Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Контрольная работа. Вариант I.

Задача 1. Представьте комплексное число $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2019}$ в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Докажите, что в последовательности Фиббоначи у соседних членов не может быть общего простого делителя. Напомним, что эта последовательность определяется первыми двумя членами $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$.

Задача 3. Докажите, что $n^2 - 1$

(а) делится на 3 для любого целого числа n, не кратного трём;

(б) делится на 4 для любого нечётного целого числа n.

Задача 4. Два отображения $f : M \to M$ и $g : M \to M$ связаны отношением $\sim$, если существует биекция $u\colon M \to M$, такая что $fu = ug$. Покажите, что это отношение эквивалентности как на множестве всех отображений $M \to M$, так и на множестве биекций $M \to M$. Опишите классы эквивалентности для отношения $\sim$ на множестве биекций множества из трех элементов.

√**Задача 5.** Является ли многочлен $x^5 + x^2 + 1$ неприводимым над полем $\mathbb{F}_2$?

√**Задача 6.** Постройте окружность, касающуюся данной прямой l в данной точке B и проходящую через данную точку $A \notin l$.

Задача 7. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ в виде $a + b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?