

Lista de exercícios 2

Métodos Estatísticos Básicos

Prof. Regis Augusto Ely

1 de julho de 2014

1 Variáveis aleatórias unidimensionais

- Suponha que a variável aleatória X tenha os valores possíveis $1, 2, 3, \dots$, e $P(X = j) = 1/2^j, j = 1, 2, \dots$
 - Calcule $P(X \text{ ser par})$
 - Calcule $P(X \geq 5)$
 - Calcule $P(X \text{ ser divisível por } 3)$
- A percentagem de álcool ($100X$) em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória, onde $X, 0 < X < 1$, tem a seguinte função densidade de probabilidade: $f(x) = 20x^3(1 - x)$, para $0 < x < 1$.
 - Estabeleça a expressão da função de distribuição acumulada, F , e esboce seu gráfico.
 - Calcule $P(X \leq 2/3)$.
 - Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificamente, se $1/3 < X < 2/3$, o composto se vende por C_1 dólares por galão; caso contrário, ele se vende por C_2 dólares por galão. Se o custo for C_3 dólares por galão, calcule a distribuição de probabilidade do lucro líquido por galão.
- Cada uma das seguintes funções representa a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua. Em cada caso, $F(x) = 0$ para $x < a$ e $F(x) = 1$ para $x > b$, onde $[a, b]$ é o intervalo indicado. Em cada caso, esboce o gráfico da função F , determine a função densidade de probabilidade f e faça o gráfico. Também verifique que f é uma fdp :
 - $F(x) = x/5$, para $0 \leq x \leq 5$.
 - $F(x) = (2/\pi)\text{sen}^{-1}(\sqrt{x})$, para $0 \leq x \leq 1$.
 - $F(x) = e^{3x}$, para $-\infty < x \leq 0$.
 - $F(x) = x^3/2 + 1/2$, para $-1 \leq x \leq 1$.

4. Suponha que 5 por cento de todas as peças que saiam de uma linha de fabricação sejam defeituosas. Se 10 peças forem escolhidas e inspecionadas, qual será a probabilidade de que no máximo 2 defeituosas sejam encontradas?
5. (ANPEC, 2013) Em um dia de verão, você está sentado em um parque olhando as pessoas passarem. A probabilidade de uma pessoa estar andando de bicicleta é p , e a probabilidade de uma pessoa estar andando a pé é $1-p$. As probabilidades dos eventos são independentes. Defina Y como o número de pessoas andando de bicicleta até que n pessoas passem por você. Defina Z como o número de pessoas andando de bicicleta que passam por você antes da primeira pessoa andando a pé passar por você. Com base nessas informações, julgue se as afirmativas são verdadeiras ou falsas, justificando:
 - (0) Y tem uma distribuição binomial com parâmetros n e p .
 - (1) Z tem uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p .
 - (2) Y e Z são variáveis aleatórias independentes.
6. Um ponto é escolhido ao acaso, sobre uma reta de comprimento L . Qual a probabilidade de que o quociente do segmento mais curto para o mais longo seja menor do que $1/4$?

2 Variáveis aleatórias bidimensionais

7. Exercício 6.1 do livro do Meyer, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística.
8. Exercício 6.2 do livro do Meyer, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística.
9. Exercício 6.3 do livro do Meyer, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística.
10. Exercício 6.4 do livro do Meyer, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística.

3 Esperança e variância de variáveis aleatórias

11. Uma certa liga é formada pela reunião da mistura em fusão de dois metais. A liga resultante contém uma certa percentagem de chumbo X , que pode ser considerada como uma variável aleatória. Suponha que X tenha a seguinte fdp: $f(x) = \frac{3}{5}10^{-5}x(100 - x)$, para $0 \leq x \leq 100$. Suponha que o lucro líquido obtido pela venda dessa liga (por libra), seja a seguinte função da percentagem de chumbo contida: $P = C_1 + C_2X$. Calcule o lucro esperado (por libra).
12. Um dado equilibrado é jogado 72 vezes. Chamando de X o número de vezes que aparece o seis, calcule $E(X^2)$.

13. Suponha que X seja uma variável aleatória, para a qual $E(X) = 10$ e $Var(X) = 25$. Para quais valores positivos de a e b deve $Y = aX - b$ ter valor esperado 0 e variância 1?
14. O que é o valor esperado condicionado? Defina-o matematicamente e descreva suas propriedades.
15. O que nos diz a Desigualdade de Tchebycheff? Qual a interpretação dessa desigualdade?
16. Suponha que ambas as curvas de regressão da média sejam, de fato, lineares. Particularmente, admita que $E(Y|x) = -(3/2)x - 2$ e $E(X|y) = -(3/5)y - 3$.
 - a) Determine o coeficiente de correlação ρ .
 - b) Determine $E(X)$ e $E(Y)$.

4 Variáveis aleatórias discretas e contínuas

17. Se a variável aleatória discreta X tiver uma distribuição de Poisson com parâmetro β , e se $P(X = 0) = 0,2$, calcular $P(X > 2)$.
18. Suponha-se que a probabilidade de que uma peça, produzida por determinada máquina, seja defeituosa é 0,2. Se 10 peças produzidas por essa máquina forem escolhidas ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais de uma peça defeituosa seja encontrada? Empregue as distribuições binomial e de Poisson e compare as respostas.
19. Suponha que a probabilidade de um componente de computador ser defeituoso é de 0,2. Numa mesa de testes, os componentes são testados um a um. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado ocorrer no sétimo componente testado. Indique o valor esperado do número de componentes testados até aparecer o primeiro defeito, bem como a variância desse número.
20. Considere o mesmo experimento da questão anterior. Determine a probabilidade do terceiro defeito encontrado ocorrer no sétimo componente testado. Indique o valor esperado do número de componentes testados até aparecer o terceiro defeito, bem como a variância desse número.
21. Qual é a relação entre as distribuições binomial e de Pascal?
22. No fichário de um hospital estão arquivados os prontuários de 20 pacientes que deram entrada no Pronto Socorro apresentando algum problema cardíaco. Destes, 5 sofreram infarto. Retirando-se uma amostra ao acaso de 3 destes prontuários, qual a probabilidade de que dois deles sejam de pacientes que sofreram infarto?
23. Suponha que temos um vaso com 10 bolinhas de gude - 2 bolinhas vermelhas, 3 bolinhas verdes e 5 bolinhas azuis. Selecionamos 4 bolinhas aleatoriamente do vaso,

com reposição. Qual é a probabilidade de selecionar 2 bolinhas verdes e 2 bolinhas azuis?

24. Suponha que a variável aleatória X tenha uma distribuição $N(2, 0, 16)$. Empregando a tábua da distribuição normal, calcule as seguintes probabilidades:
 - a) $P(X \geq 2, 3)$
 - b) $P(1, 8 \leq X \leq 2, 1)$
25. Suponha-se que a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos, D_1 e D_2 , tenham distribuições $N(40, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se o dispositivo eletrônico tiver de ser usado por um período de 45 horas, qual dos dispositivos deve ser preferido? Se tiver de ser usado por um período de 48 horas, qual deles deve ser preferido?
26. Considere uma variável aleatória X que tem distribuição exponencial. Descreva:
 - a) A função densidade de probabilidade de X .
 - b) A função de distribuição acumulada de X .
 - c) O valor esperado e a variância de X .
 - d) Um problema que é modelado através da distribuição exponencial.
27. Considere uma variável aleatória X que tem distribuição gama. Descreva:
 - a) A função densidade de probabilidade de X .
 - b) A função de distribuição acumulada de X .
 - c) O valor esperado e a variância de X .
 - d) Um problema que é modelado através da distribuição gama.
28. Qual é a relação existente entre a distribuição qui-quadrada e a distribuição gama?
29. Demonstre que o quadrado de uma distribuição $N(0, 1)$ tem uma distribuição qui-quadrada com um grau de liberdade. Generalize esse resultado para a soma de r variáveis aleatórias $N(0, 1)$. Descreva a função densidade de probabilidade da distribuição qui-quadrada, bem como seu valor esperado e sua variância.
30. Qual a relação existente entre as provas de Bernoulli e as distribuições binomial, geométrica e de Pascal?
31. Qual a relação existente entre um processo de Poisson e as distribuições de Poisson, exponencial e gama?
32. Suponha que (X, Y) tenha uma distribuição normal bidimensional. Descreva a função densidade de probabilidade conjunta de (X, Y) e as distribuições marginais de X e Y .
33. Suponha que a variável aleatória X tenha uma distribuição exponencial truncada à esquerda. Obtenha $E(X)$.

5 Soma de variáveis aleatórias

34. Enuncie e explique o que é a Lei dos Grandes Números.
35. Enuncie e explique o que é o Teorema do Limite Central.
36. Suponha que uma amostra de tamanho n seja obtida de uma grande coleção de parafusos, 3 por cento dos quais sejam defeituosos. Qual será a probabilidade de que, no máximo, 5 por cento dos parafusos selecionados sejam defeituosos, se:
 - a) $n = 6$?
 - b) $n = 60$?
 - c) $n = 600$?