Métodos Estatísticos Básicos

Aula 6 - Introdução à probabilidade

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Maio de 2014

Experimento

- **Experimento aleatório (E):** é um experimento que pode ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas.
- Embora não possamos descrever um resultado particular do experimento, podemos descrever o conjunto de todos os possíveis resultados e as probabilidades associadas a eles. Isso porque repetindo o experimento um grande número de vezes, uma regularidade surgirá.
- A descrição de um experimento envolve um procedimento a ser realizado e uma observação a ser constatada.
  Ex 1: Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.
  Ex 2: Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras obtido.
  Ex 3: Receba duas cartas de um baralho e observe quantos ases foram obtidos.
  Ex 4: Um míssil é lançado. Em momentos específicos $t_1 t_2, ..., t_n$, a altura do míssil acima do solo é registrada.

Espaço Amostral

- **Espaço amostral (Ω):** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento E.
- Note a semelhança do espaço amostral com o conjunto fundamental U. Um espaço amostral está sempre associado a um experimento e este conjunto nem sempre é composto de números.
  Ex 1: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Ex 2: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
  Ex 3: $\Omega = \{0, 1, 2\}$.
  Ex 4: $\Omega = \{h_1, h_2, ..., h_n | h_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\}$.
  Ex 5: Jogue uma moeda 2 vezes e obtenha a sequência de caras e coroas obtidas. $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$.
- O número de elementos de um espaço amostral pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável. Todo resultado possível de um experimento corresponde a um, e somente um ponto $w \in \Omega$, sendo que resultados distintos correspondem a pontos distintos.

Eventos

- **Evento:** um evento $A \subset \Omega$ é um conjunto de resultados possíveis do experimento E, mas não necessariamente todos.
  Ex 1: Um número par ocorre, $A = \{2, 4, 6\}$.
  Ex 2: Duas caras ocorrem, $A = \{2\}$.
  Ex 3: Obtemos apenas um Ás, $A = \{1\}$.
  Ex 5: Obtemos pelo menos uma cara, $A = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$.
- Qualquer um desses eventos é um subconjunto de Ω. O evento Ω é chamado *evento certo*; o evento $\emptyset$ é chamado *evento impossível*, e o evento $\{\omega\}$ é dito *elementar*.

Operações com eventos

- **Eventos compostos:** $A \cup B$ é o evento "A ou B", $A \cap B$ é o evento "A e B" e $\overline{A}$ é o evento "não A".
- Se $A_1, ..., A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então $\cup_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos $A_i$ocorrer. Já $\cap_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem.
- Os mesmos resultados se estendem para coleções infinitas enumeráveis $A_1, A_2, ..., A_n, ...,$ sendo $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ os respectivos conjuntos.
- **Dependência:** $A \subset B$ significa que a ocorrência do evento A implica a ocorrência do evento B.
- **Eventos mutuamente excludentes:** $A \cap B = \emptyset$ significa que A e B são eventos que nunca ocorrem juntos, ou disjuntos.

- **Produto cartesiano de eventos:** se executarmos um experimento E duas vezes, então nosso espaço amostral será $\Omega x \Omega$ e os eventos AxA. Isso pode ser estendido para n vezes.
- **Proposição**: se o espaço amostral Ω for finito, com n elementos, entao existirá exatamente 2^n subconjuntos de Ω, ou seja, eventos. Ex: lançar uma moeda e verificar o resultado. $\Omega = \{H, T\}$. Número de subconjuntos é $2^2 = 4$, sendo eles $\{\emptyset\}$,$\{\mathrm{H}\}$,$\{\mathrm{T}\}$,$\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$.
- *Dica:* para enumerar subconjuntos de um espaço amostral basta pensar em termos matemáticos quais são os subconjuntos de Ω. Não pensem em termos dos resultados do experimento.

Definição clássica de probabilidade

- A *definição clássica de probabilidade* aplica-se apenas se o espaço amostral é finito e os resultados do experimento, $\omega \in \Omega$, são igualmente verossímeis:

$$\boxed{P(A) = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de resultados favoráveis à } A}{n^{\underline{o}} \text{ de resultados possíveis}} = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de elementos de } A}{n^{\underline{o}} \text{ de elementos de } \Omega}.}$$

- Esta definição de probabilidade é aplicável apenas a um número restrito de problemas (que envolvem escolha ao acaso e resultados finitos do experimento).

Exemplo

E = jogar um dado e observar o número de cima $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
A = obter um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$;
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Definição frequentista de probabilidade

- Repetindo n vezes um experimento E, podemos definir a frequência relativa do evento A como $f_A = \frac{n_A}{n}$. Se repetirmos muitas vezes E, de modo que $n \to \infty$, teremos a *definição frequentista de probabilidade.*

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}.}$$

- Apenas podemos utilizar esta definição quando temos a possibilidade de realizar o experimento muitas vezes, sendo o resultado suscetível ao valor de n.

- A *definição de probabilidade geométrica* nos diz que dois eventos tem a mesma probabilidade se, e somente se, eles têm a mesma área.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{área de A}}{\text{área de }\Omega}.}$$

Exemplo

$E =$ escolher um ponto ao acaso no círculo unitário;
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 1\}$;
$A = 1^{\underline{a}}$ coordenada do ponto escolhido é maior que a $2^{\underline{a}}$;
$A = \{(x,y) \in \Omega | x > y\}$;
$P(A) = \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}$. (Lembre que a área de um círculo é $A = \pi \times r^2$).

- Essa probabilidade é mais utilizada com espaços amostrais infinitos não-enumeráveis.

Definição matemática de probabilidade

- A probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ associado à E, e denotada por P(A), é um número real que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Se $A \cap B = \emptyset$ (eventos mutuamente excludentes), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
4. Se $A_1, A_2, ..., A_n, ...,$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então $P(U_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$

- A propriedade 3 também vale para um número finito de uniões, $P(U_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
- Da propriedade 3 decorre que $P(\emptyset)=0$, pois $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) = P(A)$.
- Das propriedades 2 e 3 decorre que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, pois $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$.

Teorema

Se A e B forem dois eventos quaisquer, não necessariamente excludentes, então:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração.

Note que $A \cup \bar{A} = \Omega$ e $A \cup B = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup (B \cap \bar{A})$, sendo A e $(B \cap \bar{A})$ eventos excludentes, de modo que
$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$ (1). Analogamente,
$B = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$, de modo que
$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$ (2). Juntando (1) e (2), temos
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. $\square$

Probabilidade da união de eventos

Teorema

Se A, B e C forem 3 eventos quaisquer, então:
$P(A \cup B \cup C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Demonstração.

Escreva $A \cup B \cup C$ na forma $(A \cup B) \cup C$ e aplique o resultado do teorema anterior, de modo que
$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$. Note que
$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$,
e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Logo, $P((A \cup B) \cup C) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$. $\square$

- O teorema acima pode ser estendido para n eventos.

Probabilidade de subconjuntos

Teorema

Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração.

Como $A \cup B = B$, podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, $B = A \cup (B \cap \bar{A})$, de modo que
$P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$. $\square$

- Note que quaisquer das definições de probabilidade vistas anteriormente devem respeitar as propriedades matemáticas que desenvolvemos.
- Quando atribuímos uma probabilidade a um evento A chamamos ele de *evento aleatório*.

- Uma *álgebra de eventos* aleatórios, $\mathcal{A}$, é a coleção (classe) de subconjuntos de Ω que possui algumas propriedades básicas:
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{B} \in \mathcal{A}$;
  3. $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.
- As seguintes propriedades decorrem de 1, 2 e 3:
  4. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
  5. $\forall n$ e $\forall B_1, B_2, ... B_n \in \mathcal{A}$, temos $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{A}$ e $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{A}$.
- Dizemos que a álgebra é fechada para um número finito de aplicações das operações $\cup$ e $\cap$.
- Se estas propriedades forem válidas para um número infinito enumerável de aplicações de $\cup$ e $\cap$, então chamamos $\mathcal{A}$ de $\sigma -$ *álgebra*.

Espaço de probabilidades

- O nosso *modelo probabilístico* estará situado dentro de um *espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, constituído de:

1. Um conjunto não-vazio Ω de resultados possíveis do experimento E, chamado espaço amostral;
2. Uma álgebra de eventos aleatórios $\mathcal{A}$, composta por todos os subconjuntos de Ω;
3. Uma probabilidade P definida sobre os conjuntos de $\mathcal{A}$, com as propriedades matemáticas vistas anteriormente.

- É nesse espaço que trabalharemos, sendo sempre importante identificar $\Omega, \mathcal{A}$ e P.