NOTA DE AULA - MODELOS MATEMÁTICOS

CHIANG – PARTE IV: PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Prof.º RENAN PERES

[CHIANG, Capitulo 9] – Otimização

Neste capítulo, buscaremos desenvolver o arcabouço básico para solucionarmos um problema de equilíbrio através da otimização de uma função, assim nas seções posteriores será encontrado um breve resumo e uma indicação de leitura. Tendo em vista desenvolver e fixar os conceitos dessa parte do conteúdo, **sugiro realizarem uma leitura detalhada do livro** e resolver os exercícios de cada seção indicada. Esse conteúdo não será cobrado na avaliação de segunda-feira, mas é parte do conteúdo previsto e necessário para as próximas disciplinas, dediquem um tempo para isso, será importante.

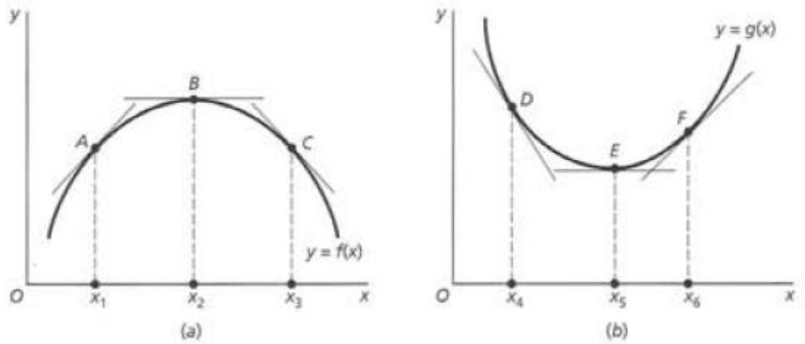
[CHIANG, Capitulo 9, Seção 9.1-2] – Teste da derivada primeira

Se o valor da derivada de uma função f em $x = x_0$ for $f'(x) = 0$, então o valor da função em x_0, $f(x_0)$, será um valor extremo, ou um ponto de inflexão (sela).

[CHIANG, Capitulo 9, Seção 9.3] – Interpretação da Segunda Derivada

A função derivada $f'(x)$ mede a taxa de variação da função f. Pelo mesmo critério, a função derivada segunda $f''(x)$ é a medida da taxa de variação da derivada primeira $f'(x)$. Podemos observar também o comportamento dessas funções pelo sinal apresentado em suas derivadas:

FIGURA 9.5



$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
Função Côncava	Função Convexa

- Ver exemplo 1 (pg. 218)

[CHIANG, Capitulo 9, Seção 9.4] – Teste da derivada segunda

Se a derivada primeira de uma função $f(x)$ em $x = x_0$ for $f'(x) = 0$, então o valor da função em x_0, $f(x_0)$, será:

i) *Um máximo relativo se o valor da derivada segunda em x_0 for $f''(x_0) < 0$*
ii) *Um minimo relativo se o valor da derivada segunda em x_0 for $f''(x_0) > 0$*
iii) *Nada podemos afirmar quando o valor da derivada segunda em x_0 for $f''(x_0) = 0$*

- Ver o exemplo 3 (pg. 226)

[CHIANG, Capitulo 9, Seção 9.6] – Teste da derivada N-ésima

Se a derivada primeira de uma função $f(x)$ em $x = x_0$ for $f'(x) = 0$, e se o primeiro valor diferente de zero das derivadas sucessivas for encontrado na N-ésima derivada, $f^N(x_0) \neq 0$, então o valor da função em x_0, será:

i) *Um máximo relativo se N for par e o valor da derivada de ordem N em x_0 for $f^N(x_0) < 0$*
ii) *Um mínimo relativo se N for par e o valor da derivada de ordem N em x_0 for $f^N(x_0) > 0$*
iii) *Um ponto de inflexão se N for ímpar.*

[CHIANG, Capitulo 11, Seção 11.4] – Otimização em função com mais de duas variáveis

Teste de determinante para valores extremos:

Dada à função $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, utilizando a matriz Hessiana dada por $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$, podemos obter a seguinte tabela:

TABELA 11.2 Teste com Determinantes para Extremo Relativo: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Condição	Máximo	Mínimo
Condição necessária de primeira ordem	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$
Condição suficiente de segunda ordem†	$\lvert H_1\rvert < 0; \lvert H_2\rvert > 0; \lvert H_3\rvert < 0; \dots ; (-1)^n\lvert H_n\rvert > 0$	$\lvert H_1\rvert, \lvert H_2\rvert, \dots, \lvert H_n\rvert > 0$

† Aplicável somente após a condição necessária de primeira ordem ter sido satisfeita.

- Ver exemplo 1 (pg. 299).

[CHIANG, Capitulo 12, Seção 12.1] – Otimização com restrições

Considere um consumidor cuja a função de utilidade é dada por $U = x_1x_2 + 2x_1$, agora vamos inserir o poder de compra do consumidor ao problema através de uma restrição orçamentaria. Suponha que o consumidor queira gastar \$60 e os preços dos bens $x_1\ e\ x_2$ são $p_1 = 4\ e\ p_2 = 2$ então a restrição orçamentária pode ser expressa por $4x_1 + 2\,x_2 = 60$

O nosso problema de maximização pode ser expresso por:

$$Máx\ U = \ x_1x_2 + 2x_1 \ \ s.a.(sujeito\ \text{à})\ 4x_1 + 2\,x_2 = 60$$

De maneira mais simples podemos resolver esse problema isolando o x_2 da restrição e o inserindo na função de utilidade do consumidor, encontrando $U = 32x_1 - 2{x_1}^2$ **(faça isso!).**

Agora podemos encontrar os valores estacionários da função (ótimos), vamos igualar $\frac{dU}{dx_1} = 0$ e isolando o x_1 encontramos o seu valor $x_1^* = 8$, substituindo este valor na restrição também podemos encontrar de ${x_2}^* = 14$. Substituindo esses valores na função de utilidade, encontramos o seu valor estacionário $U^* = 8.14 + 2(8) = 128$; e, visto que a derivada segunda é $\frac{d^2U}{dx_1^2} = 4 < 0$, aquele valor estacionário constitui um máximo de U. **(refaça o problema!)**

Quando a restrição é uma função complicada, ou quando há várias restrições a considerar, este método de substituição pode tornar-se trabalhoso. Nesse caso, podemos recorrer a um métodos conhecido como "método do multiplicador de Lagrange".

[CHIANG, Capitulo 12, Seção 12.2] – Método do multiplicador de Lagrange

Utilizando o problema anterior podemos escrever a função de Lagrange da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = \ x_1x_2 + 2x_1 + \lambda[60 - (4x_1 + 2\,x_2)]$$

Onde λ é o multiplicador de Lagrange. **(ver a continuação deste exemplo no livro)**

De forma geral, dada uma função qualquer $z = f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = c$ onde c é uma constante. Podemos escrever a função de Lagrange como:

$$\mathcal{L} = \ f(x, y)\ + \lambda[c - g(x, y)]$$

Para valores estacionários de $\mathcal{L}$, para resolver, consideramos uma função de três variáveis $\lambda, x\ e\ y$, as condições necessárias de primeira ordem no problema da maximização da função são: ***Ver exemplos 1 e 2 (pg. 333)**

$i)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = c - g(x, y) = 0$

$$ii)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial\, f(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial\, g(x, y)}{\partial x} = 0$$

$$iii)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial\, f(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial\, g(x, y)}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \lambda^*$ - Além disso o lambda pode ser interpretado como uma medida de sensibilidade de $\mathcal{L}^*$ a uma mudança na restrição (c).

[CHIANG, Capitulo 12, Seção 12.3] – Matriz Hessiano aumentado

Para montarmos a matriz hessiana aumentada utilizamos as derivadas parciais de primeira ordem da função de restrição e as derivadas parciais de segunda ordem da função Lagrangeana. Como veremos a seguir

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x \partial x} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}$$

Dessa maneira podemos calcular o determinante de $\bar{H}$, dado por $|\bar{H}|$, se $|\bar{H}| > 0$ o valor ótimo encontrado ao maximizar o Lagrangeano será um ponto de máximo e se $|\bar{H}| < 0$ será um ponto de mínimo.

- Ver exemplos 1, 2 e 3 (pg. 340)

[CHIANG, Capitulo 12, Seção 12.6] – Funções Homogêneas

Diz-se que uma função é homogênea de grua k se ao multiplicarmos uma constante t por cada uma das variáveis independentes da função f, o valor desta função será alterado na proporção t^k. Isto é:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Ver exemplos 1 , 2 e 3 (pg. 363)