Métodos Estatísticos Básicos

Aula 7 - Probabilidade condicional e independência

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Maio de 2014

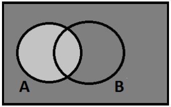
- Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathcal{A}$ e $P(B) > 0$, a *probabilidade condicional* de um evento $A \in \mathcal{A}$ dado que o evento B ocorre, é definida por:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.}$$

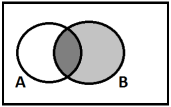
- Se $P(B) = 0$, então $P(A|B)$ pode ser arbitrariamente definida. Podemos usar $P(A|B) = 0$ ou $P(A|B) = P(A)$.
- Em termos de probabilidade frequentista:

$$\boxed{P(A|B) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\underline{o}} \text{ de ocorrências de } A \cap B \text{em n ensaios}}{n^{\underline{o}} \text{ de ocorrências de B nos mesmos n ensaios}}.}$$

- Note que sempre que calcularmos $P(A|B)$ estamos calculando $P(A)$ em relação ao espaço amostral reduzido B.



$$P(A) = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de }\Omega}$$



$$P(A|B) = \frac{\text{Área de } A \cap B}{\text{Área de B}}$$

Probabilidade condicional

Exemplo

E = lançamos dois dados justos registrando o resultado como (x_1, x_2).

Temos $\Omega = \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (6,1) & (6,2 & \dots & (6,6) \end{matrix}$, com 36 resultados possíveis.

Dados os eventos: $A = \{(x_1,x_2)|\ x_1 + x_2 = 10\}$ e $B = \{(x_1,x_2)|\ x_1 > x_2\}$.

Calcule $P(A|B)$ **e** $P(B|A)$.

Como $A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\}$, e

$B = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), \dots$

$\dots, (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

Temos $P(A) = \frac{3}{36}$ e $P(B) = \frac{15}{36}$. Logo, $P(A|B) = \frac{1}{15}$ e $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Alternativamente, como $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$, temos

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{15/36} = 1/15$ e $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3}$.

- Note que podemos calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$ de duas maneiras:

1. Calculando diretamente a probabilidade de A em relação ao espaço amostral reduzido B;
2. Empregando a fórmula anterior, onde $P(A \cap B)$ e P(B) são calculados em relação ao espaço amostral original Ω.

Exemplo

$E =$ retirar duas peças de um lote de 100 peças com 80 não-defeituosas e 20 defeituosas, e observar os resultados.
$\Omega = \{(N, N), (N, D), (D, N), (D, D)\}$.
A = {primeira peça é defeituosa} e B = {segunda peça é defeituosa}.
Se extrairmos com reposição, $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.
Sem repor a primeira peça, $P(B|A = D) = \frac{19}{99}$, ou $P(B|A = N) = \frac{20}{99}$.
Note que $P(B) = P(A = D)P(B|A = D) + P(A = N)P(B|A = N) = \frac{1}{5} \cdot \frac{19}{99} + \frac{4}{5} \cdot \frac{20}{99} = \frac{1}{5}$.

Partição do espaço amostral

- Dizemos que os eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ representam uma *partição do espaço amostral* Ω quando:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$;
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = \Omega$;
3. $P(B_i) > 0$ para todo i.

- Assim, quando o experimento E é realizado, um, e somente um dos eventos B_i ocorre.

Exemplo

Ao jogar um dado e observar os resultados, os eventos $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4, 5\}$ e $B_3 = \{6\}$ formam uma partição do espaço amostral, enquanto $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{4, 5, 6\}$ não formam.

Teorema da probabilidade total

- Se os eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, então podemos escrever qualquer evento $A \subseteq \Omega$ como $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k)$.
- Como os eventos dessas uniões são mutuamente excludentes, então $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$.
- Utilizando a fórmula da probabilidade condicional, obtemos o *teorema da probabilidade total:*

$$\boxed{P(A) = P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + ... + P(A/B_k).P(B_k).}$$

- **Teorema de Bayes:** se $B_1, B_2, ..., B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, então

$$\boxed{P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i).P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i).P(B_i)}.}$$

Exemplo

Problema de Monty-Hall: 3 portas e 1 prêmio. O apresentador revela uma delas e pede se você quer trocar. A troca é vantajosa? Considere os eventos $A_i = \{\text{prêmio está na porta i}\}$ e $O = \{\text{apresentador revela porta 2}\}$. Temos $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$; $P(A_1|O) = \frac{P(A_1 \cap O)}{P(O)} =$

$$\frac{P(O|A_1)P(A_1)}{P(O|A_1)P(A_1) + P(O|A_2)P(A_2) + P(O|A_3)P(A_3)} = \frac{1/2.1/3}{1/2.1/3 + 0 + 1.1/3} = \frac{1}{3};$$ e

$P(A_3|O) = \frac{P(O|A_3)P(A_3)}{P(O)} = \frac{1.1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$. Logo, devemos trocar.

- **Independência:** dado o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, os eventos aleatórios A e B são independentes se, e somente se $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.
- A independência entre A e B também equivale à $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$, porque $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A).P(B)$.
- Se $P(A) = 0$, então $P(A \cap B) = 0$, e A e B são independentes $\forall B \in \mathcal{A}$.
- Se $P(B) = 1$, então $P(A \cap B) = P(A)$, logo A e B são independentes $\forall A \in \mathcal{A}$.

Proposição

O evento A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) = 0$ *ou* $P(A) = 1$*.*

Demonstração.

$P(A) = P(A \cap A) = P(A).P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. $\square$

Independência

Proposição

Se A e B são eventos independentes, então A e $\bar{B}$ também são (bem como $\bar{A}$ e B, e $\bar{A}$ e $\bar{B}$).

Demonstração.

Sejam A e B eventos independentes. Como $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, então $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, de modo que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A).P(B)$ pela independência. Logo, $P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A).P(\bar{B})$, e A e $\bar{B}$ são independentes. $\square$

- A intuição por trás da proposição é a de que B é independente de A se tanto a ocorrência quanto a não ocorrência de A não afetam a probabilidade de B ocorrer, $P(B|A) = P(B)$ e $P(B|\bar{A}) = P(B)$.
- Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B não são independentes (a menos que um deles tenha probabilidade zero). Não confundir independência com eventos excludentes ($P(A \cap B) = 0$).

Independência

- Eventos aleatórios A_i são independentes 2 a 2 se $P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$, $\forall i \neq j$.
- Eventos $A_1, ..., A_n (n \geq 2)$ são mutuamente independentes se $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{im}) = P(A_{i1}).P(A_{i2})...P(A_{im})$, $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n$, e $\forall n = 2, 3, ..., n$.
- Lembrar que a fórmula $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ apenas se aplica quando os eventos A e B são independentes, caso contrário devemos utilizar a probabilidade condicional, $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$ (exemplo das peças defeituosas).

Indenpendência

- Nem todos os eventos que são independentes 2 a 2 são mutuamente independentes.

Exemplo

E = jogar dois dados e observar os resultados.
A = {1º dado mostra nº par}; B = {2º dado mostra nº ímpar};
C = {ambos os dados mostram nº ímpares ou pares}.
Temos $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, e
$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$, mas
$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A).P(B).P(C)$.