Métodos Estatísticos Básicos

Aula 9 - Variáveis aleatórias

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Junho de 2014

- **Variável aleatória:** seja E um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento E. Uma função X, que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$, é uma variável aleatória.
- **Duas interpretações:**
  1. Realizamos o experimento E, que dá o resultado $\omega \in \Omega$, e a seguir calculamos o número $X(\omega)$;
  2. O número $X(\omega)$ é pensado como o próprio resultado do experimento, e a imagem de $X(\omega)$, denotada R_X, torna-se o espaço amostral.
- *Obs:* lembre da definição de função.
  1. $\forall\ \omega \in \Omega, \exists\ y \in \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) = y$;
  2. $\forall\ y, z \in \mathbb{R}$ com $X(\omega) = y$ e $X(\omega) = z$, temos $y = z$.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplo

No experimento de lançar duas moedas e observar os resultados, temos $\Omega = (H,H),(H,T),(T,H),(T,T)$. Podemos definir a variável aleatória X como sendo o número de caras obtidas, de modo que $X(H,H) = 2$, $X(H,T) = X(T,H) = 1$ e $X(T,T) = 0$. Note que ao aplicar a função X alteramos o experimento.

Exemplo

Considere o experimento de lançar 3 moedas e observar a descrição detalhada de como e onde as moedas pousaram. Poderíamos avaliar:

1. $X(\omega) =$ nº de caras que aparecem;
2. $Y(\omega) =$ distância máxima entre 2 moedas quaisquer;
3. $Z(\omega) =$ distância mínima das moedas da borda da mesa.

Variável aleatória e experimento

- Podemos incluir a avaliação de $X(\omega)$ na descrição do nosso experimento, de modo que $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ (ex. 2.1) é o nosso novo espaço amostral.
- Podemos também relacionar certos eventos $A \subseteq \Omega$ a eventos de R_X. Seja $B \subseteq R_X$, podemos definir A como $A = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$. Dizemos então que A e B são equivalentes.

Variáveis aleatórias discretas

- Se o conjunto imagem $X(\Omega)$, que descreve a variável aleatória X, for finito ou infinito enumerável, dizemos que X é uma *variável aleatória discreta*.
- A função de probabilidade de uma variável aleatória discreta X é uma função que associa para cada resultado $x_1, x_2, ... \in X$, um número $p(x_i) = P(X = x_i)$, tal que:
  1. $p(x_i) \geq 0$ para todo i;
  2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.
- Chamamos p de probabilidade, e a coleção de pares $[x_i, p(x_i)]$ para $i = 1, 2, ...$ de distribuição de probabilidade de X.

Variáveis aleatórias discretas

- Seja $B \subseteq X(\Omega)$ tal que $B = \{x_{i1}, x_{i2}, ...\}$, então $P(B) = P[\omega | X(\omega) \in B] = P[\omega | X(\omega) = x_{ij}, j = 1, 2, ...] = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$.
- Ou seja, a probabilidade de um evento B é igual a soma das probabilidades dos resultados individuais associados a B.

Distribuição de Bernoulli

- Considere um experimento E e seja A algum evento associado a E. Defina $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1 - p$. Considere a variável aleatória: $X = 0, \text{ se } \omega \notin A$ (fracasso), ou $X = 1, \text{ se } \omega \in A$ (sucesso).
- Qual a função de probabilidade desta variável aleatória?
- **Distribuição de Bernoulli:** $P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}$ para $k \in 0, 1$.

Distribuição binomial

- Agora considere que repetimos esse experimento n vezes, e suponha que $P(A)$ permaneça a mesma para todas as repetições.
- O espaço amostral será formado por todas as sequências possíveis $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, onde cada a_i pertence a A ou $\bar{A}$.
- A variável aleatória $X =$ n° de elementos favoráveis a A (ou número de sucessos), terá valores possíveis que vão de 0 até n. Mas o número total de formas de se obter k sucessos em n repetições do experimento é $\binom{n}{k}$. A função de probabilidade de X será:
- **Distribuição binomial:** $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ para $k = 0, 1, ..., n$.
- *Obs:* note que para utilizarmos a distribuição binomial, as n repetições do experimento devem ser independentes, de modo que consideramos todos os resultados possíveis igualmente.

Exemplo de distribuição binomial

Exemplo

Qual a probabilidade de obtermos menos de 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda justa?

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X < 3) = \binom{5}{0}()1/2)^0(1/2)^5 + \binom{5}{1}(1/2)^1(1/2)^4 + \binom{5}{2}(1/2)^2(1/2)^3$

$P(X < 3) = 1/32 + 5(1/32) + 10(1/32) = 1/2$

- Ver exemplos 4.8, 4.9, e 4.10 das págs 78 e 80.

Variáveis aleatórias contínuas

- Se a imagem da variável aleatória X gerar um conjunto infinito não-enumerável de valores, substituímos p definida somente para $x_1, x_2, \ldots$ por uma função f definida para todos os valores de x.
- **Variável aleatória contínua:** X é uma variável aleatória contínua se existir uma função f, denominada função densidade de probabilidade (fdp) de X que satisfaça:
  1. $f(x) \geq 0$ para todo x;
  2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
  3. Para quaisquer a, b com $-\infty < a < b < \infty$, teremos $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Função de Distribuição Acumulada

- Seja X uma variável aleatória discreta ou contínua. A função de distribuição acumulada (fd) de X é $F(x) = P(x \leq x)$.
- Devemos ter:
  1. Se X for uma variável aleatória discreta $F(x) = \sum_j p(x_j)$ para todo j tal que $x_j \leq x$
  2. Se X for uma variável aleatória contínua com fdp f, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$

Exemplo

Seja X uma variável aleatória contínua com fdp $f(x) = 2x$ para $0 < x < 1$ e igual a zero para quaisquer outros valores valores de x. Nesse caso, a função de distribuição acumulada será dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x 2sds = x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Propriedades da função de distribuição acumulada:

1. A função F é não-decrescente, ou seja, se $x_1 \leq x_2$, teremos $F(x_1) \leq F(x_2)$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
3. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ para todo X no qual F é derivável.
4. Se X é variável aleatória discreta com valores $x_1, x_2, \ldots$ tais que $x_1 < x_2 < \ldots$; então $p(x_i) = p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Exemplo

Suponha que uma variável aleatória contínua tenha *fd* dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Nesse caso, $F'(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, e a fdp será $f(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, e zero para quaisquer outros valores.

- Seja X uma variável aleatória contínua que tem valores no intervalo $[a, b]$, no qual a e b sejam ambos finitos. Então X é *uniformemente distribuída* sobre o intervalo $[a, b]$.
- Se X for uniformemente distribuída, então terá fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0, 2]$. Qual a probabilidade de que o ponto esteja entre 1 e $3/2$?
$f(x) = \frac{1}{2}$ para $0 < x < 2$. Logo, $P(1 \leq x \leq 3/2) = \int_1^{3/2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2} - \frac{1}{2}.1$
Assim, $P(1 \leq x \leq 3/2) = \frac{1}{4}$.

- Em geral a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória uniformemente distribuída será:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ se } a \leq x < b \\ 1 \text{ se } x > b \end{cases}$$