Лабораторная работа №1

Генерация и анализ выборок из непрерывных и дискретных распределений

Теоретическая часть. Законы распределения, их параметры и основные числовые характеристики.

1. Экспоненциальное распределение

Говорят, что случайная величина имеет *экспоненциальное* или *показательное распределение*, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0; \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения. Обозначают: $X \sim Exp(\lambda)$.

Функция распределения имеет вид:

$$F_X(x) = P\{X < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0; \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

Основные числовые характеристики:

$$MX = \frac{1}{\lambda},\ DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. Гамма-распределение

Пусть распределение случайной величины X задаётся плотностью вероятности, имеющей вид

$$f_X(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \dfrac{e^{-\beta x}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

Тогда говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с положительными параметрами α и β. Пишут $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$.

Основные числовые характеристики:

$$MX = \frac{\alpha}{\beta}, \ DX = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

3. Биномиальное распределение

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – конечная последовательность случайных величин с *распределением Бернулли*, то есть

$$X_i = \begin{cases} 1, p; \\ 0, q = 1 - p; \end{cases}, i = \overline{1, n}.$$

Тогда дискретная случайная величина

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

определяющая число успехов m в последовательности $X_1, X_2, ..., X_n$, имеет *биномиальное распределение* с n степенями свободы и вероятностью успеха p, при этом

$$p_X(p, n, m) = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, m = \overline{0, n},$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Обозначают: $X \sim Bin(n, p)$.

Основные числовые характеристики:

$$MX = np, \ DX = npq.$$

4. Геометрическое распределение

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – конечная последовательность случайных величин с *распределением Бернулли*, то есть

$$X_i = \begin{cases} 1, p; \\ 0, q = 1 - p; \end{cases}, i = \overline{1, n}.$$

Тогда дискретная случайная величина

$$X = \min\{i : X_i = 1\} - 1,$$

определяющая количество «неудач» до первого «успеха» имеет *геометрическое распределение*.

$$p(k) = P\{X = k\} = q^k p, k = 0,1,2,\ldots .$$

Иногда в качестве геометрической случайной величины используют номер первой удачной попытки, то есть

$$X = \min\{i : X_i = 1\}$$

Тогда

$$p(k) = P\{X = k\} = q^{k-1} p, k = 1,2,3,\ldots .$$

Основные числовые характеристики:

$$MX = \frac{q}{p},\ DX = \frac{q}{p^2}.$$

Задание 1:

1. Сгенерировать выборки объема N (параметр N задать произвольно в диапазоне от 100 до 200) следующих распределений:
   - Биномиальное,
   - Геометрическое.

Для каждого распределения параметры задать самостоятельно.

2. Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения.
3. Найти оценки числовых характеристик (выборочные среднее, дисперсию, СКО, моду, медиану, коэффициенты асимметрии и эксцесса).
4. Найти теоретические математическое ожидание и дисперсию при заданных параметрах. Сравнить найденные точечные оценки с теоретическими характеристиками.
5. Найти оценки параметров соответствующего распределения. Сравнить полученные оценки с заданными теоретическими значениями.
6. Проверить гипотезу о виде распределения с помощью критерия χ^2.

Задание 2:

1. Сгенерировать выборки объема N (параметр N задать произвольно в диапазоне от 100 до 200) следующих распределений:
    - Экспоненциальное,
    - Гамма-распределение.

Для каждого распределения параметры задать самостоятельно.

2. Построить гистограмму относительных частот и график плотности соответствующего теоретического распределения и оценки плотности.
3. Найти оценки числовых характеристик (выборочные среднее, дисперсию, СКО, моду, медиану, коэффициенты асимметрии и эксцесса.)
4. Найти теоретические мат ожидание и дисперсию при заданных параметрах. Сравнить найденные точечные оценки с теоретическими характеристиками.
5. Найти оценки параметров соответствующего распределения.
6. Проверить гипотезу о виде распределения с помощью критерия χ^2.