \widehat{AG}$

do đó: $\widehat{DIB} = \widehat{CDG}$ nên $\widehat{DHB} = \widehat{CDG}$ hay $\widehat{DHO} = \widehat{FDO}$

Vậy $\Delta DHO\ \Delta FDO$ (g.g) nên $\dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{\text{OF}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}OA$

Mà $OF = 3OA$ nên $OH = \dfrac{1}{6}OF$

Bài 367. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DE tại H, cắt đường thẳng DC ở K.

a) Chứng minh rằng $BHCD$ là tứ giác nội tiếp

b) Tính số đo $\widehat{CHK}$

c) Chứng minh hệ thức $KC.KD = KH.KB$

d) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác $BHCD$ có $\widehat{BHD} = \widehat{BCD} (= 90°)$

mà H và C là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh BD

$\Rightarrow$ $BHCD$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

b) Vì $BHCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{BDC} = 45°$

c) Xét ΔKHC và ΔKDB có

$\widehat{BKD}$ chung

$\widehat{KHC} = \widehat{KDB} (= 45°)$

Do đó $\Delta KHC \backsim \Delta KDB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KH}{KD} = \dfrac{KC}{KB}$ (các cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow KC.KD = KH.KB$

d) Gọi O là trung điểm của BD

Vì $BH \perp DE$ nên $\widehat{BHD} = 90°$

Khi điểm E di chuyển trên BC thì $\widehat{BHD} = 90°$ cố định

ΔBHD vuông tại H có HO là đường trung tuyến

$\Rightarrow HO = \dfrac{1}{2}BD$

$\Rightarrow$ H nằm trên đường tròn tâm O, đường kính BD.

Khi $E \equiv B$ thì $H \equiv B$, $E \equiv C$ thì $H \equiv C$

Vậy khi điểm E di chuyển trên BC thì H di chuyển trên $\dfrac{1}{4}$ đường tròn tâm O, đường kính BD.

Bài 368. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đương tròn $(O;R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh các tứ giác CDHE và BCEF nội tiếp được đường tròn.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Lấy điểm K đối xứng với H qua I. Chứng minh AK là đường kính của đương tròn (O).

c) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có $\tan B.\tan C = 3$ thì OH//BC.

d) Các tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Lấy điểm S trên cung nhỏ BC,SM cắt AC ở J, SN cắt AB ở L. Chứng minh ba điểm H,J,L thẳng hàng.

Hướng dẫn

b) Do K là điểm đối xứng của H qua I và I là trung điểm của BC.

$\Rightarrow BHCK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow CK//BH; CH//BK$

Lại có $AC \perp BH; AB \perp CH \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^0$

Vậy ABKC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AK,

Mà ΔABC nội tiếp đường tròn (O).

$\Rightarrow$ AK là đường kinh của đường tròn (O).

c) $\tan B.\tan C = 3 \Leftrightarrow \tan B.\tan \widehat{BHD} = 3 \Leftrightarrow \frac{AD}{BD}.\frac{BD}{HD} = 3 \Leftrightarrow \frac{AD}{HD} = 3$

Gọi G là giao điểm của AI và HO $\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ΔAHK .

$\Rightarrow \frac{AI}{AG} = 3$. Do đó $\frac{AD}{HD} = \frac{AI}{AG} \Rightarrow HG//DI \Rightarrow OH//BC$.

d) Dễ dàng thấy H, N đối xứng qua AB $\Rightarrow \widehat{LHN} = \widehat{LNH} = \widehat{SAC}$.

Tương tự: $\widehat{JHM} = \widehat{JMH} = \widehat{SAB}$

Vậy $\widehat{LHN} + \widehat{NHM} + \widehat{JMH} = \widehat{SAC} + \widehat{NHM} + \widehat{SAB} = \widehat{BAC} + \widehat{NHM} = 180^0$

$\Rightarrow$ L, H, J thẳng hàng.

Bài 369. Cho (O) đường kính $AB = 6cm$. Trên OB lấy M sao cho $BM = 1cm$. Qua M vẽ dây CD của (O) vuông góc với AB.

1. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính BC.

2. Đường thẳng qua O vuông góc AC cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở E. Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O).

3. Gọi F là giao AC và BD, kẻ FH vuông AB, gọi K là giao CB và FH. Chứng minh ΔFBK cân.

Hướng dẫn

a) Vì AB là đường kính nên $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

Xét tam giác vuông ACB có CM là đường cao nên $BC^2 = BM.AB = 6 \Rightarrow BC = \sqrt{6}\,cm$

b) OE vuông góc với AC tại I nên I là trung điểm AC, suy ra OE là trung trực cạnh AC nên $\widehat{OCE} = \widehat{OAE} = 90^0 \Rightarrow$ EC là tiếp tuyến của (O).

c) Vì CD vuông góc với AB nên M là trung điểm CD, suy ra tam giác CBD cân tại B (có BM là trung trực) nên $\widehat{CDB} = \widehat{DCB}$ mà $\widehat{DCB} = \widehat{CKF}; \widehat{CDB} = \widehat{DFK}$ (hai góc sole trong) nên $\hat{K} = \hat{F}$ suy ra tam giác BKF cân tại B.

Bài 370. Cho (O;R) đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , $P \in Ax$ sao cho $AP > R$ từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) tại M . Đường thẳng vuông góc với AB tại O căt BM tại N . AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại J , PN cắt OM tại I . CM :

a) Tứ giác APMO nội tiếp và BM//OP

b) Tứ giác OBNP là hình bình hành

c) $PI = OI$; $PJ = OJ$

d) Ba điểm I,J,K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) $\widehat{PAO} = \widehat{PMO} = 90^0$ Nên APMO nội tiếp.

$\begin{cases} \widehat{MBA} + \widehat{BAM} = 90^0 \\ \widehat{POA} + \widehat{BAM} = 90^0 \end{cases}$ Nên $\widehat{POA} = \widehat{MBA}$ Suy ra MB//OP

b) ΔNOB = ΔPAO (cgv-gnk) nên PO=NB mà PO//NP nên OBNP là hình bình hành.

c) Theo câu b suy ra AONB là hình chữ nhật.

$\begin{cases} \widehat{POM} + \widehat{OPM} = 90^0 \\ \widehat{APO} + \widehat{OPN} = 90^0 \end{cases}$ Mà $\widehat{APO} = \widehat{OPM}$ Suy ra $\widehat{OPN} = \widehat{POM}$

Nên ΔPOI cân tại I, suy ra PO=OI.

$\begin{cases} \widehat{APO} = \widehat{PON} \\ \widehat{APO} = \widehat{OPJ} \end{cases}$ Suy ra $\widehat{PON} = \widehat{OPJ}$

Nên ΔPOJ cân tại J, suy ra PJ=OJ.

d) J là trực tâm tam giác OPI nên IJ vuông góc OP tại trung điểm OP (1).

Vì AONP là hình chữ nhật nên K là trung điểm OP (2)

Từ (1)(2) suy ra I, J, K thẳng hàng.

Bài 371. Cho đường tròn tâm (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B,C . Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn khác B và C .Từ M kẻ MH $\perp$ BC,MK $\perp$ CA,MI $\perp$ AB . CM:

a) Tứ giác ABOC ,MIBH,MKCH nội tiếp b) ΔMIH ~ ΔMHK c) $MI.MK = MH^2$

Hướng dẫn

b) $\widehat{IBM} = \widehat{IHM}$ (cùng chắn cung MH)

$\widehat{IBM} = \widehat{BCM}$ (cùng chắn cung MB)

$\widehat{BCM} = \widehat{HKM}$ (cùng chắn cung MH) nên $\widehat{IHM} = \widehat{HKM}$ (1)

Ta có: $\widehat{MIH} = \widehat{MBH}$ (cùng chắn cung MH)

$\widehat{MBH} = \widehat{MCK}$ (cùng chắn cung MC)

$\widehat{MCK} = \widehat{MHK}$ (cùng chắn cung MK) nên $\widehat{MIH} = \widehat{MHK}$ (2).

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

c) Tam giác MIH đồng dạng MHK nên $MH^2 = MI.MK$

Bài 372. Từ một điểm A nằm ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AM,AN với (O) , (M,N $\in$ (O))

a) Từ O kẻ đường thẳng $\perp$ OM cắt AN tại S . Chứng minh : SO = SA

b) Trên cung nhỏ MN lấy điểm P khác M và N . Tiếp tuyến tại P cắt AM tại B , AN tại C .Giả sử A cố định ,P là điểm chuyển động trên cung nhỏ MN . Chứng minh chu vi ΔABC không đổi ? Tính giá trị không đổi ấy?

c) Vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O ,H là trung điểm EF . Chứng minh các điểm A,M,H,O,N cùng thuộc một đường tròn

d) Chứng minh $AE.AF = AM^2$

e) Gọi K là giao điểm của MH với (O) .Chứng minh NK//AF.

Hướng dẫn

a) $\widehat{MAO} = \widehat{NAO} = \widehat{SOA}$

b) $CV = AB + BP + PC + AC = (AB + BM) + (NC + AC) = 2AM$

c) M, H, N cùng nhìn OA dưới 1 góc vuông nên A, M, H, N, O cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

d) Góc $\widehat{AFM} = \widehat{AME} = \frac{1}{2} sđAM \Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta AFM\,(g.g) \Rightarrow AE.AF = AM^2$

e) Góc $\widehat{MKN} = \widehat{MOA}\left(= \frac{1}{2} sđMN\right)$ mà $\widehat{MOA} = \widehat{MHA}$ (tứ giác MOHA nội tiếp)

nên $\widehat{MKN} = \widehat{MHA} = \widehat{FHK}$. Từ đó suy ra EF//KN.

Bài 373. Cho (O;R) đường kính AB và dây AC không đi qua tâm, Gọi H là trung điểm AC.

1. Tính số đo góc ACB và chứng minh OH//BC.

2. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt OH tại M. Chứng minh AM là tiếp tuyến (O).

3. Vẽ CK vuông góc AB tại K, gọi I là trung điểm CK, đặt $\widehat{CAB} = \alpha$.

Chứng minh $IK = R.\sin\alpha.\cos\alpha$.

4. Chứng minh M, I, B thẳng hàng.

Hướng dẫn

1. Vì AB là đường kính nên $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn) .

OH vuông góc AC (vì H là trung điểm AC) nên OH//BC (hoặc dùng tính chất đường trung bình)

2. Vì OM là trung trực AC nên $AM = MC$. Suy ra $\Delta MAO = \Delta MCO$ (c.c.c) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^0$ suy ra AM là tiếp tuyến (O).

3. Ta có: $\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{BC}{AB}.\frac{AC}{AB} = \frac{AB.CK}{AB.AB} = \frac{CK}{2R}$ nên $R.\sin\alpha.\cos\alpha = CK:2 = IK$.

4. Từ B kẻ tiếp tuyến với (O) cắt CM tại D.

Gọi MB giao AD tại N. Vì AM//BD nên : $\frac{AN}{ND} = \frac{AM}{DB} = \frac{MC}{CD}$ suy ra $\frac{AN}{ND} = \frac{MC}{CD}$ nên CN//AM hay CN vuông góc AB nên N nằm trên CK.

Ta có: $\frac{NK}{MA} = \frac{KB}{AB} = \frac{ND}{AD} = \frac{NC}{AM} \Rightarrow \frac{NK}{MA} = \frac{NC}{AM} \Rightarrow NK = CN$ hay N là trung điểm CK $\Rightarrow N$ trùng I

Vậy M, I, B thẳng hàng.

Bài 374. Cho (O;R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn . Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A , vẽ các tiếp tuyến MP , MP'với đường tròn . Dây PP' cắt OM tại N , cắt OA tại B . Chứng minh :

a) Tứ giác MPOP' , MNBA nội tiếp

b) OA.OB = OM.ON không đổi

c) Khi điểm M di chuyển trên d thì tâm đường tròn nội tiếp ΔMPP' di chuyển trên đường nào ?

d) Cho $\widehat{PMP'} = 60^0$ và R=8cm tính diện tích tứ giác MPOP' và hình quạt POP'

Hướng dẫn

a) + Ta có $\widehat{MPO}=\widehat{MP'O}=90^0 \Rightarrow \widehat{MPO}+\widehat{MP'O}=180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MPOP' nên tứ giác MPOP' là tứ giác nội tiếp.

Ta có $OP=OP'$ nên O nằm trên đường trung trực PP', $MP=MP'$ nên M nằm trên đường trung trực PP', suy ra OM là trung trực PP' nên PP' vuông góc MO

+ Xét tứ giác MNBA có $\widehat{MNB}+\widehat{MAB}=180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MNBA nên tứ giác MNBA là tứ giác nội tiếp.

b) + Xét tam giác vuông ONB và tam giác vuông OAM có góc AOM chung

$\Delta ONB \backsim \Delta OAM\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{OA}{ON}=\dfrac{OM}{OB} \Rightarrow$ OA.OB=OM.ON (1)

+ Xét tam giác vuông OMP ta có

OP^2 =OM.ON= R^2 (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ OA.OB=OM.ON= R^2

c) Gọi I là giao OM với (O). Ta có: OM là phân giác của $\widehat{PMP'}$.

$\widehat{IP'M}=\dfrac{1}{2}sđP'I;\widehat{IP'P}=\dfrac{1}{2}sđIP$ mà cung IP = cung IP' nên $\widehat{IP'M}=\widehat{IP'P}$

Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MP'P.

Vậy tâm đường tròn nội tiếp tam giác MP'P chạy trên (O

d) $MP'=\dfrac{OP'}{tan30^0}=8\sqrt{3}cm \Rightarrow S_{OPMP'}=OP'.P'M=64\sqrt{3}cm^2$

$S_{POP'}=\dfrac{\pi R^2.120^0}{360^0}\approx 67cm^2$

Bài 375. Cho (O;R) và điểm A cố định nằm ngoài (O) . Vẽ đường thẳng d ⊥ OA tại A . Trên d lấy điểm M . Qua M kẻ hai tiếp tuyến ME,MF . EF cắt OM tại H , cắt OA tại B . Chứng minh :

a) Tứ giác ABHM nội tiếp b) $OA.OB=OH.OM=R^2$

c) Tâm của đường tròn nội tiếp ΔMEF thuộc một đường tròn cố định

d) Tìm vị trí của M để diện tích ΔBHO lớn nhất

Hướng dẫn

a) Ta có : $EM = EF$ nên M nằm trên trung trực EF

$OE = OF$ nên O nằm trên trung trực EF

Suy ra OM là trung trực EF nên MO vuông góc EF tại H.

Xét tứ giác ABHM có : $\widehat{BMH} + \widehat{BAH} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác ABHM nội tiếp đường tròn

b) Vì ABHM nội tiếp nên $\widehat{OMA} = \widehat{OBH}$ (cùng phụ góc $\widehat{HBA}$)

Suy ra $\Delta OBH \backsim \Delta OMA(g.g) \Rightarrow OA.OB = OH.OM$ (1)

Xét tam giác vuông OEM có EH là đường cao nên $OH.OM = OE^2 = R^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $OA.OB = OH.OM = R^2$

c) Gọi giao OM và (O) là I.

Ta có: $\widehat{EMO} = \widehat{FMO}$ (tc hai tt cắt nhau) (3)

$\widehat{IEM} = \frac{1}{2} sđEI$; $\widehat{IEF} = \frac{1}{2} sđIF$; mà cung EI = cung FI nên $\widehat{IEM} = \widehat{IEF}$ (4)

Từ (3)(4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

Vậy tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF luôn nằm trên (O) cố định.

d) theo b ta có: $OA.OB = R^2$ mà OA không đổi nên $OB = \frac{R^2}{OA}$ không đổi.

Trong tam giác vuông OHB có:

$$S_{OHB} = \frac{1}{2} OH.HB \le \frac{1}{2}.\left(\frac{OH + HB}{2}\right)^2 = \frac{(OH + HB)^2}{8} \le \frac{2\left(OH^2 + HB^2\right)}{8} = \frac{OB^2}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi OH = HB, suy ra tam giác OHB vuông cân tại H nên $\widehat{MOA} = 45^0$

Vậy M trên d sao cho $\widehat{MOA} = 45^0$

Bài 376. Cho (O;R). Điểm A cố định nằm ngoài đường tròn kẻ đường thẳng (d) vuông góc OA. Từ điểm B bất kì trên d (B không trùng A) kẻ các tiếp tuyến BD, BC với (O) (D, C là tiếp điểm) Dây CD cắt OB tại N, cắt OA tại P.

1) Chứng minh tứ giác OCBD, BNPA nội tiếp đường tròn

2) Chứng minh OA.OP = OB.ON = R^2

3) Cho góc $\widehat{CBO} = 30^0$; R = 6cm. Tính diện tích BCOD và diện tích hình quạt giới hạn bởi cung nhỏ DC và dây DC.

4) Gọi E là giao đường thẳng AO và (O) (O nằm giữa A, E). Khi B di chuyển trên đường thẳng d. Chứng minh trọng tâm G của tam giác ACE thuộc một đường tròn cố định

Hướng dẫn

1) Xét tứ giác OCBD có: $\widehat{BDO} = \widehat{BCO} = 90^0$ (tc tiếp tuyến) nên $\widehat{BDO} + \widehat{BCO} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác OCBD nội tiếp.

Ta có: OC = OD nên O nằm trên đường trung trực DC (1)

DB = BC (tc hai tiếp tuyến cắt nhau) nên B nằm trên đường trung trực DC (2)

Từ (1)(2) suy ra OB là trung trực DC nên BO vuông góc DC.

Xét tứ giác BNPA có: $\widehat{BNP} + \widehat{BAP} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác BNPA nội tiếp.

2) Xét tam giác OPN và OBA có: Góc O chung,

$$\widehat{ONP} = \widehat{OAB} = 90^0 \Rightarrow \Delta OPN \backsim \Delta OBA(g.g) \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{ON}{OP} \Rightarrow OA.OP = ON.OB \ (3)$$

Trong tam giác vuông BOD có DN là đường cao, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$ON.OB = OD^2 = R^2 \left(4\right)$

Từ (3)(4) suy ra OA.OP = OB.ON = R^2

3) Trong tam giác vuông OBC ta có: $BC = \dfrac{OC}{\tan \widehat{CBO}} = \dfrac{R}{\tan 30^0} = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}cm$

$$S_{BCOD} = 2S_{BOC} = 2.\frac{1}{2}.OC.CB = 2.\frac{1}{2}.6.6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,cm^2$$

Ta có: $\widehat{CBO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{CBD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{COD} = 120^0 \Rightarrow$ Diện tích hình quạt giới hạn bởi dây OD, OC và cung nhỏ DC là: $S_{OCD} = \dfrac{120.3,14.6^2}{360} = \dfrac{942}{25}cm^2$

Vì $\widehat{DON} = 60^0 \Rightarrow ON = \dfrac{R}{2} = 3cm \Rightarrow DN = 3\sqrt{3}\,cm \Rightarrow S_{\Delta ODC} = 2S_{\Delta ODN} = ON.ND = 9\sqrt{3}cm^2$

$\Rightarrow$ Diện tích hình giới hạn bởi cung nhỏ DC và dây CD là:

$S = S_{ODC} - S_{ODC} = \dfrac{942}{25} - 9\sqrt{3}cm^2$

4) Gọi E là giao đường thẳng AO và (O) (O nằm giữa A, E). Khi B di chuyển trên đường thẳng d. Chứng minh trọng tâm G của tam giác ACE thuộc một đường tròn cố định

A và O cố định nên E cố định, gọi H là trung điểm AB suy ra H cố định.

Gọi I là điểm nằm trên đoạn OH sao cho $HI = \dfrac{1}{2}HO \Rightarrow I$ cố định

t tam giác HOC có: $\dfrac{HI}{HO} = \dfrac{HG}{HC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IG$ // OC và $G = \dfrac{1}{3}OC = \dfrac{R}{3}$.

Mà I cố định nên G chạy trên $\left(I;\dfrac{R}{3}\right)$.

Bài 377. Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn $\left(O;R\right)$. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA,MB với đường tròn đó (A,B là hai tiếp điểm). Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với MB cắt $\left(O;R\right)$ tại C. Nối MC cắt đường tròn $\left(O;R\right)$ tại D. Tia AD cắt MB tại E.

a) Chứng minh rằng $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $EM = EB$.

c) Xác định vị trí của điểm M để $BD \perp MA$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^0$ (gt) suy ra $\widehat{MAO}+\widehat{MBO}=180^0$

mà đây là hai góc đối nhau của tứ giác MAOB nên tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Xét tam giác EMD và EAM có: Góc E chung, $\widehat{EMD}=\widehat{EAM}$ (cùng bằng góc $\widehat{DCA}$)

nên $\Delta EMD \backsim \Delta EAM\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{EM}{EA}=\dfrac{ED}{EM}\Rightarrow EM^2=ED.EA$ (1)

Xét tam giác EBD và EAB có: Góc E chung, góc $\widehat{EBD}=\widehat{EAB}\left(=\dfrac{1}{2}sđBD\right)$

nên $\Delta EBD \backsim \Delta EAB\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{EB}{EA}=\dfrac{ED}{EB}\Rightarrow EB^2=ED.EA$ (2)

Từ (1)(2) suy ra EB = EM. Vậy E là trung điểm BM.

c) Khi BG vuông góc MA thì :

$\widehat{MAB}+\widehat{DBA}=90^0 \Leftrightarrow \widehat{MAD}+\widehat{DAB}+\widehat{DBA}=90^0 \Leftrightarrow \widehat{DMB}+\widehat{DBM}+\widehat{DBA}=90^0$ nên MD vuông góc AB mà AM=MB nên MC trùng với MO.

Khi đó AOBD là hình thoi nên $OI=\dfrac{R}{2}$.

Trong tam giác vuông AOM có AI là đường cao nên:

$OA^2=OI.OM\Rightarrow R^2=\dfrac{R}{2}.MO\Rightarrow OM=2R$

Vậy quỹ tích điểm M nằm trên (O;2R).

Bài 378. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ điểm A bên ngoài đường tròn, ke 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Từ điểm B, kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường tròn tại D (D khác B). Nối AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Nối BK cắt AC tại I.

1. Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh rằng $IC^2 = IK\ .IB$

3. Cho $\widehat{BAC} = 60^0$. Chứng minh ba điểm A, O, D thẳng hàng.

Hướng dẫn

1) Vì AB và AC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác ABOC có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác ABOC nội tiếp .

2) Ta có: $\widehat{IAD} = \widehat{KDB}$ (sole trong) mà $\widehat{KDB} = \widehat{KBA}\left(= \frac{1}{2} sđBK\right)$ nên $\widehat{IAK} = \widehat{KBA}$

Xét tam giác IAK và IBA có: Góc I chung, $\widehat{IAK} = \widehat{KBA}$ nên $\Delta IAK \backsim \Delta IBA(g.g)$

$\Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA^2 = IB.IK$ (đpcm)

3) Vì ABOC nội tiếp mà $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BCA} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{DBC} = 60^0$ (sole trong) nên $\widehat{DOC} = 120^0$ (góc ở tâm – góc nội tiếp) .

Suy ra $\widehat{AOC} + \widehat{COD} = 180^0$ nên A, O, D thẳng hàng.

Bài 379. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA = 3R. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn (O) (P, Q là hai tiếp điểm). Từ điểm P kẻ đường thẳng song song với AQ, cắt đường tròn (O) tại M (M khác P). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

a) Chứng minh tứ giác APOQ là tứ giác nội tiếp; b) Chứng minh $KA^2 = KN.KP$

c) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R.

Hướng dẫn

a) Vì AP và AQ là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{APO} + \widehat{AQO} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác APOQ nên APOQ nội tiếp đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{NAK} = \widehat{NMP}$ (sole trong) mà $\widehat{NMP} = \widehat{NPA}\left(= \frac{1}{2} sđPN\right)$

nên $\widehat{NPA} = \widehat{NAK}$

Xét tam giác KAN và tam giác KPA có: Góc K chung; $\widehat{KAN} = \widehat{KPA}$

nên $\Delta KAN \backsim \Delta KPA(g.g) \Rightarrow \frac{KA}{KN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow KA^2 = KN.KP$

c) Tương tự các em chứng minh $\Delta KNQ \backsim \Delta KQP(g.g) \Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Suy ra KQ=KA nên K là trung điểm QA.

Vì OP=OQ nên O nằm trên trung trực PQ. Vì AP=AQ nên A nằm trên trung trực PQ, suy ra OA là trung trực PQ nên G là trọng tâm của tam giác APQ.

Xét tam giác vuông APO có PH là đường cao nên

$OP^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \frac{R}{3} \Rightarrow AH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3}$

Suy ra $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{8R}{3} = \frac{16R}{9}$

Bài 380. Cho (O;R) và dây CD cố định . Gọi H là trung điểm CD . Gọi S là một điểm trên tia đối của tia DC qua S kẻ hai tiếp tuyến SA , SB tới (O) . Đường thẳng AB cắt SO , OH tại E và F , cho $R = 10cm$; $SD = 4cm$; $OH = 6cm$. CM:

a) Tứ giác SEHF nội tiếp b) Tích OE.OS không phụ thuộc vào vị trí điểm S

c) Tính CD và SA

d) Khi S di chuyển trên tia đối của DC thì AB luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn

a) Vì H là trung điểm DC nên $\widehat{SHF} = 90^0$. OS là trung trực AB nên $\widehat{SEF} = 90^0$

Xét tứ giác SEHF có : $\widehat{SEF} = \widehat{SHF} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh SF nên SEHF là tứ giác nội tiếp.

b) $OE.OS = AO^2 = R^2$.

c) Ta có : $OD = R = 10cm$; Pytago trong tam giác DCH tính được $DH = 8cm,$ suy ra $DC = 2DH = 16cm$.

Ta có : $SH = SD + DH = 12cm$; Pytago cho tam giác SOH tính được $SO^2 = 180\ cm^2$.

Pytago cho tam giác SAO tính được $SA = 4\sqrt{5}cm$

d) Vì DC cố định nên H cố định hay OH không đổi.

$\Delta OEF \backsim \Delta OHS\left(g.g\right) \Rightarrow OH.OF = OE.OS = R^2 \Rightarrow OF = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi nên F cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm F cố định.

Bài 381. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và AM < AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

a.C/m : Bốn điểm A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b. C/m : góc AOC bằng góc BIC c.C/m : BI // MN

d. Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Vì E là trung điểm MN nên $\widehat{OEA} = 90^0$; Ta có: $\widehat{OEA} = \widehat{OCA} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh OA nên tứ giác ACEO nội tiếp. Vậy A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì A là giao của hai tiếp tuyến AC và AB nên $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \frac{1}{2} sđBC$, mà $\widehat{BIC} = \frac{1}{2} sđBC$ (góc nt) nên $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$ (đpcm)

c) Theo b ta có $\widehat{AOC} = \widehat{AEC}$ (góc nt chắn cung AC) suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{BIC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên NM//BI.

d) Vì BI//NM nên $S_{AIN} = S_{ABN} = \frac{1}{2} h.AB$ (với h là khoảng cách từ N đến AB)

Suy ra $S_{AINmax} \Leftrightarrow h_{max} \Rightarrow h_{max} = 2R \Leftrightarrow NB$ là đường kính.

Vậy cát tuyến AMN thỏa mãn NB là đường kính thì diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Bài 382. Cho A nằm ngoài (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B,C là tiếp điểm) . M là trung điểm AB, MC cắt (O) tại N.

a) Chứng minh ABOC nội tiếp.

b) Chứng minh $MB^2 = MN.MC$

c) Tia AN cắt (O) tại D. Chứng minh $\widehat{MAN} = \widehat{ADC}$

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0$ (tc tiếp tuyến).

Xét tứ giác ABOC có: $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Xét tam giác MBN và tam giác MCB có: Góc M chung, góc $\widehat{MBN}=\widehat{MCB}\left(=\frac{1}{2}sđBN\right)$

nên $\Delta MBN\backsim\Delta MCB(g.g)\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{MN}{MB}\Rightarrow MB^2=MC.MN$ (đpcm)

c) Theo b ta có: $MB^2=MC.MN\Rightarrow MA^2=MC.MN\Rightarrow\frac{MA}{MC}=\frac{MN}{MA}$

Xét tam giác MAN và tam giác MCA có góc M chung; $\frac{MA}{MC}=\frac{MN}{MA}$

$\Rightarrow\Delta MAN\backsim\Delta MCA(c.g.c)\Rightarrow\widehat{MAN}=\widehat{MCA}$ (2 góc tương ứng)

mà $\widehat{MCA}=\widehat{ADC}\left(=\frac{1}{2}sđNC\right)$ nên $\widehat{ADC}=\widehat{MAN}$

Bài 383. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE tới đường tròn(B, C là hai tiếp điểm, D nằm giữa A và E). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) CMR: ABOC là tứ giác nội tiếp

b) CMR: $AH.AO = AD.AE$

c) Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB, AC theo thứ tự tại I và K. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt tia AB tại P và cắt tia AC tại Q. CMR: $IP + KQ\geq PQ$

d) Giả sử A và (O) cố định. Chứng minh chu vi của tam giác AIK không phụ thuộc vào vị trí điểm D. Nếu chu vi tam giác AIK là 20cm thì độ dài AB là bao nhiêu.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

Xét tứ giác ABOC có: $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Tam giác ABO vuông tại B có đường cao BH nên áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$OA.AH = AB^2$ (1)

Xét tam giác ABD và AEB có: Góc A chung, góc $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}\left(=\frac{1}{2}sđBD\right)$

nên $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD.AE = AB^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $AO.AH = AD.AE$ (đpcm)

c) Ta có:

$IP + KQ \geq 2\sqrt{IP.KQ}$

Tam giác APQ cân tại A (vì AO là trung trực PQ) nên OP=OQ .

Để chứng minh $IP + KQ \geq PQ$ ta chứng minh $IP.KQ = OP^2$

Ta có: $\Delta BPO = \Delta CQO(ch.gn) \Rightarrow \widehat{BOP} = \widehat{COQ}$

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$\widehat{BOI} = \widehat{DOI}; \widehat{BOK} = \widehat{COK} \Rightarrow \widehat{BOP} + \widehat{BOI} + \widehat{DOK} = \widehat{IOD} + \widehat{KOQ} = 90^0$$

hay $\widehat{POI} + \widehat{DOK} = 90^0$ mà $\widehat{OKD} + \widehat{DOK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OKD} = \widehat{POI} \Rightarrow \widehat{POI} = \widehat{OKC}$

Xét ΔPOI và ΔQKO có : $\hat{P} = \hat{Q}; \widehat{POI} = \widehat{QKO} \Rightarrow \Delta POI \backsim \Delta QKO(g.g)$

$\Rightarrow \frac{PO}{QK} = \frac{PI}{OQ} \Rightarrow IP.KQ = OP^2$

mà $IP + KQ \geq 2\sqrt{IP.KQ} = 2OP = PQ.$

Bài 384. (3 điểm) Cho (O;R) và đường thẳng d không đi qua tâm cắt (O) tại hai điểm A và B. Trên d lấy M sao cho A nằm giữa M và B. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MC. MD với (O) (C, D là các tiếp điểm) .

a) Chứng minh MCOD nội tiếp.

b) I là trung điểm AB, OI cắt MD tại K. Chứng minh $KD.KM = KO.KI$

c) Đường thẳng đi qua O song song CD cắt MC, MD tại E và F. Xác định vị trí M trên d sao cho diện tích tam giác MEF đạt GTNN.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{MOC} = \widehat{MDC} = 90^0$ (vì MC và MD là tiếp tuyến (O).

Xét tứ giác MCOD có: $\widehat{MCO} + \widehat{MDO} = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác MCOD nội tiếp.

b) Vì O là trung điểm AB nên OI vuông góc AB (tính chất đường kính – dây cung)

Xét tam giác KDO và KIM có: Góc K chung, $\widehat{KDO} = \widehat{KIM} = 90^0$

nên $\Delta KDO \backsim \Delta KIM\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KD}{KO} = \dfrac{KI}{KM} \Rightarrow KD.KM = KO.KI$ (đpcm)

c) Ta có: OM là trung trực của CD mà EF//CD nên OM là trung trực EF.

$$\Rightarrow S_{MEF} = 2S_{MOF} = OD.MF = R\left(MD + DF\right) \geq R.2\sqrt{MD.DF} = R.2\sqrt{OD^2} = 2R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $MD = DF = R$ mà $MA.MB = MD^2 = R^2$

Vậy M nằm trên d sao cho $MA.MB = R^2$ thì diện tích tam giác MEF nhỏ nhất.

Bài 385. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D). OM cắt AB và O lần lượt tại H và I. Chứng minh.

a) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp.

b) $MC.MD = MA^2$.

c) $OH.OM + MC.MD = MO^2$.

d) Chứng minh DCHO nội tiếp.

e) CI là tia phân giác góc MCH.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^0$ (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{MAO}+\widehat{MBO}=180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MAOB nên tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}\left(=\frac{1}{2}sđAC\right)$

Xét ΔMAC và ΔMDA có: $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$; góc M chung nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA(g.g)$

$\Rightarrow \frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MA} \Rightarrow MC.MD=MA^2$

c) $OA=OB$ nên O nằm trên đường trung trực AB, $MA=MB$ nên M nằm trên đường trung trực AB, suy ra MO là trung trực AB nên OH vuông góc AH.

Tam giác MAO vuông tại A có AH là đường cao nên $OH.OM=OA^2$

$\Rightarrow OH.OM+MC.MD=OA^2+MA^2=OM^2\,(đpcm)$

d, Từ $MH.OM=MA^2$, $MC.MD=MA^2$ suy ra $MH.OM=MC.MD \Rightarrow \frac{MH}{MD}=\frac{MC}{MO}$ (*)

Trong ΔMHC và ΔMDO có $\frac{MH}{MD}=\frac{MC}{MO}$ và $\widehat{DMO}$ chung nên $\Delta MHC \backsim \Delta MDO(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{MHC}=\widehat{MDO} \Rightarrow$ Tứ giác DCHO nội tiếp.

e) Theo d ta có:

$\Rightarrow \frac{MC}{CH}=\frac{MO}{OD}=\frac{MO}{OA}$ (1)

Ta lại có $\widehat{MAI}=\widehat{IAH}$ (góc nt cùng chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$ AI là phân giác của góc MAH.

Theo t/c đường phân giác của tam giác, ta có: $\frac{MI}{IH}=\frac{MA}{AH}$ (2)

ΔMHA và ΔMAO có góc $\widehat{OMA}$ chung và $\widehat{MHA}=\widehat{MAO}=90^0$ nên $\Delta MHA \backsim \Delta MAO$ (g.g)

$\frac{MO}{OA}=\frac{MA}{MH}=\frac{MI}{IH}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{MC}{CH}=\frac{MI}{IH}$ suy ra CI là tia phân giác của góc $\widehat{MCH}$ (đpcm)

Bài 386. Cho (O;R) . M tùy ý nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MB, MC với đường tròn, kẻ đường kính AB của đường tròn.

a) Chứng minh AC//OM

b) Kẻ đường thẳng qua O vuông góc AB cắt MC và AC tại K và E. Chứng minh $\Delta MOB=\Delta EAO$

c) Chứng minh độ dài ME không đổi

d) Khi M chuyển động trên $(O;2R)$ thì K chuyển động trên đường nào?

Hướng dẫn

a) Cùng vuông góc với BC.

b) Xét hai tam giác vuông ΔMOB và ΔEAO có OA=OB; $\widehat{EAO}=\widehat{MOB}$ (đồng vị)

Suy ra $\Delta MOB=\Delta EAO$ (cgv-gnk)

c) Theo b suy ra OE=BM suy ra BMEO là hình chữ nhật nên ME=OB=R không đổi.

d) Ta có: OM//CE (cmt) nên OMEC là hình thang, mà OE=BM; CM=BM nên OE = CM

Suy ra OMEC là hình thang cân, suy ra K nằm trên trung trực OM.

Vì $OM=2R;\ OB=R$ nên $MB=OE=R\sqrt{3}$

Gọi I là trung điểm OM, Tam giác OIK đồng dạng OEM nên :

$$\frac{OK}{OM}=\frac{OI}{OE}\Rightarrow OK=\frac{R.2R}{R\sqrt{3}}=\frac{2RR\sqrt{3}}{3}$$

Vậy K nằm trên đường tròn $\left(O;\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 387. Cho (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM và AN . Đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại B và C ($AB < AC$, d không qua tâm).

a) AMON nội tiếp.

b) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính BC cho $AB = 4cm, AN = 6cm$.

c) Gọi I là trung điểm BC, NI cắt (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh MT//AC.

d) Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) Có hai góc đối bằng 90.

b) Tam giác ABN đồng dạng ANC (g.g). Thay số vào tính AC rồi suy ra BC.

c) AOIN nội tiếp nên $\widehat{AIN} = \widehat{AON}$ mà $\widehat{AON} = \widehat{MTN}$ nên $\widehat{AIN} = \widehat{MTN}$

d) $\Delta KCO \backsim \Delta CIO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OC}{IO} = \dfrac{OK}{OC} \Rightarrow OC^2 = OI.OK$.

$OI.OK = ON^2 \Rightarrow \dfrac{OI}{ON} = \dfrac{ON}{OK} \Rightarrow \Delta NKO \backsim \Delta INO \Rightarrow \widehat{NKO} = \widehat{INO}$

$OI.OK = OC^2 \Rightarrow OI.OK = OM^2 \Rightarrow \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{OM}{OK} \Rightarrow \Delta MKO \backsim \Delta IMO \Rightarrow \widehat{MKO} = \widehat{IMO}$

mà $\widehat{IMO} = \widehat{INO}$ nên $\widehat{MKO} = \widehat{NKO}$

suy ra K, M, N thẳng hàng ⇒K luôn nằm trên đường thẳng MN khi d thay đổi.

Bài 388. Cho (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với (O) (D nằm giữa A và E) . Phân giác góc DBE cắt ED tại I. Chứng minh:

a) $\frac{BD}{BE}=\frac{CD}{CE}$

b) Chứng minh $AI=AB=AC$.

c) Chứng minh CI là phân giác góc DCE.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{AEB}=\widehat{ABD}\left(=\frac{1}{2}sdBD\right)\Rightarrow \Delta AEB\backsim\Delta ABD(g.g)\Rightarrow \frac{BD}{BE}=\frac{AB}{AE}$ (1)

Tương tự: $\Rightarrow \Delta AEC\backsim\Delta ACD(g.g)\Rightarrow \frac{CD}{CE}=\frac{AC}{AE}$ (2)

Từ (1) va (2) kết hợp với $AB=AC$ nên $\frac{BD}{BE}=\frac{CD}{CE}$

b) Gọi IB cắt (O) tại K. Vì BK là phân giác góc EBD nên cung EK = cung KD.

Ta có: $\widehat{BIA}=\widehat{EIK}=\frac{1}{2}(sdEK+sdBD)=\frac{1}{2}(sdKD+BD)=\frac{1}{2}sdKB=\widehat{IBA}$ nên tam giác ABI cân tại A, suy ra AI=AB mà AB=AC (tc tiếp tuyến) nên $AC=AB=AI$.

c) Vì $\frac{BD}{BE}=\frac{ID}{IE}$ (tính chất phân giác) nên $\Rightarrow \frac{CD}{CE}=\frac{ID}{IE}$ $\Rightarrow$ IC là phân giác góc ACE.

Bài 389. Cho (O) và điểm M nằm ngoài (O), kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến $(MN<MP)$, gọi K là trung điểm NP.

1) Chứng minh M, A, K, O, B cùng thuộc đường tròn.

2) KM là phân giác $\widehat{AKB}$.

3) Gọi Q là giao điểm thứ 2 của BK với (O), chứng minh $QA//NP$.

4) Gọi H là giao điểm AB và MO, Chứng minh $MA^2=MH.MO=MN.MP$.

5) Chứng minh 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc đường tròn.

6) E là giao AB và KO, chứng minh $AB^2 = 4HE.HF$ (F là giao AB và NP)

7) Chứng minh $KEMH$ nội tiếp từ đó suy ra $OK.OE$ không đổi.

8) Gọi I là giao MO với (O). chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

9) Tìm vị trí NMP để tam giác MQP có diện tích lớn nhất.

10) Chứng minh KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra $AE.BF = AF.BE$.

11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.

12) Qua N kẻ đường thẳng song song MB cắt AB và PB tại X và Y. Chứng minh X là trung điểm NY.

13) Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi bán kính $OA,\ OB$ và cung nhỏ BA.

14) Phân giác góc $\widehat{NAP}$ cắt NP tại J. Chứng minh:

+ $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{BN}{BP}$ + $MA = MB = MJ$ + BJ là phân giác góc $\widehat{NBP}$.

15) Từ A kẻ đường thẳng song song MO cắt (O) tại L. LM cắt (O) tại Z, AZ cắt OM tại U.

Chứng minh:

a) $MU^2 = UZ.UA$ và $UM = HU$ b) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HZ^2} - \dfrac{LZ}{ZM} = 1$

Hướng dẫn

1) OK vuông NP (tc đường kính-dây cung) suy ra góc $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MKO} = 90^0$.

Nội tiếp đường tròn đường kính OM.

2) $\widehat{AKM} = \widehat{AOM}$ (vì AKOM nội tiếp) ; $\widehat{MKB} = \widehat{MOB}$ ($MKOB$ nội tiếp)

mà $\widehat{KOA} = \widehat{KOB}$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $\widehat{KAM} = \widehat{MKB}$

Cách khác: Vì tứ giác AKBM nội tiếp mà AM = MB (tc 2tt cắt nhau) nên cung AM = cung MB

Suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{MKB}$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau) .

3) góc $\widehat{AQK} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{MOB} = \widehat{MKB}$ nên $\widehat{AQK} = \widehat{QKP}$.

4) Trong tam giác vuông MAO có AH là đường cao suy ra $MA^2 = MH.MO$.

Trong tam giác MAN và MPA có góc $\widehat{M}$ chung, góc $\widehat{MAN} = \widehat{MPA}$ ($= \frac{1}{2}$sđAN) nên tam giác MAN đồng dạng MPA suy ra $MA^2 = MN.MP$.

5) Theo câu d suy ra $MH.MO = MN.MP$. Xét tam giác MHP và MNO có :

MH.MO=MN.MP và góc M chung $\Rightarrow \Delta MHP \backsim \Delta MNO\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{MPH} = \widehat{MON}$ $\Rightarrow$ Tứ giác NPOH nội tiếp nên 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc đường tròn.

6) Ta có: $MH.HO = AH^2 = \frac{AB^2}{4}$ mà $MH.HO = HE.HF$ nên $HE.HF = \frac{AB^2}{4}$

7) Ta có: $\widehat{EKM} = \widehat{EHM} = 90^0 \Rightarrow OE.OK = OH.OM = R^2$

8) Xem các câu khác.

9) Tìm vị trí NMP để tam giác MQP có diện tích lớn nhất.

Vì QA//PM nên $S_{MQP} = S_{MAP} = \frac{1}{2}h.AM$ (h là khoảng cách từ P đến AM)

Suy ra $S_{MQPmax} \Leftrightarrow h_{max} \Rightarrow AP$ là đường kính của (O). Vậy MNP thỏa mãn AP là đường kính của (O) thì diện tích tam giác MQP lớn nhất.

10) Chứng minh KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc AKB. Từ đó suy ra $AE.BF = AF.BE$

Chứng minh trên ta có: KF là phân giác trong góc AKB là KE vuông góc KF nên KE là phân giác ngoài góc AKB.

$\Rightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow FA.EB = FB.EA$ (tính chất phân giác trong – phân giác ngoài)

11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Ta có: O, M, A, B cố định. Gọi J là trung điểm OM suy ra J cố định.

Gọi T là điểm trên AJ sao cho $AT = \frac{2}{3}AJ \Rightarrow$ T cố định.

G là trọng tâm tam giác APN nên $GA = \frac{2}{3}AK \Rightarrow GT // KJ$ và $GT = \frac{2}{3}KJ$

Tam giác MOK vuông nên $KJ = \frac{1}{2}OM$ không đổi suy ra $GT = \frac{1}{3}OM$

Vậy G nằm trên đường tròn tâm $\left(T; \frac{1}{3}OM\right)$

12)

Nối KX, Ta có: 5 điểm A, K, O, B, M cùng thuộc một đường tròn nên góc $\widehat{KAB} = \widehat{KMB}$ (góc nt cùng chắn cung KB)

mà $\widehat{KMB} = \widehat{KNX}$ (đồng vị) nên $\widehat{KAX} = \widehat{KNX}$ suy ra tứ giác AKXN nội tiếp nên

$\widehat{XKN} = \widehat{XAN}$ mà $\widehat{XAN} = \widehat{BPN}$ (góc nt chắn cung NB) nên $\widehat{BPN} = \widehat{XKN}$

suy ra KX//PY mà K là trung điểm PY nên X là trung điểm YN.

13) Giả sử MO=2R. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi bán kính OA, OB và cung nhỏ BA.

$\widehat{AOB}=120^0; S=\dfrac{\pi R^2}{3}; l=\dfrac{2\pi r}{3}$

14)

+ Chỉ ra $\dfrac{AN}{AP}=\dfrac{MA}{PM};\dfrac{BN}{BP}=\dfrac{MB}{PM}$ mà MA = MB nên $\dfrac{AN}{AP}=\dfrac{BN}{BP}$

+ MA = MB (tc 2 tiếp tuyến cắt nhau) . Gọi Z là giao AJ với (O).

Ta có: $\widehat{NJA}=\dfrac{1}{2}\left(sdPZ+sdAN\right)=\dfrac{1}{2}\left(sdZN+sdAN\right)=\dfrac{1}{2}sdZA=\widehat{JAM}$ (các em chú ý AJ là phân giác nên cung PZ = cung ZN) suy ra tam giác AMJ cân tại M nên AM = MJ.

Vậy $AM=BM=JM$.

+ Theo tính chất phân giác ta có: $\dfrac{PJ}{JN}=\dfrac{AP}{AN}=\dfrac{PB}{BN}$ nên BJ là phân giác góc NBP

Bài 390. Cho (O;R). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyên MA, MB với đường tròn. Qua A kẻ đường thẳng song song MO cắt (O) tại E. ME cắt (O) tại F. AF cắt MO tại N, H là giao điểm MO và AB.

a) Chứng minh MAOB nội tiếp.

b) $NM^2=NF.NA$ và $NM=NH$.

c) Chứng minh $\dfrac{HB^2}{HF^2}-\dfrac{EF}{MF}=1$

Hướng dẫn

a) $\widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^0\Rightarrow\widehat{MAO}+\widehat{MBO}=180^0$. Mà hai góc đối nhau nên tứ giác MAOB nội tiếp

b) Chỉ ra $\Delta MNF\backsim\Delta ANM\left(g.g\right)$ suy ra $MN^2=NF.NA$

Chỉ ra $\Delta NFH\backsim\Delta AFH\left(g.g\right)$ suy ra $NH^2=NF.NA$

Vậy $MN^2=NH^2$ suy ra MN = NH

Có MA = MB (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và OA = OB = R

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB

$\Rightarrow$ AH $\perp$ MO và HA = HB

ΔMAF và ΔMEA có: $\widehat{AME}$ chung, $\widehat{MAF}=\widehat{AEF}$

$\Rightarrow$ ΔMAF $\backsim$ ΔMEA (g.g) $\Rightarrow\dfrac{MA}{ME}=\dfrac{MF}{MA}\Rightarrow MA^2=MF.ME$

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông MAO, có: $MA^2 = MH.MO$

Do đó: $ME.MF = MH.MO \Rightarrow \frac{ME}{MH} = \frac{MO}{MF}$

$\Rightarrow \Delta MFH \backsim \Delta MOE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{MEO}$

Vì $\widehat{BAE}$ là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FAB}\left(= \frac{1}{2} sđEB\right)$

$\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{FAB} \Rightarrow \widehat{ANH} + \widehat{NHF} = \widehat{ANH} + \widehat{FAB} = 90^0$

Nên HF vuông góc NA.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông NHA, có: $NH^2 = NF.NA$

$\Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$.

c) Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông NHA, có: $HA^2 = FA.NA$ và $HF^2 = FA.FN$. Mà HA = HB

$\Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} = \frac{HA^2}{HF^2} = \frac{FA.NA}{FA.FN} = \frac{NA}{NF}$

$\Rightarrow HB^2 = AF.AN$ (vì HA = HB)

Vì AE // MN nên $\frac{EF}{MF} = \frac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Ta-lét)

$\Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = \frac{NA}{NF} - \frac{FA}{NF} = \frac{NF}{NF} = 1$

Bài 391. Cho (O;R) điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC đến (O) (M và O nằm cùng phía với cát tuyến ABC) . Gọi H là trung điểm BC.

a) Chứng minh $AM^2 = AB.AC$

b) Chứng minh tứ giác AMON và ANHO là các tứ giác nội tiếp.

c) Qua H kẻ đường thẳng song song MC cắt MN tại K. Chứng minh BK // AM.

d) Chứng minh khi cát tuyến ABC thay đổi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHK thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) Góc $\widehat{ACM} = \widehat{AMB}\left(= \frac{1}{2} sđBM\right) \Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta ACM \Rightarrow AM^2 = AB.AC$

b) Các em tự cm

c) $\widehat{BHK} = \widehat{BCM} = \widehat{BNM}$ nên tứ giác BNHK nội tiếp suy ra $\widehat{HNK} = \widehat{HBK}$

Mặt khác 5 điểm A, N, H, O, M cùng thuộc một đường tròn (câu a) nên $\widehat{HNK} = \widehat{HAM}$ (góc nt cùng chắn cung HM) suy ra $\widehat{HBK} = \widehat{HAM}$ suy ra KB//AM.

d)

Bài 392. Cho tam giác ABC cân tại A, $A < 90^0$, một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB,AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI,MH,MK xuống các cạnh tương ứng BC ,CA, BA. Gọi P là giao điểm của MB,IK và Q là giao điểm của MC,IH.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK,CIMH nội tiếp được
b) Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK
c) Chứng minh tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ//BC
d) Gọi (O_1) là đường tròn đi qua M,P,K. (O_2) là đường tròn đi qua M,Q,H; N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) và D là trung điểm của BC. Chứng minh M,N,D thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác CHMI có: $\widehat{CHM} = \widehat{CIM} = 90^0\left(gt\right)$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác AHMI nội tiếp.

Chứng minh tương tự : BIMK nội tiếp.

b) Gọi tia tối tia MI là My, vì tứ giác CHMI và BIMK nội tiếp nên $\widehat{ICH} = \widehat{HMy}; \widehat{IBK} = \widehat{KMy}$ mà

$\widehat{ICH} = \widehat{IBK}$ (Cùng chắn cung BC) nên $\widehat{HMy} = \widehat{KMy}$. Vậy My là phân giác góc $\widehat{HMK}$

c) góc $\widehat{PMQ} = \frac{1}{2}sđ$ cung lớn BC,

mà $\widehat{PIQ} = \widehat{PIM} + \widehat{MIQ} = \widehat{MBK} + \widehat{MCH} = \frac{1}{2}sđBM + \frac{1}{2}sđMC = \frac{1}{2}sđ$ cung nhỏ BC nên $\widehat{PIQ} + \widehat{PMQ} = 180^0$

. Suy ra tứ giác PIQM nội tiếp.

Ta có: $\widehat{QPM} = \widehat{QIM} = \widehat{MCH} = \widehat{MBC}$ nên QP//BC.

d) Gọi E là giao điểm MN với PQ

ta có góc $\widehat{MPQ} = \widehat{MBC} = \widehat{MKP}$ (vì MKBI nội tiếp)

⇒ EP là tiếp tuyến (O1)

⇒ ΔEMP∼ΔEPN (g, g)

$\Rightarrow \frac{EM}{EP} = \frac{EP}{EN} \Rightarrow EP^2 = EM.EN$. Chứng minh tương tự $EQ^2 = EM.EN$

nên E là trung điểm PQ

gọi D' là giao điểm MN với BC $\Rightarrow \frac{EP}{D'B} = \frac{ME}{MD'}$ ⇒D'B =D'C ⇒D' trùng D ⇒đpcm

Bài 393. Cho đường tròn (O;r) và dây cung AB $(AB < 2r)$. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC > AB$. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại P,K. Gọi I là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác CPIK nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh 2 tam giác ACP và PCB là đồng dạng. Từ đó suy ra: $CP^2 = CB.CA$.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Hãy tính PH theo r.

d) Giả sử PA// CK, chứng minh rằng tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP

Hướng dẫn

a) Vì PC và KC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{CPO} = \widehat{CKO} = 90^0$

mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác CPOK nội tiếp (1)

Vì I là trung điểm AB nên OI vuông góc AB (tc đường kính dây cung)

suy ra $\widehat{OIC} = \widehat{OPC} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác OIPC nội tiếp (2)

Từ (1)(2) suy ra 5 điểm C, P, I, O, K cùng nằm trên một đường tròn nên C, P, I, K nội tiếp đường tròn.

b) Xét ΔACP và ΔPCB có: góc C chung; $\widehat{CAP} = \widehat{CPB}\left(= \frac{1}{2} sđPB\right)$ nên $\Delta ACP \backsim \Delta PCB(g.g)$

$\Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{AC}{PC} \Rightarrow PC^2 = AC.BC$

c) Vì $OP = OK$; $CP = CK$ nên OC là trung trực PK , suy ra OC vuông góc PK.

Ta có: KH//OP (cùng vuông góc CP); PH//OK (cùng vuông CK) mà HO vuông góc PK nên tứ giác PHKO là hình thoi, suy ra $PH = PO = r$.

d) Nếu AP//KC thì $\Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{PKC} \Rightarrow$ cung PK = cung AK, mà $\widehat{TBC} = \widehat{ABK} = \frac{1}{2} sđAK$

$\widehat{PBT} = \widehat{PAK} = \frac{1}{2} sđPK \Rightarrow \widehat{PBT} = \widehat{TBC}$ nên BT là phân giác góc PBC

Bài 394. Cho đường tròn (O;R), một dây CD có trung điểm là H. Trên tia đối của tia DC lấy một điểm S và qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng SO; OH lần lượt tại E và F.

a/ Chứng minh tứ giác SEHF nội tiếp.

b/Chứng minh $OE.OS = R^2$

c/ $OH.OF = OE.OS$.

d/ Khi S di động trên tia đối của tia DC hãy chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Vì H là trung điểm CD nên OH vuông góc CD, suy ra $\widehat{OHS} = \widehat{SHF} = 90^0$ (1)

Vì $OA = OB = R;\ SA = SB$ (tc 2 tt cắt nhau(nên OS là đường trung trực AB, suy ra $\widehat{SOF} = 90^0$ (2).

Từ (1)(2) suy ra tứ giác SEHF nội tiếp.

b) $OE.OS = OA^2 = R^2$

c) Góc $\widehat{OFE} = \widehat{OSH}$ (cùng phụ $\widehat{EOF}$); $\widehat{OHS} = \widehat{OEF} = 90^0$ nên $\Delta OEF \backsim \Delta OHS\left(g.g\right)$

Suy ra $\dfrac{OF}{OS} = \dfrac{OE}{OH} \Rightarrow OF.OH = OE.OS$

d) Vì CD cố định nên H cố định, suy ra OH không đổi.

Mà $OF = \dfrac{OE.OS}{OH} = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi nên F cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm cố định F.

Bài 395. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O,R), vẽ tiếp tuyến MA, (A là tiếp điểm) Gọi E trung điểm AM, kẻ EI vuông góc OM tại I, AH vuông góc OM tại H. Qua M vẽ cát tuyến MBC có MB < MC và tia MC nằm giữa tia MA và MO.Vẽ tiếp tuyến IK tới (O) với K là tiếp điểm. Chứng minh:

a) Chứng minh: $MA^2 = MB.MC; MA^2 = MH.MO$

b) Chứng minh ΔMBH đồng dạng ΔMOC . Từ đó suy ra BCOH nội tiếp.

c) Chứng minh góc $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$ và Tam giác MHK vuông tại K

d) Giả sử: BC = 3BM, D là trung điểm MC. Chứng minh: MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ODH

Hướng dẫn

a) $\widehat{MCA} = \widehat{MAB} \Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta MCA \Rightarrow MA^2 = MB.MC$

Tam giác OAM vuông tại A có AH là đường cao nên $MA^2 = MH.MO$

b) Từ A suy ra MB.MC = MH.MO , kết hợp góc C chung suy ra $\Delta MHB \backsim \Delta MCO(c.g.c)$

Suy ra $\widehat{MCO} = \widehat{MHB} \Rightarrow$ tứ giác BCOH nội tiếp.

c) Tứ giác BCOH nội tiếp nên $\widehat{CHO} = \widehat{CBO} = \widehat{BCO} = \widehat{MHB}$

mà $\widehat{AHO} = \widehat{AHM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC}$

Tam giác IKO vuông tại K nên:

$OK^2 + IK^2 = OI^2 = (IH + OH)^2 = IH^2 + OH^2 + 2IH.OH$

$= IH^2 + OH^2 + MH.OH = IH^2 + OH^2 + AH^2 = IH^2 + OA^2$

Suy ra $IK = IH = IM$ nên tam giác MKH vuông tại K

d) Ta có $MA^2 = MB.MC = MB.4MB$ nên MA = 2MB.

Do MC = 4MB và D là trung điểm MC nên MD = 2MB

Suy ra MA = MD. Ta có $MA^2 = MH.MO$ nên $MD^2 = MH.MO$ suy ra tam giác MHD đồng dạng tam giác MDO nên góc $\widehat{MDH} = \widehat{MOD}$ mà $\widehat{MOH} = \frac{1}{2}sdDH$ nên $\widehat{MDH} = \frac{1}{2}sdDH$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ODH.

Bài 396. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AMN với đường tròn(B,C,M,N thuộc đường tròn; AM<AN). Gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn (E là trung điểm của MN).

a) Chứng minh 4 điểm A,O,E,C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh :góc $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$;

c) Chứng minh : BI//MN

d) Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tich tam giác AIN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Vì E là trung điểm MN nên OE vuông góc AE, AC là tiếp tuyến (O) nên góc $\widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác AEOC có $\widehat{OEA} = \widehat{OCA} = 90^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác AEOC nội tiếp đường tròn.

b) Góc $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} = \frac{1}{2} sđBC; \widehat{BIC} = \frac{1}{2} sđBC \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BIC}$

c) tứ giác AEOC nội tiếp nên $\widehat{IEN} = \widehat{AEC} = \widehat{AOC}$ mà $\widehat{AOC} = \widehat{BIC} \Rightarrow \widehat{BIC} = \widehat{IEN}$ mà hai góc này ở vị trí sole trong nên BI//NM.

d) Gọi K là chân đường cao kẻ từ N xuống AB. Vì BI//AN nên $S_{AIN} = S_{ABN} = \frac{1}{2} AB.NK$

Suy ra diện tích AIN lớn nhất khi NK lớn nhất, suy ra N, O, B thẳng hàng và NK = 2R.

Bài 397. Cho đường tròn (O;R) , đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A,B. Từ một điểm C trên d(C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn(M,N thuộc O) . Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

1) C/m 4 điểm C,O,H,N thuộc một đường tròn
2) C/m : KN.KC=KH.KO
3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I, chứng minh I cách đều CM,CN,MN.
4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM,CN lần lượt tại E và F.Xác định vị trí của điểm C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Hướng dẫn

1) Vì H là trung điểm AB nên OH vuông góc AB, $\widehat{ONC} = 90^0$ (vì CN là tt)

Xét tứ giác OHON có: $\widehat{OHC} + \widehat{ONC} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác OHCN nội tiếp.

Vậy C, H, O, N cùng thuộc đường tròn.

2) Chỉ ra $\Delta KNO \backsim \Delta KHC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KN}{KH} = \dfrac{KO}{KC} \Rightarrow KN.KC = KH.KO$ (đpcm)

3) Xét tam giác ANM có CO là phân giác góc MCN (tính chất 2tt cắt nhau)

và cung MI = cung IN mà $\widehat{CMI}=\frac{1}{2}sđMI;\widehat{IMN}=\frac{1}{2}sđIN$ nên $\widehat{CMI}=\widehat{IMN}$

Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ANM.

Vậy I cách đều CM, CN và NM.

4) Tam giác CMN cân mà EF//NM nên tam giác CEF cân tại C

Suy ra $S_{CEF}=2S_{COF}=ON.CF=R\left(FN+NC\right)\geq 2R.\sqrt{CN.NF}=2R\sqrt{R^2}=2R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $NF=NC=R$, suy ra $OC=R\sqrt{2}$. Vậy C nằm trên $\left(O;R\sqrt{2}\right)$

Bài 398. Cho đường tròn (O,R) và điểm A nằm ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B,C là các tiếp điểm)

1. Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA=R^2$
3. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O,R) lấy điểm K bất kỳ (K khác B,C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O,R) cắt AB , AC theo thứ tự tại P, Q. Chứng minh tam gác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng $PM+QN\geq MN$

Hướng dẫn

1. Xét tứ giác ABOC có: $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0$ (AB, AC là tt) nên $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^0$ suy ra tứ giác ABOC nội tiếp.

2. Tam giác ABC có AC=AB (tc 2 tt cắt nhau) mà OA là phân giác góc A nên OA vuông góc BC.

Trong tam giác vuông ACO có AE là đường cao nên $OC^2 = OE.OA$ hay $OE.OA = R^2$.

3. Ta có: $\begin{cases} CQ = QK \\ KP = PB \end{cases}$ (tính chất hai tt cắt nhau)

Chu vi tam giác $APQ = AQ + QK + KP + PA = AQ + CQ + PB + AP = AC + AB = 2AB$ không đổi .

4. Tam giác ANM cân tại A(có phân giác là đường cao) nên $\widehat{ANM} = \widehat{AMN}$

$\hat{A} + 2\widehat{AMO} = 180^0$; $\hat{A} + \widehat{BOC} = 180^0$ hay $\hat{A} + 2\widehat{QOP} = 180^0$ suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{POQ}$

$\Delta MOP \backsim \Delta NQO$ (g.g) nên $MP.QN = OM.ON = OM^2 = \dfrac{MN^2}{4}$ nên $MN^2 = 4MP.QN \le (MP + QN)^2$

nên $NM \le MP + QN$.

Bài 399. Cho (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với (O) (M,N là các tiếp điểm) . Một đường thẳng (d) đi qua A cắt (O) tại hai điểm B và C (AB<AC, d không đi qua tâm O)

1. Chứng minh AMON nội tiếp.

2. Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính BC biết $AB = 4cm; AN = 6cm$.

3. Gọi I là trung điểm BC, đường thẳng NI cắt (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh MT//AC.

4. Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0$ (AM và AN là tt) suy ra $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác AMON nên tứ giác AMON nội tiếp.

2. Ta có: $\widehat{BNA} = \widehat{NCA}\left(= \frac{1}{2} sđBN\right)$ nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN$ (g.g) nên $AN^2 = AB.AC$

Thay $AB = 4cm$; $AN = 6cm$ vào $AN^2 = AB.AC$ suy ra AC = 9cm, suy ra $BC = 9 - 4 = 5cm$.

3. Ta có: $\widehat{MTN} = \frac{1}{2} sđMN = \widehat{AON}$ (1). Vì I là trung điểm BC nên OI vuông góc BC,

$\widehat{OIA} = \widehat{ONA} = 90^0$ nên tứ giác AOIN nội tiếp, suy ra $\widehat{AON} = \widehat{AIN}$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{MTN} = \widehat{AIN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên MT//AC.

4. Xét tam giác AKO có AI vuông góc KO , kẻ OQ vuông góc AK , OQ giao AI tại H suy ra H là trực tâm tam giác AOK. Mà đường KHN vuông OA, KMN vuông góc OA nên K,N,H,M thẳng hàng. Suy ra K nằm trên đường thẳng cố định MN.

Bài 400. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E(D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE

1) Chứng minh bốn điểm A, O, B, H cùng nằm trên một đường tròn.
2) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$
3) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO. d cắt BC tại điểm K. Chứng minh HK ∥ DC
4) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F, Chứng minh tứ giác BECF là hình chữ nhật.

Hướng dẫn

1. Ta có: $\widehat{OBA} = 90^0$ (vì AB là tt của (O)).

$\widehat{OHA}=90^0$ (vì H là trung điểm dây CD) suy ra $\widehat{OBA}+\widehat{OHA}=180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác ABOH nên tứ giác ABOH nội tiếp.

2. Xét tam giác ABE và ADB có: $\begin{cases} \hat{A} chung \\ \widehat{ABD}=\widehat{AEB}\left(=\frac{1}{2}sđBD\right) \end{cases}$ suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g)

nên $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{BE}$

3. Tứ giác ABOH nội tiếp nên $\widehat{OAH}=\widehat{OBH}$ (góc nt chắn cung OH)

mà $\widehat{OAH}=\widehat{HEK}$ (sole trong) nên $\widehat{HEK}=\widehat{OBH}$ suy ra tứ giác BHKE nội tiếp.

Vì BHKE nội tiếp nên $\widehat{KHE}=\widehat{KBE}$ (góc nt chắn cung EK) mà $\widehat{KBE}=\widehat{EDC}$ (góc nt chắn cung EC)

nên $\widehat{EHK}=\widehat{EDC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên HK//DC.

4. Kẻ tiếp tuyến AQ với (O) (Q khác B). Tam giác ABP=AQP(c.g.c) nên $\widehat{ABP}=\widehat{AQP}$ (1)

Ta có: Tứ giác ABOQ nội tiếp nên $\widehat{OAQ}=\widehat{OBQ}$ mà $\widehat{OBQ}=\widehat{CDQ}$ (góc nt chắn cung CD)

nên $\widehat{OAQ}=\widehat{CDQ}$ suy ra tứ giác QDPA nội tiếp, nên $\widehat{AQP}=\widehat{ADP}=\widehat{CDE}=\widehat{CBE}$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{CBE}=\widehat{PBA}$ mà $\widehat{OBP}+\widehat{ABP}=90$ nên $\widehat{EBC}+\widehat{CBP}=90$ suy ra F thuộc (O) nên BC và FE là đường kính của (O). Suy ra tứ giác BECF là hình chữ nhật.

Bài 401. Cho (O) đường kính AB=2R. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (O) khác A và B. Tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau tại E. Vẽ MP vuông góc AB, MQ vuông góc AE.

a) Chứng minh AEMO là tứ giác nội tiếp và APMQ là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm PQ. Chứng minh O, I, E thẳng hàng.

c) Gọi K là giao EB và MP. Chứng minh tam giác EAO đồng dạng tam giác MPB suy ra K là trung điểm MP.

d) Đặt $AP=x$. Tính MP theo R và x, Tìm vị trí M trên (O) để APMQ có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh AEMO là tứ giác nội tiếp và APMQ là hình chữ nhật.

Xét tứ giác AEMO có: $\widehat{EAO}+\widehat{EMO}=90^0+90^0=180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác AEMO nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác APMQ có: $\widehat{QAP}=\widehat{APM}=\widehat{MQA}=90^0 \Rightarrow$ tứ giác APMQ là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm PQ. Chứng minh O, I, E thẳng hàng.

Vì APMQ là hình chữ nhật mà I là trung điểm PQ nên I là trung điểm AM.

Ta có: EA=EM (tính chất tiếp tuyến cắt nhau); OA=OM =R nên OE là trung trực AM hay EO đi qua trung điểm I của AM. Vậy E, O, I thẳng hàng.

c) Gọi K là giao EB và MP. Chứng minh tam giác EAO đồng dạng tam giác MPB suy ra K là trung điểm MP.

Ta có: IO là đường trung bình của tam giác ABM nên OI//BM $\Rightarrow \widehat{EOA} = \widehat{MBP}$ (đồng vị)

Xét tam giác EOA và MBP có: $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{MPB} = 90^0; \widehat{EOA} = \widehat{MBP}$

$\Rightarrow \Delta EAO \backsim \Delta MPB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{PB}{AO} = \dfrac{MP}{EA} \Rightarrow MP = EA.\dfrac{PB}{AO} = 2EA.\dfrac{PB}{AB}$

Mà KP//EA $\Rightarrow \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{KP}{EA} \Rightarrow MP = 2KP \Rightarrow$ K là trung điểm MP

d) Đặt AP= x. Tính MP theo R và x, Tìm vị trí M trên (O) để APMQ có diện tích lớn nhất.

Ta có: $BP = 2R - x$

Tam giác AMB vuông tại M, có MP là đường cao nên $MP^2 = PA.PB = (2R - x).x$

$\Rightarrow MP = \sqrt{(2R - x).x} \Rightarrow S_{APMQ} = AP.MP = x.\sqrt{(2R - x).x}$

$= x\sqrt{3}.\sqrt{\dfrac{x}{3}.(2R - x)} \le x\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3} + 2R - x\right) = x\sqrt{3}.\left(R - \dfrac{x}{3}\right)$

$$=3\sqrt{3}.\frac{x}{3}.\left(R-\frac{x}{3}\right)\le 3\sqrt{3}.\frac{1}{4}.\left(\frac{x}{3}+R-\frac{x}{3}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}.R^2$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{x}{3}=2R-x\\ \frac{x}{3}=R-\frac{x}{3}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3R}{2}$

Vậy diện tích APMQ lớn nhất khi M thuộc đường tròn sao cho P là trung điểm OB.

Bài 402. Cho (O) và M nằm ngoài (O). MO cắt (O) tại E và F (ME<MF) cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa M và B, A và C nằm khác phía với đường thẳng MO)

a) Chứng minh $MA.MB=ME.MF$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ OM chứa A , vẽ nửa đường tròn đường kính MF , nửa đường tròn này cắt tuyếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của CO và KF. Chứng minh MS vuông góc KC.

d) Gọi P và Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFS và ABS và T là trung điểm KS . Chứng minh P, Q , T thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $MA.MB=ME.MF$

Tứ giác ABFE nội tiếp nên $\widehat{BFE}=\widehat{EAM}$

Xét tam giác MAE và MBF có: $\widehat{BFE}=\widehat{EAM};\hat{M}$ chung nên $\Delta MAE\backsim\Delta MFB(g.g)$

$$\Rightarrow\frac{MA}{MF}=\frac{ME}{MB}\Rightarrow MA.MB=ME.MF$$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

Ta có: $MC^2=MA.MB$ mà $MC^2=MH.MO\Rightarrow MH.MO=MA.MB$

$\Rightarrow$ AHOB nội tiếp đường tròn.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ OM chứa A , vẽ nửa đường tròn đường kính MF , nửa đường tròn này cắt tuyếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của CO và KF. Chứng minh MS vuông góc KC.

Vì MF là đường kính nên $\widehat{FKM} = 90^0 \Rightarrow MKSC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow MK^2 = ME.MF = MC^2 \Rightarrow MK = MC$ nên MS là đường trung trực KC $\Rightarrow$MS vuông góc KC.

d) Gọi P và Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFS và ABS và T là trung điểm KS . Chứng minh P, Q , T thẳng hàng.

Gọi giao KC và MS là V .

Trong đường tròn (Q) ta có: $MA.MB = MV.MS$.

Trong đường tròn (P): $MV.MS = ME.MF$ nên PQ vuông góc MS và là đường trung trực VS (đường nối tâm hai đường tròn) nên PQ đi qua trung điểm KS . Vậy T, Q, P thẳng hàng.

Bài 403. Cho tam giác ABC không có góc tù (AB<AC) nội tiếp (O;R) có B,C cố định, A di động trên cung lớn BC. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song AB, đương thẳng này cắt (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC) cắt BC tại F, cắt AC tại tại I.

a) Chứng minh $\widehat{MBC} = \widehat{BAC}$ từ đó suy ra MBIC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh FI.FM=FD.FE

c) OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB) đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q) . Chứng minh P, T, M thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\widehat{MBC} = \widehat{BAC}$ từ đó suy ra MIBC là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđBC$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung , góc nội tiếp)

$\widehat{MIC} = \widehat{BAC}$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{MBC} \Rightarrow$ tứ giác MBIC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $FI.FM = FD.FE$

Ta có: $\widehat{CEF} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD); $\widehat{CFE} = \widehat{DFB}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta FEC \backsim \Delta FBD(g.g) \Rightarrow FB.FC = FE.FD$

$\Delta FBM \backsim \Delta FIC(g.g) \Rightarrow FB.FC = FI.FM \Rightarrow FD.FE = FI.FM$

c) OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB) đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q) . Chứng minh P, T, M thẳng hàng.

Vì PQ là đường kính của (O) nên $\widehat{PTQ} = 90^0$ (1)

Ta có: $FI.FM = FD.FE = FT.FQ \Rightarrow \dfrac{FI}{FQ} = \dfrac{FT}{FM}$

Xét tam giác FIQ và FTM có: $\widehat{IFQ} = \widehat{MFT}$ (đối đỉnh); $\dfrac{FI}{FQ} = \dfrac{FT}{FM}$

$\Rightarrow \Delta FIQ \backsim \Delta FTM\left(g.g\right) \Rightarrow \widehat{FTM} = \widehat{FIQ} = 90^0$ (2)

Từ (1)(2) suy ra M,T, P thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Kẻ HB vuông góc AC, $S_{IBC} = \frac{1}{2}BH.IC = \frac{1}{2}BI.IC.\sin\widehat{BIA}$ mà $\widehat{BIA} = 180^0 - 2\widehat{BAC}$ không đổi nên diện tích IBC lớn nhất khi BI.IC lớn nhất.

Ta có: $IB.IC = IA.IC \le \left(\frac{IA+IC}{2}\right)^2 = \frac{AC^2}{4} \le R^2$

Dấu bằng xảy ra khi IA=IC hay AC là đường kính.

Bài 404. Cho góc $\widehat{xAy} = 60^0$. Đường tròn tâm (O) tiếp xúc Ax tại B và tiếp xúc Ay tại C. Lấy M trên cung nhỏ BC, gọi D, E, F là hình chiếu của M lên BC, AC, AB.

a) Chứng minh DMEC, DMFB nội tiếp

b) Tính góc EDF

c) Chứng minh $MD^2 = MF.ME$

Hướng dẫn

b) Chỉ ra tứ giác DMEC và DMFB nội tiếp suy ra:

góc $\widehat{EDM} = \widehat{ECM} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$ (góc ở tâm và góc tạo bởi tiếp tuyến)

góc $\widehat{MDF} = \widehat{MBF} = \frac{1}{2}\widehat{MOB}$

Suy ra $\widehat{EDF} = \widehat{EDM} + \widehat{MDF} = \frac{1}{2}\left(\widehat{MOC} + \widehat{MOB}\right) = \frac{1}{2}.120 = 60^0$

c) góc $\widehat{MED} = \widehat{MCD} = \widehat{MBF}$ (cùng $= \frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BM}$) $= \widehat{FDM}$

$\widehat{MDE} = \widehat{MCE} = \widehat{MBD} = \widehat{MFD}$

suy ra tam giác MDF đồng dạng MED. Từ đó suy ra tỉ số $MD^2 = MF.ME$

Bài 405. Cho 3 điểm A, B, C cố định thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua 2 điểm B và C (BC không phải đường kính) . Từ A kẻ tiếp tuyến AE, AF đến đường tròn (E, F là tiếp điểm) . Gọi I là trung điểm BC, K là trung điểm EF. FI giao (O) tại D. Chứng minh:

a) $AE^2 = AB.AC$ b) Tứ giác AEOF, AEIO nội tiếp c) ED//AC

d) Khi (O) thay đổi tâm đường tròn ngoại tiếp OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

Các câu a, b, c xem các bài trên

d) I , A, B, C cố định, AI, AE, AF cố định .

Gọi J là giao EF với AC

Tứ giác JIOK nội tiếp nên $AJ.AI = AK.AO = AE^2 = AB.AC \Rightarrow AJ.AI = AB.AC \Rightarrow AJ$ không đổi nên J cố định

Mà tứ giác JKOI nội tiếp nên tâm đường tròn nội tiếp tam giác IOK là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác JKOI. Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp OIK luôn nằm trên trung trực IJ cố định.

Bài 406. Cho (O;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn, BC cắt OA tại H, Dây cung DE qua H (D nằm trên cung nhỏ BC) . Chứng minh tứ giác ADOE nội tiếp và góc BAE= CAD.

Hướng dẫn

Ta có: $HA.HO = HC^2$, mà $HE.HD = BH.HC = HC^2$ nên $HA.HO = HE.HD$

Suy ra tam giác HEO đồng dạng HAD nên góc $\widehat{OEH} = \widehat{HAD}$. suy ra tứ giác ADOE nội tiếp.

Vì OE=OD nên góc $\widehat{EAO} = \widehat{OAD}$ mà góc $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

Bài 407. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O). (M, N là tiếp điểm) . Trên NM lấy H, đường thẳng vuông góc OH tại H cắt AM và AN tại E và F.

a) Chứng minh tam giác OEF cân tại O.

b) Kẻ OI vuông góc MN. Chứng minh $OI.OE = OM.OH$

Hướng dẫn

a) Chỉ ra tứ giác OHFN (hai góc đối tổng 90) và OHME nội tiếp (hai góc cùng nhìn 1 cạnh dưới 1 góc vuông) suy ra : $\begin{cases} \widehat{OFH} = \widehat{ONH} \\ \widehat{OEH} = \widehat{OMH} \end{cases}$ mà $\widehat{OMH} = \widehat{ONH}$ (vì OM=ON) nên $\widehat{OFH} = \widehat{OEH}$

suy ra tam giác OEF cân tại O.

b) Vì $\widehat{OMH} = \widehat{OEH}$ nên tam giác OIM đồng dạng OHE suy ra $\dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OM}{OE}$ hay $OI.OE = OH.OM$.

Bài 408. Cho (O;R). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B,C là tiếp điểm). OA cắt BC tại E.

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp

b) Chứng minh BC vuông góc OA và BA.BE=AE.BO

c) Gọi I là trung điểm BE. Đường thẳng qua I là vuông góc OI cắt tia AB, AC tại D và F. Chứng minh $\widehat{IDO} = \widehat{BCO}$ và ΔDOF cân tại O

d) Gọi P là giao BF và AO. Khi OA = 3R. Tính AP theo R.

Hướng dẫn

a) Vì AB và AC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác ABOC có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn

b) Ta có:

AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên A nằm trên đường trung trực cạnh BC (1)

OB = OC = R nên O nằm trên đường trung trực cạnh BC (2)

Từ (1)(2) suy ra AO là trung trực cạnh BC nên OA vuông góc BC

Xét tam giác OBE và tam giác BAE có:

$\widehat{BEO} = \widehat{AEB} = 90^0$; $\widehat{BOE} = \widehat{ABE}$ (cùng phụ góc $\widehat{OBE}$)

Suy ra $\Delta OBE \backsim \Delta BAE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{OB}{BA} = \dfrac{BE}{AE} \Rightarrow AE.BO = BE.AB$ (đpcm)

c) Xét tứ giác BDOI có: $\widehat{DBO} = \widehat{DIO} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh OD nên tứ giác BDOI nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{IBO}$ (góc nội tiếp chắn cung OI)

Tam giác OCB cân tại O (OC=OB=R) nên $\widehat{IBO} = \widehat{ICO}$ suy ra $\widehat{IDO} = \widehat{BCO}$ (3)

Xét tứ giác OIFC có: $\widehat{OIF}+\widehat{OCF}=180^0$ nên tứ giác OIFC nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{OCI}=\widehat{OFI}$ (góc nội tiếp chắn cung IC) (4)

Từ (3)(4) suy ra $\widehat{IDO}=\widehat{IFO}\Rightarrow \Delta DOF$ cân tại O

d) Ta có:

$AB=AC=\sqrt{OA^2-OB^2}=2\sqrt{2}.R$

$OE=\dfrac{OB^2}{OA}=\dfrac{R}{3}\Rightarrow EA=\dfrac{8R}{3};\ OI=\sqrt{OE^2+IE^2}=\dfrac{R.\sqrt{3}}{3}$

$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\dfrac{2\sqrt{2}.R}{3}$

Vì $\widehat{OAC}=\widehat{OCE}=\widehat{OFI}\Rightarrow \Delta OFI\backsim\Delta CAE\left(g.g\right)\Rightarrow\dfrac{OI}{CE}=\dfrac{OF}{CA}\Rightarrow OF=R.\sqrt{3}$

$\Rightarrow CF=\sqrt{OF^2-OC^2}=R.\sqrt{2}=\dfrac{AC}{2}\Rightarrow$ F là trung điểm AC nên BF là đường trung tuyến của tam giác ABC $\Rightarrow$ P là trọng tâm tam giác ABC nên $AP=\dfrac{2}{3}AE=\dfrac{2}{3}.\dfrac{8R}{3}=\dfrac{16R}{8}$

Bài 409. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AEF đến đường tròn (O) $(B,C,E,F\in(O)$, tia AF nằm giữa hai tia AO và AC, $\left(AE<AF\right)$. Gọi I là trung điểm EF.

a) Chứng minh các tứ giác $ABOC$ và $AOIC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔABE và ΔAFB đồng dạng từ đó suy ra: $BE.CF=CE.BF$

c) Qua I kẻ đường thẳng song song với CF cắt BC tại D, tia DE cắt AO tại K. Chứng minh tứ giác $KBOD$ nội tiếp đường tròn .

Hướng dẫn

a) Chứng minh các tứ giác $ABOC$ và $AIOC$ nội tiếp đường tròn:

+ Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=90^0+90^0=180^0$

mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

+ Vì I là trung điểm của dây $EF\Rightarrow OI\perp EF$ (quan hệ đường kính – dây cung)

Xét tứ giác $AOIC$ có $\widehat{AIO}=\widehat{ACO}=90^0$ mà đây là hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh OA nên tứ giác $AOIC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔABE và ΔAFB đồng dạng từ đó suy ra: $BE.CF = CE.BF$

Xét ΔABE và ΔAFB có:

góc $\hat{A}$ chung, góc $\widehat{BFA} = \widehat{EBA}$ (tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BE.)

Suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta AFB(g-g)$

Vì $\Delta ABE \backsim \Delta AFB(g-g) \Rightarrow \dfrac{BE}{FB} = \dfrac{AB}{AF}$.

Chứng minh tương tự: $\Delta ACE \backsim \Delta AFC(g-g) \Rightarrow \dfrac{CE}{FC} = \dfrac{AC}{AF}$

Mà $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên $\dfrac{BE}{BF} = \dfrac{CE}{CF} \Rightarrow BE.CF = CE.BF$.

c) Ta có:

$\widehat{EID} = \widehat{EFC}$ (đồng vị) mà $\widehat{EFC} = \widehat{DBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Nên $\widehat{EID} = \widehat{EBD} \Rightarrow$ tứ giác $EBID$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{EIB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Mà $\widehat{EIB} = \widehat{KOB}$ (vì 5 điểm A, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn nên đây là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BA)

Suy ra $\widehat{EDB} = KOB \Rightarrow BODK$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 369. Cho $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau . Trên đoạn AB lấy điểm M (khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai N . Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở điểm P . Chứng minh:

a) Tứ giác $OMNP$ nội tiếp b) Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành

c) Tích $CM.CN$ không phụ thuộc vào điểm M .

d) Khi M di chuyển trên AB thì P chạy trên một đoạn thẳng cố định.

e) Chứng minh khi M di động thì tâm đường tròn nội tiếp tam giác CND chạy trên một cung cố định.

Hướng dẫn

a) $\widehat{ONP}=\widehat{OMP}=90^0$ mà hai góc này kề đỉnh và cùng nhìn cạnh OP .

b) Ta có: $OMNP$ nội tiếp nên $\widehat{OPM}=\widehat{ONM}=\widehat{OCM}\Rightarrow\widehat{MOP}=\widehat{OMC}\Rightarrow OP//MC$.

mà $MP//OC$ nên $OCMP$ là hình bình hành.

c) $CM.CN=CO.CD=2R^2$.

d) Vì $MP//OD$ mà $MP=OC=OD$ nên $OMPD$ là hình chữ nhật, suy ra P chạy trên đoạn thẳng có độ dài $2R$, vuông góc OD tại D (đường nét đứt đậm)

e) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác NCD . Ta có:

$$\widehat{ICD}+\widehat{IDC}=\frac{1}{2}\widehat{NCD}+\frac{1}{2}\widehat{NDC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{NCD}+\widehat{NDC}\right)=45^0$$

$\Rightarrow\widehat{DIC}=135^0$ mà DC cố định $\Rightarrow I$ luôn chạy trên một cung tròn cố định.

Bài 370. Cho $(O;R)$ với đường kính AB cố định , EF là đường kính thay đổi . Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với (O) tại B . Nối AE và AF cắt d tại M và N , kẻ AD $\perp$ EF cắt MN tại I . Chứng minh:

a) Tứ giác AEBF là hình chữ nhật b) AE.AM=AF.AN c) IM = IN

d) Gọi H là trực tâm Δ MFN . Chứng minh khi đường kính EF thay đổi H luôn thuộc một đường tròn cố định

Hướng dẫn

a) AB và EF là đường kính nên $\widehat{AEB}=\widehat{EBF}=\widehat{FAE}=90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

b) Góc $\widehat{AEF}=\widehat{BAE}=\widehat{MNA}$ (cùng phụ góc M) nên $\Delta AEF \backsim \Delta ANM\,(g.g) \Rightarrow AE.AM = FA.AN$

c) Góc $\widehat{IAE}+\widehat{AEF}=90^0;\ \widehat{M}+\widehat{ANM}=90^0$ mà $\widehat{ANM}=\widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{IAE}=\widehat{M} \Rightarrow MI = IA$

$\widehat{IAE}=\widehat{M};\ \widehat{M}+\widehat{N}=90^0;\widehat{IAE}+\widehat{IAN}=90^0 \Rightarrow \widehat{IAN}=\widehat{N} \Rightarrow AI = IN$

Vậy I là trung điểm MN

d) Lấy C đối xứng B qua A suy ra C cố định.

MA là đường cao tam giác MFN. Từ F kẻ vuông góc MN cắt MA tại H suy ra H là trực tâm tam giác FNM.

Tứ giác ABEH là hbh nên HE=AB và HE//AB⇒HE=AC; HE//AC⇒CHEA là hình bình hành nên HC//AE $\Rightarrow \widehat{CHA}=\widehat{HAE}=90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính AC cố định .

Bài 371. Cho (O; R), AB là đường kính cố định. Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (O) tại B. MN là đường kính thay đổi của (O) sao cho MN không vuông góc với AB và M ≠ A, M ≠ B. Các đường thẳng AM, AN cắt đường thẳng (d) tương ứng tại C và D. Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của AI và MN. Khi MN thay đổi, CMR :

a) Tích AM.AC không đổi. b) Bốn điểm C, M, N, D cùng thuộc một đường tròn.

c) Điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

d) Tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác HIB luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) Chỉ ra $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow AM.AC = AB^2 = 4R^2$

b) Chỉ ra AMBN là hình chữ nhật nên $\widehat{AMN} = \widehat{ABN}$ mà $\widehat{ABN} = \widehat{D}$ (cùng phụ góc $\widehat{NBD}$) suy ra $\widehat{D} = \widehat{AMN} \Rightarrow CMND$ nội tiếp

c) AI là đường trung tuyến của tam giác vuông nên AI = IC= ID

$\widehat{IAC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \widehat{IAC} + \widehat{HMA} = \widehat{ICA} + \widehat{D} = 90^0$ (vì góc $\widehat{CAD} = 90^0$) nên AI vuông góc MN

Vì O, A cố định mà $\widehat{AHO} = 90^0 \Rightarrow$ H nằm trên đường tròn đường kính AO cố định.

d) Chỉ ra tứ giác BIHO nội tiếp nên tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIH là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IHOB suy ra J nằm trên đường trung trực cạnh OB cố định

Bài 372. Cho (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ AC, MB cắt CD tại I

a) Chứng minh tứ giác AMIO nội tiếp

b) Chứng minh góc $\widehat{MIC} = \widehat{MDB}$

c) Phân giác góc $\widehat{MOC}$ cắt MB tại N. Chứng minh CN vuông góc MB

d) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ AC để diện tích AMCB lớn nhất

Hướng dẫn

a) AB là đường kính nên $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMI} + \widehat{AOI} = 180^0$

b) Tứ giác MIOA nội tiếp nên $\widehat{MIC} = \widehat{OAM}$ mà $\widehat{OAM} = \widehat{MDB}$ (góc nt chắn cung MB)

c) $\widehat{CON} = \frac{1}{2}.\widehat{MOC} = \widehat{CBM}$ (tính chất góc nt và góc ở tâm)

nên tứ giác BCNO nội tiếp suy ra $\widehat{BNC} = \widehat{BOC} = 90^0$

d) $S_{AMCB} = S_{\Delta ACB} + S_{\Delta AMC} \Rightarrow S_{AMCB}$ lớn nhất khi $S_{\Delta AMC}$ lớn nhất

suy ra khoảng cách từ M tới AC lớn nhất nên M nằm chính giữa cung AC.

Bài 373. Cho (O;R), đường kính AB cố định, CD là đường kính di động. Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại B; các đường thẳng AC, AD cắt d lần lượt tại P và Q. AI trung tuyến của tam giác APQ

a) CM: $\widehat{PAQ} = 90^0$.

b) CM: CPQD nội tiếp c)AI $\perp$ CD.

d) Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác CPQD bằng 3 lần diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Vì CD là đường kính của (O) nên $\widehat{PAQ} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

b) Chỉ ra $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ mà $\widehat{ABD} = \widehat{Q}$ (cùng phụ góc $\widehat{DBQ}$) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{Q} \Rightarrow$ tứ giác PCDQ nội tiếp

Cách khác:

Chỉ ra $AC.AP = AD.AQ\left(= AB^2\right) \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta AQP\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{AQP}$

c) Gọi giao AI và CD là H.

Chỉ ra $AI = IP \Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{P} \Rightarrow \widehat{HAC} + \widehat{HCA} = \widehat{P} + \widehat{Q} = 90^0$

d) Ta có:

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC}$, để $S_{PCDQ} = 3S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta PAQ} = 4S_{\Delta ACD} \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta PAQ}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$ (tỉ số đồng dạng)

mà tam giác ACD đồng dạng tam giác AQP theo tỉ số $k = \dfrac{AC}{AQ} = \dfrac{BD}{AQ} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABQ$ vuông cân nên

đường kính CD vuông góc AB.

Bài 374. Cho (O;R) đường kính AB cố định. EF là đường kính di động, kẻ đường thẳng d tiếp xúc (O) tại B, AE và AF cắt d tại M và N.

a) AEBF là HCN.

b) Chứng minh AE.AM=AF.AN

c) Kẻ AD vuông EF tại D và cắt MN tại I, chứng minh I là trung điểm MN.

d) Tìm vị trí của EF để MN nhỏ nhất.

e) Gọi I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEFN. Chứng minh khi EF thay đổi thì I' chuyển động trên một đường thẳng.

f) Gọi H là trực tâm tam giác MFN. Chứng minh EF thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định

Hướng dẫn

a) AB và EF là đường kính nên $\widehat{AEB} = \widehat{EBF} = \widehat{BFA} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

b) $AE.AM = AF.AN = AB^2$

c) Chứng minh ở các bài trên

d) $MN = MB + BN \geq 2\sqrt{BM.BN} = 2\sqrt{AB^2} = 4R$. Dấu bằng xảy ra khi BN=BM hay tam giác ANM vuông cân tại A nên $\widehat{MAB} = 45^0 = \widehat{OEA} \Rightarrow$ EF vuông góc AB

e) I' là giao trung trực MN và trung trực EF. Ta có:

II'//AB (cùng vuông MN); AI//OI' (cùng vuông EF) nên tứ giác II'OA là hình bình hành, suy ra II' = OA = R $\Rightarrow I'$ nằm trên đường thẳng song song MN cách MN một khoảng bằng R.

f) MA vuông góc FN, kẻ đường thẳng qua F và vuông góc MN cắt MA tại H, suy ra H là trực tâm tam giác MFN.

Gọi C là điểm đối xứng B qua A suy ra C cố định. Chỉ ra ABFH là hình bình hành (có hai cặp cạnh song song) suy ra FH// AC và HF=AC nên $\widehat{AHC} = \widehat{HAF} = 90^0 \Rightarrow$ H nằm trên đường tròn đường kính AC.

Bài 375. Cho (O;R) hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, gọi K là trung điểm AD, CK cắt (O) tại E và cắt OA tại M.

a) Chứng minh MODE nội tiếp. b) Chứng minh: $CM.CE = 2R^2$ c) ED=3ED.

Hướng dẫn

a) Hai góc đối bằng 90^0

b) Tam giác CMD đồng dạng tam giác CDE.

c) M là trọng tâm tam giác ACD nên $OM = \frac{R}{3}$

Theo câu b: $\frac{CO}{CE} = \frac{MO}{ED}$ thay số suy ra đpcm.

Bài 376. Cho (O) hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm E thuộc OC, AE cắt (O) tại M.

a) OBME nội tiếp b) $AE.AM = AC^2$ c) Tìm vị trí E để $MA = 2MB$

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp CME, chứng minh khi E duy chuyển thì I thuộc đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) Có hai góc đối bằng 90^0

b) Tam giác AEC đồng dạng ACM(g.g)

c) MA=2MB mà $MA^2 + MB^2 = AB^2 \Rightarrow MB = \dfrac{2R\sqrt{5}}{5}$

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCEM suy ra góc $\widehat{CIE} = 2.\widehat{CME} = 2.\widehat{CBA} = 90^0$ mà CI=IE nên tam giác CIE vuông cân tại I nên góc $\widehat{CEI} = 45^0$. Suy ra I nằm trên BC

Bài 377. Cho (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B, dây CD vuông góc AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy E. Kẻ CK vuông góc AE tại K. DE cắt CK tại F.

a) Chứng minh AHCK nội tiếp. b) $AD^2 = AH.AB$ c) Tam giác ACF cân

Hướng dẫn

a) Có hai góc đối bằng 90^0 .

b) AB là đường kính nên góc $\widehat{ADB} = 90^0$

c) Ta có: EB//KC (cùng vuông AK) suy ra $\widehat{DFC} = \widehat{DEB}(đv); \widehat{BEC} = \widehat{ECK}(sole)$

mà $OB \perp CD \Rightarrow \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$, suy ra $\widehat{DEB} = \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{ECF}$

Trong tam giác cân EFC có EK là đường cao nên EK là trung trực FC. Vì A nằm trên EK nên tam giác AFC cân tại A.

Bài 378. Cho đường tròn (O) đường kính AB, đường kính CD không vuông góc AB, AC và AD cắt tiếp tuyến tại B của (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm AD

1) Chứng minh OINB nội tiếp

2) Chứng minh $AI.AN = 2R^2$

3) Chứng minh góc CDM = CNM

4) Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh AK vuông góc CD

5) Chứng minh khi CD thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

1) I là trung điểm AD nên OI vuông góc AD (tc đường kính dây cung)

2) $AI.AN = AO.AB$

3) góc $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \widehat{M}$ (cùng phụ MBC) nên tứ giác CMND nội tiếp

4) Tam giác AMN vuông, AK là trung tuyến nên $\widehat{KAM} = \widehat{M} = \widehat{ADC}$

mà $\widehat{ADC} + \widehat{DCA} = 90^0$ nên $\widehat{KAC} + \widehat{DCA} = 90^0$ suy ra AK vuông góc CD

5) Tứ giác DCMN nội tiếp nên tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MNC là tâm của CDMN

Dựng đường trung trực CD và NM cắt nhau tại P suy ra P là tâm đường tròn ngoại tiếp CMN.

Chỉ ra KPOA là hình bình hành nên P nằm trên đường thẳng song song MN cách MN một khoảng R

Bài 379. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định và CD là một đường kính thay đổi không trùng với AB. Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $BE.BF = 4R^2$.

b) Chứng minh tứ giác CEFD nội tiếp đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp CEFD. Chứng minh rằng tâm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

1. Ta có: DC là đường kính của (O) nên $\widehat{EAF} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

Tam giác vuông EAF có AB là đường cao nên áp dụng hệ thức lượng ta có:

$BE.BF = AB^2 = 4R^2$ (đpcm)

2. Ta có: $\widehat{DFB} = \widehat{DBA}$ (cùng phụ góc $\widehat{DBF}$)

mà $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (góc nt chắn cung AD) nên $\widehat{DFB} = \widehat{ACD}$

Xét tứ giác CEFD có: $\widehat{DCE} + \widehat{DFC} = \widehat{DCE} + \widehat{DCA} = 180^0$ suy ra CEFD nội tiếp đường tròn.

3. Gọi M là trung điểm FE, trung trực FE và trung trực CD cắt nhau tại I, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp CEFD.

Ta có: MI vuông góc EF (tính chất đường kính, dây cung)

AB vuông góc EF nên MI // AB (1)

góc $\widehat{ADC} = \hat{E}$ (vì CEFD nội tiếp) ; $\widehat{FAM} = \widehat{AFM}$ (vì AM = MF: Đường trung tuyến)

nên $\widehat{ADC} + \widehat{FAM} = \hat{E} + \hat{F} = 90^0$ (vì góc A vuông)

Suy ra AM vuông góc CD nên AM//OI (2)

Từ (1)(2) suy ra AOIM là hình bình hành nên MI = AO = R.

Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp CEFD nằm trên đường thẳng d, song song và cách tiếp tuyến (O) tại B một khoảng bằng R.

Bài 369. Cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') cắt nhau tại A,B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB) .Các đường thẳng AO và AO' cắt (O) tại hai điểm C,D và cắt đường tròn (O') tại E,F .Chứng minh :

a) Ba điểm C,B,F thẳng hàng b) Tứ giác CDEF nội tiếp

c) AB,CD,EF đồng quy d)A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE

e) MN là tiếp tuyến chung của (O) và (O') . Chứng minh AB đi qua trung điểm của NM

Hướng dẫn

a) $\widehat{ABF} = 90^0$; $\widehat{ABC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đtron) nên C, B, F thẳng hàng.

b) $\widehat{CDA} = 90^0$; $\widehat{AEF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đron) nên CDEF nội tiếp.

c) AB, CD, EF là 3 đường cao của tam giác CAF nên đồng quy.

d) Vì CDEF nội tiếp nên $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ (cùng chắn cung FE) (1)

Vì CDAB nội tiếp nên $\widehat{ACF} = \widehat{ADB}$ (cùng chắn cung AB) (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ADB}$ **(*)**

$\widehat{AED} = \widehat{AFC}$ (cùng chắn cung CD) **(3)**

$\widehat{AFC} = \widehat{AEB}$ (cùng chắn cung AB) **(4)**

Từ (3)(4) suy ra $\widehat{AED} = \widehat{AEB}$ **(**)**

Từ (*) và (**) suy ra A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE.

e) Gọi I là giao điểm AB và MN.

Xét tam giác AMI và tam giác MBI có:

góc I chung; góc BMI = góc IAM (t/c góc nt và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Suy ra $\Delta AMI \backsim \Delta MBI$ (g.g) nên $MI^2 = AI.BI$

Chứng minh tương tự $\Delta AIN \backsim \Delta NIB$ (g.g) nên $IN^2 = AI.BI$

Suy ra $MI^2 = NI^2$ hay MI=NI nên I là trung điểm NM.

Vậy AB đi qua trung điểm MN.

Bài 370. Cho hai đường tròn (O;R) và (O';r) (R>r) tiếp xúc ngoài tại C . Gọi AC, BC là hai đường kính của (O) và (O') . DE là dây cung vuông góc tại trung điểm M của AB . Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng DC với đường tròn(O') tại F . BD cắt (O') tại G . Chứng minh :

a) Tứ giác AEBD là hình thoi

b) Ba điểm B,E,F thẳng hàng

c) 4 điểm M,D,B,F thuộc một đường tròn

d) DF,EG,AB đồng quy

e) MF=1/2DE

g) MF là tiếp tuyến của (O').

Hướng dẫn

a) Vì OM vuông góc DE nên M là trung điểm DE (tc đường kính dây cung)

Mà M là trung điểm AB và DE vuông góc AB nên ADBE là hình thoi.

b) Ta có : CD vuông góc AD (góc nt chắn nửa đt) mà AD//EB (cmt) nên CD vuông góc với EB hay CF vuông góc EB (1)

mà CF vuông góc BF (vì F nằm trên đường tròn đường kính BC) (2)

Từ (1)(2) suy ra B, E, F thẳng hàng.

c) Xét tứ giác MDBF có : $\widehat{DMB} = \widehat{DFB} = 90^0$ (cmt)

mà hai góc này cùng nhìn cạnh DB nên tứ giác MDBF nội tiếp đường tròn.

Vậy M, D, B,F cùng thuộc một đường tròn.

d) Xét tam giác DEB có DF vuông EB ; BM vuông ED nên C là trực tâm tam giác.

nên EC vuông góc DB . Mà $\widehat{CGB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt) $\Rightarrow$ C, E, G thẳng hàng.

Vậy AB, DF, CG đồng quy tại C.

e) Xét tam giác vuông DEF có FM là đường trung tuyến nên MF = DE :2

f) Ta có : MF= MD (cmt) nên $\widehat{MFD} = \widehat{MDF}$

Vì O'F=O'B nên $\widehat{O'FB} = \widehat{O'BF}$

mà $\widehat{MDF} = \widehat{O'BF}$ (cùng phụ góc $\widehat{DEB}$) nên $\widehat{MFD} = \widehat{O'FB}$

Ta có : $\widehat{DFO'} + \widehat{O'FB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DFO'} + \widehat{MFD} = 90^0 \Rightarrow$ MF vuông góc FO' nên MF là tiếp tuyến của (O').

Bài 371. Cho hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc ngoài nhau tại A, một đường thẳng d quay quanh A (d khác IO) cắt (O) và (I) tại B, C.

1) Chứng minh OB//IC

2) Vẽ đường kính BD và CE của (O) và (I). Chứng minh A, D, E thẳng hàng

3) Tiếp tuyến tại C của (I) cắt BD tại F. Chứng minh DACF nội tiếp . Xác định tâm K của đường tròn

4) Khi d quay quanh A khi K di động trên đường nào

Hướng dẫn

1) Góc OBA = OAB = IAC = ICA suy ra ABO = ACI nên OB//CI

2) BD và CE là đường kính nên DA vuông góc BC, AE vuông góc BC suy ra A, E, D thẳng hàng

3) Tứ giác có hai góc đối tổng bằng 180.

Tâm K là trung điểm DC

4) OK là đường trung bình của tam giác DBC nên OK//BC suy ra OK vuông góc AD

Tương tự KI vuông góc AC nên APKQ là hình chữ nhật

Suy ra K nằm trên đường tròn đường kính OI.

Bài 372. Cho (O;R) và (O';R') cắt nhau tại A và B (R > R'). Cát tuyến CAD vuông góc AB (C thuộc (O); D thuộc (O'). Tia CB cắt (O') tại E, tia DB cắt (O) tại F.

a) Chứng minh: $\widehat{CAF} = \widehat{FAE}$ b) Chứng minh AB là phân giác góc $\widehat{EAF}$

c) Chứng minh CA.CD=CB.CE d) Chứng minh $CD^2 = CB.CE + DB.DF$

Hướng dẫn

a) Xét (O) ta có: $\widehat{CAF} = \widehat{CBF}$ (góc nt chắn cung CF)

Xét (O') ta có: $\widehat{DAE} = \widehat{DBE}$ (góc nt cùng chắn cung ED)

mà $\widehat{CBF} = \widehat{DBE}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{CAF} = \widehat{DAE}$ (đpcm)

b) Vì $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 90^0$ mà $\widehat{CAF} = \widehat{DAE}$ nên $\widehat{FAB} = \widehat{EAB}$. Vậy AB là phân giác góc EAF.

c) Xét tam giác CAE và tam giác CBD có: Góc C chung; $\widehat{CEA} = \widehat{CDB}\left(= \frac{1}{2} sđAB\right)$

nên $\Delta CAE \backsim \Delta CBD(g.g) \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CA.CD = CE.CB(đpcm)$

d) Chứng minh: $CD^2 = CB.CE + DB.DF$

Chứng minh tương tự câu c, $\Delta DBC \backsim \Delta DAF(g.g) \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DC}{DF} \Rightarrow DB.DF = DA.DC$

Suy ra $CB.CE + DB.DF = CA.CD + DA.DC = DC(CA + AD) = CD^2$ (đpcm)

Bài 373. Cho (O;R) và (O';2R) tiếp xúc trong tại A . Qua A kẻ 2 cát tuyến AMN và APQ với M , P thuộc (O) ,với NQ thuộc (O') . Tia O'M cắt (O') tại S , gọi H là trực tâm ΔSAO' . Chứng minh:

a) O' $\in$ (O) b) Tứ giác SHO'N nội tiếp c) NQ = 2MP.

Hướng dẫn

a) Ta có: O, O', A thẳng hàng mà O'A = 2R; OA=R nên O' thuộc (O).

b) ΔO'MA ∽ ΔO'IS nên góc O'SI= O'AM = O'NA.

c) O'M vuông AN nên M là trung điểm AN, tương tự P là trung điểm AQ nên MP là đường trung bình.

Bài 374. Cho (O_1) ,(O_2) tiếp xúc ngoài tại A . Một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1), (O_2) lần lượt tại B , C . Gọi M là trung điểm BC , tia BA cắt (O_2) tại D , CA cắt (O_1) tại E Chứng minh :

a) Δ ABC vuông b) AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

c) $\widehat{O_1MO_2} = 90^0$ d) $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}$

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\hat{O}_1$; $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\hat{O}_1 + \frac{1}{2}\hat{O}_2 = \frac{1}{2}(\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = 90^0$

⇒ Tam giác ABC vuông tại A.

b) Vì tam giác ABC vuông tại A nên MA=MB=MC (tính chất trung tuyến)

$\Rightarrow \Delta MBO_1 = \Delta MAO_1 (c.c.c) \Rightarrow \widehat{MAO_1} = \widehat{MBO_1} = 90^0 \Rightarrow$ MA là tiếp tuyến (O1) .

Mà (O1) và (O2) tiếp xúc tại A nên MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) Ta có: $\widehat{BMO_1} = \widehat{AMO_1}$; $\widehat{AMO_2} = \widehat{CMO_2}$ (tc hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên $\widehat{O_1MO_2} = \frac{1}{2}\widehat{BMC} = 90^0$

d) Vì $\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAE} = 90^0$ nên BE là đường kính (O1).

Tương tự CD là đường kính (O2).

mà BE//CD (cùng vuông BC) nên $\frac{BA}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AE.AD \Rightarrow S_{ABC} = S_{ADE}$

Bài 375. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A , kẻ tiếp tuyến chung Ax. Một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1) , (O_2) lần lượt tại các điểm B , C và cắt Ax tại điểm M . Kẻ các đường kính BO_1D và CO_2E.

a) CMR: M là trung điểm của BC b)CMR: ΔO_1MO_2 vuông

c) Chứng minh B , A , E thẳng hàng ; C , A , D thẳng hàng

d) Gọi I là trung điểm của DE . CMR đường tròn ngoại tiếp tam giác IO_1O_2 tiếp xúc với đường thẳng d

Hướng dẫn

a) BM=MC (cùng bằng MA)

b) góc $\widehat{MO_1A} + \widehat{MO_2A} = 90^0$

c) $\widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180^0$;

d) MO_1IO_2 là tứ giác nội tiếp mà MI là đường trung bình của hình thang BCED nên MI vuông BC.

Bài 376. Xét Δ ABC có các góc B, C nhọn. Các đường tròn đường kính AB và AC cát nhau tại điểm thứ hai H. Một đường thẳng d bất kì qua A lần lượt cắt hai đường tròn nói trên tại M, N. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MN

a) Chứng minh: H thuộc cạnh BC b) Tứ giác BCNM là hình gì? Tại sao?

c) Chứng minh bốn điểm A, H, P, Q thuộc một đường tròn.

d) Xác định vị trí của d để MN có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn

a) $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^0$

b) hình thang vuông.

c) PQ là đường trung bình nên PQ vuông NM. Suy ra $\widehat{PQA} = \widehat{AHP} = 90^0$

d) Vì MNCB là hình thang vuông nên MN ≤ BC. Vậy MN lớn nhất bằng BC khi d song song với BC.

Bài 377. Cho 3 điểm A,B,C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng d vuông góc AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kì , CM cắt d tại D, AM cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là N. DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P.

a) ABMD nội tiếp

b) CM.CD không phụ thuộc vào vị trí M.

c) APND là hình gì?

e) Trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) Có hai góc đối bằng 90.

b) CM.CD=CB.CA

c) Tứ giác PNMB nội tiếp nên $\widehat{BPN} = \widehat{BMA}$ mà $\widehat{BMA} = \widehat{BDA}$ nên $\widehat{BDA} = \widehat{BPN}$ suy ra APND là hình thang.

d) Gọi I là trung điểm AC, lấy K thuộc tia IC sao cho IO=3IK, suy ra K cố định. Ta có OM=3KG nên G chạy trên (K; OM/3)

Bài 378. Cho (O) và (O') cắt nhau tại A và H(O và O' nằm về hai phía A, H). Vẽ đường kính AOB và AO'C, đường thẳng d qua A cắt (O) tại M, cắt (O') tại N.

a) Chứng minh B, H, C thẳng hàng.

b) Khi d thay đổi thì tỉ số HM/HN không đổi.

c) Gọi I, K là trung điểm MN, BC. Chứng minh A, H, I, K cùng thuộc đường tròn.

d) Xác định vị trí d để diện tích tam giác HMN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt) nên $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^0$ hay B, H, C thẳng hàng.

b) $\widehat{AMH} = \widehat{ABH}$ (góc nt cùng chắn cung AH)

$\widehat{ANH} = \widehat{ACH}$ (góc nt cùng chắn cung AH). suy ra tam giác MNH đồng dạng BCA nên HM/HN=AB/ÂC không đổi.

c) $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt) nên MNCB là hình thang vuông mà IK là đường trung kình nên KI vuông góc MN.

Ta có: $\widehat{AHK} = \widehat{AIK} = 90^0$ suy ra A, H, I, K cùng thuộc đường tròn đường kính AK.

d) Vì tam giác HMN đồng dạng tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{HM}{AB}$ suy ra

$\frac{S_{HMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{HM}{AB}\right)^2$ $hay\ S_{HMN} = \left(\frac{HM}{AB}\right)^2 . S_{ABC}$

Để S_{HMN} lớn nhất thì HM lớn nhất, suy ra HM là đường kính. suy ra MAHB là hình chữ nhật nên MA//BH. Vậy đường thẳng d song song BC.

Bài 379. Cho hai đường tròn (O;R) và (O’;R’) tiếp xúc ngoài tại A (R=2R’). B thuộc đường tròn (O;R) sao cho AB=R. M thuộc cung lớn AB của (O;R) sao cho MA ≤ MB. Nối MA cắt (O’) tại N. Từ N kẻ đường thẳng song song AB cắt (O’) tại E cắt MB tại F.

a) Chứng minh tam giác AOM đồng dạng AO’N.

b) Chứng minh độ dài NF không đổi khi M chuyển động.

c) Chứng minh ABEF là hình thang cân.

d) Tìm vị trí M để diện tích ABFN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Tan giác O’AN và OAM cân nên $\widehat{O'NA} = \widehat{O'AN} = \widehat{OAM} = \widehat{OMA}$

b) Theo câu a suy ra $\frac{AM}{AN} = \frac{AO}{AO'} = 2$ hay $\frac{AM}{MN} = \frac{2}{3}$

Tam giác MNF có AB//NF nên $\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{NF} = \frac{2}{3}$ mà AB=R nên NF = 1,5R không đổi.

c) $\widehat{NO'A} = 2\widehat{NEA}$ (tính chất góc nt và góc ở tâm)

$\widehat{AOM} = 2\widehat{ABM}$ (tính chất góc nt và góc ở tâm). Mà $\widehat{NO'A} = \widehat{AOM}$ (câu a)

nên $\widehat{NEA} = \widehat{ABM} = \widehat{NFB}$ (hai góc so le).

Vậy ABFE là hình thang cân.

d) Kẻ AI vuông góc FN,

Vì tứ giác ABFN là hình thang nên dtABFN = (AB+FN).AI:2 = (R+1,5R).AI:2.

dtABFN lơn nhất khi AI lớn nhất. mà AI ≤ AI. Vậy AI lớn nhất bằng AN khi AM vuông góc NF hay AM vuông góc AB. Suy ra BM là đường kính của (O).

Bài 369. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là điểm chính giữa của cung AB, M là một điểm bất kì trên cung AC (M khác A và C). Đường thẳng BM cắt AC tại H. Kẻ HK vuông góc với AB (K thuộc AB).

a. Chứng minh tứ giác CBKH là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh CA là tia phân giác của $\widehat{MCK}$.

c. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh ΔECM là tam giác vuông cân.

Hướng dẫn

a) Vì AB là đường kính nên $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

Xét tứ giác HKBC có: $\widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác BKHC nội tiếp đường tròn.

b) Xét (O) có: $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (góc nt chắn cung MA)

Vì BKHC nội tiếp nên $\widehat{HCK} = \widehat{HBK}$ suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{ACK}$

Vậy AC là phân giác của góc $\widehat{MCK}$

c) Xét ΔECB và ΔMCA có:

$AC = AB$ (vì E nằm chính giữa cung AB)

$AM = EB$ (gt) và $\widehat{MAC} = \widehat{EBC}$ (góc nt chắn cung MC)

nên $\Delta ECB = \Delta MCA(c.g.c) \Rightarrow MC = CE$ và $\widehat{MCA} = \widehat{ECB}$

mà $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MCE} = 90^0$. Vậy ΔMCE vuông cân tại C.

Bài 370. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, lấy M thuộc OA (không trùng O, A). Vẽ đường thẳng d qua M vuông góc AB, trên d lấy N sao cho ON > R. NB cắt (O) tại C, Kẻ tiếp tuyến NE với (O) (E và A nằm cùng nửa mặt phẳng bờ d).

a) Chứng minh O, E, M, N cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh $NE^2 = NC.NB$

c) Gọi H là giao d và AC. Chứng minh $\widehat{NEH} = \widehat{NME}$

d) Chứng minh NF là tiếp tuyến của (O) (F là giao HE và (O).)

Hướng dẫn

a) Có $\widehat{NMO} = \widehat{NEO} = 90^0$

b) $\widehat{NEC} = \widehat{NBE}\left(= \frac{1}{2} sđ\, \overset{\frown}{EC}\right) \Rightarrow \Delta NEC \backsim \Delta NBE\left(g.g\right) \Rightarrow NE^2 = NC.NB$

c) Có $\Delta NCH \backsim \Delta NMB\left(g.g\right) \Rightarrow NC.NB = NH.NM \Rightarrow NE^2 = NH.NM$

$\Rightarrow \Delta NEH \backsim \Delta NME\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{NME}$

d) Ta có: $\widehat{FOE} = 2.\widehat{NEF}$ (tc góc ở tâm và góc tạo bởi tt)

mà $\widehat{NEH} = \widehat{NME} = \widehat{NOE} \Rightarrow \widehat{EON} = \widehat{FON} \Rightarrow F, E$ đối xứng nhau qua NO nên $\widehat{NEO} = \widehat{NFO} = 90^0$

Vậy NF là tiếp tuyến của (O).

Bài 371. Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Qua trung điểm H của OA kẻ đường thẳng Hx vuông góc AB cắt nửa đường tròn tại C. Kẻ dây CD//AB, kẻ DK vuông góc AB.

a) Tính góc ABC b) Tính độ dài CD theo R

Hướng dẫn

a) Chỉ ra $CO = AC = R \Rightarrow \Delta OCA$ đều nên $\widehat{CAB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 30^0$

b) Chỉ ra ΔOCD là tam giác đều nên $CD = OC = R$

Bài 372. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Kẻ tuyếp tuyến Bx với (O).Gọi C,D là các điểm di động trên (O) .Các tia AC,AD cắt Bx tại E,F (F nằm giữa B và E). Chứng minh

a) $\Delta ABF \backsim \Delta BDF$ b) Tứ giác CEFD nội tiếp

c) Khi C,D di động thì tích $AC.AE = AD.AF$ và không đổi.

Hướng dẫn

a) Góc $\widehat{BAF} = \widehat{DBF} = \frac{1}{2} sđBD \Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta BDF\left(g.g\right)$

b) $\widehat{CEF} = \widehat{CBA}\left(\text{cùng phu góc A}\right) = \widehat{CDA}\left(\text{ góc nt cùng chan cung AC}\right)$

c) $AC.AE = AD.AF = AB^2$

Bài 373. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, từ một điểm M trên nửa đường tròn kẻ MH vuông góc AB. Vẽ đường tròn (M;MH) . Từ A và B vẽ các tiếp tuyến với (M), gọi tiếp điểm theo thứ tự là C và D.

1. Chứng minh AB là tiếp tuyến của (M).
2. Chứng tỏ C,M,D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của (O).
3. Trong trường hợp CD cắt AB tại I. Chứng minh $\left(AC + BD\right)^2 = 4.IO.OH$
4. Xác định vị trí M trên (O) để AC.BD đạt GTLN.

Hướng dẫn

a) Ta có: AB vuông góc MH tại H nên AB là tiếp tuyến của $(M;MH)$.

b) Góc $\widehat{CMA} = \widehat{HMA}$; $\widehat{HMB} = \widehat{DMB}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $\widehat{HMA} + \widehat{HMB} = 90^0$ (vì AB là đường kính) nên suy ra C, M, D thẳng hàng.

Tứ giác ABDC là hình thang vuông mà MO là đường trung tuyến nên MO vuông góc CH tại M. Vậy CD là tiếp tuyến (O).

c) Ta có: $AC + BD = AH + HB = AB$ (1)

$\Delta MOI \backsim \Delta HOM\,(g.g) \Rightarrow HO.OI = O^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ hay $4OH.OI = AB^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

d) $AC.BD = AH.HB = MH^2$ nên AC.BD lớn nhất khi HM lớn nhất, suy ra M nằm chính giữa cung AB và $HM = R$.

Bài 374. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Dây CD quay quanh I cố định nằm trong (O) (I khác O). Vẽ AP vuông góc CD tại P, BS vuông góc CD tại S.

a) Chứng minh P, S nằm ngoài (O)

b) So sánh PC với DS.

c) Xác định vị trí của dây cung CD để $AP + BS$ đạt GTLN .

d) Xác định vị trí của dây cung CD để CD đạt GTNN.

Hướng dẫn

a) Các em chứng minh $OS = OP$.

Xét $CD//AB \Rightarrow APSB$ là hình chữ nhật nên $OP > OA = R \Rightarrow P,S$ nằm ngoài (O) .

Xét AB không song song CD, trong hai góc $\widehat{AOK},\widehat{KOB}$ luôn tồn tại một góc nhọn , giả sử góc $\widehat{KOA}$ là góc nhọn, suy ra $\widehat{PAO}$ là góc tù nên $OP > OA = R \Rightarrow P,S$ nằm ngoài (O).

b) Gọi K là trung điểm CD suy ra $CK = CD$ và OK vuông góc CD suy ra OK là đường trung bình của hình thang ABSP nên $KP = PS$. Mà $CK = KD \Rightarrow PC = DS$.

c) $AP + BS = 2OK$ (tính chất đường trung bình hình thang) mà $2OK \le 2OI$.

Vậy $(AP + BS)max = 2OI \Leftrightarrow CD \perp OI$.

d) $CD = 2CK = 2\sqrt{R^2 - OK^2}$ nên CD nhỏ nhất khi OK lớn nhất, suy ra dây CD vuông góc OI.

Bài 375. Cho 1/2(O) đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Ax,By . Từ C là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax , By tại E,F

a) Chứng minh FE=AE+BF

b) Gọi M là giao điểm OE với AC , N là giao điểm OF với BC . Tứ giác MCNO là hình gì ? Tại sao ?

c) Gọi D là giao điểm AF và BE Chứng minh CD//AE

d) Gọi DC giao AB tại H. Chứng minh D là trung điểm CH.

e) Chứng minh $EF.CD = EC.FB$

f) Khi C di chuyển trên (O) thì M,N di chuyển trên đường nào ?

g) Xác định vị trí của C để diện tích ΔOEF bé nhất ?

Hướng dẫn

a) Ta có: $AE = EC;\ FC = FB$ (tc 2 tiếp tuyến cắt nhau) nên $AE + BF = EC + CF = EF$ (đpcm)

b) Vì $AE = EC$ nên E nằm trên đường trung trực AC (1)

Vì $OA = OC = R$ nên O nằm trên đường trung trực AC (2)

Từ (1)(2) suy ra OE là trung trực AC nên OE vuông góc AC tại M

Tương tự OF vuông góc BC tại N

mà $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên tứ giác OMCN là hình chữ nhật.

(ngoài ra các em có thể nói tam giác OAC cân tại O mà OM là phân giác nên OM vuông góc AC….)

c) Vì AE//BF nên $\frac{DA}{DE} = \frac{AE}{BF} = \frac{EC}{CF} \Rightarrow \frac{DA}{DE} = \frac{EC}{CF} \Rightarrow CD//AE$ (Ta lét đảo)

d) CH // AE nên:

$$\frac{CD}{AE} = \frac{FD}{FA} = \frac{HB}{AB} = \frac{DH}{AE} \Rightarrow CD = DH$$

e) Ta có: $\widehat{EDC} = \widehat{EBF}\left(sole\right) \Rightarrow \Delta EDC \backsim \Delta EBF\left(g.g\right) \Rightarrow EF.CD = EC.FB$

f) Tam giác AOM vuông tại M nên M chạy trên nửa đường tròn đường kính OA.

Tam giác ONB vuông tại N nên N chạy trên nửa đường tròn đường kính OB.

g) Ta có:

$S_{OEF} = \frac{1}{2}OC.EF = \frac{R}{2}.EF$ nên diện tích tam giác OEF bé nhất khi EF bé nhất

Trong hình thang vuông AEFB có $EF \geq AB$. Dấu bằng xảy ra khi M nằm chính giữa cung AB.

Vậy $S_{OEFmin} = R^2$ khi M nằm chính giữa cung AB.

Bài 376. Cho 1/2(O) đường kính AB , M là một điểm trên nửa đường tròn . Hạ MH $\perp$ AB ,vẽ hai nửa đường tròn (I) đường kính AH,(K) đường kính BH nằm phía trong nửa (O) , cắt MA,MB tại P,Q . Chứng minh :

a) $MH = PQ$

b) PQ là tiếp tuyến chung của $(I),(K)$

c) $PQ^2 = AH.BH; MP.MA = MQ.MB$

d) Tứ giác APQB nội tiếp

e) Xác định vị trí của M để chu vi , diện tích tứ giác IPQK lớn nhất ?

Hướng dẫn

a) Xét (O) có AB là đường kính nên $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

Xét (I) có AH là đường kính nên $\widehat{APH} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt) $\Rightarrow \widehat{HPM} = 90^0$ (góc kề bù)

Xét (K) có HB là đường kính nên $\widehat{HQB}=90^0$ (góc nt chắn nửa đt) $\Rightarrow \widehat{HQM}=90^0$ (góc kề bù)

Xét tứ giác HPMQ có : $\widehat{HPM}=\widehat{PMQ}=\widehat{HQM}=90^0 \Rightarrow$ PMQH là hình chữ nhật nên $HM=PQ$ (đpcm)

b) Ta có : $PI=AI=IH$.

Gọi N là giao HM với PQ suy ra $PN=NH \Rightarrow \Delta PNI=\Delta HNI\left(c.c.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{NPI}=\widehat{NHI}=90^0$ nên PN là tiếp tuyến của (I)

Chứng minh tương tự NQ là tiếp tuyến (K) suy ra PQ là tiếp tuyến chung của (K); (I).

c) Ta có: $PQ^2=MH^2=AH.BH$

$$\begin{cases} PM.MA=MH^2 \\ MQ.MB=MH^2 \end{cases} \Rightarrow PM.MA=MQ.MB$$

d) Ta có :

$PM.MA=MQ.MB \Rightarrow \Delta MPQ \backsim \Delta MBA\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{MPQ}=\widehat{MBA}$

mà $\widehat{APQ}+\widehat{QPM}=180^0 \Rightarrow \widehat{APQ}+\widehat{MBA}=180^0 \Rightarrow$ APQB là tứ giác nội tiếp.

e) Ta có :

$C_{IPQK}=IP+PQ+QK+KI=2IK+PQ=AB+PQ=AB+MH$ nên chu vi IPQK lớn lớn nhất khi MH lớn nhất .

Trong tam giác vuông MHO có : $MH \le MO=R$ nên $MH_{max}=R$ khi M là trung điểm cung AB.

Ta có : $S_{IPQK}=\dfrac{\left(IP+QK\right).PQ}{2}=\dfrac{IK.MH}{2}=\dfrac{R.MH}{2}$.

Để diện tích IPQK lớn nhất thì MH lớn nhất, suy ra M nằm chính giữa cung AB.

Bài 377. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Ax,By . Từ M là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax , By tại C,D . Các đường thẳng AD,BC cắt nhau tại N . Chứng minh :

a) $CD=AC+BD$ b) MN//AC c) $CD.MN=CM.DB$

d) Điểm M nằm ở vị trí nào trên nửa đường tròn (O) thì $AC+BD$ nhỏ nhất?

Hướng dẫn

a)Ta có: $AC = CM$; $BD = MD$ (tc 2 tiếp tuyến cắt nhau) nên $AC + BD = CM + MD = CD$

b) Ta có: AC//BD (cùng vuông AB) nên $\frac{ND}{AN} = \frac{BD}{AC} = \frac{MD}{CM} \Rightarrow \frac{ND}{AN} = \frac{MD}{CM} \Rightarrow$ MN//AC (Talet đảo)

c) MN//BD nên $\frac{CM}{MN} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CM.BD = CD.NM$

d) $AC + BD = CD$ nên AC+BD nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất.

Xét hình thang vuông ACDB có $CD \le AB$. Dấu bằng xảy ra khi M nằm chính giữa cung AB.

Vậy $CD + AB = AB = 2R$ khi M nằm chính giữa cung AB.

Bài 378. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (O) (M khác A,B) . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax . Tia BM cắt Ax tại I , tia phân giác góc IAM cắt nửa đường tròn (O) tại E, cắt tia BM tại F . Tia BE cắt Ax tại H , cắt AM tại K . Chứng minh:

a) $IA^2 = IM.IB$ b) ΔBAF cân c) Tứ giác AKFH là hình thoi

d) Xác định vị trí của M để tứ giác AKFI nội tiếp một đường tròn

Hướng dẫn

a) Tam giác AIB vuông tại A mà AM là đường cao (AB là đường kính) nên $IA^2 = IM.IB$

b) $\begin{cases} \widehat{AFB} + \widehat{MAF} = 90^0 \\ \widehat{BAF} + \widehat{FAI} = 90^0 \end{cases}$ Mà $\widehat{MAF} = \widehat{FAI}$ Suy ra $\widehat{AFB} = \widehat{BFA}$

c) $\Delta EAH = \Delta EAK\left(cgv - gnk\right) \Rightarrow EH = EK$ (1)

ΔABF cân tại B nên $AE = EF$ mà AF vuông HK (2) (AB là đường kính)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

d) Vì KF//AH nên AIFK là hình thang, để AIFK nội tiếp thì AIFK phải là hình thang cân.

Suy ra $\hat{I} = \widehat{IAK}$ Mà $\begin{cases} \hat{I} + \hat{B} = 90^0 \\ \widehat{IAK} + \widehat{MAB} = 90^0 \end{cases}$ nên $\hat{B} = \widehat{MAB} = 45^0$

Vậy M nằm chính giữa cung AB.

Bài 379. Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB và 1 điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (O) (M khác A và B) đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại M cắt đường trung trực của AB tại I . (I) tiếp xúc với AB và cắt đường thẳng d tại C và D (D nằm trong $\widehat{BOM}$) Chứng minh:

a) OC , OD là các tia phân giác $\widehat{AOM}; \widehat{BOM}$ b) $CA \perp AB$, $DB \perp AB$ c) $AC.BD = R^2$

d) Tìm vị trí điểm M để tổng $AC + BD$ nhỏ nhất ? Tính giá trị đó theo R.

Hướng dẫn

a) $\widehat{COD} = 90^0$ (Vì DC là đường kính) nên $\widehat{COM} = \widehat{IDO}$ (cùng phụ $\widehat{CMO}$)

mà $\widehat{COA} = \widehat{IOD}; \widehat{IDO} = \widehat{IOD}$ nên $\widehat{COM} = \widehat{COA}$. Suy ra OC là phân giác $\widehat{AOM}$.

Chứng minh tương tự OD là phân giác $\widehat{MOB}$.

b) $\Delta CMO = \Delta CAO\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{CAO} = 90^0$

$\Delta MOD = \Delta BDO\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{OBD} = 90^0$

c) $AC.BD = CM.MD = MO^2 = R^2$.

d) Ta có: $AC + BD = CM + MD = CD$.

Mà ACDB là hình thang vuông nên $CD \le AB \Rightarrow AC + BD \le AB$.

Vậy $AC + BD$ nhỏ nhất bằng AB khi M nằm chính giữa cung AB.

Bài 380. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Lấy hai điểm M, N bất kì trên nửa đường tròn (M thuộc cung AN) (M, N khác A, B). Tia AM cắt tia BN tại K. Gọi P là giao AN và BM.

1) Chứng minh $MKNP$ nội tiếp

2) Chứng minh $KM.KA = KN.KB$

3) Gọi I là trung điểm KP. Chứng minh IN là tiếp tuyến của (O). Kẻ AE và BF vuông góc với NM. Cho $AE + BF = R\sqrt{3}$. Tính MN.

4) Tính diện tích lớn nhất của ΔKAB theo R khi M, N thay đổi trên nửa đường tròn thỏa mãn M nằm trên cung AN và $AE + BF = R\sqrt{3}$

Hướng dẫn

3) Kẻ OL vuông góc MN. Chỉ ra OL là đường trung bình của hình thang AEFB

suy ra $AE + BF = 2OL = R\sqrt{3} \Rightarrow OL = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Dựa vào tam giác vuông MLO tính $ML = \dfrac{R}{2} \Rightarrow MN = 2ML = R$

4) Dựa vào tam giác vuông IMO , biết $MO = R; ML = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} IO = \frac{2\sqrt{3}.R}{3} \\ MI = \frac{\sqrt{3}.R}{3} \end{cases} \Rightarrow IK = IP = IM = \frac{\sqrt{3}.R}{3}$

Gọi H là giao KP với AB

$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2}KH.AB = R.KH \Rightarrow S_{\Delta AKB\max} \Leftrightarrow KH\max$

Ta có: $KH = KI + IO \le KI + IO = R\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta AKB\max} = \sqrt{3}.R^2$

Dấu bằng xảy ra khi K, I, O thẳng hàng nên MN song song AB.

Bài 381. Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB và 1 điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (O) (M khác A và B) . Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O) . Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba với nửa đường tròn (O) cắt Ax và By tại C và D , OC cắt AM tại E , OD cắt BM tại F , AC = 4cm , BD = 9cm . Chứng minh :

a) $CD = AC + BD;\ \widehat{COD} = 90^0$ b) $AC.BD = R^2$ c) $EF = R$

d) Tính R ; $\sin\widehat{MBA}$, $\tan\widehat{MCO}$

e) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác ACDB nhỏ nhất

Hướng dẫn

a) $AC = MC$; $BD = DM$ (Tính chất tt cắt nhau) ;

Tứ giác FMEO là hình chữ nhật nên $\widehat{COD} = 90^0$

b) $AC.BD = MC.MD = OM^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông DOC)

c) Theo câu a suy ra $EF = OM = R$.

d) Theo câu b suy ra $R = 6cm$.

Pytago trong tam giác COA tính được $OC = 2\sqrt{13}cm$

$\sin\widehat{MBA} = \sin\widehat{COA} = \dfrac{AC}{OC} = \dfrac{4}{2\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan\widehat{MCO} = \dfrac{OM}{MC} = \dfrac{R}{AC} = \dfrac{3}{2}$

e) Ta có: ACDB là hình thang vuông nên $S_{ACDB} = \dfrac{(AC+BD).AB}{2} = \dfrac{DC.AB}{2} = DC.R$

nên S_{ACDB} nhỏ nhất khi DC nhỏ nhất suy ra DC//AB và M nằm chính giữa cung AB.

Bài 382. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Bán kính OC $\perp$ AB tại O , điểm E $\in$ OC . Nối AE cắt nửa đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến tại M cắt OC tại D , BM cắt OC tại K . Chứng minh :

a) ΔDME cân

b) $BM.BK$ không đổi khi E chuyển động trên OC

c) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME . Chứng minh khi E chuyển động trên OE thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) góc $\widehat{DMA} = \widehat{B}$ (góc nt vào góc tạo bởi tt)

góc $\widehat{DEM} = \widehat{AEM} = \widehat{B}$ (cùng phụ góc A) nên góc $\widehat{DMA} = \widehat{DEM}$ hay ΔDME cân tại D.

b) $\Delta ABM \backsim \Delta KBO\,(g.g) \Rightarrow BM.BK = OB.AB = 2R^2$.

c) Chỉ ra $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow OE = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2} \Rightarrow$ điểm E là trung điểm OC.

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AME .

góc $\widehat{CMA} = \widehat{B} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CIE} = 2\widehat{CME} = 90^0$ mà $IC = IE \Rightarrow \widehat{ECI} = 45^0$ (1).

C là điểm chính giữa cung AB nên góc $\widehat{OCB} = 45^0$ (2). Từ (1)(2) suy ra I nằm trên BC.

Bài 383. Cho nửa (O;R) đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Điểm E chuyển động trên đoạn BC , AE cắt cung BC tại H . Nối BH cắt AC tại K , KE cắt AB tại M . Chứng minh:

a) Tứ giác KCEH nội tiếp b) $\widehat{CHK}$ không đổi

c) Tìm vị trí của E để độ dài CM lớn nhất

d) Khi E chuyển động trên đoạn BC thì tổng $BE.BC + AE.AH$ không đổi

Hướng dẫn

a) Vì AB là đường kính nên $\widehat{ACB} = \widehat{AHB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EHK} = 90^0$ (hai góc kề bù) .

Xét tứ giác CKHE có : $\widehat{ECK} + \widehat{EHK} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên CKHE nội tiếp.

b) Vì C nằm chính giữa cung AB nên $\widehat{CAB} = 45^0$.

Vì ABHC nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{CAB} = 45^0$ (cùng phụ góc $\widehat{CHB}$)

c) Ta có : $CM \le BC$ Suy ra CM lớn nhất bằng CB khi E trùng B.

d) Các em chỉ ra $\Delta BEM \backsim \Delta BAC(g.g)$; $\Delta AEM \backsim \Delta ABH(g.g)$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} BE.BC = BM.AB \\ AE.AH = AM.AB \end{cases}$

$\Rightarrow BE.BC + AE.AH = BM.AB + AM.AB = AB(AM + MB) = AB^2$

Bài 384. Cho nửa (O;R) đường kính AB. C nằm chính giữa cung AB, trên cung AC lấy điểm F, trên BF lấy E sao cho $BE = AF$.

a) Tam giác AFC và BEC có quan hệ như thế nào?

b) Tam giác EFC vuông cân.

c) giao AC với tiếp tuyến tại B là D. Chứng minh BECD nội tiếp.

d) Chứng minh E chuyển động trên một cung tròn khi F thay đổi. Hãy xác định cung tròn và bán kính của cung tròn đó.

Hướng dẫn

a) AF=EB; AC=CB; $\widehat{FAC} = \widehat{CBF}$ nên hai tam giác bằng nhau.

b) Theo a thì $FC = CE$ mà $\widehat{ACE} + \widehat{ECB} = 90^0$ nên $\widehat{ACE} + \widehat{ACF} = 90^0$

c) Tam giác ABD vuông cân nên $\hat{D} = 45^0$ mà $\widehat{CEF} = 45^0$ nên $\hat{D} = \widehat{CEF}$

d) $\widehat{CEB} = 135^0$ mà dây CB cố định nên E chuyển động trên một cung tròn cố định.

Xác định cung và bán kính: Từ O kẻ đường thẳng vuông góc CB cắt DB tại I, suy ra IO là đường trung bình tam giác ABD nên I là trung điểm BD, suy ra $BI = IC$. Vậy I là tâm cung tròn, bán kính cung tròn là $BI = R$.

Bài 385. Cho điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) đường kính AB sao cho cung AC lớn hơn cung BC, đường vuông góc với AB tại O cắt AC tại D.

a) Chứng minh BCDO nội tiếp

b) $AD.AC = AO.AB$

c) Tiếp tuyến tại C cắt đường thẳng qua D và song song AB tại E. Chứng minh AC//OE.

d) Gọi H là hình chiếu C lên AB, chỉ ra cách xác định vị trí C để DH vuông AC.

Hướng dẫn

a) Hai góc đối bằng 90^0 .

b) $\Delta ADO \backsim \Delta ABC$.

c) Tứ giác DCEO nội tiếp nên góc $\widehat{DCO} = \widehat{DEO}$

mà $\widehat{DCO} = \widehat{OAD}$ (tam giác OAC cân) = $\widehat{CDE}$ (vì DE//AB) nên góc $\widehat{DEO} = \widehat{CDE}$.

d) HD vuông AC thì tam giác AHC vuông tại H có DH là đường cao nên AH^2 AC.AD mà

$AC.AD = AO.AB = 2AO^2 \Rightarrow AH = AO.\sqrt{2}$.

Tương tự nếu $AH = AO.\sqrt{2}$ thì HD vuông AC.

Các xác định C: xác định H thuộc AB sao cho $AH = AO.\sqrt{2}$.

Từ H kẻ vuông góc AB cắt (O) tại C.

Bài 386. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC, A thuộc đường tròn sao cho $AB > AC$, kẻ AH vuông BC, HE và HF vuông AB và AC.

a) Chứng minh AEHF là hình chữ nhật và OA vuông EF.

b) EF cắt (O) tại P và Q(E nằm nữa P và F). Chứng minh $AP^2 = AE.AB$ suy ra tam giác APH cân.

c) Gọi D là giao PQ và BC, AD giao (O) tại K. Chứng minh AEFK nội tiếp.

d) Gọi I là giao KF và BC. Chứng minh $HI^2 = IC.ID$.

Hướng dẫn

a) góc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$; góc $\widehat{FEA} = \widehat{AHF} = \widehat{C}$, mà $\widehat{C} + \widehat{B} = 90^0 \Rightarrow \widehat{FEA} + \widehat{EAO} = 90^0$.

b) $\Delta APE \backsim \Delta ABP$ (các góc nội tiếp bằng nhau) Chú ý cung $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{AQ}$.

nên $AP^2 = AE.AB$ (1)

$\Delta AEH \backsim \Delta AHB \Rightarrow AE.AB = AH^2$ (2). Từ (1)(2) suy ra $AP = AH$.

c) $DE.DF = DC.DB$ (ΔBED và ΔFCD có góc $\widehat{FCD} = \widehat{DEB}$)

$DC.DB = DK.DA$ suy ra $\Delta DEK \backsim \Delta DAE \Rightarrow \widehat{DKF} = \widehat{DEA}$

d) $AF.AC = AH^2$; $AK.AD = AH^2$ suy ra $AF.AC = AK.AD$ nên AFCD nội tiếp .

$CI.ID = IF.IK$ mà $IH^2 = IF.IK$ nên $IH^2 = CI.ID$

Bài 387. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điêm H cố định thuộc đoạn thẳng OA (H không trùng A và O). Đường thẳng qua H vuông góc OA cắt nửa đường tròn tại C, trên cung BC lấy D bất kỳ (D khác B, C) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt HC tại E. Gọi I là giao điểm AD và HC.

a) Chứng minh HBDI nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác DEI cân.

c) Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CID. Chứng minh góc ABF có số đo không đổi khi D thay đổi trên cung BC.

Hướng dẫn

a) Chứng minh HBDI nội tiếp.

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

Xét tứ giác HBDI có: $\widehat{IHB} + \widehat{BDI} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác HBDI nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh tam giác DEI cân.

Ta có: $\widehat{EID} = \widehat{AIH} = \hat{B}$ (cùng phụ góc A)

mà $\hat{B} = \widehat{ADE}$ (tính chất góc nt và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Suy ra $\widehat{EID} = \widehat{IDE}$ nên tam giác EID cân tại E.

c) Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CID. Chứng minh góc ABF có số đo không đổi khi D thay đổi trên cung BC.

Vì F là tâm đường tròn ngoại tiếp ICD nên CF=IF ,

suy ra $\widehat{ICF} = \widehat{CIF} = \dfrac{180^0 - \widehat{IFC}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{IFC}}{2}$ mà $\dfrac{\widehat{IFC}}{2} = \widehat{IDC}$ (góc nt chắn CI) = $\widehat{CBA}$ (góc nt chắn cung AC) nên $\widehat{ICF} = 90^0 - \widehat{CBA} = \widehat{HCB}$ suy ra CF trùng CB.

Vì A, B, H, O và C cố định nên $\widehat{HCB}$ không đổi. Vậy góc $\widehat{ABF}$ không đổi

Bài 451. Cho ΔABC vuông cân tại A nội tiếp (O;R) . Trong góc ABC vẽ tia Bx hợp với tia BA một góc 30^0 . Tia Bx cắt AC tại D và cắt (O) tại E. Gọi H là hình chiếu của A lên Bx.

a) Tam giác AHE là tam giác gì? Tại sao? b) Chứng minh góc $\widehat{EOH} = \widehat{ABE}$

c) Tính BD theo R.

d) Gọi F là hình chiếu của E xuống AB và EF cắt (O) tại M. Tính độ dài AM, ME, EC

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{ACB} = 45^0$ (góc nt chắn cung AB)

Suy ra tam giác AHE vuông cân tại H.

b) Vì Tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp (O) nên BC và đường kính và OA vuông góc BC.

Xét tứ giác AHOB có: $\widehat{AHB} = \widehat{AOB} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác AHOB nội tiếp nên $\widehat{AOH} = \widehat{ABH} = 30^0$

mà $\widehat{EOC} = 2\widehat{EBC} = 2.15^0 = 30^0$ (góc ở tâm và góc nt) nên $\widehat{EOH} = 30^0 = \widehat{ABE}$

c) Tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = AC = \dfrac{\sqrt{BC^2}}{2} = R\sqrt{2}$ (Pytago)

Trong tam giác vuông ABD có góc $\widehat{ABD} = 30^0$

nên $BD = \dfrac{AB}{\cos\widehat{ABD}} = \dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$

d) Tam giác AOE đều nên AE = R.

$$\widehat{FAE} = 75^0 \Rightarrow FA = AE.\cos 75^0 = R.\cos 75^0$$

Tứ giác AMEB nội tiếp nên $\widehat{FAM} = \widehat{ABE} = 30^0$

Xét tam giác vuông AFM có $\widehat{FAM} = 30^0$ nên $AM = 2AF = 2R.\cos 75^0$

Các em tự tính các đoạn còn lại.

Bài 452. Cho đường tròn (O) có dây BC cố định không đi qua tâm O. Điểm A chuyển động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kẻ đường cao BE và CF của tam giác ABC (E thuộc AC và F thuộc AB). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BCEF nội tiếp. B) EF.AB=AE.BC .

c) Độ dài đoạn thẳng EF không đổi khi A chuyển động.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác BCEF , ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ (gt) mà hai góc này cùng nhìn cạnh BC nên tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{BCA} = \widehat{EFA}$ (cùng bù góc $\widehat{BFE}$)

Xét tam giác AEF và tam giác ABC có: Góc A chung, $\hat{C} = \widehat{EFA}$ nên $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\left(g.g\right)$

Suy ra $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow EF.AB = BC.AE$ (đpcm)

c) Theo b ta có: $EF = BC.\dfrac{AE}{AB} = BC.\cos A$

Vì O cố định, dây BC cố định nên $\hat{A} = \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{BC}$ không đổi ,

Suy ra $EF = BC.\cos A$ không đổi.

Bài 453. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có 3 đường phân giác góc A, góc B, góc C cắt nhau tại I và cắt đường tròn tại D, E, F.

a) Chứng minh CI vuông DE. b) Chứng minh DI = DB = DC

c) Gọi M là giao AC và DE. Chứng minh MI//BC.

d) Gọi K là điểm đối xứng của I qua D. Chứng minh K là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Từ giả thiết ta có: $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$; $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EA}$; $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{AF}$

$$\widehat{EIC} + \widehat{IED} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BF} + sđ\overset{\frown}{CE}\right) + \frac{1}{2}sđBD = \frac{1}{2}\left(sdBF + sd\overset{\frown}{CE} + sd\overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$$

Vậy CI vuông góc ED.

b) Ta có: $\widehat{BID} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AE} + sd\overset{\frown}{BD}\right); \widehat{DBI} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{DC}$ mà cung BD = DC; cung AE = cung EC nên

$\widehat{BID} = \widehat{DBI}$ suy ra BD= DI. Mà D là điểm chính giữa cung BC nên DB=DC=DI (đpcm)

c) Vì cung DC = cung DB nên $\widehat{IAM} = \widehat{IEM}$ suy ra tứ giác AIME nội tiếp nên $\widehat{AMI} = \widehat{AEI}$

mà $\widehat{AEI} = \widehat{ACB}$ (góc nt chắn cung AB) nên $\widehat{AMI} = \widehat{ACB}$ suy ra IM // BC.

d) Theo b ta có: BD=DK=DI suy ra tam giác IBK vuông tại B nên BI vuông góc BK suy ra BK là phân giác ngoài góc B, mà KA là phân giác trong góc A nên K là tâm đường tròn bang tiếp tam giác ABC.

Bài 454. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O) . Gọi BB',CC' là các đường cao của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi E là điểm đối xứng của H qua BC ,F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC , Gọi G là giao điểm của AI và OH . CMR:

a) Tứ giác BHCF là hình bình hành b) E,F nằm trên (O)

c) Tứ giác BCFE là hình thang cân d) G là trọng tâm ΔABC

e) $AO \perp B'C'$.

Hướng dẫn

a) Có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) $\widehat{BAE} = \widehat{HCB}$ mà $\widehat{HCB} = \widehat{BHE}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{BCE}$ suy ra tứ giác ACEB nội tiếp hay E thuộc đường tròn (O).

$\widehat{BFC} = \widehat{BHC} = \widehat{C'HB'}$ mà $\widehat{C'HB'} + \hat{A} = 180^0$ nên $\widehat{BFC} + \hat{A} = 180^0$

hay tứ giác ACFB nội tiếp nên F thuộc (O).

c) $\widehat{FBC} = \widehat{HCB}$ (sole) mà $\widehat{HBC} = \widehat{BCE}$ nên $\widehat{BCE} = \widehat{FBC}$ (1)

$\widehat{BFE} = \widehat{BCE}; \widehat{CEF} = \widehat{CBF}$ mà $\widehat{BCE} = \widehat{FBC}$ nên $\widehat{CEF} = \widehat{BFE}$ (2)

Từ (1)(2) suy ra BEFC là hình thang cân.

d) Ta có: OI là đường trung bình của tam giác AHF nên OI//AH và AH = 2OI.

Vì OI//AH nên $\frac{AG}{GI} = \frac{AH}{IO} = 2$ mà AI là trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC.

e) Ta có: $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BC'B'C nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{AC'B'}$ (cùng phụ góc $\widehat{BC'B'}$)

$\widehat{BAF} = \widehat{BCF}$ (góc nội tiếp chắn cung BF)

mà $\widehat{ACB} + \widehat{BCF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AC'B'} + \widehat{BAF} = 90^0 \Rightarrow$ AO vuông góc với B'C'

Bài 455. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB .Chứng minh:

a) Khi cát tuyến MN di động , trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường cố định

b) Từ A kẻ tia Ax $\perp$ MN . Tia BI cắt Ax tại C . Chứng minh tứ giác BMCN là hình bình hành

c) Chứng minh C là trực tâm ΔAMN

d) Khi MN quay xung quanh H thì C di động trên đường nào

e) Cho $AB = 2R$, $AM.AN = 3R^2$; $AN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài tam giác AMN.

Hướng dẫn

a) OI vuông góc MN, Gọi K là trung điểm OH suy ra K cố định, mà IK=OK=KH (t/c trung tuyến) nên I nằm trên đường tròn đường kính OH.

b) I là trung điểm MN (1).

Trong tam giác ACB có IO//AC (cùng vuông MN) mà O là trung điểm AB nên I là trung điểm CB (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

c) NB vuông AN (vì AB là đường kính) mà CM//NB nên CM vuông AN. Vậy C là trực tâm.

d) IH là đường đường trung bình của tam giác OBC nên OC vuông góc Ax, suy ra C nằm trên đường tròn đường kính OA.

e) Từ giả thiết suy ra $AM = AN = R\sqrt{3}$ nên tam giác AMN cân tại A.

Dùng Pytago tính được $NB = R$ suy ra $\widehat{ABN} = 60^0$ hay $\widehat{AMN} = 60^0$ nên tam giác AMN đều.

$S_{\Delta AMN} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

Diện tích cần tính = diện tích hình tròn – diện tích tam giác AMN.

Bài 456. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O;R). Phân giác trong AD cắt BC tại D và cắt (O) tại E. Chứng minh:

a) $\Delta AEB \backsim \Delta ACD$ b) Chứng minh: DB.DC= DA.DE c) Chứng minh $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Hướng dẫn

a) $\widehat{BEA} = \widehat{DCA}$ (góc nt chắn BA) ; $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}\left(gt\right)$

b) $\widehat{BAD} = \widehat{ACE}$ (góc nt chắn BE) mà $\widehat{BDA} = \widehat{EDC}$ nên $\Delta ADB \backsim \Delta CDE\left(g.g\right) \Rightarrow DB.DC = DA.DE$

c) Các em chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta CED\left(g.g\right) \Rightarrow AB.AC = AD.AE$

$\Rightarrow AB.AC - DB.DC = AD.AE - AD.DE = AD\left(AE - DE\right) = AD^2$

Bài 457. Cho (O;R) đường kính AB, tiếp tuyến Bx của (O). Lấy C bất kì trên (O), AC cắt Bx tại S. Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC, BD cắt AS tại H. AD cắt BC tại N, cắt SB tại M.

a) Chứng minh CHDN nội tiếp.

b) Chứng minh $\Delta SAM \backsim \Delta SBH$

c) HNBS là hình gì ? Vì sao

d) Xác định vị trí của C để HNBS là hình thang cân.

Hướng dẫn

a) Chỉ ra $\widehat{HCN} + \widehat{HDN} = 180^0$

b) Góc $\widehat{SAM} = \widehat{MAB}$ (góc nt chắn hai cung bằng nhau) mà $\widehat{MAB} = \widehat{DBS}$ (góc nt và góc tạo bởi tt và dây cung) Suy ra $\widehat{SAM} = \widehat{HBS}$

c) Chỉ ra $\widehat{CHN} = \widehat{CDN} = \widehat{CBA} = \widehat{ASB} \Rightarrow HN//SB \Rightarrow HNBS$ là hình thang.

d) Theo c, HNBS là hình thang, để HNBS là hình thang cân thì $\widehat{NBS} = \widehat{HSB}$, mà ΔCBS vuông tại C nên $\widehat{NBS} = \widehat{HSB} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAS} = \widehat{BSA} = 45^0 \Rightarrow C$ nằm chính giữa cung AB.

Bài 458. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Vẽ đường kính BM của đường tròn tâm O.

a) Chứng minh tứ giác EHDB là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác AHCM là hình bình hành.

c) Cho số đo góc ABC bằng 60^0. Chứng minh BH = BO.

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác EHDB có: $\widehat{HEB} + \widehat{HDB} = 180^0$ mà hai góc này đối nhau nên tứ giác EHDB nội tiếp.

b) Vì MB là đường kính nên $\widehat{MAB} = \widehat{MCB} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn)

Suy ra AH//CM (cùng vuông CB) và MA//CH (cùng vuông AB)

Suy ra AHCM là hình bình hành.

c) Theo a, tứ giác EHBD nội tiếp nên $\widehat{BHE} = \widehat{BDE}$ (cùng chắn cung BE)

mà AEDC nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDE}$ (cùng bù góc $\widehat{EDC}$); mà $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (góc nt chắn cung BC)

nên $\widehat{BHE} = \widehat{BMC}$ mà $\widehat{BEH} = \widehat{HCM} = 90^0 \Rightarrow \Delta BHE \backsim \Delta BMC(g.g)$

$\Rightarrow \frac{BH}{BM} = \frac{BE}{BC} = \cos B = \frac{1}{2}$. Mặt khác $\frac{BO}{BM} = \frac{1}{2}$ nên BH=BO.

Bài 459. Cho tam giác ABC cân tại A có BC=6cm đường cao AH=4cm nội tiếp đường tròn (O;R) đường kính AA' .Kẻ đường kính CC', kẻ AK $\perp$ CC'

a) Tính R ? b)Tứ giác CAC'A' và AKHC là hình gì ? Tại sao?

c) Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài ΔABC ?

Hướng dẫn

a) Tam giác ACA' vuông tại C nên $CH^2 = AH.HA'$, với $CH = 3cm;\ AH = 4cm$.

Tính HA' rồi suy ra AA'. Đáp số: $R = \frac{25}{8}cm$

b) CAC'A' là hình chữ nhật (có 4 góc vuông) (hoặc hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau)

Chứng minh tứ giác AKHC nội tiếp nên $\widehat{KHA} = \widehat{KCA}$ mà $\widehat{KCA} = \widehat{HAC}$ (tam giác OAC cân tại O) nên $\widehat{KHA} = \widehat{HAC}$ suy ra HK//AC.

Các em có thể chứng minh 2 đường chéo bằng nhau (dựa vào tam giác OHC và OKH) hoặc chỉ ra hai góc ở đáy bằng nhau . Từ đó suy ra AKHC là hình thang cân

c) Diện tích cần tính = diện tích đường tròn – diện tích tam giác ABC (Phần màu vàng)

Đáp số: $S = 18,68cm^2$

Bài 460. Cho (O;R) đường kính BC, lấy A trên (O) sao cho $AB = R$.

1. Tính số đo góc A, B, C và cạnh AC theo R.

2. Đường cao AH của tam giác ABC cắt (O) tại D. Chứng minh BC là trung trực AD và tam giác ACD đều.

3. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt BC tại E. Chứng minh EA là tiếp tuyến (O).

4. Chứng minh $EB.CH = BH.EC$

Hướng dẫn

1. ΔABC có $\hat{A} = 90^0, AB = \frac{BC}{2}$ nên $\hat{C} = 30^0$; $\hat{B} = 60^0$. (Các em có thể chỉ ra tam giác OAB đều rồi tính)

2. AD vuông góc BC nên H là trung điểm AD suy ra BC là trung trực AD.

$\widehat{ACH} = 30^0$ nên $\widehat{ACD} = 60^0$ mà ΔADC cân tại C nên ΔADC là tam giác đều.

3. $\Delta EOA = \Delta EOD$ nên $\widehat{EAO} = 90^0 \Rightarrow$ EA là tiếp tuyến của (O).

4. Ta có: $\Delta EAD; \Delta ACD$ là tam giác đều. $EB = R;\ CH = 1,5R;\ EC = 3R;\ BH = \frac{R}{2}$ nên

$EB.CH = BH.EC = 1,5R^2$.

Bài 461. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O;R) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AA'. Gọi I là trung điểm BC.

a) Chứng minh BCEF nội tiếp

b) Chứng minh H, I, A' thẳng hàng

c) Chứng minh DH.DA = DB.DC

d) Cho BC cố định, A duy chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Tìm vị trí điểm A để diện tích tam giác AEF lớn nhất

Hướng dẫn

a) Tự cm

b) Chỉ ra BHCA' là hình bình hành .

c) Tam giác DBA đồng dạng DHC.

d) Tam giác AEF đồng dạng ABC theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{AE}{AB} = \cos A$ không đổi

Suy ra $S_{AEF} = S_{ABC}.\cos^2 A = \frac{1}{2}AD.BC.\cos^2 A$

Để diện tích AEF lớn nhất thì AD lớn nhất, suy ra A, O, D thẳng hàng hay A nằm chính giữa cung lớn BC.

Bài 462. Cho tam giác vuông ABC , vuông tại A , đường cao AH nội tiếp (O) , d là tiếp tuyến của (O) tại A . Các tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt d tại D và E

a) Tính $\widehat{EOD}$ b) Chứng minh : $DE = BD + CE$ c) Chứng minh : $BD.CE = R^2$

d) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE ?

Hướng dẫn

a) Vì CE, BD, ED là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{COE} = \widehat{EOA}; \widehat{AOD} = \widehat{DOB}$

mà $\widehat{AOB}$ là góc bẹt nên $\widehat{EOA} + \widehat{AOD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EOD} = 90^0$

b) Ta có:

EA=EC; AD=DB (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) nên $EC + BD = EA + DA = ED$

c) Ta có: $CE.BD = EA.AD = OA^2 = R^2$

d) Gọi G là trung điểm DE thì F là tâm đường tròn đường kính DE.

$OG = GE = GD$ (tc trung tuyến)

OG là đường trung bình của hình thang vuông CEDB nên OG vuông góc BC.

Suy ra BC là tiếp tuyến đường tròn đường kính DE.

Bài 463. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE . Chứng minh :

a) $ED = \frac{1}{2}BC$ b) DE là tiếp tuyến của (O) c) Tính DE biết $DH = 2cm$, $HA = 6cm$.

Hướng dẫn

a) Vì tam giác ABC cân nên D là trung điểm BC.

Xét tam giác vuông CEB có ED là trung tuyến nên $ED = \frac{1}{2}BC$

b) Vì $ED = DB$ nên $\widehat{DEB} = \widehat{DBE}$ (1)

Tam giác HEA vuông tại E nên tâm O là trung điểm AH,

$EO = OA = OH$ (tc trung tuyến tam giác vuông HEA) nên $\widehat{OEA} = \widehat{OAE}$ (2)

mà $\widehat{OAE} = \widehat{OBE}$ (cùng phụ góc $\hat{C}$) nên $\widehat{DEH} = \widehat{OEA}$

mà $\widehat{HEO} + \widehat{OEA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HEO} + \widehat{HED} = 90^0 \Rightarrow$ DE vuông góc EO nên DE là tiếp tuyến của (O).

c) Từ gt suy ra AD= 8cm.

$\Delta DEH \backsim \Delta DAE\left(g.g\right) \Rightarrow DE^2 = DH.DA = 16 \Rightarrow DE = 4cm$

Bài 464. Cho ΔABC cân tại A ,I là tâm đường tròn nội tiếp , K là tâm đường tròn bàng tiếp của góc A , O là trung điểm của IK . Chứng minh :

a) Bốn điểm B,I,C,K thuộc đường tròn tâm O b) AC là tiếp tuyến của (O)

c) Biết AB = AC = 20cm , BC = 24cm tính bán kính (O)

d) Tính phần diện tích giới hạn bởi cung nhỏ BC của (O) và hai cạnh AB, AC.

Hướng dẫn

a) BI là phân giác trong góc B, BK là phân giác ngoài góc B nên BI vuông góc BK. Tương tự, CI vuông góc CK.

b) $\widehat{ACI} = \widehat{ICB}$ (IC là phân giác)

$\widehat{ICB} = \widehat{IKC}$ (cùng phụ góc $\widehat{CIK}$)

$\widehat{IKC} = \widehat{KCO}$ (Vì OC=OK: Tính chất trung tuyến tam giác vuông)

nên $\widehat{OCA} = \widehat{OCI} + \widehat{ICA} = \widehat{OCI} + \widehat{OCK} = 90^0$

c) Gọi M là trung điểm BC, suy ra BM=12cm. Tam giác AOC vuông tại C nên:

$\frac{1}{MC^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{OC^2}$ Từ đó tính được OC =15cm.

d) Các em tính diện tích tứ giác *ABOC* rồi trừ đi diện tích hình quạt *OBC*

Bài 465. Cho ΔABC vuông tại A . Vẽ (A;AH) . Gọi HD là đường kính của (A) đó . Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA tại E . Gọi I là hình chiếu của A trên BE Chứng minh :

a) ΔBEC cân

b) AI = AH

c) BE là tiếp tuyến của (A;AH)

d) $BE = BH + DE$

Hướng dẫn

a) $\Delta AED = \Delta ACH$ (cgv-gnk) nên AC=AE. Mà AB vuông góc EC nên AB là trung trực EC. Suy ra BCE cân tại B.

b) Theo a suy ra $\widehat{CBA} = \widehat{EBA}$ Nên $\Delta AIB = \Delta AHB$ (ch-gn) $\Rightarrow AI = AH$

c) AI=AH nên I nằm trên (A) mà AI vuông góc BE nên BE là tiếp tuyến (A).

d) $EI = ED;\ IB = BH$ (tính chất tiếp tuyết cắt nhau) nên $BE = BH + DE$.

Bài 466. Cho hình vuông ABCD , điểm E trên cạnh BC . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE , đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC tại H, K . Chứng minh:

a) Tứ giác BHCD nội tiếp b) Tính $\widehat{CHK}$ c) $KC.KD = KH.KB$

d) Khi E di chuyển trên BC thì H di chuyển trên đường nào ?

Hướng dẫn

a) Góc $\widehat{DCB} = \widehat{DHB} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh DB nên tứ giác BHCD nội tiếp.

b) Vì BHCD nội tiếp nên $\widehat{CHD} = \widehat{CBD} = 45^0$ (đường chéo hình vuông)

c) Vì BHCD nội tiếp nên $\widehat{DBH} = \widehat{HCK}$ (cùng phụ góc $\widehat{DCH}$)

nên $\Delta KCH \backsim \Delta KBD(g.g) \Rightarrow KC.KD = KH.KB$

d) Vì $\widehat{DHB} = 90^0$ nên H chạy trên đường tròn đường kính BD.

Bài 467. Cho ΔABC vuông tại A . Trên cạnh AC lấy một điểm M , dựng (O) đường kính MC . Đường thẳng BM cắt (O) tại D . Đường thẳng AD cắt (O) tại S , BC cắt (O) tại E . Chứng minh:

a) Tứ giác ABCD nội tiếp , CA phân giác góc SCB

b) AB ,EM,CD đồng quy c) DM phân giác góc ADE

d) M là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE

Hướng dẫn

a) Vì MC là đường kính (O) nên $\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nt chắn nửa đt)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh BC nên ABCD nội tiếp.

Tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (góc nt chắn cung AB)

Tứ giác MCSD nội tiếp nên $\widehat{MCS} = \widehat{MDA}$ (cùng phụ góc $\widehat{MDS}$)

Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACS}$ nên AC là phân giác góc $\widehat{SCB}$

b) AB, EM, CD là 3 đường cao của tam giác BMC.

c) $\widehat{ADB} = \widehat{BDE}$ (Cùng bằng góc ACE)

d) Chỉ ra M là giao 3 phân giác dựa vào tính chất các góc nội tiếp.

$\widehat{ADM} = \widehat{ACB}$ (vì ADCB nội tiếp) mà $\widehat{ACB} = \widehat{MDE}$ góc nt chắn cung ME) nên $\widehat{ADM} = \widehat{MDE}$

Tương tự: $\widehat{DAM} = \widehat{MAE}$

Bài 468. Cho ΔABC vuông tại A . Trên cạnh AB lấy một điểm D . (O) đường kính BD cắt BC tại E . Đường thẳng CD , AE cắt (O) tại F , G . Chứng minh:

a) $\Delta ABC \backsim \Delta EBD$ b) Tứ giác ADEC ,AFBC nội tiếp

c) AC//FG d) AC,DE,BF đồng quy

Hướng dẫn

a) $\widehat{DEB} = \widehat{CAB} = 90^0$ Nên $\Delta ABC \backsim \Delta EBD$ (g.g)

b) BD là đường kính của (O) nên $\widehat{DEB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DEC} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác ADEC nội tiếp.

Ta có: $\widehat{CAB} = \widehat{CFB} = 90^0 \Rightarrow$ AFBC nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{GFD} = \widehat{GED}$ (góc nt chắn cung GD);

Vì ACED nội tiếp nên $\widehat{GED} = \widehat{DCA}$ (góc nt chắn cung AD)

Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{DFG}$ mà hai góc này ở vị trí sole trong nên FG//AC.

d) AC, DE, BF là 3 đường cao của tam giác BDC nên AC, DE, BF đồng quy.

Bài 469. Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH . Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại E , F , đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt BC tại I . Chứng minh:

a) Tứ giác AEHF là hình chữ nhật b) $AE.AB = AF.AC$ c) $IB = IC$

d) Nếu diện tích Δ ABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật AEHF thì ΔABC vuông cân

Hướng dẫn

a) AH là đường kính nên $\widehat{A} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^0$

b) Các em có thể chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$ hoặc chỉ ra $AE.AB = AF.AC$ vì cùng bằng AH^2

c) Theo câu b suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

mà $\begin{cases} \widehat{IAE} + \widehat{FEA} = 90^0 \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{B} \Rightarrow IA = IB$.

mà $\widehat{IAC} + \widehat{IAB} = \widehat{C} + \widehat{B} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{C} \Rightarrow IA = IC$. Vậy $IB = IC$

d) Vì $S_{\Delta ABC} = 2S_{AEHF} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta AEF} \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEF}} = 4$

mà $\Delta AEF \backsim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEF}} = \left(\dfrac{AB}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = 2$ nên E là trung điểm AB.

Mà HE là đường cao trong $\Delta AHB \Rightarrow \Delta AHB$ vuông cân nên $\widehat{B} = 45^0 \Rightarrow \widehat{C} = 45^0$.

Vậy ΔABC vuông cân.

Bài 470. Cho tam giác ABC nhọn có góc $\widehat{BAC} = 60^0$ nội tiếp (O;R). Đường cao BM và CN cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AK.

a) Chứng minh AMHN, BNMC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh BHCK là hình bình hành và H, D, K thẳng hàng (D là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC)

c) Tính AH theo R

Hướng dẫn

a) AMHN có hai góc đối bằng 90^0 .

BNMC có hai góc nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90^0.

b) BH//KC (cùng vuông AC); BK//HC (cùng vuông AB)

Vì OD vuông góc BC nên D là trung điểm BC.

Mà BHCK là hình bình hành nên H, D, K thẳng hàng.

c) Vì góc $\widehat{BAC} = 60^0$ nên $\widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BOD} = 60^0$

Trong tam giác vuông OBD có: $DO = OB.\cos 60^0 = \dfrac{R}{2}$

Vì OD là đường trung bình tam giác AHK nên $AH = 2OD = R$.

Bài 471. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) , P là điểm chính giữa cung AB (phần không chứa C,D) . Hai dây PC , PD cắt dây AB tại E , F . Hai dây AD , PC kéo dài cắt nhau tại I , dây BC , PD kéo dài cắt nhau tại K . CM:

a) $\widehat{CID} = \widehat{CKD}$ b) Tứ giác CDFE nội tiếp c) IK//AB

d) PA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAFD.

Hướng dẫn

a) Chỉ ra $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB} \Rightarrow \widehat{PDA} = \widehat{PCB} \Rightarrow CKID$ nội tiếp nên $\widehat{DIC} = \widehat{DKC}$

b) Ta có: $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AP} + sd\,\overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{BP} + sd\,\overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{PC} = \widehat{PDC}$ nên DFEC nội tiếp.

c) Tứ giác DIKC nội tiếp nên $\widehat{CIK} = \widehat{KDC} = \widehat{BEC} \Rightarrow AB//IK$

d) Ta có: $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$ (cùng chắn PB)

mà $\widehat{PDA} = \widehat{PCB} \Rightarrow \widehat{PDA} = \widehat{PAB} \Rightarrow AP$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔADF

Bài 472. Cho ba điểm A,B,C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A . Vẽ đường tròn (O) đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kỳ . Tia CM cắt d tại D . Tia AM cắt (O) tại điểm thứ hai là N ; Tia DB cắt (O) tại điểm thư hai là P : Chứng minh:

a) Tứ giác ABMD nội tiếp b) Tích CM.CD không phụ thuộc vào vị trí M

c) Tứ giác APND là hình gì ? tại sao ? d) Trọng tâm G của ΔMAC chạy trên 1 đường tròn cố định

Hướng dẫn

a) Ta có: $\widehat{BMC}=90^0$ (góc nt chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BMD}=90^0$ (hai góc kề bù)

Xét tứ giác ABMD có: $\widehat{BAD}+\widehat{BMD}=90^0+90^0=180^0$ mà đây là hai góc đối nhau nên tứ giác ABMD nội tiếp.

b) Xét ΔACD và ΔMCB có: $\widehat{CAD}=\widehat{CMB}=90^0;\hat{C}$ chung nên $\Delta ACD \backsim \Delta MCB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{MC}=\dfrac{CD}{CB}\Rightarrow MC.CD=AC.BC$ (không phụ thuộc vào vị trí M) đpcm.

c) Vì tứ giác ABMD nội tiếp nên $\widehat{ADP}=\widehat{AMB}$ (góc nt chắn cung AB)

Xét (O) có $\widehat{AMB}=\widehat{BPN}$ (góc nt chắn cung BN)

Suy ra $\widehat{ADP}=\widehat{BPN}$ mà hai góc này ở vị trí sole trong nên AD//NP nên APND là hình thang.

d) Gọi I là trung điểm AC suy ra I cố định, G là trọng tâm tam giác suy ra G nằm trên MI. Trên tia IO lấy điểm E sao cho $IE=\dfrac{1}{3}IO\Rightarrow$ E cố định.

Xét tam giác IMO có: $\dfrac{IG}{IM}=\dfrac{IE}{IO}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ GE// MO và $GE=\dfrac{1}{3}MO=\dfrac{1}{3}R$

Mà E cố định nên G chạy trên đường tròn tâm $\left(E;\dfrac{R}{3}\right)$.

Bài 473. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O) . Từ B và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) chúng cắt nhau tại D . Từ D kẻ cát tuyến song song với AB cắt (O) tại E , F và cắt AC tại I . Chứng minh:

a) $\widehat{DOC}=\widehat{BAC}$ b) Bốn điểm O, C, I, D cùng thuộc một đường tròn

c) IE = IF

d) Cho BC cố định , khi A di chuyển trên cung lớn BC thì I di chuyển trên đường nào ?

Hướng dẫn

a) Vì BD và CD là hai tiếp tuyến nên $\widehat{BOD} = \widehat{DOC} = \frac{1}{2} sđBC$

mà $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđBC$ (tc góc nội tiếp) nên $\widehat{DOC} = \widehat{BAC}$

b) Vì DF//AB nên cung AF = cung BE,

Ta có: góc $\widehat{EIC} = \frac{1}{2}\left(sđEC + sđFA\right) = \frac{1}{2}\left(sđEC + sđEB\right) = \frac{1}{2} sđBC = \widehat{COD}$

Xét tứ giác OICD có $\widehat{DIC} = \widehat{COD}$ mà hai góc này cùng nhìn cung DC nên OICD nội tiếp

Suy ra 4 điểm O, I, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

c) Vì OICD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OID} = \widehat{OCD} = 90^0$.

Suy ra OI vuông góc EF nên IE= IF.

d) Vì BC cố định, tâm O cố định nên D cố định.

Mà $\widehat{OID} = 90^0$ nên I chạy trên đường tròn đường kính OD.

Bài 474. Cho tam giác ΔABC vuông cân tại C , E là một điểm tuỳ ý trên cạnh BC . Qua B kẻ một tia vuông góc với AE tại H và cắt tia AC tại K . Chứng minh:

a) Tứ giác BHCA nội tiếp b) KC.KA = KH.KB

c) Tính $\widehat{CHK}$ d) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì BE.BC+AE.AH không đổi

Hướng dẫn

a) Xét tứ giác BHCA có : $\widehat{BHA} = \widehat{BCA} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác BHCA nội tiếp.

b) Vì BHCA nội tiếp nên $\hat{A} = \widehat{CHK}$ (cùng phụ góc $\widehat{CHB}$)

Xét ΔKAB và ΔKHC có: $\hat{A} = \widehat{CHK}; \hat{K}$ chung nên $\Delta KAB \backsim \Delta KHC(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KC}{KB} = \dfrac{KH}{KA} \Rightarrow KC.KA = HK.KB$ (đpcm)

c) Theo b ta có $\widehat{CHK} = \hat{A} = 45^0$ (vì tam giác ABC vuông cân tại C)

d) Kéo dài KE cắt AB tại F. Trong tam giác KAB có E là trực tâm tam giác nên KE vuông góc AB tại F.

$\Rightarrow \Delta EFB \backsim \Delta ACB(g.g) \Rightarrow \dfrac{EB}{AB} = \dfrac{FB}{BC} \Rightarrow EB.BC = AB.FB$ (1)

Tương tự : $AE.AH = AB.AF$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được :

$BE.BC + AE.AH = AB.FB + AB.FA = AB(FB + FA) = AB^2$ (không đổi) đpcm.

Bài 475. Cho (O;R) đường kính AB, điểm C thuộc cung AB sao cho AC < BC. Trên dây BC lấy D (D khác B, C). Tia AD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Kẻ DH vuông góc AB tại H (H thuộc AB).

a) Chứng minh tứ giác ACDH nội tiếp

b) Tia CH cắt đường tròn tại điểm thứ hai là K. Chứng minh EK//DH

c) Chứng minh HD là phân giác góc CHE

d) Chứng minh khi C chuyển động trên cung AB và thỏa mãn điều kiện đề bài thì đường tròn ngoại tiếp tam giác CHE luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn

a) Chỉ ra $\widehat{ACD} + \widehat{AHD} = 180^0$

b) Chỉ ra $\widehat{ACH} = \widehat{ADH}; \widehat{ACH} = \widehat{AEK}$ nên $\widehat{ADH} = \widehat{AEK}$

c) Chỉ ra $\widehat{CAE} = \widehat{CHD}; \widehat{DHE} = \widehat{DBE}$ mà $\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$

d) Chỉ ra góc $\widehat{OEH} = \widehat{OKH}; \widehat{OKH} = \widehat{OCH}$ nên $\widehat{OCH} = \widehat{OEH}$ suy ra tứ giác COHE nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác CHE luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 476. Cho Δ ABC cân tại A (góc A < 90^0) nội tiếp (O) . Một điểm M tuỳ ý trên cung nhỏ AC . Tia Bx vuông góc với AM cắt tia CM tại D . Chứng minh :

a) góc $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ b) ΔBMD cân

c) Khi M chạy trên cung nhỏ AC thì D chạy trên một cung tròn cố định và số đo $\widehat{BDC}$ không đổi

Hướng dẫn

a) Do tứ giác AMCB là tứ giác nội tiếp.

b) có MH vừa là đường cao vừa là phân giác.

c) Trong tam giác HDM có : $\widehat{BDC} = 90 - \widehat{HMD} = 90 - \widehat{ABC}$ mà góc $\widehat{ABC}$ không đổi nên góc $\widehat{BDC}$ không đổi. Vì BC cố định mà góc $\widehat{BDC}$ không đổi nên D luôn chạy trên cung tròn BC cố định.

Bài 477. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O) . Kẻ đường cao AD và đường kính AK . Hạ BE và CF cùng $\perp$ AK , cho góc $\widehat{ABC} = 60^0$ và R= 4cm . Chứng minh :

a) Tứ giác ABDE , ACFD nội tiếp b) DF//BK c) Tính $S_{quatOKC}$

d) Cho BC cố định , A chuyển động . Chứng minh tâm đường tròn ngại tiếp ΔDEF là một điểm cố định

Hướng dẫn

a) Các em tự làm.

b) Góc $\widehat{CAK} = \widehat{CBK}; \widehat{CAF} = \widehat{FDB}$ (vì AFDC nt) nên góc FDB=DBK mà hai góc này ở vị trí so le nên DF//BK.

c) góc $\widehat{B} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CBK} = 30^0 = \widehat{CAK} \Rightarrow \widehat{COK} = 2.\widehat{CAK} = 60^0$. Từ đó tính diện tích hình quạt.

d) Kẻ $IO \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC$\Rightarrow I$ cố định.

Chỉ ra $OIEB$ nội tiếp nên $\widehat{IEO} = \widehat{IBO}$

Mà ΔOCB cân nên $\widehat{IBO} = \widehat{ICO}$

Mà tứ giác $OCIF$ nội tiếp nên $\widehat{ICO} = \widehat{IFE}$

Suy ra $\widehat{IFE} = \widehat{IEF} \Rightarrow IE = IF$

Tứ giác $CDFA$ nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{DFK}$ mà $\widehat{IFK} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{DFI}$

Mà $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \widehat{FDI} \Rightarrow \widehat{FDI} = \widehat{DFI}$ suy ra $ID = IF$

Vậy $IF = IE = ID \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF .

Bài 478. Cho tam giác ABC vuông ở A, có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm 3 đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi A thay đổi.

Hướng dẫn

Vẽ (O;R) đường kính BC, AI cắt (O) tại D suy ra D nằm chính giữa cung BC và D cố định,

Gọi giao BI với (O) là K. Ta có: $D = R\sqrt{2}$.

$\widehat{BID} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BD} + sd\overset{\frown}{AK}\right)$; $\widehat{IBD} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{K}$; mà cung BD = DC; cung KC= cung KA nên $\widehat{IBD} = \widehat{BID}$ suy ra tam giác BID cân tại D nên $DI = DB = R\sqrt{2}$. Vậy I chạy trên $\left(D; R\sqrt{2}\right)$

Bài 479. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O;R) các đường cao AD , BE,CF cắt nhau tại H . Kẻ đường kính AA' . Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh :

a) Tứ giác BCEF nội tiếp b) Ba điểm H, I, A' thẳng hàng

c) $DH.DA = DB.DC$

d) Khi BC cố định , A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn . Tìm vị trí của A để $S_{\Delta EAH}$ lớn nhất

Hướng dẫn

a) Xét tứ gác BCEF có : $\widehat{CEB} = \widehat{CFB} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh BC nên tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn.

b) Vì AA' là đường kính nên $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = 90^0 \Rightarrow$ A'B//CH (cùng vuông AB) và BH//A'C (cùng vuông AC) $\Rightarrow$ BHCA' là hình bình hành mà I là trung điểm BC nên I là trung điểm HA'. Vậy H, I, A' thẳng hàng.

c) Xét tứ giác AFDC có : $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^0$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh AC nên tứ giác AFDC nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{FCD} = \widehat{FAD}$ (cùng chắn cung DF)

Xét ΔDHC và ΔDBA có: $\begin{cases} \widehat{DCH} = \widehat{BAD} \\ \widehat{CDH} = \widehat{ADB} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta DHC \backsim \Delta DBA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{DH}{BD} = \dfrac{DC}{DA} \Rightarrow DH.DA = DB.DC$ (đpcm)

d)Ta có: B, C, I, O cố định nên OI cố định, mà IO là đường trung bình của tam giác AHA' nên $AH = 2OI$ cố định.

Xét tam giác vuông AHE có:

$$S_{\Delta EAH} = \frac{AE.HE}{2} \le \frac{(AE+HE)^2}{8} \le \frac{2(AE^2+HE^2)}{8} = \frac{AH^2}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $AE = HE$ hay tam giác AEH vuông cân tại E

$$\Rightarrow \widehat{EAH} = 45^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^0$$

Vậy điểm A nằm trên (O) sao cho $\widehat{ACB} = 45^0$

Bài 480. Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O;R) các đường cao BH,CK cắt (O) tại D và E . Chứng minh:

a) 4 điểm B,H,C,K cùng thuộc một đường tròn b) DE//HK c) OA $\perp$ HK

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC

Hướng dẫn

a) $\widehat{BKC} = \widehat{BHC} = 90^0$

b) Các góc bôi đen trên hình bằng nhau.

c) Vì AKIH nội tiếp nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK là $\dfrac{AI}{2}$.

Gọi AP là đường kính, suy ra BICP là hình bình hành(hai cặp cạnh đối song song) nên OQ là đường trung bình tam giác AIP, suy ra $AI = 2OQ$ không đổi.

Bài 481. Cho (O;R) đường kính AB , M và N là hai điểm nằm trên cung AB theo thứ tự A,M,N,B . AB cắt AM tại S và BM cắt AN tại I . Chứng minh:

a) SI $\perp$ AB tại K b) $AM.AS = AK.AB$ c) $AM.AS + BN.BS = 4R^2$

d) Biết MN//AB và MN=R . Tính phần nằm ngoài (O)

Hướng dẫn

a) I là trực tâm tam giác SAB.

b) Tam giác AMB đồng dạng tam giác AKS.

c) Chỉ ra $AM.AS = AK.AB$; $BN.BS = BK.AB$ rồi cộng vế.

d) Các tam giác SAB; AMO; MON; ONB là các tam giác đều.

Diện tích phần gạch bằng $S_{SAB} - S_{AOM} - S_{CungMON} - s_{ONB}$

Bài 482. Cho ΔABC đều nội tiếp (O) đường kính AA' . Trên cạnh AB lấy điểm M và trên cạnh CA kéo dài lấy điểm N sao cho BM=CN , MN cắt BC tại I . Chứng minh :

a) ΔMA'N cân b) Tứ giác AMA'N , MBA'I nội tiếp c) I là trung điểm MN

Hướng dẫn

a) Tam giác $\Delta BMA' = \Delta CAN'$ (hai cạnh góc vuông).

b) Theo a thì $\widehat{BMA'} = \widehat{CNA'}$

c) Kẻ MK//AC suy ra tam giác BMK đều suy ra $\Delta MKI = \Delta CNI \Rightarrow MI = IN$

Bài 483. Cho Δ đều nội tiếp (O) , một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C tương ứng là M và N , và d cắt (O) tại E khác A , MC cắt BN tại F . Chứng minh:

a) $\Delta ACN \backsim \Delta MBA;\ \Delta MBC \backsim \Delta BCN$ b) Tứ giác BMEF nội tiếp

c) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi

Hướng dẫn

a) Góc $\widehat{ABM} = \widehat{CAN} = 60^0; MB//AC \Rightarrow \Delta ACN \backsim \Delta MBA(g.g);\ \Delta MBC \backsim \Delta BCN(c.g.c)$

b) góc $\widehat{MEB} = \widehat{ACB} = 60^0$ (3)

$\widehat{MFB} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = \widehat{FMB} + \widehat{FCB} = 60^0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra BMEF nội tiếp.

c) EF cắt BC tại P và cắt (O) tại Q

Ta có $\widehat{EFN} = \widehat{BMA}$; BFCQ là hình bình hành nên P là trung điểm BC . EF đi qua trung điểm P cố định của BC

Bài 484. Cho Δ ABC nội tiếp đường tròn tâm O , tia phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại E và cắt đường tròn tại M

a)CMR : OM $\perp$ BC

b)Dựng tia phân giác ngoài Ax của góc A . CMR : Ax đi qua một điểm cố định

c)Kéo dài Ax cắt CB kéo dài tại F . CMR : $FB.EC = FC.EB$

Hướng dẫn

a) AM là phân giác nên M nằm chính giữa cung BC.

b) Gọi Ax cắ (O) tại K, Vì M cố định mà $\widehat{MAK} = 90^0$ nên MK là đường kính.

c) Vì AM là phân giác trong và AF là phân giác ngoài góc A.

Bài 485. Cho một đường tròn đường kính AB , các điểm C , D ở trên đường tròn sao cho C , D không nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB đồng thời AD > AC. Gọi các điểm chính giữa các cung AC , AD lần lượt là M , N ; giao điểm của MN với AC , AD lần lượt là H , I ; giao điểm của MD với CN là K

a)CMR: $\Delta NKD; \Delta MAK$ cân b)CMR tứ giác MCKH nội tiếp . Suy ra KH // AD

c)So sánh góc CAK với góc DAK

Hướng dẫn

a) Tam giác NKD cân có hai góc đáy bằng nhau.

Ta có : AN=NK (cùng bằng ND) mà MN là phân giác góc $\widehat{ANK}$ nên MN là trung trực AK, suy ra tam giác MAK cân tại M.

b) $\widehat{NMD} = \widehat{ACN}$ suy ra tứ giác nội tiếp.

$\widehat{KHC} = \widehat{KMC} = \widehat{DAC}$

c) K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD nên $\widehat{CAK} = \widehat{DAK}$

Bài 486. Cho đường tròn (O;R) đường kính AB và một điểm M bất kỳ trên đường tròn . Gọi các điểm chính giữa của các cung AM , MB lần lượt là H , I . Các dây AM và HI cắt nhau tại K . Hạ $IP \perp AM$

a)Chứng minh góc HKM có độ lớn không đổi

b)Chứng minh IP là tiếp tuyến của (O;R)

c)Gọi Q là trung điểm của dây MB . Vẽ hình bình hành APQS . Chứng minh S thuộc đường tròn (O;R)

d)CMR khi M di động thì thì đường thẳng HI luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) $\widehat{HKA} = \frac{1}{2}\left(\overline{AH} + \overline{MI}\right) = \frac{1}{2}.\overline{HI} = \frac{1}{4}\overline{AB} = 45^0$ nên $\widehat{HKM} = 135^0$

b) $\widehat{HOI} = \overline{HI} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 90^0$ nên OEPI là hình chữ nhật, suy ra PI vuông góc OI

hay PI là tiếp tuyến (O).

c) Vì MPIQ là hình chữ nhật nên $\widehat{MPQ} = \widehat{IMP}$ mà: $\begin{cases} \widehat{MPQ} = \widehat{ISA} \\ \widehat{AMI} + \widehat{IMP} = 180^0 \end{cases}$

nên $\widehat{ISA} + \widehat{AMI} = 180^0$ suy ra AMIS là tứ giác nội tiếp nên S thuộc (O).

d) Gọi J là trung điểm HI, mà tam giác OHI vuông cân nên OJ vuông góc IH (1)

và $JO = JI = IH = \frac{HI}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (2) (các em dùng Pitago để tính HI theo OH và OI)

Từ (1)(2) suy ra IH luôn tiếp xúc với (O;OJ)

Bài 487. Cho ΔABC (AB = AC) , một cung tròn BC nằm bên trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB , AC tại B , C sao cho A và tâm của cung BC nằm khác phía đối với BC . Trên cung BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI , MH , MK xuống các cạnh tương ứng BC , CA , AB . Gọi giao điểm của BM , IK là P ; giao điểm của CM , IH là

a)CMR các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được .

b)CMR : $MI^2 = MH . MK$

c) CMR tứ giác IPMQ nội tiếp được . Suy ra PQ $\perp$ MI

d)CMR nếu KI = KB thì IH = IC

Hướng dẫn

a) Có hai góc đối bằng 90.

b) $\widehat{MKI} = \widehat{MBI} = \widehat{MCH} = \widehat{MIH}$; $\widehat{MIK} = \widehat{MBK} = \widehat{KCI} = \widehat{MHI}$

Tam giác MIK đồng dạng MHI.

c) $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{PIM} + \widehat{MIQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{MCI} + \widehat{MBI} = 180^0$

$\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ} = \widehat{MBC}$ nên PQ//BC hay PQ vuông góc MI.

d)Nếu KI=KB $\Rightarrow$ $\widehat{KBI} = \widehat{KIB} = \widehat{QPI} = \widehat{IMQ} = \widehat{IHC}$

$\Rightarrow$ $\widehat{ICH} = \widehat{KBI} = \widehat{IHC}$ $\Rightarrow$ ΔIHC cân tại I. $\Rightarrow$ IH = IC

Bài 488. Cho đường tròn (O;R) và một điểm A nằm trên đường tròn. Một góc xAy = 90^0 quay quanh A và luôn thoả mãn Ax, Ay cắt đường tròn (O). Gọi các giao điểm thứ hai của Ax, Ay với (O) tương ứng là B, C. Đường tròn đường kính AO cắt AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là M, N. Tia OM cắt đường tròn tại P. Gọi H là trực tâm tam giác AOP. Chứng minh rằng:

a)AMON là hình chữ nhật b.MN // BC

c. Tứ giác PHOB nội tiếp được trong đường tròn.

d. Xác định vị trí của góc xAy sao cho tam giác AMN_{MAX}

Hướng dẫn

a) Có 4 góc vuông.

b) Tam giác ABO cân mà OM là đường cao nên M là trung điểm AB, tương tự N là trung điểm AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC.

c) có $\widehat{OBH} = \widehat{OAH} = \widehat{HPO}$

d) Vì $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{AMON}$ mà S_{AMON} là hình chữ nhật nên S_{AMON} có diện tích lớn nhất khi nó là hình vuông, suy ra tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 489. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ trung tuyến AM, phân giác AD của góc BAC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại P và cắt AC tại Q.

a) Chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{PQM}; \widehat{BPD} = \widehat{BMA}$

b)Chứng minh BD.AM = BA.DP.

c)Giả sử $BC = a;\ AC = b;\ BD = m$. Tính tỉ số $\frac{BP}{BM}$ theo a, b, m.

d) Gọi E là điểm chính giữa cung PAQ và K là trung điểm đoạn PQ. Chứng minh ba điểm D, K, E thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) $\widehat{BAM} = \widehat{PQM}$ (góc nt cùng chắn cung MP)

$\widehat{BPD} = \widehat{BMA}$ (vì $\widehat{DPA} = \widehat{DMA}$ góc nt cùng chắn cung DA)

b) Theo câu a suy ra tam giác BDP đồng dạng BAM (g.g) suy ra BD.AM = BA.DP

c) Dùng tính chất phân giác suy ra :

$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AB}$ hay $\frac{a-m}{b} = \frac{m}{AB}$ suy ra $AB = \frac{mb}{a-m}$

tam giác BDP đồng dạng BAM nên $\frac{BP}{BM} = \frac{DB}{AB}$ các em tự thay BD và BA vào.

d) Ta có : EK vuông góc PQ, mà AD là phân giác góc A nên cung QD=DP suy ra DK vuông góc QP. Vậy E, K, D thẳng hàng.

Bài 490. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn, P là một điểm trên cung nhỏ AC (P khác A và C). AP kéo dài cắt đường thẳng BC tại M.

a) Chứng minh: $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$.

b) Chứng minh $AB^2 = AP.AM$.

c) Giả sử hai cung AP và CP bằng nhau, Chứng minh AM.MP = AB.BM.

d) Tìm vị trí của M trên tia BC sao cho AP = MP.

e) Gọi MT là tiếp tuyến của đường tròn tại T, chứng minh AM, AB, MT là ba cạnh của một tam giác vuông.

Hướng dẫn

a) Tứ giác APCB nt nên $\hat{B} = \widehat{CPM}$

Vì $\hat{M} + \widehat{MPC} + \widehat{MCP} = 180^0; \widehat{BCA} + \widehat{ACP} + \widehat{PCM} = 180^0; \widehat{BCA} = \widehat{CPM}$

nên $\hat{M} = \widehat{ACP} = \widehat{ABP}$

b) Theo câu a suy ra tam giác ABM đồng dạng APB.

c)AP=PC nên BP là phân giác góc B suy ra $\frac{PM}{BM} = \frac{AP}{AB}$ mà $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AM}$ (câu b)

nên $\frac{PM}{BM} = \frac{AB}{AM}$ nên PM.AM=BM.AB.

d) Theo câu b : $AB^2 = AP.AM$ mà $AM = 2AP$ nên $AB^2 = 2.AP^2$ suy ra $AP = PM = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$

Hay $AM = \sqrt{2}$.

Theo câu c : $AM.MP = AB.BM$ hay . $\sqrt{2}.\frac{AB\sqrt{2}}{2} = AM.BM \Rightarrow BM = AB$

Bài 491. Cho (O) và dây AB, gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB, C là điểm nằm giữa đoạn AB, tia MC cắt (O) tại D.

a) Chứng minh $MA^2 = MC.MD$

b) $MB.BD = BC.MD$

c) Đường tròn ngoại tiếp BCD tiếp xúc MB tại B.

d) Tổng hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp BCD và ACD không đổi khi C chạy trên AB.

Hướng dẫn

a) $\widehat{MCA} = \frac{1}{2}(sđMA + BD) = \frac{1}{2}(MB + BD) = \widehat{MAD}$ Nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$

b) $\widehat{MDB} = \widehat{MBC}$ nên $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$

c) Ta thấy : góc CDB = góc CBM (góc chắn bởi dây cung và tiếp tuyến băng góc nội tiếp chắn cung đó) nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tiếp xúc với MB tại B vì có MB là tiếp tuyến tại B

d) hinh như đề phải là C di động trên AB thì phải.

gọi R1,R2 là bán kính các đường tròn (O1), (O2) ngoại tiếp các tam giác BCD và ACD ; đặt x=1/4 sđ cung AB

Áp dụng định lí sin trong tam giác:

R1=CB/(2.sin(góc BDC))=CB/(2.sin x) ;

R2=CA/(2.sin(góc ADC))=CA/(2.sin x)

=> R1+R2=(CB+CA)/(2.sin x)=AB/(2.sin x)

Vì A,B cố định nên AB không đổi và x ko đổi

Vậy khi C di động trên AB thì các đường tròn (O1), (O2) ngoại tiếp các tam giác BCD và ACD có tổng bán kính không đổi.

Bài 492. Cho đoạn AB và P nằm giữa A,B. Trên nửa mp bở AB kẻ Ax, By vuông góc AB, trên đó lần lượt lấy C và D sao cho: AC.BD=AP.PB.

a) Chứng minh tam giác ACP đồng dạng BPD.

b) Chứng minh $\widehat{CPD} = 90^0$ từ đó suy ra cách dựng C, D.

c) Gọi M là hình chiếu của P lên DC, chứng minh $\widehat{AMB} = 90^0$

d) Khi C và D thay đổi, chứng minh M chạy trên đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) AC.BD= AP.PB và $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$

b) Theo a suy ra $\widehat{CPA} = \widehat{PDB}$ mà $\widehat{PDB} + \widehat{DPB} = 90^0$ nên $\widehat{CPA} + \widehat{DPB} = 90^0$

c) Dựa vào tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{MCP} = \widehat{MAP}; \widehat{MDP} = \widehat{MBP}.$ mà $\widehat{MAP} + \widehat{MBD} = 90^0$ nên

$\widehat{MCP} + \widehat{MDP} = 90^0$

d) Vì $\widehat{AMB} = 90^0$ nên M chạy trên đường tròn đường kính AB.

Bài 493. Cho tam giác ABC cân tại A (A<90) nội tiếp (O). M tùy ý trên cung nhỏ AC, tia Bx vuông góc AM cắt CM tại D,

a) $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ b) Tam giác BMD cân.

c) Chứng minh khi M di động thì D chạy trên một cung tròn cố định và độ lớn $\widehat{BDC}$ không đổi.

Hướng dẫn

a) $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (vì ABCM nội tiếp)

b) $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{AMD} = \widehat{AMB}$

c) Ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{MBD} = 90^0 - \widehat{AMB} = 90^0 - \widehat{ACB}$ không đổi nên D cung BC.

Bài 494. Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A,B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E, CD và AE cắt đường tròn tại F,G.

a) Tam giác ABC đồng dạng EBD. b) ADEC, AFBC nội tiếp.

c) AC//FG d) AC, BE, DF đồng quy.

Hướng dẫn

a)

a) Tam giác ABC đồng dạng EBD(g.g)

b) $\widehat{DAC} = \widehat{DEC} = 90^0; \widehat{CFB} = \widehat{CAB} = 90^0$

c) $\widehat{DFG} = \widehat{DEG} = \widehat{DCA}$.

d) AC, BE, DF là 3 đường cao của tam giác BDC.

Bài 495. Cho (O;R) đường kính AB cố định, M là trung điểm OB, dây CD vuông góc AB tại M . E chuyển động trên cung lớn CD, AE cắt CD tại K, BE cắt CD tại H.

a) B,M,E,K thuộc một đường tròn. b) AE.AK không đổi.

c) Tính theo R diện tích hình quạt giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC.

d) Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp BHK luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E chuyển động.

Hướng dẫn

a) $\widehat{BMK} = \widehat{BEK} = 90^0$

b) $AE.AK = AM.AB = 1,5R.2R = 3R^2$ không đổi.

c) Trong tam giác OMC vuông tại M mà $OC = R;\ OM = 0,5R$ nên $\widehat{MOC} = 60^0$

Từ đó tính diện tích hình quạt.

d) Gọi F là điểm đối xứng của O qua B suy ra F cố định.

Tam giác AKF cân tại K (có KM vừa là đường cao- trung trực) nên $\widehat{KAM} = \widehat{KFM}$ mà $\widehat{KAM} = \widehat{KHE}$ (do tứ giác AMHE nội tiếp) nên $\widehat{KHE} = \widehat{KFM}$ suy ra tứ giác BHKF nội tiếp suy ra tâm của đường tròn ngoại tiếp tm giác KHN luôn nằm trên đường trung trực BF.

Bài 496. Cho (O;R) đường kính AB, M thuộc đường tròn, H là điểm chính giữa cung AM, BH cắt AM tại I. Tiếp tuyến nửa đường tròn tại A cắt BH tại K, AH cắt BM tại E.

a) Chứng minh tam giác ABE cân và KH.KB=KE^2.

b) đường tròn tâm B bán kính BA cắt AM tại N. Chứng minh BIEN nội tiếp.

c) Tìm vị trí M để góc $\widehat{MKA} = 90^0$.

Hướng dẫn

a) Tam giác ABE có BH vừa là đường cao (Vì AB là đường kính) vừa là đường phân giác (Vì cung AH=HM) nên tam giác ABE cân tại B.

b) $\widehat{EBA} = 2\widehat{ENA}$ (tính chất góc nt và góc ở tâm)

Mà $\widehat{EBA} = 2\widehat{MBH}$ (Vì cung $\overset{\frown}{AM} = 2\overset{\frown}{HM}$) nên $\widehat{EBI} = \widehat{ENI}$ suy ra BNEI nội tiếp.

c) Gọi hạ MP vuông góc AB suy ra MK//AB và MK = AP nên $\widehat{MKB} = \widehat{ABK} = \widehat{MBK}$

ΔBMK cân tại M $\Rightarrow MB = MK = AP = x$

Tam giác AMB vuông tại M đường cao MP nên có hệ thức

$MB^2 = AB.BP = AB(AB - AP) = 2R(2R - x) \Leftrightarrow x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0 \Rightarrow x$

Bài 497. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} > 90$; $AC > AB$). Gọi I, K là trung điểm AB, AC. Đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D. Tia BA cắt (K) tại E, CA cắt (I) tại F.

a) Chứng minh B, C, D thẳng hàng. b) Chứng minh BFEC nội tiếp.

c) DA; BF; CE đồng quy

d) H là giao điểm thứ 2 của DF với đường tròn ngoại tiếp AEF. So sánh đoạn DH; DE.

Hướng dẫn

a) Góc $\widehat{ADC} = 90^0; \widehat{ADB} = 90^0$ (vì AC, AB là đường kính)

suy ra $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^0$ nên B, C,D thẳng hàng.

b) Góc $\widehat{BFA} = 90^0; \widehat{AEC} = 90^0$ (vì AB,AC là đường kính)

suy ra $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow$ BFEC nội tiếp.

c) DA; BF; CE là 3 đường cao của tam giác ABC nên DA; BF; CE đồng quy

d) Góc $\widehat{FHE} = \widehat{CAE}$ (vì AEHF nt) (1)

$\widehat{DEH} = \widehat{DEA} + \widehat{AEH} = \widehat{DCA} + \widehat{AFD} = \widehat{DCA} + \widehat{ABD} = \widehat{CAE}$ (2)

Từ (1)(2) suy ra tam giác DHE cân nên DH=DE.

Bài 498. Cho tam giác ABC vuông A($AB > AC$). đường cao AH, đường tròn (C; CA) cắt AH tại D. Đường thẳng qua H song song AB cắt cung nhỏ AD của (C) tại E, BE cắt (C) tại F, cắt AD tại I. K là trung điểm AF.

a) Chứng minh BD là tt của (C). b) BACD nt.

c) BE.BF=BH.BC. d) C, I , K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Vì BC là trung trực AD nên $\Delta ABC = \Delta DBC(c.c.c) \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$

b) Có hai góc đối bằng 90.

c) Chứng minh BE.BF=BH.BC (cùng bằng AB^2).

d) Từ tỉ số câu c suy ra tam giác BHE đồng dạng BFC nên Góc $\widehat{F_1} = \widehat{H_1}$; mà $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}$ (sole); $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ góc BAH) nên $\widehat{F_1} = \widehat{A_1}$.

Suy ra tam giác AIF cân tại I (có hai góc đáy bằng nhau) nên KI vuông AF; mà CK vuông AF nên I, C, K thẳng hàng

Bài 499. Cho (O;R) dây AB cố định không đi qua O. Điểm C thuộc cung lớn AB, M là điểm chính giữa cung AC không chứa B; N là điểm chính giữa cung nhỏ AB, MN cắt AC tại H; CN cắt MB tại K.

a) MCKH nt. b) Tam giác MCK cân. c) HK//AB.

d) Cho AB cố định , tìm vị trí C để diện tích AKBN lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Dùng công thức tính góc có đỉnh bên trong đường tròn chỉ ra góc MHC= góc MKC.

b) Góc $\widehat{MCK} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AC} = \widehat{MKC}$

c) góc $\widehat{MKH} = \widehat{HCM} = \widehat{MBA}$

d) Vì AB cố định nên dtABN không đổi. Suy ra dtAKBN lớn nhất khi dtAKB lớn nhất. Suy ra khoảng cách từ K đến AB lớn nhất

Bài 500. Cho (O;R) đường kính AB, tiếp tuyến Ax, lấy M thuộc Ax kẻ tiếp tuyến MC với (O). H là trực tâm tam giác MAC.

a) Chứng minh MCBO là hình thang.

b) Cho góc $\widehat{ABC} = 60^0$. Tính MA theo R.

c) Chứng minh M chuyển động thì H nằm trên đường tròn cố định.

Hướng dẫn

a) MO//BC (cùng vuông AC)

b) $\widehat{B} = 60^0$ thì $AC = BC.\sin B = R\sqrt{3}$.

Tam giác MAC cân mà góc $\widehat{MAC} = \widehat{B} = 60^0$ nên tam giác AMC đều nên $MA = AC = \sqrt{3}$.

c) H là trực tâm nên CH//OA (cùng vuông Ax) suy ra AHCO là hình thoi nên AH=AO=R suy ra H thuộc (A;R).

Bài 501. Cho nửa (O;R) đường kính AB, dây CD=R, (C nằm trên cung AD). AC và BD cắt nhau tại M.

a) Chứng minh tam giác MCD đồng dạng MBA.

b) Cho góc $\widehat{ABC} = 30^0$. Tính theo R độ dài cung nhỏ AC và diện tích hình viên phấn giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC.

Hướng dẫn

a) tam giác MCD đồng dạng MBA(g.g).

b) Góc $\widehat{COA} = 60^0$. Sử dụng công thức tính chiều dài cung: $l = \dfrac{\pi R.n^0}{180}$

diện tích phần đỏ = diện tích viên phấn AOC – diện tích tam giác đều AOC.

Bài 502. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O;R) .Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H ,DE cắt (O) lần lượt tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB).

1/Chứng tỏ: Tứ giác BEDC nội tiếp được ,xác định tâm của nó

2/Chứng tỏ : BH.DH=HE.HC

3/Chứng tỏ : tam giác APQ cân tại A và $AP^2 = AE.AB$

4/Gọi S_1 là diện tích tam giác APQ ,S_2 là diện tích tam giác ABC

Gỉa sử $\frac{S_1}{S_2} = \frac{PQ}{2BC}$ .Tính BC theo R

Bài 503. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) nội tiếp (O:R) .Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H .Vẽ đường kính AI của (O)

1/Chứng tỏ : tứ giác AEHD nội tiếp được

2/Chứng tỏ : AH.AC =AE.AI

3/DE cắt (O) tại S (S thuộc cung nhỏ AC) ,SI cắt BC tại K .Chứng tỏ : AK vuông góc với HS

4/ HS cắt BC tại L . Chứng tỏ :Đường tròn ngoại tiếp tam giác tam giác LBD , AK,HS đồng quy tại 1 điểm

Bài 504. Từ 1 điểm A ngòai (O:R) ,kẻ tiếp tuyến AB đến (O) với B là tiếp điểm .Vẽ BH vuông góc với OA tại H

1/Chứng tỏ : $BH^2 = OH.AH$

2/ BH cắt (O) tại C .Chứng tỏ : AC là tiếp tuyến của (O) và tứ giác ABOC nội tiếp

3/Trên BH lấy 1 điểm M bất kỳ .Đường thẳng qua M vuông góc với OM cắt AC và AB lần lượt tại P và Q .Chứng tỏ : tam giác OPQ là tam giác cân

4/Lấy N thuộc CH sao cho PN//OA .Chứng tỏ : CN=HM

5/Gia sử MH=MB và OA =2R .Tính QN theo R

Bài 505. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) có AB<AC .Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H .Vẽ đường kính AF của (O)

1/Chứng tỏ : Tứ giác BHCF là hình bình hành

2/Chứng tỏ : Tứ giác AEHD nội tiếp được

3/ Kẻ BN vuông góc với CF tại N và CM vuông góc với BF tại M .Chứng tỏ : ED=MN

4/Gọi I là trung điểm của DE .So sánh IB và IC

5/Vẽ dây cung CQ//AI .Từ M kẻ đường thẳng song song với AI cắt AC tại K .Chứng tỏ MKN = QAC

Bài 506. Cho đường tròn tâm O ,đường kính AB ,Trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho BC>AC . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D .Vẽ AH vuông góc với OD tại H .Từ O kẻ đường thẳng song song với AH cắt (O) tại K (C và K nằm ở 2 mặt phẳng bờ AB khác nhau) ,DK cắt (O) tại M .Đường thẳng qua M vuông góc với CH cắt AD tại E ,F là điểm đối xứng E qua M .Chứng minh :

1/Tứ giác AHCD nội tiếp ,xác định tâm

2/CHB = 2BDA

3/DM vuông góc với HM

4/Tam giác DHFcân tại F

Bài 507. Cho đường tròn tâm O ,đường kính AB . Trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho BC>AC .Gọi D là điểm đối xứng C qua A .Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC và BD lần lượt tại P và Q. Vẽ QM vuông góc với BP tại M , QM cắt AB tại N

1/Chứng tỏ : Các tứ giác QAMB , PANM nội tiếp

2/PN cắt (O) lần lượt tại H và K (H thuộc cung nhỏ AC) .Chứng tỏ : $AP^2 = PH.PK$

3/QH cắt (O) tại G .Chứng tỏ : 3 đường thẳng BG,AK,QM đồng quy tại 1 điểm

4/Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ .Chứng tỏ : 3 điểm P,J,O thẳng hàng

Bài 508. Cho đường tròn tâm O ,đường kính AB .Trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho BC>AC .Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D . Kẻ OH vuông góc với AC tại H ,OD cắt AC tại I , DH cắt AB tại K

1/Chứng tỏ : AC=2OH và $AD^2 = DC.DB$

2/ Chứng tỏ : BDO = ADH

3/ IK cắt OH tại M .Chứng tỏ : IK//AD và M là trung điểm của IK

4/ Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại G .Chứng tỏ :3 điểm A,M,G thẳng hàng

5/ Cho $\widehat{ABC} = 30^0$ .Tính diện tích tam giác IKG theo R

Bài 509. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) . Dựng đường tròn tâm O , đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại F và E ,BE cắt CF tại H ,AH cắt BC tại D

1/Chứng tỏ : AD vuộng góc với BC

2/ Kẻ AM vuông góc với EF tại M .Chứng tỏ : AB.AM=AD.AF

3/Dựng hình bình hành HBKC .Chứng tỏ : 3 điểm A,M,K thẳng hàng và H,O,K thẳng hàng . HK cắt DM tại N, AH cắt EF tại L

4/Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HND .Chứng tỏ : IN//EF

5/ . Gỉa sử $AL = \frac{9LH}{2}; MK = 2AM$. Chứng tỏ : tam giác ABC là tam giác đều

Bài 510. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho AC>BC . Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn O cắt nhau tại D , BD cắt (O) tại E .Vẽ dây cung EF//AD ,vẽ CH vuông góc với AB tại H

1/Chứng minh : AE=AF và BE=BF

2/ADCO là tứ giác nội tiếp

3/ $DC^2 = DE.DB$

4/AF.CH=AC.EC

5/Gọi I là giao điểm của DH và AE , CI cắt AD tại K . Chứng tỏ : KE là tiếp tuyến của (O)

6/Từ E kẻ đường thẳng song song với AB cắt KB tại S , OS cắt AE tại Q . Chứng minh : 3 điểm D,Q,F thẳng hàng

Bài 511. Cho tam giác ABC có 3 góc nhnọ nội tiếp (O:R) ,AB<AC .Vẽ đường kính AD .Vẽ AH vuông góc với BC tại H ,BD cắt AC tại E ,Chứng minh :

1/EC.EA=ED.EB

2/AB.AC=AH.AD

3/Từ E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AH tại I .Gọi K là trung điểm của BC .Chứng tỏ : BI là tiếp tuyến của (O)

4/BI cắt OK tại L .Vẽ BP vuông góc với AL tại P , KQvuông góc với AC tại Q .Chứng tỏ : 3 điểm H,P,Q thẳng hàng

Bài 512. Cho tam giác BCD có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) , BC<BD. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CD tại A .Vẽ 2 đường cao DM và CN của tam giác BCD cắt nhau tại H

1/Chứng tỏ : $AB^2 = AC.AD$

2/Chứng tỏ : HN.HC= HM.HD

3/ Gỉa sử C là trung điểm của AD .Tính tỉ số BM/BN

4/Gọi I là trung điểm của MN , BI cắt (O) tại K .Chứng tỏ : AK là tiếp tuyến của (O)

5/ Cho $\widehat{DBC} = \widehat{BOA} = 60^0$ * . Tính AC theo R

Bài 513. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) có AB<AC.Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam gíac ABC cắt nhau tại H

1/Chứng minh : Tứ giác BFEC nội tiếp , xác định tâm I

2/Chứng minh : AH=2OI

3/EF cắt (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB),MI cắt (O) tại K .Chứng minh :

a/ tam giác AMN cân b/ $HF.CF - HE.BE = OE^2 - OF^2$

c/ $BC^2 = 4MI.KI$

4/ Vẽ HT vuông góc với NK tại T . Chứng minh : AK vuông góc với HN rồi suy ra tứ giác MKTE nội tiếp

Bài 514. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB. Trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho AC>BC . Từ C vẽ CH vuông góc với AB tại H . VẼ HD vuông góc với AC tại D và HE vuông góc với BC tại E . Chứng minh :

1/Tứ giác CDHE là hình chữ nhật

2/Tứ giác ADEB nội tiếp

3/OC vuông góc với DE

4/DE cắt (O) tại I (I thuộc cung nhỏ AC) . Gọi K là trung điểm của HI . Chứng tỏ : tam giác DKE vuông

Bài 515. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) . Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .Đường tròn tạm O , đường kính CH cắt BC tại K . Các tiếp tuyến tại E và C của (O) cắt nhau tại M . Chứng minh :

1/Tứ giác OEMC , BFEC nội tiếp được

2/HF.HC=HB.HE

3/3 điểm A,H,K thẳng hàng và I,O,M thẳng hàng

4/ 5 điểm E,F,K,I,O cùng thuộc 1 đường tròn

5/Kẻ tiếp tuyến BT đến O (T là tiếp điểm , T thuộc cung nhỏ KC) ,FT cắt (O) tại G , EG cắt AB tại S .Chứng minh : tứ giác SBKT nội tiếp

6/ Chứng tỏ : 3 đường thẳng BM,FC,AT đồng quy tại 1 điểm

Bài 516. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) .Dựng đường tròn tâm O ,đường kính AB cắt AC và AB lần lượt tại D và E , BD cắt CE tại H .Chứng minh rằng :

1/H là trực tâm của tam giác ABC

2/Tứ giác AEHD nội tiếp ,xác định tâm I

3/Từ A kẻ tiếp tuyến AS đến O (S là tiếp điểm và S thuộc cung nhỏ DC) .Chứng minh rằng

$AS^2 = AD.AC$

4/Chứng tỏ : EI và tiếp tuyến của (O)

5/Tiếp tuyến tại B cũa (O) cắt DI tại K ,AH cắt BC tại L .Chứng tỏ : KC đi qua trung điểm của AL

6/EI cắt BK tại N .Chứng minh : 3 điểm N,H,S thẳng hàng

Bài 517. Cho đường tròn tâm (O) , đường kính AB .Trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho AC>BC .Vẽ CH vuông góc với AB tại H ,CH cắt (O) tại K .Trên HK lấy 1 điểm M bất kỳ , BM cắt (O) tại N .Chứng minh :

1/H là trung điểm của CK

2/Tứ giác AMNH nội tiếp được , xác định tâm

3/ $BM.BN = BC^2$

4/Trên AC lấy 1 điểm S sao cho SC>SA . Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ASH và AMN và T là trung điểm của CS .Chứng minh : 3 điểm P,Q,T thẳng hàng

5/Gọi E là giao điểm của PQ và CK ,BE cắt (O) tại J .Chứng tỏ : 3 đường thẳng HS,AJ,PQ đồng quy tại 1 điểm

Bài 518. Cho tam giác BED có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) BD<BE . Tiếp tuyến tại B của (O) cắt DE tại A . Từ A kẻ tiếp tuyến AC đến O (C là tiếp điểm) .Vẽ 2 đường cao EN và BM của tam giác BED . Vẽ EH vuông góc với BC tại H .Chứng minh :

1/ EH//OA và tứ giác OBAC nội tiếp

2/OB vuông góc với MN và BM.BE=BN.BD

3/Các tứ giác EMND , EBNH nội tiếp

4/ Từ M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DC tại K .Chứng minh : CD.EN=BD.EK

5/Chứng minh : H là trung điểm của NK

6/Đường thẳng qua K vuông góc với DE cắt HD tại I .Chứng minh : NI//DK

Bài 519. Từ 1 điểm A ngoài (O:R) , Kẻ tiếp tuyến AB đến (O) với B là tiếp điểm và 1 cát tuyến ADE (AD<AE) sao cho B và C nằm ở cùng mặt phẳng bờ OA . Vẽ đường kính BE của (O) , EC cắt AB tại S , vẽ SK vuông góc với OA tại K

1/Chứng tỏ : Tứ giác OBSK nội tiếp được

2/Chứng tỏ : $AB^2 = AC.AD$ và tích EC.ES không đổi

3/Vẽ đường kính DF .Chứng tỏ : AF là tiếp tuyến của (O)

4/Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác BCS và OCK .Chứng tõ : PQ//CF

5/Cho $AD.AC = 3R^2$ .Tính CF theo R

Bài 520. Cho đường tròn tâm (O) , đường kính BC. Lấy 1 điểm A trênh đường tròn (O) sao cho AC>BC .Từ A vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC) .Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB và F thuộc AC)

1/Chứng minh : tứ giác AEHF là hình chữ nhật và OA vuông góc với DE

2/Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P và Q (E nằm giữa P và F)

Chứng minh : $AP^2 = AE.AB$ suy ra tam giác APH cân

3/ Gọi D là giao điểm của PQ và BC ,K là giao điểm của AD với đường tròn (O) .Chứng minh : AEFK là tứ giác nội tiếp

4/ Gọi I là giao điểm của KF và BC .Chứng minh : $IH^2 = IC.ID$

Bài 521. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O) có AB<AC .Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D

1/Chứng minh : $AD^2 = BD.CD$

2/Vẽ 2 đường cao BM và CN của tam giác ABC. Chứng tỏ : tứ giác CMNB nội tiếp và 2 tam giác AMN và ABC đồng dạng

3/Chứng minh : $BD.AN^2 = CD.AM^2$

4/Gọi E là điểm đối xứng M qua A .Chứng minh : EN vuông góc với OD

5/ Đường cao OQ của tam giác ODE cắt MN tại H , AD cắt OE tại I ,AD cắt OQ tại T .Chứng minh : IT.HT=IA.HQ

6/ J là giao điểm của EN và OA ,EJ cắt AD tại S .Từ S kẻ đường thẳng song song với EN cắt ED tại L .Chứng tỏ : 3 điểm A,H,L thẳng hàng

Bài 522. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ,3 đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H

1/Chứng minh: Các tứ giác AFDC,DHEC nội tiếp

2/Chứng minh : BH.HE=HF.HC=HD.HA

3/Gọi M và N là trung điểm của EF và BF, AM cắt DN tại K.Chứng minh : tam giác AKC vuông

4/Đường thẳng qua A vuông góc với KF cắt CF và KN lần lượt tại P và Q, PE cắt AB tại T,QC cắt (O) tại I , BI cắt AQ tại S.Chứng minh : Tứ giác BPST nội tiếp được

Bài 523. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O;R) có 3 đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H

1/Chứng minh : Các tứ giác BFEC,DHEC nội tiếp được

2/EF cắt AD tại V.Chứng minh : HV.AD=AV.HD

3/Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BF và CE, MN cắt BE tại I.Đường thẳng qua N vuông góc với MN cắt CF và ID lần lượt tại G và P.Chứng minh : Tứ giác DGCP nội tiếp được

4/Kẻ tiếp tuyến IK với đường tròn tâm S ngoại tiếp tứ giác DGCP sao cho góc KIN tù.KN cắt (S) tại J và PJ cắt MN tại Q,CJ cắt MN tại T, AC cắt (S) tại R.Chứng minh:Tứ giác TQCR nội tiếp được

Bài 524. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) có góc BAC<60độ.Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Chứng minh : Các tứ giác BEDC,AEHD nội tiếp.Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp của tứ giác BEDC

2/Vẽ đường kính AK.Chứng minh : 3 điểm H,I,K thẳng hàng và $BK.CE + BD.KC = BC^2$

3/Qua D kẻ đường thẳng song song với AH cắt BK tại M.Đường thẳng qua B vuông góc với AI cắt DM tại N. Chứng minh : N là trung điểm của DM

4/Gọi P là trung điểm của BM,PN cắt AK tại S và cắt BC tại Q, AK cắt BC tại S.Chứng minh : góc BFK= góc AQC và $\frac{BF}{QA} = \frac{SK}{SC}$

Bài 525. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp O (AB<AC) .Có 3 đường cao AD ,BE,CF cắt nhau tại H .Vẽ đường kính CG

1/chứng tỏ : Tứ giác ABDE nội tiếp ,xác định tâm I

2/Chứng tỏ : Tứ giác AFHE nội tiếp ,xác định tâm M

3/3 điểm G,I,H thẳng hàng

4/Đường thẳng qua D vuông góc với ID cắt AB tại N .Chứng tỏ : tứ giác IMFD nội tiếp

5/ Trên AB lấy 1 điểm T sao cho góc NDT = góc AOI .Chứng minh : GT vuông góc với CN

6/Chứng minh : $AB.AC.BC = \sin^2 A.4R.S_{BFEC}$ (S là diện tích)

Bài 526. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O) AB<AC. Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Chứng minh : Các tứ giác BFEC,AFHE nội tiếp được

2/Chứng minh : HB.HE=HF.HC

3/Gọi M là giao điểm của EF và BC ,EF cắt (P) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB) .Chứng minh : MF.EQ=MQ.PF

4/Từ B kẻ đường thẳng song song với AH cắt AM tại N .Đường trung trực của ME cắt NE tại T .Từ T kẻ đường thẳng song song với Occắt AB tại G .Chứng minh : G là trung điểm của AB

5/Chứng tỏ : NC đi qua trung điểm của AD

6/Chứng minh : $BN^2 = MN.AN$

7/Đường tròn tâm T ,bán kính TE cắt AC tại J .Chứng tỏ : 3 đường thẳng JG,AH,BC đồng quy tại 1 điểm

Bài 527. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có AB<AC.Vẽ 3 đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Tìm 3 tứ giác nội tiếp có đỉnh là H rồi chứng minh

2/Chứng minh : AD là phân giác của góc EDF và BD.CD=HD.AD

3/Trên tia đối tia BC lấy điểm N nằm ngoài (O) sao cho BC=2BN. Gọi M là điểm đối xứng E qua B, AM cắt (O) tại K,OM cắt CK tại G.Chứng minh : tứ giác BGOC nội tiếp được

4/Các tiếp tuyến tại B và tại C của (O) cắt nhau tại Q kẻ tiếp tuyến NP đến (O).Chứng minh : 3 điểm G,P,Q thẳng hàng

Bài 528. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), vẽ đường cao AD của tam giác ABC.Vẽ tiếp tuyến xy của (O) . Vẽ BM và CN cùng vuông góc với xy (M,N thuộc xy)

1/Chứng minh : Các tứ giác BDAM,CDHN nội tiếp

2/DM cắt AB tại E, AC cắt DN tại F , EF cắt BM và CN lần lượt tại P và Q.Chứng minh : BP.CQ=NQ.MP

3/Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Đường thẳng qua N vuông góc với DN và đường thẳng qua M vuông góc với DM chúng cắt nhau tại K .Chứng minh : 3 điểm D,A,K thẳng hàng và DH=AK

4/Chứng minh : $BM^2 + CN^2 + BD^2 + CD^2 \leq 4R.AD$

Bài 529. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O) (AB<AC) .Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam giác ABCcắt nhau tại

1/Chứng tỏ : Tứ giác BFEC nội tiếp , xác định tâm I

2/EF cắt BC tại M .Chứng minh : MF.ME=MB.MC

3/AH cắt BC tại K .chứng minh : MB.KC=MK.IC

4/AM cắt (O) tại T. Chứng tỏ : 3 điểm T,H,I thẳng hàng

5/Đường tròn ngoại tiếp tam giác MIT cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là G ,OA cắt BC tại Q .Vẽ dây cung TS của (O) song song với BC . Chứng tỏ : 3 điểm S,Q,G thẳng hàng

6/Chứng minh : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{KB.QB}{KC.QC}$

Bài 530. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB . Trên tia đối của tia AB lấy 1 điểm C bất kỳ (A nằm giữa B và C và AC < OA). Trên đường tròn lấy 1 điểm N sao cho AN>BN . Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt tia tiếp tuyến tại N của (O) tại M , NC cắt (O) tại H . Đường thẳng qua N vuông góc với MO cắt AB tại I

1/Chứng minh : Tứ giác HION nội tiếp

2/Chứng minh : AI.OC=AC.OA

3/ Vẽ dây cung PQ của (O) đi qua I (P thuộc cung nhỏ AN) . Chứng minh : BC là phân giác của góc PCQ

4/ Tia phân giác của góc CON cắt AH tại K . Chứng minh : KO là phân giác của góc AKN

Bài 531. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O :R) có 3 đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H

1/ Chứng minh : các tứ giác AFHE, AFDC nội tiếp

2/ Gọi M là điểm đối xứng H qua BC . Chứng minh : M thuộc (O)

3/Từ D kẻ đường thẳng song song với EF cắt FC tại I và cắt AC tại N , MN cắt BC tại K .Chứng minh : Tứ giác KINC nội tiếp

4/ Gọi S là điểm đối xứng của F qua B .Trong trường hợp : gócASC= góc AIF . Chứng minh : AC.BK= HI .OB

Bài 532. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R)(AB<AC) .Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Chứng tỏ : Tứ giác BFEC nội tiếp được

2/Vẽ đường kính CS của (O) .Chứng tỏ : tứ giác ASBH là hình bình hành suy ra SH đi qua trung điểm của AB

3/Dựng đường tròn tâm A ,bán kính AB cắt (O) tại điểm thứ 2 là M ,cắt AC lần lượt tại 2 điểm P và Q (P nằm trong đường tròn O) ,ME cắt (O) tại K .Chứng minh : HK đi qua trung điểm của AB

4/Vẽ CI vuông góc với BM tại I .Chứng minh : góc CQI=góc CSP

Bài 533. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (O:R) AB<AC .Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Chứng tỏ : tứ giác BEDC nội tiếp

2/DE cắt (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB) .Chứng minh : AB là phân giác của góc MBN

3/MH cắt (O) tại K.Chứng minh : MH.HK=2BH.BD

4/Qua N kẻ đường thẳng song song với AK cắt MK tại I .Đường thẳng qua N vuông góc với NK cắt AK tại S .Vẽ MT vuông góc NI tại T ,J là trung điểm của MT.Chứng minh : góc TIS= góc MIJ

5/ Vẽ SG vuông góc với MK tại G và P là trung điểm của BC .Chứng tỏ : 3 điểm N,G,P thẳng hàng

Bài 534. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) AB<AC . Vẽ 2 đường cao AD và BE của tam giác ABC cắt nhau tại H .Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại M

1/Chứng tỏ : Tứ giác AEDB nội tiếp và $AM^2 = MB.MC$

2/Vẽ MN vuông góc với AB tại N ,MN cắt AD tại I .Chứng minh : góc IHB= góc NDM

3/Đường thẳng qua M song song với BE cắt AI tại J ,OB cắt IM tại T và cắt AD tại S .Chứng tỏ : Tứ giác JMTS nội tiếp

4/Chứng tỏ : AJ=HI

Bài 535. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) AB<AC. Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H ,AH cắt DE tại I , DE cắt BC tại M , AM cắt (O) tại N.Chứng minh :

1/Các tứ giác BEDC,AEHD nội tiếp

2/BH.DH=HE.HC và AI.HI=IE.ID

3/ 2 góc AID và AKM bằng nhau

4/Tứ giác MNEB nội tiếp được

5/ OA cắt BC tại K ,IK cắt NC tại P và cắt ND tại Q .Chứng minh : là trực tâm của tam giác ANP

Bài 536. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AC<BC) . Dựng đường tròn tâm O , đường kính AB cắt AC và BC lần lượt tại E và D ,AD cắt BE tại H ,CH cắt AB tại F

1/Chứng minh : H là trực tâm của tam giác ABC suy ra CF vuông góc với AB

2/Chứng minh : Các tứ giác CEHD ,CEFB nội tiếp

3/Chứng minh : góc OEF= góc ODF

4/Gọi I là giao điểm của OE và AD .Từ I kẻ đường thẳng song song với CF cắt EF tại K , AK cắt (O) tại J .Chứng minh : tam giác DFJ vuông

5/DJ cắt AB tại M .Từ M kẻ các tiếp tuyến MP và MQ đến (O) với P và Q là tiếp điểm .Chứng minh : 3 đường thẳng IJ,PQ ,BD đồng quy

Bài 537. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) AB<AC .Vẽ 3 đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Chứng minh : Các tứ giác AFDC,BFHD nội tiếp

2/AH cắt EF tại G .Chứng minh : AD.HG=DH.AG

3/AD cắt (O) tại M ,EF cắt (O) tại K (K thuộc cung nhỏ AB) . Chứng minh : $AK^2 = AG.AM$

4/Từ K kẻ đường thẳng song song với AM cắt BM tại L .Gọi N là điểm đối xứng A qua G .Trên GE lấy 1 điểm J sao cho góc KGL = góc ANJ .Chứng tỏ : KF=GJ

Bài 538. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) .Dựng đường tròn tâm O ,đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại E và F ,BF cắt CE tại H ,AH cắt BC tại D

1/Chứng minh : H là trực tâm của tam giác ABC và AD vuông góc với BC

2/Chứng tỏ : Các tứ giác AEDC,AEHF nội tiếp và xác định tâm I của (AEHF)

3/Chứng minh : IE và IF là tiếp tuyến của (O)

4/Đường tròn tâm I cắt DF tại M .Chứng minh : AD là phân giác của góc EAM

5/AD cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ EF) .Chứng minh : AP.HD=DQ.HP

6/Vẽ ML vuông góc với QC tại L ,ML cắt BC tại S .Đường thẳng qua P song song với DL và đường thẳng qua M song song với AD chúng cắt nhau tại N .Đường thẳng qua M vuông góc với SN cắt BC tại T . Chứng tỏ : Tứ giác TQSM nội tiếp được

Bài 539. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) và góc A < 40 độ . Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại D , AD cắt (O) tại E .Đường thẳng qua D vuông góc với OA cắt BC tại I .Chứng minh “

1/Tứ giác OBCD nội tiếp được

2/BD^2=BE.BA

3/BE.AC=AB.EC

4/ Trực tâm của tam giác ADI thuộc đường tròn O

5/AI cắt (O) tại S .Trong trường hợp AC đi qua trung điểm của DI .Chứng tỏ : 3 đường thẳng ES,BI,OA đồng quy tại 1 điểm

Bài 540. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) .Dựng đường tròn tâm O ,đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại F và E ,BE cắt CF tại H ,AH cắt BC tại D

1/Chứng tỏ : Tứ giác AFHE nội tiếp ,xác định tâm I

2/Chứng tỏ : IE và IF là tiếp tuyến của (O)

3/Vã AK vuông góc với EF tại K ,EI cắt tia tiếp tuyến tại B của (O) tại M .Chứng tỏ : Gía trị biểu thức AH.BD/EK không đổi

4/Đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD cắt EF tại N .Kẻ tia Mx cắt AD tại S sao cho góc AMS= góc AHN .Gọi J là giao điểm các tiếp tuyến tại M và S của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMS .Chứng tỏ : 3 điểm A,J,N thẳng hàng

Bài 541. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<BC) nội tiếp đường tròn tâm O .Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H

1/Chứng tỏ : Các tứ giác BFEC nội tiếp ,xác định tâm I

2/Vẽ đường kính AM của (O) ,HM cắt (O) tại S .Chứng tỏ : 5 điểm A,S,H,F,E cùng thuộc 1 đường tròn

3/Vẽ HT vuông góc với AI tại T .Chứng tỏ : 3 đường thẳng ST,AH,EF đồng quy tại 1 điểm J

4/ Đường tròn đường kính BH cắt (O) tại điểm thứ hai là L , BL cắt AC tại G . Chứng tỏ : Nếu 3 điểm S,J,C thẳng hàng thì 3 điểm G,S,F cũng thẳng hàng

Bài 542. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) .Vẽ 3 đường cao AF,BD,CE của tam giác ABC cắt nhau tại H , gọi I là trung điểm của DE ,IH cắt đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác BHC tại M

1/Chứng tỏ : BD là tia phân giác của góc EDF

2/.Chứng tỏ : tứ giác AIFM nội tiếp được

3/AF cắt MC tại Q .Đường tròn tâm G nội tiếp tam giác MHC tiếp xúc với HC và MC lần lượt tại J và L .Đường thẳng qua C song song với MH cắt JL tại S . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC .Chứng minh : OK//SG

4/Chứng minh : $2\sin A.\sin B.\cos A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$ (A,B,C là các góc của tam giác ABC)

Bài 543. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) .Dựng đường tròn tâm O , đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại M và N , BNcắt CM tại H , AH cắt MN tại I và cắt BC tại D .Gọi K là điểm đối xứng A qua I .Chứng minh : $IH^2 = HD.HK - IM.IN$

2/BN cắt OA tại J ,S là trung điểm của OB ,SJ cắt ON tại L . Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại Q .Chứng tỏ : HL vuông góc với IQ

Bài 544. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) .Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H (AB<AC) ,DE cắt BC tại M .Dựng 2 đường tròn , 1đường tròn đi qua 2 điểm A và B và 1 đường tròn đi qua 2 điểm Bvà C, cả 2 Đường tròn này cùng tiếp xúc với BC cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là S. gọi I là trung điểm của BC. 1/Chứng tỏ : 3 điểm A,S,I thẳng hàng

2/Đường tròn đường kính MI cắt (O) tại K (K thuộc cung nhỏ BC) ,AK cắt BC tại N .Chứng minh : $BN^2.AE = CN^2.AD$

3/BS cắt AC tại P và CS cắt AB tại Q .Chứng tỏ : tam giác NPQ cân

Bài 545. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) .Trên cung nhỏ BC lấy 1 điểm M bất kỳ .Gọi K là điểm đối xứng M qua AC và H là trực tâm của tam giác ABC

1)Chứng tỏ : Tứ giác AHCK nội tiếp được

2) Vẽ đường kính MN .Vẽ NS vuông góc với BC tại S .Gọi I là trung điểm của HN .Chứng minh : HK vuông góc với IS

Bài 546. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn (AB<AC) .Vẽ 3 đường cao AF,BD,CE của tam giác ABC cắt nhau tại H , gọi I là trung điểm của DE ,IH cắt đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác BHC tại M .Chứng tỏ : tứ giác AIFM nội tiếp được

2/AF cắt MC tại Q .Đường tròn tâm G nội tiếp tam giác MHC tiếp xúc với HC và MC lần lượt tại J và L .Đường thẳng qua C song song với MH cắt JL tại S . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC .Chứng minh : OK//SG

Bài 547. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O:R) .Vẽ 2 đường trung tuyến BM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại G , BM và CN lần lượt cắt (O) tại P và Q .Trên cung nhỏ BC lấy 1 điểm S bất lỳ , SQ cắt AB tại H và SP cắt AC tại K .Chứng tỏ : 3 điểm H,K,G thẳng hảng

Bài 548. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) đường kính AD. I là trung điểm cung BC. Nối AI, ID cắt BC ở E, F. Các tia AI và DC cắt nhau tại M, tia AB và DI cắt nhau tại N

a) Chứng minh IA.IM=ID.IN

b) Chứng minh tứ giác AEFD nội tiếp

c) Chứng minh OI vuông góc MN

d) Cho A, C,D cố định. Tìm vị trí điểm B để chu vi ABCD nhỏ nhất.

Bài 549. Cho (O) dây AB . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB và C là một điểm nằm giữa đoạn AB . Tia MC cắt (O) tại điểm thứ hai D . Chứng minh:

a) MA^2 = MC.MD b) BM.BD = BC.MD

c) MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

d) Tổng hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔACD không đổi khi C di động trên đoạn AB

Hướng dẫn

a) Xét ΔACM và ΔDAM có: $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}; \hat{M}$ chung nên $\Delta ACM \backsim \Delta DAM\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{DM} = \dfrac{CM}{AM} \Rightarrow MA^2 = CM.MD$

b) Xét ΔMCB và ΔMBD có: $\widehat{MBC} = \widehat{MDB}; \hat{M}$ chung nên $\Delta MCB \backsim \Delta MBD\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow MD.BC = BD.MB$ (đpcm)

c) Gọi K là trung điểm BC .

Theo b góc $\widehat{CDB} = \widehat{CBM}$. Xét đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác CBD có: $\widehat{CDB} = \dfrac{1}{2}\widehat{CIB} = \widehat{KIB}$ mà

$\widehat{KIB} + \widehat{KBI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KBI} + \widehat{CBM} = 90^0 \Rightarrow$ MB vuông góc IB nên MB là tiếp tuyến (I).

d) Điểm M cố định , gọi MN đường kính $\Rightarrow N$ cố định.

Vì MN đường kính $\Rightarrow AM$ vuông góc AN và BN vuông góc BM. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔBCD và Ò là tâm đường tròn ngoại tiếp của tg DAC -> O1B vuông góc MB(MB là tiếp tuyến của (O1) do câu c) và NB vuông góc MB --> O1 trên NB.Chứng minh được góc ADM = góc MAC --> MA là tiếp tuyến của (O2) và -> O2 trên NA (cùng vuông góc AM) , các tg ABN và CO1B cân có góc đáy B

chung --> O1 // NO2 tưung tự các tg ANB và AO2C cân có góc đáy A chung --> CO2//NO1 . Vậy tứ giác CO2 NO1 là hình bình hành --> O1C + O2C = R1 + R2 = O1B + O1N = BN không đổi

Bài 550. Cho hình vuông ABCD cố định, E là điểm di động trên cạnh CD (Khác C, D). Tia AE cắt BC tại F, Tia Ax vuông góc AE cắt DC tại K, BD cắt KF tại I.

1) Chứng minh góc CAF = CKF, góc IDF= IEF

2) Chứng minh tam giác AKF cân

3) Chứng minh I là trung điểm KF

4) Gọi M là giao BD và AE. Chứng minh tứ giác IMCF nội tiếp

5) Chứng minh khi E thay đổi tỉ số ID/CF không đổi. Tính tỉ số đó.

Hướng dẫn

1) góc KAF = KCF = 90 nên tứ giác AKFC nội tiếp nên CKF = CAF (góc nt chắn CF)

2) góc AFK = ACK = 45 mà góc KAF = 90 nên tam giác KAF vuông cân

3) Theo ý 2 suy ra AKF = 45 = ADB nên tứ giác ADIK nội tiếp (góc trong bằng góc ngoài đỉnh đối diện) suy ra AIK = ADK = 90, mà tam giác AKF vuông cân nên I là trung điểm KF

4) Chỉ ra tam giác KIC và ACM cân, suy ra góc ICK = IKC = MAC = ACM

mà góc ACD = 45 nên góc MCI = 45 = MFI

5) Chỉ ra tam giác AID đồng dạng AFC nên $\frac{ID}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$