Листок 7. Задача 8.

Пусть $I = (y^2 + 1, x^2 - y) \subseteq K[x, y]$. Найдите $I \cap K[x]$ и $I \cap K[y]$.

Изначально давайте обратим внимание на задачу 7 из 7 листка. В ней мы научились "выбрасывать" какое-то количество старших переменных и получать пересечение. Заметим, что в нашем кольце $x > y$, а $\{y^2 + 1, x^2 - y\}$ – базис Грёбнера по критерию Бухбергера, значит, сходу можем решить вторую задачу:

$$I \cap K[y] = \{y^2 + 1\}.$$

Теперь давайте рассмотрим первую задачу. В ней нам надо как-то избавиться от младшей переменной. Как писалось в Библии:

> Многие же будут первые последними, и последние первыми.

Так и мы давайте поменяем порядок. Зададим порядок $y > x$. Мы могли бы сказать, что у нас тут получилось пустое множество, но вспомним, что в 7 задаче вообще-то говорилось про пересечение базиса Грёбнера и кольца, а так как $\gcd(y^2, -y) = y \neq 1$, то так же сходу, как мы это сделали ранее, мы не можем сказать, что это базис Грёбнера, так что давайте его найдём (или убедимся, что он перед нами). Решим задачу о нахождении базиса Грёбнера алгоритмом Бухбергера:

Введём обозначение $S_{ij} = S(f_i, f_j)$ и введём $f_1 = y^2 + 1$, $f_2 = -y + x^2$.
Тогда, рассмотрим $S_{12} = 1 + yx^2 \xrightarrow{f_2} 1 + x^4 = res = f_3$.

Заметим, что $\gcd(L(f_3), L(f_i)) = 1$, где $i \in \{1, 2\}$, значит перед нами базис Грёбнера идеала I:

$$F = \{y^2 + 1, y - x^2, x^4 + 1\}.$$

Теперь можем найти пересечение и записать ответ:

$$I \cap K[x] = F \cap K[x] = \{x^4 + 1\}.$$
