Métodos Estatísticos Básicos

Aula 11 - Variáveis aleatórias de duas ou mais dimensões

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Maio de 2016

- Sejam X = X(s) e Y = Y(s) duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in \Omega$. Demonstramos (x,y) uma variável aletória bidimensional.
- Se $X_1 = X_1(s)$,$X_2 = X_2(s)$,... , $X_n = X_n(s)$ forem n funções, denominamos $(X_1, \ldots, X_n)$ uma variável aletatória bidimensional ou vetor aleatório.

- Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_i) associaremos um número $p\left(x_i, y_i\right)$ representando $P\left(X = X_i, Y = Y_i\right)$ e satisfazendo:
  1. $p\left(x_i, y_i\right) \geq 0$ para todo (x,y)
  2. $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p\left(x_j, y_i\right) = 1$
- Onde p é a função de probabilidade de (X,Y)

Variáveis aleatórias de duas ou mais dimensões

- Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A fdp conjunta f é uma função que satisfaz:
  1. $f(x, y) \geq 0 \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
  2. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dxdy = 1$
- Ver exemplos 6.1, 6.2 e 6.3 das págs. 113 a 115 do livro.

- Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional a função de distribuição acumulada (fd) F da variável aleatória bidimensional (X,Y) é:
  $F\left(X,Y\right) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right)$

Distribuição marginal discreta

- $p(x_i) = P(X_i = x_i, Y = y_1 \text{ ou } X_i = x_i, Y = y_2, \text{ ou } ...)$
- $p(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$ => distribuição de probabilidade marginal de X.
- $p(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$ => distribuição de probabilidade marginal de Y.

Distribuição de probabilidade marginal e condicional

Distribuição marginal contínua

- $g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$ => função densidade de probabilidade marginal de X.
- $h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$ => função densidade de probabilidade marginal de Y.
- Assim,
  $P(c \leq X \leq d) = \int_{c}^{d} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dydx = \int_{c}^{d} g(X)\, dx$
- Ver exemplos 6.4 e 6.5 das págs. 116 e 117.

Distribuição de probabilidade marginal e condicional

Distribuição condicional discreta

- $P(x_i/y_j) = P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{p(x_i, y_i)}{q(y_j)}$ se $q(y_j) > 0$
- $q(y_j/x_i) = P(Y = y_j/X = x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$ se $p(x_i) > 0$

onde $p(x_i)$é a fdp marginal de X e $q(y_j)$a fdp marginal de Y.

Distribuição condicional contínua

- $g\left(x/y\right) = \frac{f(x,y)}{h(y)},\ h\left(y\right) > 0$
- $h\left(y/x\right) = \frac{f(x,y)}{g(x)},\ g\left(x\right) > 0$
- Ver exemplos 6.7 e 6.8 das págs. 119 e 120.
- Conceitos são generalizados para variáveis n-dimensionais

Variáveis aleatórias independentes

- Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias independentes discretas se e somente se $p(x_i, y_j) = p(x_i).q(y_j) \, \forall$ i e j ou se e somente se $p(x_i/y_j) = p(x_i) \, \forall$ i e j [equivalentemente $q(y_j/x_i) = q(y_j) \, \forall$ i e j].
- Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias independentes contínuas se e somente se $f(x, y) = g(x)\, h(y) \, \forall (x, y)$ ou se e somente se $g(x/y) = g(x) \, \forall (x, y)$[equivalentemente $h(y/x) = h(y) \, \forall (x, y)$]