

Métodos Estatísticos Básicos

Aula 9 - Variáveis aleatórias

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL)

Junho de 2014

- ▶ **Variável aleatória:** seja E um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento E . Uma função X , que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$, é uma variável aleatória.
- ▶ **Duas interpretações:**
 1. Realizamos o experimento E , que dá o resultado $\omega \in \Omega$, e a seguir calculamos o número $X(\omega)$;
 2. O número $X(\omega)$ é pensado como o próprio resultado do experimento, e a imagem de $X(\omega)$, denotada R_X , torna-se o espaço amostral.
- ▶ **Obs:** lembre da definição de função.
 1. $\forall \omega \in \Omega, \exists y \in \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) = y$;
 2. $\forall y, z \in \mathbb{R}$ com $X(\omega) = y$ e $X(\omega) = z$, temos $y = z$.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplo

No experimento de lançar duas moedas e observar os resultados, temos $\Omega = (H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$. Podemos definir a variável aleatória X como sendo o número de caras obtidas, de modo que $X(H, H) = 2$, $X(H, T) = X(T, H) = 1$ e $X(T, T) = 0$. Note que ao aplicar a função X alteramos o experimento.

Exemplo

Considere o experimento de lançar 3 moedas e observar a descrição detalhada de como e onde as moedas pousaram. Poderíamos avaliar:

1. $X(\omega) =$ n° de caras que aparecem;
2. $Y(\omega) =$ distância máxima entre 2 moedas quaisquer;
3. $Z(\omega) =$ distância mínima das moedas da borda da mesa.

- ▶ Podemos incluir a avaliação de $X(\omega)$ na descrição do nosso experimento, de modo que $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ (ex. 2.1) é o nosso novo espaço amostral.
- ▶ Podemos também relacionar certos eventos $A \subseteq \Omega$ a eventos de R_X . Seja $B \subseteq R_X$, podemos definir A como $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$. Dizemos então que A e B são equivalentes.

Variáveis aleatórias discretas

- ▶ Se o conjunto imagem $X(\Omega)$, que descreve a variável aleatória X , for finito ou infinito enumerável, dizemos que X é uma variável aleatória discreta.
- ▶ A função de probabilidade de uma variável aleatória discreta X é uma função que associa para cada resultado $x_1, x_2, \dots \in X$, um número $p(x_i) = P(X = x_i)$, tal que:
 1. $p(x_i) \geq 0$ para todo i ;
 2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.
- ▶ Chamamos p de probabilidade, e a coleção de pares $[x_i, p(x_i)]$ para $i = 1, 2, \dots$ de distribuição de probabilidade de X .

- ▶ Seja $B \subseteq X(\Omega)$ tal que $B = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\}$, então $P(B) = P[\omega | X(\omega) \in B] = P[\omega | X(\omega) = x_{ij}, j = 1, 2, \dots] = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$.
- ▶ Ou seja, a probabilidade de um evento B é igual a soma das probabilidades dos resultados individuais associados a B .

- ▶ Considere um experimento E e seja A algum evento associado a E . Defina $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1 - p$. Considere a variável aleatória: $X = 0$, se $\omega \notin A$ (fracasso), ou $X = 1$, se $\omega \in A$ (sucesso).
- ▶ Qual a função de probabilidade desta variável aleatória?
- ▶ **Distribuição de Bernoulli:** $P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$ para $k \in 0, 1$.

Distribuição binomial

- ▶ Agora considere que repetimos esse experimento n vezes, e suponha que $P(A)$ permaneça a mesma para todas as repetições.
- ▶ O espaço amostral será formado por todas as sequências possíveis $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onde cada a_i pertence a A ou \bar{A} .
- ▶ A variável aleatória $X = n^\circ$ de elementos favoráveis a A (ou número de sucessos), terá valores possíveis que vão de 0 até n . Mas o número total de formas de se obter k sucessos em n repetições do experimento é $\binom{n}{k}$. A função de probabilidade de X será:
- ▶ **Distribuição binomial:** $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ para $k = 0, 1, \dots, n$.
- ▶ *Obs:* note que para utilizarmos a distribuição binomial, as n repetições do experimento devem ser independentes, de modo que consideramos todos os resultados possíveis igualmente.

Exemplo

Qual a probabilidade de obtermos menos de 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda justa?

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X < 3) = \binom{5}{0} (1/2)^0 (1/2)^5 + \binom{5}{1} (1/2)^1 (1/2)^4 + \binom{5}{2} (1/2)^2 (1/2)^3$$

$$P(X < 3) = 1/32 + 5(1/32) + 10(1/32) = 1/2$$

- Ver exemplos 4.8, 4.9, e 4.10 das págs 78 e 80.

Variáveis aleatórias contínuas

- ▶ Se a imagem da variável aleatória X gerar um conjunto infinito não-enumerável de valores, substituímos p definida somente para x_1, x_2, \dots por uma função f definida para todos os valores de x .
- ▶ **Variável aleatória contínua:** X é uma variável aleatória contínua se existir uma função f , denominada função densidade de probabilidade (fdp) de X que satisfaça:
 1. $f(x) \geq 0$ para todo x ;
 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
 3. Para quaisquer a, b com $-\infty < a < b < \infty$, teremos $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.