Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Контрольная работа. Вариант II

Задача 1. Представьте $x^4 + x$ в виде произведения неприводимых многочленов с комплексными коэффициентами.

Задача 2. Дано слово из n символов 1 и 0. За один ход можно изменить один символ. Докажите, что можно, делая ходы, перебрать все слова длины n без повторений.

Задача 3. Найдите все обратимые (по умножению) элементы в кольце $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Задача 4. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1=0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n.

Задача 5. Пусть $f : M \to M$ некоторое отображение. Будем говорить, что точки $x, y \in M$ находятся в отношении $\sim$, если для некоторого $k \geq 0$ выполнено $y = f^k(x)$. Докажите, что если $\sim$ – отношение эквивалентности, то f — биекция.

Задача 6. С помощью циркуля и линейки разделите данный параллелограмм на четыре части равной площади прямыми, выходящими из одной вершины.

Задача 7. Дан отрезок длины $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Можно ли построить циркулем и линейкой отрезок длины 1?