

Основания АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2019 г.

Задачи для семинара 11

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Определим множество кватернионов как $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$, где $M_2(\mathbb{C})$ — алгебра 2×2 -матриц с элементами из \mathbb{C} . Обозначим через $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ матрицы

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Матрицы $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют базис \mathbb{H} как векторного пространства над \mathbb{R} .

Задача 2. (а) Проверьте справедливость следующей таблицы умножения (элемент строки умножается слева на элемент столбца):

| | $\mathbf{1}$ | \mathbf{i} | \mathbf{j} | \mathbf{k} |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\mathbf{1}$ | 1 | i | j | k |
| \mathbf{i} | i | -1 | k | $-j$ |
| \mathbf{j} | j | $-k$ | -1 | i |
| \mathbf{k} | k | j | $-i$ | -1 |

(б) Докажите, что \mathbb{H} является алгеброй над \mathbb{R} .

Задача 3. Докажите, что только скалярные матрицы (т.е. матрицы вида $t \cdot \mathbf{1}$, $t \in \mathbb{R}$) коммутируют со всеми $q \in \mathbb{H}$.

Для $q = x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k}$ *сопряженным* называется кватернион $q^* = x_0 \cdot \mathbf{1} - x_1 \cdot \mathbf{i} - x_2 \cdot \mathbf{j} - x_3 \cdot \mathbf{k}$. Если $x_0 = 0$, кватернион q называется *чисто мнимым*. Можно задать на \mathbb{H} скалярное произведение, унаследованное из \mathbb{R}^4 , и соответствующую ему норму $|q| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Задача 4. Проверьте, что (а) $|q|^2 = \det q$, (б) $qq^* = |q|^2$, (с) $(q_1q_2)^* = q_2^*q_1^*$, (д) $|qp| = |p| \cdot |q|$. (е) Покажите, что всякий ненулевой кватернион обратим.

Будем отождествлять линейные операторы и их матрицы в фиксированном стандартном базисе. Определение: $SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1, A^* A = AA^* = E\}$. Здесь $A^* = \overline{A^t}$. $O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t A = AA^t = E\}$, $SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1, A^t A = AA^t = E\}$.

Задача 5. $SU(2)$ совпадает с группой кватернионов единичной нормы.

Задача 6. Рассмотрим отображение $\Psi: g \mapsto \Psi_g$, сопоставляющее кватерниону g единичной нормы оператор $\Psi_g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, p \mapsto gpg^{-1}$.

(а) Докажите, что любой такой Ψ_g переводит трехмерное подпространство чисто мнимых кватернионов в себя и сохраняет норму. Иначе говоря, ограничение $\hat{\Psi}_g$ оператора $\Psi(g)$ на подпространство чисто мнимых кватернионов ортогональный оператор. Иначе говоря, $\hat{\Psi}_g \in O(3)$.

(с) Для каких g оператор $\hat{\Psi}_g$ тождественный?

Задача 7. (а) Докажите, что любые две точки на сфере S^3 можно соединить путем, целиком лежащим на сфере.

(б) Докажите, что $\hat{\Psi}_g \in SO(3)$ для любого $g \in SU(2)$.

Задача 8. (а) Найдите $\hat{\Psi}_g$ для $g = \cos(\theta/2) \cdot \mathbf{1} + \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{i}$ и $g = \cos(\varphi/2) \cdot \mathbf{1} + \sin(\varphi/2) \cdot \mathbf{k}$ (это будут повороты относительно каких-то осей на какие-то углы — их и надо найти).

(б) Докажите, что построенное отображение $\hat{\Psi}: SU(2) \rightarrow SO(3)$ сюръективно.