

Soma de Prefixos


Apresentação do problema

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pergunta: Qual é a soma dos elementos do índice 2 até o índice 7?

Apresentação do problema

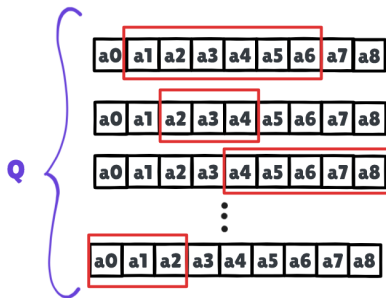
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9



Pergunta: Qual é a soma dos elementos do índice 2 até o índice 7?

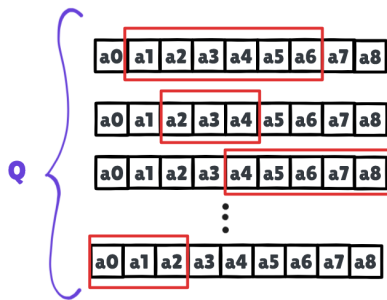
Qual a complexidade da solução?

Solução força bruta



Pergunta: Se eu quiser fazer Q perguntas do tipo "Qual a soma de i até j ", qual é a complexidade total usando o algoritmo anterior?

Solução força bruta



Pergunta: Se eu quiser fazer Q perguntas do tipo "Qual a soma de i até j ", qual é a complexidade total usando o algoritmo anterior?

Complexidade: $O(Q \cdot N)$

Pergunta: O problema Static Range Sum Queries passa usando essa solução?

Static Range Sum Queries

TASK | STATISTICS

Time limit: 1.00 s Memory limit: 512 MB

Given an array of n integers, your task is to process q queries of the form: what is the sum of values in range $[a, b]$?

Input

The first input line has two integers n and q : the number of values and queries.

The second line has n integers x_1, x_2, \dots, x_n : the array values.

Finally, there are q lines describing the queries. Each line has two integers a and b : what is the sum of values in range $[a, b]$?

Output

Print the result of each query.

Constraints

- $1 \leq n, q \leq 2 \cdot 10^5$
- $1 \leq x_i \leq 10^9$
- $1 \leq a \leq b \leq n$

Não!

- N pode ser até 2×10^5
- Q pode ser até 2×10^5
- Complexidade: $O(N \times Q) = O((2 \times 10^5) \times (2 \times 10^5)) = O(4 \times 10^{10})$
- Um computador faz $\sim 10^8$ operações por segundo
- Tempo: $\frac{4 \times 10^{10}}{10^8} = 400$ segundos!

Existe uma forma mais eficiente?

PREFIX SUM

PREFIX SUM

Vamos entender o conceito!

Definições: Prefixo e Sufixo

Dado um array de tamanho n :

Prefixo de tamanho k

Os primeiros k elementos do array

Sufixo de tamanho k

Os últimos k elementos do array

O que é Prefix Sum?

Definição

Dado um array a de tamanho n , a **soma de prefixos** (prefix sum) é um array ps de tamanho $n + 1$ onde:

$ps[i]$ contém a soma dos elementos no prefixo de tamanho i do array a

Exemplo Prático

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$

Exemplo Prático

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$

O array de prefix sum será:

$ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

Exemplo Prático

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$

O array de prefix sum será:

$ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

- $ps[0] = 0$ (soma de 0 elementos)
- $ps[1] = 3$ (soma de $a[1]$)
- $ps[2] = 13$ (soma de $a[1] + a[2] = 3 + 10$)
- $ps[3] = 15$ (soma de $a[1] + a[2] + a[3] = 3 + 10 + 2$)
- ...

Como usar Prefix Sum para responder queries?

Propriedade importante

A soma do array no intervalo $[l, r]$ é igual à soma do prefixo de tamanho r menos a soma do prefixo de tamanho $l - 1$:

$$\text{soma}[l, r] = ps[r] - ps[l - 1]$$

Exemplo: Calculando soma $[3, 6]$

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$ e $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

Pergunta: Qual é a soma dos elementos no intervalo $[3, 6]$?

Exemplo: Calculando soma $[3, 6]$

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$ e $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

Pergunta: Qual é a soma dos elementos no intervalo $[3, 6]$?

Forma tradicional:

$$a[3] + a[4] + a[5] + a[6] = 2 + 1 + 5 + 4 = 12$$

Exemplo: Calculando soma $[3, 6]$

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$ e $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

Pergunta: Qual é a soma dos elementos no intervalo $[3, 6]$?

Forma tradicional:

$$a[3] + a[4] + a[5] + a[6] = 2 + 1 + 5 + 4 = 12$$

Usando prefix sum:

$$ps[6] - ps[2] = 25 - 13 = 12$$

Exemplo: Calculando soma $[3, 6]$

Seja $a = \{3, 10, 2, 1, 5, 4, 3\}$ e $ps = \{0, 3, 13, 15, 16, 21, 25, 28\}$

Pergunta: Qual é a soma dos elementos no intervalo $[3, 6]$?

Forma tradicional:

$$a[3] + a[4] + a[5] + a[6] = 2 + 1 + 5 + 4 = 12$$

Usando prefix sum:

$$ps[6] - ps[2] = 25 - 13 = 12$$

Muito mais fácil! E em $O(1)$!

Análise:

- 1 Pré-computação do prefix sum: $O(N)$

Complexidade da solução com Prefix Sum

Análise:

- 1 Pré-computação do prefix sum: $O(N)$
- 2 Cada query é respondida em: $O(1)$

Análise:

- 1 Pré-computação do prefix sum: $O(N)$
- 2 Cada query é respondida em: $O(1)$
- 3 Total para Q queries: $O(N + Q)$

Complexidade da solução com Prefix Sum

Análise:

- 1 Pré-computação do prefix sum: $O(N)$
- 2 Cada query é respondida em: $O(1)$
- 3 Total para Q queries: $O(N + Q)$

Comparação

- Solução anterior: $O(Q \times N) = O(4 \times 10^{10})$ (400 segundos)
- Com Prefix Sum: $O(N + Q) = O(4 \times 10^5)$ (0.004 segundos)

Como criar o Prefix Sum? (Código)

Cuidado com Overflow!

Se os valores do array forem grandes, a soma pode ultrapassar o limite de `int`. Use `long long` quando necessário!

Como usar o Prefix Sum? (Código)

Dúvidas?