

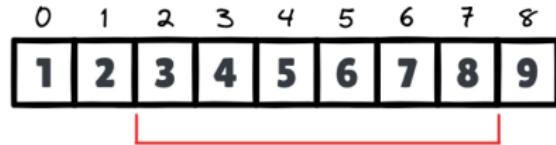
# Soma de Prefixos

# Apresentação do problema

0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>

**Pergunta:** Qual é a soma dos elementos do índice 2 até o índice 7?

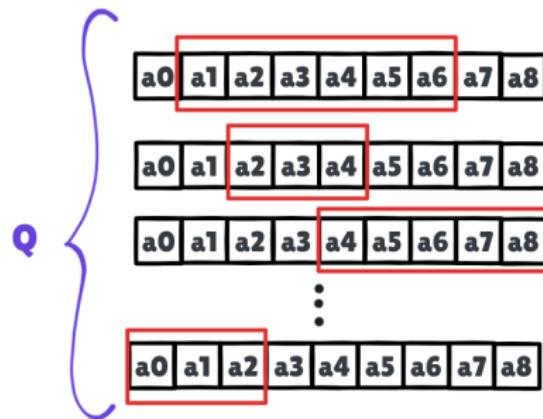
# Apresentação do problema



**Pergunta:** Qual é a soma dos elementos do índice 2 até o índice 7?

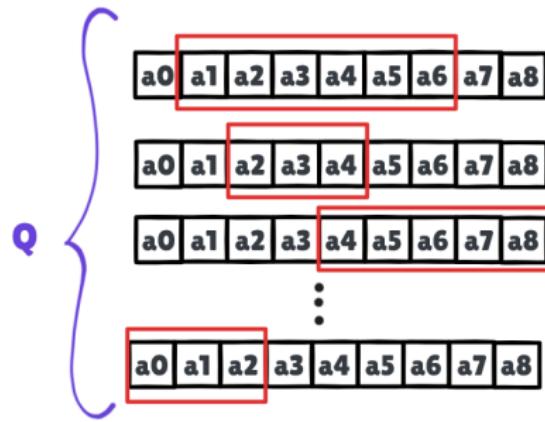
Qual a complexidade da solução?

# Solução força bruta



**Pergunta:** Se eu quiser fazer  $Q$  perguntas do tipo "Qual a soma de  $i$  até  $j$ ", qual é a complexidade total usando o algoritmo anterior?

# Solução força bruta



**Pergunta:** Se eu quiser fazer  $Q$  perguntas do tipo "Qual a soma de  $i$  até  $j$ ", qual é a complexidade total usando o algoritmo anterior?

**Complexidade:**  $O(Q \cdot N)$

# Motivação

**Pergunta:** O problema Static Range Sum Queries passa usando essa solução?

## Static Range Sum Queries

TASK | STATISTICS

Time limit: 1.00 s   Memory limit: 512 MB

Given an array of  $n$  integers, your task is to process  $q$  queries of the form: what is the sum of values in range  $[a, b]$ ?

### Input

The first input line has two integers  $n$  and  $q$ : the number of values and queries.

The second line has  $n$  integers  $x_1, x_2, \dots, x_n$ : the array values.

Finally, there are  $q$  lines describing the queries. Each line has two integers  $a$  and  $b$ : what is the sum of values in range  $[a, b]$ ?

### Output

Print the result of each query.

### Constraints

- $1 \leq n, q \leq 2 \cdot 10^5$
- $1 \leq x_i \leq 10^9$
- $1 \leq a \leq b \leq n$

# Motivação

Não!

- $N$  pode ser até  $2 \times 10^5$
- $Q$  pode ser até  $2 \times 10^5$
- Complexidade:  $O(N \times Q) = O((2 \times 10^5) \times (2 \times 10^5)) = O(4 \times 10^{10})$
- Um computador faz  $\sim 10^8$  operações por segundo
- Tempo:  $\frac{4 \times 10^{10}}{10^8} = 400$  segundos!

Existe uma forma mais eficiente?

# PREFIX SUM

Existe uma forma mais eficiente?

# PREFIX SUM

**Vamos entender o conceito!**

# Definições: Prefixo e Sufixo

Dado um array de tamanho  $n$ :

**Prefixo de tamanho  $k$**

Os primeiros  $k$  elementos do array

**Sufixo de tamanho  $k$**

Os últimos  $k$  elementos do array

# O que é Prefix Sum?

## Definição

Dado um array  $a$  de tamanho  $n$ , a **soma de prefixos** (prefix sum) é um array  $ps$  de tamanho  $n + 1$  onde:

$ps[i]$  contém a soma dos elementos no prefixo de tamanho  $i$  do array  $a$

# Exemplo Prático

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$

# Exemplo Prático

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$

O array de prefix sum será:

$$ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$$

# Exemplo Prático

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$

O array de prefix sum será:

$ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

- $ps[0] = 0$  (soma de 0 elementos)
- $ps[1] = 3$  (soma de  $a[1]$ )
- $ps[2] = 13$  (soma de  $a[1] + a[2] = 3 + 10$ )
- $ps[3] = 15$  (soma de  $a[1] + a[2] + a[3] = 3 + 10 + 2$ )
- ...

# Como usar Prefix Sum para responder queries?

## Propriedade importante

A soma do array no intervalo  $[l, r]$  é igual à soma do prefixo de tamanho  $r$  menos a soma do prefixo de tamanho  $l - 1$ :

$$\text{soma}[l, r] = ps[r] - ps[l - 1]$$

## Exemplo: Calculando soma [3, 6]

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$  e  $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

**Pergunta:** Qual é a soma dos elementos no intervalo [3, 6]?

## Exemplo: Calculando soma [3, 6]

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$  e  $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

**Pergunta:** Qual é a soma dos elementos no intervalo [3, 6]?

**Forma tradicional:**

$$a[3] + a[4] + a[5] + a[6] = 2 + 1 + 5 + 4 = 12$$

## Exemplo: Calculando soma [3, 6]

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$  e  $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

**Pergunta:** Qual é a soma dos elementos no intervalo [3, 6]?

**Forma tradicional:**

$$a[3] + a[4] + a[5] + a[6] = 2 + 1 + 5 + 4 = 12$$

**Usando prefix sum:**

$$ps[6] - ps[2] = 25 - 13 = 12$$

## Exemplo: Calculando soma [3, 6]

Seja  $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$  e  $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

**Pergunta:** Qual é a soma dos elementos no intervalo [3, 6]?

**Forma tradicional:**

$$a[3] + a[4] + a[5] + a[6] = 2 + 1 + 5 + 4 = 12$$

**Usando prefix sum:**

$$ps[6] - ps[2] = 25 - 13 = 12$$

Muito mais fácil! E em  $O(1)$ !

# Complexidade da solução com Prefix Sum

## Análise:

- ① Pré-computação do prefix sum:  $O(N)$

# Complexidade da solução com Prefix Sum

## Análise:

- ① Pré-computação do prefix sum:  $O(N)$
- ② Cada query é respondida em:  $O(1)$

# Complexidade da solução com Prefix Sum

## Análise:

- ① Pré-computação do prefix sum:  $O(N)$
- ② Cada query é respondida em:  $O(1)$
- ③ Total para  $Q$  queries:  $O(N + Q)$

# Complexidade da solução com Prefix Sum

## Análise:

- ① Pré-computação do prefix sum:  $O(N)$
- ② Cada query é respondida em:  $O(1)$
- ③ Total para  $Q$  queries:  $O(N + Q)$

## Comparação

- Solução anterior:  $O(Q \times N) = O(4 \times 10^{10})$  (400 segundos)
- Com Prefix Sum:  $O(N + Q) = O(4 \times 10^5)$  (0.004 segundos)

# Como criar o Prefix Sum? (Código)

Cuidado com Overflow!

Se os valores do array forem grandes, a soma pode ultrapassar o limite de int. Use long long quando necessário!

# Como usar o Prefix Sum? (Código)

Dúvidas

# Dúvidas?