

Пятиминутка №1

1. **Расстояние Хэмминга** - число несовпадающих координат векторов $x, y \in E_q^n$, обозначается через $d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}|$.
2. **Вес Хэмминга** - число ненулевых координат вектора x , обозначается: $\omega(x)$, $\omega(x) = d(x, 0)$.
3. **Код** - обозначается через C и является подмножеством кодовых слов: $C \subseteq E_q^n$.
4. **Параметры кода** - $(n, |C|, d)$, где: n - длина кода, $|C|$ - мощность кода, d - минимальное кодовое расстояние, т.е. минимум расстояний по всем парам кодовых слов из C .
5. **Кодер** - биекция из множества информационных сообщений M , $M \subseteq E^k$ в множество кодовых слов C .
6. **Принцип максимума правдоподобия** - пусть для передачи использовался код C , если y - полученный вектор, то декодируем его в ближайшее кодовое слово $x \in C$.
7. **Число исправляемых ошибок** - пусть C код с кодовым расстоянием d , и пусть при передаче кодового слова $x \in C$ возникло не более $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ ошибок, тогда декодер восстановит сообщение.
8. **Число обнаруживаемых ошибок** - пусть C код с кодовым расстоянием d , и пусть при передаче кодового слова $x \in C$ возникло не менее 1 и не более $(d-1)$ и из канала связи получили вектор y . В этом случае кодер может запросить снова передачу данных, так как y - не кодовое слово. То есть код обнаруживает $(d-1)$ ошибок.
9. **Линейный код** - код C называется линейным, если C является векторным подпространством E_q^n .
10. **Размерность линейного кода** C - число векторов в базисе C , обозначается через k .
11. **Параметры линейного кода** - $[n, k, d]$, где n - длина кода, k - размерность, d - минимальное кодовое расстояние.
12. **Кодовое расстояние линейного кода** - оно равно минимальному весу среди ненулевых кодовых слов.

13. **Порождающая матрица** - матрица $G_{k \times n}$ строки которой образуют базис C , называется порождающей матрицей кода C .
14. **Проверочная матрица** - матрица $H_{(n-k) \times n}$ имеющая $n - k$ строк и n столбцов называется проверочной, если выполнено $Hx^T = 0^{n-k} \Leftrightarrow x \in C$.
15. **Порождающая матрица в каноническом виде** - порождающая матрица G называется заданной в каноническом виде, если $G = [E_k | A]$, где E_k - единичная матрица.
16. **Проверочная матрица в каноническом виде** - проверочная матрица H называется заданной в каноническом виде, если $H = [A | E_{n-k}]$, где E_{n-k} - единичная матрица.
17. **Теорема связывающая порождающую и проверочную матрицы** - если $[E_k | A]$ - порождающая матрица в каноническом виде кода C , тогда $[-A^T | E_{n-k}]$ - является проверочной матрицей в каноническом виде кода C . Верно и обратное.

Пятиминутка №2

1. **Теорема о столбцах проверочной матрицы** Пусть H - проверочная матрица линейного кода C . Кодовое расстояние C равно d тогда и только тогда когда любые $d - 1$ столбцов H линейно независимы и существует d линейно зависимых столбцов.

Или кратко:

Пусть H - проверочная матрица линейного кода C , тогда $d_C = d \Leftrightarrow \forall d - 1$ столбцов проверочной матрицы H линейно независимы, и $\exists d$ линейно зависимых столбцов.

2. Замечание 1

* двоичный код с проверочной матрицей H .

Кодовое расстояние C равно 1 тогда и только тогда когда в его проверочной матрице H существует нулевой столбец.

3. **Замечание 2** Кодовое расстояние C равно 2 тогда и только тогда когда в H нет нулевых столбцов и есть пара одинаковых столбцов.
4. **Замечание 3** Кодовое расстояние C равно 3 тогда и только тогда когда в H нет нулевых столбцов, столбцы попарно различны и есть столбец равный сумме двух других.

5. **Код Хэмминга** Пусть $r \geq 2$. Двоичным кодом Хэмминга (с r проверками на четность) называется код с проверочной матрицей H , столбцами которой являются все ненулевые векторы длины r . Параметры кода Хэмминга:

$n = 2^r - 1$ - длина кода;

$k = n - r$ - размерность кода;

$d = 3$ - минимальное кодовое расстояние (все векторы попарно различны, нет нулевых, сумма двух любых столбцов встречается в матрице.)

6. **Граница Хэмминга. Теорема** Пусть C - двоичный код длины n и кодовым расстоянием d . Тогда

$$|C| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} C_n^i}$$

7. **Шар** $B(x, j)$ радиуса j с центром в векторе x называется множеством всех векторов, находящихся на расстоянии Хэмминга не более j от x .

Или кратко:

$$B(x, j) = \{y \in E_q^n : d(x, y) \leq j\}$$

8. **Граница Хэмминга для q -значных кодов** Пусть C - q -значный код длины n и кодовым расстоянием d . Тогда

$$|C| \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} C_n^i (q-1)^i}$$

9. q -значный код называется **совершенным** если его мощность достигает границы Хэмминга.

Или кратко:

$C \subseteq E_q^n$ - **совершенный** код, если

$$|C| = \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} C_n^i (q-1)^i}$$

10. Двоичный код Хэмминга является совершенным кодом с $d = 3$.

Длина $n = 2^r - 1$

Мощность кода равна 2^{n-r}

Кодовое расстояние 3

Граница Хэмминга: $2^{n-r} \leq 2^n / (1 + n) = 2^{n-r}$

11. **Теорема (Граница Синглтона)** Пусть C – q -значный код с параметрами $n, |C|, d$. Тогда $\log_q |C| \leq n - d + 1$.
e.g. $C = (000), (111)$
12. **Полный четновесовой код** $\{x : x \in E^n, w(x) = 0 \pmod{2}\}$ Параметры $n, |C| = 2^{n-1}, d = 2$
13. **Граница Плоткина** Пусть – двоичный код длины n с минимальным расстоянием d , и $2d > n$. Тогда справедливо неравенство

$$|C| \leq 2 \lfloor d/(2d - n) \rfloor$$

Пятиминутка №3

1. **Код Адамара** Рассмотрим код, столбцы порождающей матрицы G которого состоят из всех ненулевых векторов длины k :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ этот код называется кодом Адамара.}$$

Его параметры: $[2^k - 1, k, 2^k - 1]$

2. **Утверждение(Код Адамара)** Код Адамара имеет параметры $[2^k - 1, k, 2^k - 1]$ и достигает границы Плоткина.
3. **Граница Варшавова - Гилберта** Пусть $\sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i < 2^r$. Тогда существует линейный код длины $n, k \geq n - r, d' \geq d$.
4. **Оптимальный код** Код, имеющий максимальную мощность среди всех кодов той же длины и кодовым расстоянием называется **оптимальным**.

Пятиминутка №4

1. **Теорема (Конструкция Плоткина)** Пусть C и D коды одинаковой длины n с кодовым расстоянием d_1 и d_2 соответственно. Тогда код $C^{2n} = \{(x, x + y) : x \in C, y \in D\}$ имеет длину $2n$, мощность $|C| * |D|$, кодовое расстояние $\min\{2d_1, d_2\}$.
2. **Расширение кода** Пусть C – двоичный код с кодовым расстоянием d , d – нечетное. Рассмотрим код:

$$\bar{C} = \{(x, \omega(x) \pmod{2}) : x \in C\}$$

Параметры: $\bar{C} : \bar{n} = n + 1, |\bar{C}| = |C|, \bar{d} = d + 1$.

3. **Выкалывание в коде** Выкалывание кодовых координат представляет собой удаление символа в одной координате во всех кодовых словах. Если исходный код C имел параметры: $(n, |C|, d)$, то код C' , полученный выкалыванием из C , имеет следующие параметры: $(n-1, |C'|, d')$, где $|C'| \leq |C|, d-1 \leq d' \leq d$ (заметим, что $|C| = |C'|$, если $d > 1$).

4. **Укорочение кода** Укорочение кода состоит в следующем:

- Выбираем все кодовые слова, у которых i -й символ равен 0 (либо 1). Как правило, выбирается более мощная часть кодовой матрицы с фиксированной координатой i , если таковой нет, у которых символ в координате i равен 0;
- Удаляем символы в выбранных словах.

Из кода C с параметрами $(n; |C|; d)$ получается $(n-1; |C'|; d')$ – код C' , где $|C'| \geq |C| = 2; d' \geq d$.

5. **Утверждение (эквивалентность кода Хэмминга)** Всякий линейный совершенный код с кодовым расстоянием 3 есть код Хэмминга и наоборот.

6. **Эквивалентные двоичные коды** Двоичные коды C и D длины n называются *эквивалентными*, если существует перестановка координатных позиций π и вектор $x \in E^n$, такие что

$$x + \pi(C) = D,$$

где $x + \pi(C)$ определяется как следующий код:

$$\{x + (y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)}) : y \in C\}$$

Обозначим $(y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)})$ через $\pi(y)$.

Перестановка π и сдвиг на x сохраняют расстояние между любыми словами:

$$d(x + \pi(y), x + \pi(y')) = d(\pi(y), \pi(y')) = d(y, y')$$

Поэтому эквивалентные коды имеют одинаковые параметры.

7. **Смежный класс по коду** Если C – линейный код длины n , то *смежным классом* по коду C называется:

$$x + C = \{(x_1, \dots, x_n) + y : y \in C\}$$

для некоторого $x \in E^n$.

8. **Замечание (смежные классы кода Хэмминга)** Коды, эквивалентные коду Хэмминга - все коды Хэмминга (содержащие 0^n) и смежные классы по ним, не содержащие 0^n .
9. **Теорема Васильев, 1962** Пусть C - произвольный двоичный совершенный код длины n с кодовым расстоянием 3 и λ - произвольная функция из кода C в множество $\{0, 1\}$. И пусть $|x| \doteq \omega(x) \bmod 2$. Множество:

$$V_{C,\lambda} = \{(x + y, |x| + \lambda(y), x) : x \in E^n, y \in C\}$$

является совершенным двоичным кодом длины $2 \cdot n + 1$ с кодовым расстоянием 3.

10. **Следствие из теоремы Васильева** Двоичные совершенные коды, не эквивалентные кодам Хэмминга, существуют для любой длины n , $n \geq 15$.
11. **Теорема, Зиновьев, Леонтьев, Титвайнен, 1973** Пусть $q = p^m$ тогда всякий нетривиальный (то есть отличный от всего пространства и имеющий мощность больше 2) совершенный код имеет параметры совпадающие с одним из следующих кодов:
1. q -значный код Хэмминга,
 2. Двоичный код Голея $n = 23, k = 12, d = 7$,
 3. Троичный ($q = 3$) код Голея $n = 11, k = 6, d = 5$.
12. **Лидер смежного класса** - любой вектор наименьшего веса в этом классе.
13. **Утверждение о векторе ошибок** Пусть $y = c + e$ - полученный вектор, $c \in C$. тогда вектор ошибок e принадлежит тому же смежному классу что и y .

Пятиминутка №5

1. **Синдром вектора, его длина (для $[n,k,d]$ кода)**

Пусть используется линейный двоичный код длины n размерности k с проверочной матрицей H для передачи сообщений. Синдромом вектора $y \in E^n$ называется вектор Hy^T .

Свойства синдрома:

1. Синдром вектор длины $n - k$.

2. Синдром кодового слова равен 0^{n-k} .

3. Синдромы и смежные классы находятся во взаимно однозначном соответствии.

4. Синдром полученного вектора u равен сумме столбцов проверочной матрицы с номерами в позициях где произошли ошибки.

2. **Вероятностью ошибки декодирования** кода C называется средняя вероятность ошибки декодирования по всем словам, то есть

$$P_{mistake} = \frac{\sum_{c \in C} (1 - P(c|c))}{|C|}$$

3. **Пропускная способность канала и скорость кода**

Пусть p - вероятность искажения символа при передаче в канале связи. Пропускной способностью канала называется

$$C(p) = 1 + p \log(p) + (1 - p) \log(1 - p)$$

где $\log = \log_2$.

Скоростью кода C называется $\frac{\log|C|}{n}$ (если C -линейный, то процент информационных символов).

4. **Теорема Шеннона**

Для всякого канала с пропускной способностью $C(p)$ и всяких $\epsilon, R > 0, R < C(p)$ существует код достаточной большой длины n скорости R , что действуя по принципу максимума правдоподобия вероятность ошибки декодирования $P_{mistake} < \epsilon$.

5. **Поле**

Поле называется алгебраическая система $\langle F, +, * \rangle$:

1. $\langle F, + \rangle$ - коммутативная группа с 0

2. $\langle F \setminus 0, * \rangle$ - коммутативная группа с 1

3. Для любых трех элементов $a, b, c \in F$ выполнено $a(b+c) = ab+ac$

6. **Порядок поля**

Порядком поля называется число его элементов.

7. **Поле Галуа**

Конечным полем или полем Галуа называется поле конечного порядка.

8. Характеристика поля

Характеристикой поля F называется минимальное неотрицательное число r , такое что сумма $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1}_r = 0$

9. Теорема о порядке поля Галуа

Если порядок поля Галуа равен q , то $q = p^m$, где $m \geq 1$ и p -простое число, равное характеристике поля.

Дополнительно к 5 пятиминутке

1. Пусть дан линейный код с параметрами $[n, k, d]$, $q=2$. Опишите кратко структуру таблицы стандартного расположения (что собой представляют строки и столбцы, сколько их).
2. Пусть дан линейный код и его смежный класс. Может ли так случиться, что в смежном классе кодовых слов меньше, чем в коде? Ответ поясните.
3. Пусть дан линейный код с параметрами $[n, k, d]$. Напишите и объясните, сколько существует различных смежных классов этого кода.
4. Верно ли, что синдромы двух слов из различных смежных классов линейного кода должны иметь разные синдромы? Ответ поясните.

Пятиминутка №6

1. Идеал

Пусть K - кольцо, подкольцо I кольца K называется **идеалом**, если $\forall i \in I, \forall k \in K : ik \in I$

2. Неприводимый многочлен

Многочлен $f(x) \in F_p[x]$ называется **неприводимым**, если он **нормированный** (старший коэффициент равен 1) и не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени из $F_p[x]$.

3. Теорема

Пусть $f(x)$ - неприводимый многочлен из $F_p[x]$ степени m . Тогда $F_p[x]/(f(x))$ - поле Галуа $GF(p^m)$.

4. Порядок элемента группы

Порядком элемента α группы называется наименьшее положительное число l : $\alpha^l = 1$.

5. **Примитивный элемент поля**

Примитивным элементом α поля $GF(p^m)$ называется элемент порядка $p^m - 1$. То есть выполнено:

$$GF(p^m) \setminus 0 = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p^m-2}\}$$

6. **Лемма 1**

Пусть G - коммутативная группа, тогда если α - элемент порядка l , то α^k - элемент порядка $\frac{l}{(k,l)}$

7. **Лемма 2**

Пусть G - коммутативная группа, α - элемент порядка l , β - элемент порядка k , $(k, l) = 1$, тогда $\alpha\beta$ - элемент порядка kl .

8. **Теорема**

Во всяком поле Галуа $GF(p^m)$ существует **примитивный** элемент.

9. **Следствие (Теорема Ферма)**

Для всякого элемента β поля $GF(p^m)$ выполнено: $\beta^{p^m-1} - \beta = 0$

10. **Следствие (Теорема Ферма, другая формулировка)**

В $GF(p^m)$ выполнено:

$$\prod_{\beta \in GF(p)} (x - \beta) = x^{p^m} - x$$

11. **Следствие**

Пусть α - **примитивный** элемент поля Галуа $GF(p^m)$. Тогда α^i - **примитивный** элемент $\Leftrightarrow (i, p^m - 1) = 1$