Métodos Estatísticos Básicos

Aula 5 - Teoria dos conjuntos

Prof. Regis Augusto Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Abril de 2014

Definições básicas

- **Conjunto:** é uma coleção de objetos, sendo representados por letras maiúsculas, A, B, etc.
  Ex: A={1, 2, 3, 4, 5, 6} => Resultados possíveis de um lançamento de dado.
  Ex: B=$\{x/0 \leq x \leq 1\}$ => Composto pelo intervalo [0,1].
- **Elementos:** são os objetos que compõem o conjunto.
  Ex: $3 \in A$, $0,5 \in B$,$2 \notin B$.
- **Conjunto vazio:** é o conjunto $\emptyset$, que não contém nenhum elemento.
- **Subconjuntos:** se, dados dois conjuntos A e B, $x \in A \Rightarrow x \in B$, então dizemos que A é um subconjunto de B, $A \subset B$. Se também vale que $B \subset A$, então os dois conjuntos são iguais, $A = B$.

Definições básicas

- Dizemos que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto, ou seja $\emptyset \subset A$, $\emptyset \subset B$.
- **Conjunto fundamental**: é o conjunto U de todos os objetos que estão sendo estudados, de forma que $A,B \subset U$.
- Note que para qualquer conjunto A, temos $\oslash \subset A \subset U$.
  Ex: $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | x^2 + 2x - 3 = 0\}$,
  $B = \{x | (x-2)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$, $C = \{-3, 1, 2\}$.
  Prove que $A \subset B \subset U$ e $B = C$.

Definições básicas

- Há duas operações fundamentais sobre os conjuntos, a **união** e a **interseção**.
- C é a união de A e B se $C = \{x | x \in A \text{ e/ou } x \in B\}$. Assim, $C = A \cup B$.
- D é a interseção de A e B se $D = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$. Assim, $D = A \cap B$.
- **Conjunto complemento:** é o conjunto $\bar{A}$ que contém todos os elementos que não estão em A, mas estão no conjunto fundamental U. Assim, $\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$.

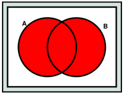
- **Leis comutativas:**
  a) $A \cup B = B \cup A$.
  b) $A \cap B = B \cap A$.
- **Leis associativas:**
  c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
  d)$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Propriedades das operações de conjuntos

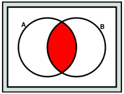
- **Outras propriedades:**
  e)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  g) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
  h) $A \cup \emptyset = A$.
  i) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
  j) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \bar{B}$.
  k) $\overline{\overline{A}} = A$.

Diagramas de Venn

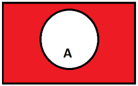
- **Diagrama de Venn**: representação gráfica das operações de conjuntos, sendo a região sombreada o conjunto sob exame.
- $A \cup B$



- $A \cap B$



- $\overline{A}$



- *Exercício:* demonstre as propriedades e, f, j, i e k com Diagramas de Venn.

- **Produto cartesiano:** o produto cartesiano de A e B, é o conjunto $A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$, ou seja, é composto pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento é tirado de A e o segundo de B.
  Ex: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
  $AxB = \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, 4), (2, 1), ..., (2, 4), (3, 1), ..., (3, 4)\}$.
- Note que $A \times B \neq B \times A$.
- A noção de produto cartesiano pode ser estendida, de modo que $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_i \in A_i\}$.

Conjuntos enumeráveis

- O número de elementos que um conjunto possui será de grande importância para nós, pois veremos que em probabilidade, os possíveis resultados de um experimento são expressos como elementos de um conjunto.
- **Conjunto finito:** um conjunto A é finito se existir um número finito de elementos nele. Ex:$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
- **Conjunto enumerável:** um conjunto B é enumerável, ou infinito enumerável, se existir uma correspondência biunívoca entre os elementos de B e os números inteiros positivos. Ex: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$.
- **Conjunto infinito não-enumerável:** um conjunto C é infinito não-enumerável se possuir um número infinito de elementos que não podem ser enumerados. Ex: $C = \{x | a \leq x \leq b\}$ para quaisquer números reais $b > a$. Note que qualquer intervalo (não-degenerado) contém mais do que um número contável de pontos.