Prof. Dr. M. Ehrhardt
Jens Jäschke, M.Sc.
Sommersemester 2020

Bergische Universität Wuppertal
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik / Numerische Analysis

Praktikum zur Einführung in die Numerische Mathematik

Aufgabenblatt 3 - Lineare Ausgleichsrechnung

Abgabe bis spätestens: 07.06.2020 23:59h

Hausaufgabe 7: *Givens-Rotationen*
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$.
Schreiben Sie eine Funktion, die A mittels Givens-Rotationen in eine Orthogonalmatrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R zerlegt, sodass $A = QR$ gilt.

Hausaufgabe 8: *Moore-Penrose-Pseudoinverse*
Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ existiert stets eine *Singulärwertzerlegung* der Form

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma \\ N \end{pmatrix} V^\top, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times m},\ V \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n},\ N \in \mathbb{R}^{(m-n)\times n},$$

mit orthogonalen Matrizen U, V, einer Diagonalmatrix $\Sigma = \operatorname{diag}(\sqrt{\sigma_1^2}, \dots, \sqrt{\sigma_n^2})$ und einer Nullmatrix $N = 0$. Die Diagonalelemente in Σ sind gerade die Quadratwurzeln der Eigenwerte $\sigma_j^2 \geq 0$ zur positiv semi-definiten Matrix $A^\top A$, d.h. die sogenannten Singulärwerte. Es kann die Reihenfolge $\sqrt{\sigma_1^2} \geq \sqrt{\sigma_2^2} \geq \dots \geq \sqrt{\sigma_n^2}$ in der Zerlegung konstruiert werden.
Über die Singulärwertzerlegung definiert man

$$\Sigma^+ \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ \Sigma^+ = \operatorname{diag}(\sigma_1^+, \dots, \sigma_n^+) \qquad \text{mit} \qquad \sigma_j^+ := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_j^2}} & \text{für } \sigma_j^2 > 0 \\ 0 & \text{für } \sigma_j^2 = 0 \end{cases}$$

und dadurch die *Moore-Penrose-Pseudoinverse*

$$A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad A^+ := V \left(\Sigma^+, N^\top\right) U^\top.$$

Für $m = n$ und reguläres A gilt $A^+ = A^{-1}$.
Schreiben Sie eine Funktion, die die Moore-Penrose-Pseudoinverse für eine gegebene Matrix A berechnet.
Hinweis: Die Verwendung der svd-Funktion in Matlab ist explizit erlaubt.

Hausaufgabe 9: *Lineare Ausgleichsrechnung*
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Ziel ist es, den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zu finden, so dass das Residuum $r(x) = Ax - b$ bzgl. der 2-Norm minimal wird. D.h. gesucht ist $\hat{x}$ mit

$$\hat{x} = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2. \tag{3.1}$$

- Schreiben Sie eine Funktion, die (3.1) mittels der äquivalenten Normalengleichung $A^\top Ax = A^\top b$ löst. Verwenden Sie hierfür Ihren Code der Cholesky-Zerlegung vom letzten Übungsblatt.

- Schreiben Sie eine Funktion, die (3.1) mit der QR-Zerlegung mittels Givens-Rotationen löst.
- Schreiben Sie eine Funktion, die (3.1) mittels der Moore-Penrose Pseudo-Inversen (siehe oben) berechnet.

Hausaufgabe 10: *Fit-Modelle*
In Naturwissenschaft und Technik besteht meist ein funktionaler Zusammenhang zwischen physikalischen Größen x und y, d.h. es gilt

$$f(x) = y$$

mit einer nicht näher definierten Funktion f. Um f zu bestimmen, müssen Messungen durchgeführt werden. Hierdurch entstehen Messfehler und es gilt nur noch

$$f(x) \approx y$$

Schreiben Sie ein Programm, welches für eine übergebene Messreihe x, y testet, welcher der folgenden Zusammenhänge die Messdaten am besten beschreibt:

- linear
- quadratisch
- hyperbolisch $f(x) \approx \frac{a}{x} + b$
- exponentiell $f(x) \approx ae^{\lambda x}$
- periodisch $f(x) \approx a \sin \lambda x + b$ für verschiedene (feste) Werte für λ

Berücksichtigen Sie dabei auch die Komplexität des jeweiligen Modells. Gehen Sie immer davon aus, dass Sie deutlich mehr Messpunkte haben, als Unbekannte in Ihrem System.