Вычислимость и сложность 2020, матфак ВШЭ

Примитивно рекурсивные функции I

Базовыми функциями будем называть

- константу ноль $\mathrm{o}(x) = 0$;
- функцию следования $\mathrm{s}(x) = x + 1$;
- селекторные функции $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ для всех натуральных $1 \leqslant m \leqslant n$.

Через $\vec{x}$ обозначаем набор переменных $x_1, \ldots, x_n$, а через $f(\vec{x})$ — функцию n аргументов $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Класс *примитивно рекурсивных функций* **PR** — это наименьший класс функций натурального аргумента, содержащий все базовые функции и замкнутый относительно операций

(1) *суперпозиции*: если функции $h, g_1, \ldots, g_m$ принадлежат **PR** (где $h \colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ и $g_i \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$), то и функция $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, задаваемая соотношением $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$ принадлежит **PR**

(2) *примитивной рекурсии*: если функции $g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ и $h \colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ принадлежат **PR**, то и функция $f \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, задаваемая соотношениями

$$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$$
$$f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)),$$

принадлежит **PR**. В случае $n = 0$ в качестве функции g может быть выбрано произвольное натуральное число $a \in \mathbb{N}$, и схема примитивной рекурсии в этом случае принимает вид:

$$f(0) = a$$
$$f(y+1) = h(y, f(y)).$$

Другими словами, функция f *примитивно рекурсивна* ($f \in$ **PR**) тогда и только тогда, когда f может быть получена из базовых функций с помощью конечной последовательности применений операций суперпозиции и примитивной рекурсии, т.е. существует конечная последовательность функций $f_1, \ldots, f_n$ такая, что $f_n = f$, и каждая из функций f_i для $1 \leqslant i \leqslant n$ либо является базовой, либо получена из некоторых предыдущих f_j для $j < i$ применением операции суперпозиции или примитивной рекурсии. Такая последовательность называется *примитивно рекурсивной схемой*, определяющей функцию f.

1. Дайте явное описание функции $f(x, y)$, получаемой из функций $g(x)$ и $h(x, y, z)$ применением операции примитивной рекурсии.

1) $g(x) = x, h(x, y, z) = \mathrm{s}(x)$; 2) $g(x) = x, h(x, y, z) = \mathrm{s}(y)$; 3) $g(x) = x, h(x, y, z) = \mathrm{s}(z)$;
4) $g(x) = x, h(x, y, z) = x + y$; 5) $g(x) = x, h(x, y, z) = x + z$; 6) $g(x) = 2^x, h(x, y, z) = 2^x \cdot z$;
7) $g(x) = 3^x, h(x, y, z) = 3^y \cdot z$; 8) $g(x) = 2x, h(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{если } x \geqslant y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

2. Докажите примитивную рекурсивность следующих функций, построив соответствующие примитивно рекурсивные схемы.

1) $c_a(x) = a$, где $a \in \mathbb{N}$; 2) $c_a(x_1, \ldots, x_n) = a$, где $a \in \mathbb{N}$; 3) $f(x, y) = x + y$;

4) $f(x, y) = x \cdot y$; 5) $f(x) = x^2$; 6) $f(x, y) = x^y$; 7) $f(x) = x!$; 8) $f(x) = \left.x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\right\}x$ раз;

9) $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ 10) $\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$ 11) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

12) $f(x, y) = |x - y|$; 13) $f(x, y) = \max(x, y)$; 14) $f(x, y) = \min(x, y)$; 15) $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$;

16) $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$; 17) $f(x, y) = \mathrm{rm}(x, y)$; 18) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ чётно}, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$ 19) $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

3. Пусть функция $g(x)$ отличается от примитивно рекурсивной функции $f(x)$ только в конечном числе точек. Докажите, что $g(x)$ тоже примитивно рекурсивна.

4. Докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны

$$1)\ \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathsf{P} \neq \mathsf{NP}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи числа} \\ & \pi \text{ встречается хотя бы } x \text{ цифр 7,} \\ & \text{идущих подряд;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Докажите, что примитивно рекурсивна функция $f(x) = x$-ая цифра после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{2}$.

5. Докажите, что класс примитивно рекурсивных функций **PR** замкнут относительно операций

1) ограниченного суммирования и мультиплицирования: $f(\vec{x}, z) = \sum\limits_{y \leqslant z} g(\vec{x}, y)$ и $f(\vec{x}, z) = \prod\limits_{y \leqslant z} g(\vec{x}, y)$;

2) разбора случаев: $f(\vec{x}) = \begin{cases} f_0(\vec{x}), & \text{если } g(\vec{x}) = 0, \\ f_1(\vec{x}), & \text{иначе.} \end{cases}$

3) ограниченной минимизации: $f(\vec{x}, z) = \mu y_{\leqslant z}(g(\vec{x}, y) = 0)$, где

$$\mu y_{\leqslant z}(g(\vec{x}, y) = 0) = \begin{cases} \text{наименьшее } y \leqslant z, \text{ для которого } g(\vec{x}, y) = 0, \text{ если такое } y \text{ существует,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

4) взятия ограниченного максимума: $f(\vec{x}, z) = \max\{g(\vec{x}, y) \mid y \leqslant z\}$.

6. Предикат $P(\vec{x})$ называется примитивно рекурсивным, если его характеристическая функция $\chi_P(\vec{x})$ (равная 1, если $P(\vec{x})$, и 0 иначе) примитивно рекурсивна. Докажите примитивную рекурсивность следующих предикатов:

1) x чётно; 2) $(x = a)$, где $a \in \mathbb{N}$; 3) $(x = y)$; 4) x делит y; 5) x есть простое число;

6) x есть степень двойки; 7) x есть y-ое по счёту простое число.

7. Докажите, что класс примитивно рекурсивных предикатов замкнут относительно булевых связок $\wedge, \vee, \neg$ и операций ограниченного квантифицирования $\forall y \leqslant z\, P(\vec{x}, y)$ и $\exists y \leqslant z\, P(\vec{x}, y)$.