

Задачи для семинара 4.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ (с коэффициентами a_0, \dots, a_n , лежащими в некотором кольце) называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени (с коэффициентами в том же кольце). Конечно или бесконечно множество неприводимых многочленов с $a_n = 1$ и остальными коэффициентами в (а) кольце \mathbb{Z} ; (б) поле \mathbb{R} ; (в) поле \mathbb{F}_2 ?

Задача 2. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 3. (а) Докажите малую теорему Ферма: если p — простое число, то $n^p - n$ делится на p для любого натурального n .

(б) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 4. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков $[0], [1], [2], [3], [4]$ при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$[a] + [b] = [a + b],$$

$$[a] \cdot [b] = [ab],$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в \mathbb{Z} . Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 5. Рассмотрим множество $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ всех упорядоченных пар $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$, где 0 и 1 — это элементы поля \mathbb{F}_2 из двух элементов.

(а) Введём на $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в \mathbb{F}_2 . Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для операций

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd).$$

Задача 6. Докажите, что многочлен $x^n - p$ неприводим (как многочлен с целыми коэффициентами) для любого простого p .

Задача 7. Докажите, что простых чисел вида $4k + 3$, где k — целое, бесконечно много. Докажите то же для чисел вида $4k + 1$.