Prof. Dr. M. Ehrhardt
Jens Jäschke, M.Sc.
Sommersemester 2020

Bergische Universität Wuppertal
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik / Numerische Analysis

Praktikum zur Einführung in die Numerische Mathematik

Aufgabenblatt 5 - Numerische Integration

Abgabe bis spätestens: 05.07.2020, 23:59h

Hausaufgabe 12: *Adaptives Simpson-Verfahren*
Schreiben Sie eine Funktion, welche das adaptive Simpson Verfahren realisiert. Für eine gegebene Funktion $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ soll hiermit das Integral $\int_a^b f(x)dx$ approximiert werden. Als Übergabe-Parameter sind neben der zu integrierenden Funktion noch die absolute und relative Toleranz $ATOL$ und $RTOL$ für den enthaltenen Fehlerschätzer vorgesehen.

Hausaufgabe 13: *Numerische Berechnung der Bogenlänge*
Um beim Autonomen Fahren den Sicherheitsabstand einhalten zu können, muss sowohl der Verlauf des eigenen Fahrstreifens als auch die Position eines vorausfahrenden Fahrzeugs bekannt sein.
Der Fahrbahnverlauf wird in kurzen Abständen (Zyklen) jeweils neu berechnet und muss deshalb nur für einen kurzen Zeitraum eine hohe Prädiktionsgüte besitzen. Deshalb genügt es, den Fahrstreifen als ein Polynom vierten Grades mit Ursprung in der Mitte der vorderen Stoßstange zu modellieren, hierfür werden intern nur die Koeffizienten des Polynoms bzgl. der Taylor Basis gespeichert.
Folgt das Fahrzeug nun einem anderen Fahrzeug, so lokalisiert das eigene Fahrzeug das Zielfahrzeug mittels diverser Sensoren. Diese messen jedoch nur den direkten Abstand sowie den Winkel zwischen eigenem und Zielfahrzeug. Die Position des Zielfahrzeugs (= die Mitte der hinteren Stoßstange) kann somit in Polarkoordinaten dargestellt werden.
Für die Berechnung des Sicherheitsabstands benötigt man jedoch die Länge des Fahrtwegs zwischen beiden Fahrzeugen. Schreiben Sie eine Funktion, die diese Länge mit einer sinnvollen Genauigkeit berechnet.

Hausaufgabe 14: *Numerisches Anfangswertproblem*
Quadraturformeln bilden die Grundlage zur numerischen Approximation von Lösungen von Anfangswertproblemen (AWP) der Form

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{5.1}$$

wobei $y:\ I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f:\ I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig bzgl. y ist. Gesucht ist eine Approximation der Lösung $y(t)$ von (5.1) für $t \in [a,b]$. Hierfür wird das Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle unterteilt, so dass

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

und die Approximation $y_i \approx y(t_i)$ nur an diskreten Zeitpunkten berechnet. Für die Approximation der Lösung wird folgender Ansatz verwendet:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{y}(t)dt \tag{5.2}$$

Das Integral in (5.2) wird mittels einer Quadraturformel approximiert

$$y_{i+1} = y_i + I(f). \tag{5.3}$$

Schreiben Sie eine Funktion, die ein AWP mittels des expliziten Euler-Verfahrens (linke Rechtechsregel) approximiert. Hierbei sollen die Anzahl der Diskretisierungspunkte vom Anwender vorgegeben werden können (als Funktionsargument). Testen Sie Ihre Funktion anhand des AWPs

$$\dot{y}(t) = \lambda y, \quad y(0) = 1$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ auf dem Intervall $[0, b]$. Verwenden Sie verschiedene Werte für n, λ und b und vergleichen Sie die Approximation mit der exakten (analytischen) Lösung. Was fällt auf?