Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

**Задачи для семинара 10**

факультет математики, НИУ ВШЭ

**Определение.** Два множества называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

**Теорема** (теорема Кантора–Бернштейна). *Если множество $A$ равномощно некоторому подмножеству множества $B$, а $B$ равномощно некоторому подмножеству множества $A$, то множества $A$ и $B$ равномощны.*

**Задача 1.** Докажите, следующие утверждения.

(a) Множество бесконечных последовательностей из цифр $0, 1, 2$ равномощно множеству всех бесконечных последовательностей из цифр $0, 1$ (и, следовательно, равномощно $\mathbb{R}$).

(b) Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

(c) Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно (часто вместо «конечное или счетное» говорят «не более чем счетное»).

(d) Множество $\mathbb{N}^k$ счетно.

(e) Декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно.

(f) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.

(g) Если множество $A$ бесконечно, а множество $B$ не более чем счетно, то объединение $A \cup B$ равномощно $A$. Предъявите биекцию между множествами $[0, 1]$ и $[0, 1)$.

(h) Если $A$ бесконечно и не является счётным, а $B$ конечно или счётно, то множество $A \setminus B$ равномощно $A$.

**Задача 2.** (a) Докажите, что все подмножества плоскости, содержащие отрезок, равномощны.

(b) Докажите, что если квадрат разбит на два множества, то хотя бы одно из них равномощно квадрату.

(c) Докажите, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

**Задача 3.** Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно $\mathbb{R}$.

**Задача 4.** Докажите теорему Кантора в общей формулировке: никакое множество не равномощно множеству всех своих подмножеств.