Métodos Estatísticos Básicos

Aula 8 - Análise combinatória

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Maio de 2014

Número de elementos do espaço amostral

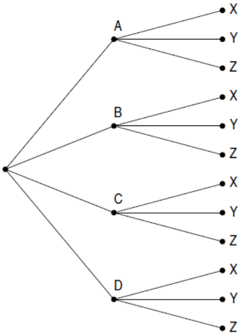
- A definição clássica de probabilidade requer que saibamos calcular o número de elementos de determinados conjuntos.
- Dividindo o número de elementos do espaço amostral que são favoráveis a um evento A qualquer pelo número total de elementos do espaço amostral, obtemos a probabilidade do evento A ocorrer (P(A)).
- Lembrar de que esta definição clássica de probabilidade serve apenas para espaços amostrais finitos e quando os resultados do experimento são igualmente verossímeis.
- Veremos cinco principais técnicas de enumeração de conjuntos, que consistem em identificar quantos são os possíveis resultados de um procedimento (experimento).

- **Quando se aplica a regra da multiplicação?** Se existirem k procedimentos independentes e o k-ésimo procedimento puder ser executado de n_i maneiras, então o número total de maneiras de se executar os k procedimentos é $n_1.n_2....n_k$.
- É essencial que os procedimentos sejam independentes, ou seja, as maneiras de executar um procedimento i não impactam nas maneiras de executar outro procedimento j.
- Os procedimentos podem ser interpretados como sendo sequenciais.

Regra da multiplicação

Exemplo

Uma peça passa por 2 estações de controle. Na primeira, 4 classificações são possíveis (A, B, C, D). Na segunda estação, 3 classificações são possíveis (X, Y, Z). Existem 3.4=12 possíveis classificações para cada peça.



Regra da adição

- **Quando se aplica a regra da adição?** Se existirem k procedimentos independentes a serem realizados e o k-ésimo procedimento puder ser executado de n_i maneiras, então o número total de maneiras de se executar os k procedimentos é $n_1 + n_2 + ... + n_k$.
- Note que agora não podemos executar 2 ou mais procedimentos em conjunto (apenas um deles é possível).
- Os procedimentos podem ser interpretados como sendo estáticos, em apenas um período de tempo.

Exemplo

Se viajamos por ônibus ou trem, sendo que há 3 rodovias e 2 ferrovias, o número possível de caminhos é $3 + 2 = 5$.

- **Fatorial:** sendo n um número inteiro positivo, definimos $n! = (n).(n-1).(n-2).....1$ como o fatorial de n. Também definimos $0! = 1$.
- **Permutação:** se tivermos n objetos, ${}_nP_n = n!$ será o número de maneiras diferentes que podemos dispor esses objetos.
- Note que este experimento pode ser interpretado como sequencial, mas agora as etapas não são independentes, pois elas são as mesmas em cada período de tempo. Além disso, estamos realizando o experimento sem reposição (não podemos repetir um procedimento que já foi realizado).

Exemplo

Se tivermos três letras (a, b, c), temos as seguintes permutações: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Logo, como $n = 3$, temos ${}_3P_3 = 3! = 6$.

- **Arranjos:** se, dados n objetos, queremos escolher r deles, com $0 \leq r \leq n$, e permutar os r escolhidos, denotamos por nAr o número de maneiras de fazer isso, que é $nAr = \frac{n!}{(n-r)!}$.
- Note que estamos calculando o número de permutação dos n objetos e descontando o número de permutações dos (n-r) objetos restantes. Assim, temos as permutações possíveis de n objetos ordenados r a r.

Exemplo

Se tivermos quatro letras (a, b, c, d), e queremos rearranjá-las de 2 em 2, temos as seguintes combinações, ${}_4A_2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$.

Combinações

- **Combinações:** se, dados n objetos, queremos escolher r deles, com $0 \leq r \leq n$, e permutar os r escolhidos, mas não nos importa a ordem deles, então $C = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$.

Exemplo

se temos a, b, c e d, e $r = 2$, então desejamos contar ab, ac, ad, bc, bd, cd (não consideramos ba, ca, da, cb, db, dc). Ao todo são $C = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \binom{4}{2} = 6$ combinações.

- Note que uma vez que r objetos tenham sido escolhidos dentre n, existirão r maneiras de permutá-los entre si, por isso devemos dividir o arranjo por r.

- Definiremos $\binom{n}{r}$ para n inteiro e positivo, e r inteiro tal que $0 \leq r \leq n$. Essa expressão é denominada *coeficiente binomial*.
- Note que $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$.
- **Teorema binomial:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^k.b^{n-k}$.

Exemplo

$(a+b)^2 = \binom{2}{0}.a^0.b^{2-0} + \binom{2}{1}.a^1.b^{2-1} + \binom{2}{2}.a^2.b^{2-2} = 1.1.b^2 + 2.a.b + 1.a^2.1.$

Propriedade 1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Demonstração.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r)!)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$ □

Propriedade 2. (Teorema de Pascal) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

Demonstração.

Se escolhermos r dentre n objetos, um objeto qualquer a_1 pode estar nesses r escolhidos, e então sobrará $\binom{n-1}{r-1}$ combinações; ou então o objeto a_1 pode não estar entre os r objetos escolhidos, sobrando $\binom{n-1}{r}$ combinações. Obrigatoriamente a_1 estará ou não estará incluído nos r objetos, não podendo ocorrer ambas as coisas. Podemos então utilizar a regra da adição para a combinação, e vale a propriedade. □

Propriedades do coeficiente binomial

Exemplo

Um grupo de 8 pessoas é formado por 5 homens e 3 mulheres. Quantas comissões de 3 pessoas, incluindo exatamente 2 homens podem ser constituídas?
Podem ser constituídas $\binom{5}{2}.\binom{3}{1} = 30$ comissões.

Permutações com elementos repetidos

- Se temos n objetos, tais que n_1 sejam de uma mesma espécie, n_2 de outra e assim por diante, com $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, então o número de permutações possíveis desses n objetos é dado por: $\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$.
- Se todos os objetos forem diferentes, ou seja $n_i = 1$ para $i = 1, 2, ..., k$, então temos o caso da permutação simples, ${}_nP_n = n!$.