

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



Memoria de Título - BORRADOR -

Diseño de un Divisor de Potencia para Arreglos Planos

Cristian Edinson Duguet Sáez

diciembre de 2009

Índice general

0.1. Arndt	3
A. Maxwell en guías de Onda	8
A.1. Ecuaciones de Maxwell	8
A.2. En una Guía de onda rectangular	10
A.2.1. Modos TE	11
A.2.2. Modos TM	12

Índice de figuras

1.	Juntura T simétrica. Potencias de entrada en cada puerto $A^{(v)}$, potencias de salida, $B^{(v)}$. Zonas homogéneas I y II de altura $2y_1$, zona homogénea III de altura $2z_1$	4
2.	Discontinuidad del step en guía de onda principal. Zona homogénea IIa de altura $2y_1$, zona homogénea V de altura $y_2 - y_3$	4
A.1.	Estructura básica de una guía de onda rectangular	10

0.1. Arndt

El propósito de el algoritmo de Arndt es utilizar el método de adaptación modal, o *mode matching*, para poder calcular el porcentaje de acoplamiento en divisores de potencia de juntas T plano-E no simétricas en serie, donde existen discontinuidades. El método de diseño de éste algoritmo está basado en la expansión en componentes incidentes y normales [?]. Para esto utiliza el principio de expansión de campos en cavidades [?]. Finalmente, calcula la matriz de esparcimiento S, de la estructura, que incluye todos los efectos de las discontinuidades y acoplamientos mutuos. Además, indica una forma de poder calcular los parámetros del arreglo, a partir de los acoplamientos deseados, utilizando mínimos cuadrados. La estructura no necesita componentes adicionales de adaptación, y la distribución de potencia se logra diseñando las alturas de los segmentos, o steps, y las distancias entre los elementos. Se especifica que la técnica utilizada conserva la precisión numérica, y no requiere de simetría de puertos, o modos.

Primero, se analiza el caso de una sola juntura T no-simétrica. Para abordar su análisis, se divide en 2 problemas: uno con la juntura T simétrica, con altura $2y_1$ en la guía principal, y altura $2z_1$ en la guía vertical (Figura 1); y otro que consiste en la discontinuidad en la altura de la guía, como en la Figura 2.

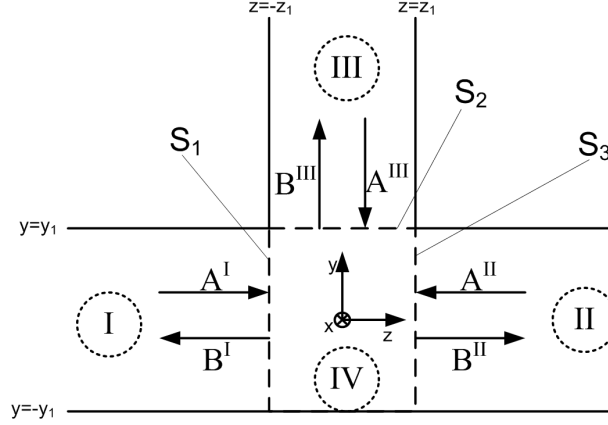


Fig. 1: Juntura T simétrica. Potencias de entrada en cada puerto $A^{(v)}$, potencias de salida, $B^{(v)}$. Zonas homogéneas I y II de altura $2y_1$, zona homogénea III de altura $2z_1$

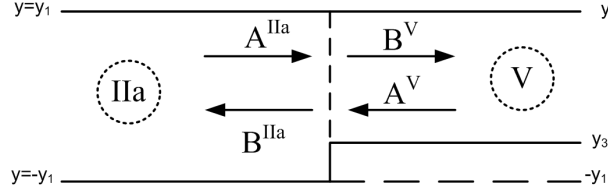


Fig. 2: Discontinuidad del step en guía de onda principal. Zona homogénea IIa de altura $2y_1$, zona homogénea V de altura $y_2 - y_3$

La estructura se divide en una serie de regiones homogéneas I,II,III,IV (Fig. 1), IIa y V (Fig. 2). Los campos electromagnéticos en cada región homogénea, los campos eléctricos y magnéticos se pueden expresar como

$$\vec{E}^{(v)} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{\Pi}_{hx}^{(v)} \quad ; \quad \vec{H}^{(v)} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_{hx}^{(v)}$$

donde $\vec{\Pi}_{hx}^{(v)}$ es la componente x del potencial vectorial Herziano, que se asume como una suma de funciones propias satisfaciendo sus condiciones de contorno.

$$\Pi_{hx}^{(v)} = \frac{2}{\sqrt{a(q_2 - q_1)^{(v)}}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \sin(k_x x) \cdot \sum_{n=0}^N \left[\frac{1}{\sqrt{Z_{Fn}^{(v)}}} \frac{1}{\beta_n^{(v)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0n}}} \cos \left(k_{qn}^{(v)} \left(t - q_1^{(v)} \right) \right) \right] \cdot [A_n^{(v)} e^{\mp j\beta_n^{(v)} s} - B_n^{(v)} e^{\pm j\beta_n^{(v)} s}]$$

En esta ecuación, a es el ancho de la guía de onda, $(q_2 - q_1)^{(v)} = b^{(v)}$ es la altura de la guía, en la región (v) . Además, se consideran los siguientes parámetros electromagnéticos:

- El número de onda $k^2\omega^2\mu\epsilon$
- El número de onda de corte es $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_{qn}^{(v)2}}$
 - $k_x = \pi/a$

- $k_{qn}^{(v)} = \frac{n\pi}{b^{(v)}}$

- Constante de Fase se define para dos casos: $\beta_n^{(v)} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_c^2} & ; \quad k^2 \geq k_c^2 \\ -j\sqrt{k_c^2 - k^2} & ; \quad k^2 \leq k_c^2 \end{cases}$

- Impedancia $Z_{Fn}^{(v)} = \frac{\omega\mu}{\beta_n^{(v)}}$

- $\delta_{0n} = \text{Kronecker delta}$

La matriz de dispersión modal, para la juntura T simétrica, se obtiene utilizando la técnica de adaptación modal, y relacionando los campos de las zonas I,II,III y IV en los planos $S1$, $S2$, y $S3$, cuando sólo se abre 1 puerto y los otros se cortocircuitan. Luego se utiliza el principio de superposición para combinar todas las soluciones, seguido de la propiedad ortogonal de los modos [?, ?]. Finalmente, se relacionan las ondas incidentes con las de salida, como:

$$(B) = (S^T)(A) \quad (1)$$

Donde los elementos de arreglo son:

$$(S_T) = \begin{bmatrix} -(e_1)(Y_1) & (Y_1) & -(T_1)(Y_3) \\ (Y_1) & -(e_1)(Y_1) & (T_2)(Y_3) \\ -(T_3)(Y_1) & (T_4)(Y_1) & (e_3)(Y_3) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (1/e_1)(Y_1) & -(Y_1) & (T_1)(Y_3) \\ -(Y_1) & (1/e_1)(Y_1) & -(T_2)(Y_3) \\ (T_3)(Y_1) & -(T_4)(Y_1) & (1/e_3)(Y_3) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde T_i representan los coeficientes de las matrices de acoplamiento:

$$T_{1np} = \frac{1}{\sqrt{y_1 z_1}} \frac{\sin(\beta_n^I 2z_1)}{\sin(\beta_p^{III} 2y_1)} \frac{\beta_n^I}{\beta_p^{III}} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0n}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0p}}} \\ * \int_{-y_1}^{y_1} \cos[\beta_p^{III}(-y + y_1)] \cos\left[\frac{n\pi}{2y_1}(y + y_1)\right] dy \quad (3a)$$

$$T_{2np} = (-1)^p T_{1np} \quad (3b)$$

$$T_{3np} = \frac{1}{\sqrt{y_1 z_1}} \frac{\sin(\beta_p^{III} 2y_1)}{\sin(\beta_n^I 2z_1)} \frac{\beta_p^{III}}{\beta_n^I} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0n}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0p}}} \\ * \int_{-z_1}^{z_1} \cos[\beta_n^I(-z + z_1)] \cos\left[\frac{p\pi}{2z_1}(z + z_1)\right] dz \quad (3c)$$

$$T_{4np} = (-1)^p T_{3np} \quad (3d)$$

Los elementos de las matrices diagonales (Y) , (e) son:

$$Y_{1n} = \frac{1}{\sqrt{Z_{Fn}^I}} \quad ; \quad Y_{3p} = \frac{1}{\sqrt{Z_{Fp}^{III}}} \quad (4a)$$

$$e_{1n} = \exp j\beta_n^I 2z_1 \quad ; \quad e_{3p} = \exp j\beta_p^{III} 2y_1. \quad (4b)$$

$$(4c)$$

Luego, se busca la matriz de dispersión de la discontinuidad de la Figura 2. Se expresa como

$$(B) = (S^H)(A) \quad (5)$$

donde los elementos de S^H son

$$(S_{11}^H) = \left[(\sqrt{Y_m})(1/\beta_m)[(K_{1nm})(\sqrt{Y_m})]^{-1}(\sqrt{Y_n}) + (K_{2mn})(1/\beta_n)(\sqrt{Y_n}) \right]^{-1} \cdot \left[-(\sqrt{Y_m})(1/\beta_m)[(K_{1nm})(\sqrt{Y_m})]^{-1}(\sqrt{Y_n}) + (K_{2mn})(1/\beta_n)(\sqrt{Y_n}) \right] \quad (6a)$$

$$(S_{12}^H) = 2 \left[(\sqrt{Y_m})(1/\beta_m)[(K_{1nm})(\sqrt{Y_m})]^{-1}(\sqrt{Y_n}) + (K_{2mn})(1/\beta_n)(\sqrt{Y_n}) \right]^{-1} \cdot (\sqrt{Y_m})(1/\beta_m) \quad (6b)$$

$$(S_{21}^H) = 2 \left[(K_{1nm})(\sqrt{Y_m}) + (\sqrt{Y_n}) [(K_{2mn})(1/\beta_n)(\sqrt{Y_n})]^{-1} \cdot (\sqrt{Y_m})(1/\beta_m) \right]^{-1} (\sqrt{Y_n}) \quad (6c)$$

$$(S_{22}^H) = \left[(K_{1nm})(\sqrt{Y_m}) + (\sqrt{Y_n}) [(K_{2mn})(1/\beta_n)(\sqrt{Y_n})]^{-1} \cdot (\sqrt{Y_m})(1/\beta_m) \right]^{-1} \cdot \left[-(K_{1nm})(\sqrt{Y_m}) + (\sqrt{Y_n}) [(K_{2mn})(1/\beta_n)(\sqrt{Y_n})]^{-1} \cdot (\sqrt{Y_m})(1/\beta_m) \right] \quad (6d)$$

y los coeficientes de las matrices de acoplamiento (K)son:

$$(K_{1nm}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0m}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{0n}}} \frac{2}{\sqrt{(y_1 - y_0)(y_2 - y_3)}} \cdot \int_{y_3}^{y_2} \cos \left[\frac{m\pi}{(y_1 - y_0)}(y - y_0) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{(y_2 - y_3)}(y - y_3) \right] dy \quad (7a)$$

$$(K_{2mn}) = (K_{1nm})'. \quad (7b)$$

Los elementos de las matriz Diagonal (\sqrt{Y}) son:

$$(\sqrt{Y_m})_m = \frac{1}{\sqrt{Z_{Fm}^V}} \quad ; \quad (\sqrt{Y_n})_n = \frac{1}{\sqrt{Z_{Fn}^{IIa}}}. \quad (8)$$

Finalmente, la matriz de dispersión modal, para la junta T no-simétrica se obtiene de la combinación de las dos matrices de dispersión anteriores. La expresión se encuentra como

$$(B) = (S^{UT})(A) \quad (9)$$

donde los elementos de S^{UT} son

$$(S_{11}^{UT}) = (S_{11}^T) + (S_{12}^T)(M_2)(S_{21}^T) \quad (10a)$$

$$(S_{12}^{UT}) = (S_{12}^T)(S_{12}^H) + (S_{12}^T)(M_2)(M_4) \quad (10b)$$

$$(S_{13}^{UT}) = (S_{13}^T) + (S_{12}^T)(M_2)(S_{23}^T) \quad (10c)$$

$$(S_{21}^{UT}) = (M_3)(S_{21}^T) \quad (10d)$$

$$(S_{22}^{UT}) = (S_{22}^H)(M_3)(M_4) \quad (10e)$$

$$(S_{23}^{UT}) = (M_3)(S_{23}^T) \quad (10f)$$

$$(S_{31}^{UT}) = (S_{31}^T) + (S_{32}^T)(M_2)(S_{21}^T) \quad (10g)$$

$$(S_{32}^{UT}) = (S_{32}^T)(S_{12}^H) + (S_{32}^T)(M_2)(M_4) \quad (10h)$$

$$(S_{33}^{UT}) = (S_{33}^T) + (S_{32}^T)(M_2)(S_{23}^T) \quad (10i)$$

con las abreviaciones

$$(M_1) = [(I) - (S_{22}^T)(S_{11}^H)]^{-1} \quad (11a)$$

$$(M_2) = (S_{11}^H)(M_1) \quad (11b)$$

$$(M_3) = (S_{21}^H)(M_1) \quad (11c)$$

$$(M_4) = (S_{22}^T)(S_{12}^H) \quad (11d)$$

$$. \quad (11e)$$

(I) es la Matriz Identidad.

Dentro de un arreglo de divisores T no-simétricos, debe considerarse las características eléctricas de la guía que conecta dos juntas T continuas, para determinar la Matriz de dispersión total del Arreglo.

Apéndice A

Maxwell en guías de Onda

A.1. Ecuaciones de Maxwell

Las guías de onda son uno de las líneas de transmisión con menores pérdidas en microondas. Los fenómenos electromagnéticos pueden describirse por las Ecuaciones de Maxwell de la siguiente forma [?]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_a\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

Las condiciones de contorno en la superficie de un conductor metálico ideal[?], imponen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\hat{n} \times (\varepsilon_2\mathbf{E}_2 - \varepsilon_1\mathbf{E}_1) &= 0 \\ \hat{n} \cdot (\mu_2\mathbf{H}_2 - \mu_1\mathbf{H}_1) &= 0\end{aligned}\tag{A.2}$$

Si se aplica el operador $\nabla \times [\cdot]$ sobre las primeras dos ecuaciones de A.1, y se usan las siguientes identidades vectoriales[?]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \Psi &= 0 \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\end{aligned}\tag{A.3}$$

Finalmente, se obtienen las ecuaciones de Helmholtz:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\tag{A.4}$$

donde: \mathbf{E} y \mathbf{H} son los fasores asociados a los vectores de intensidad de campo eléctrico y magnético, respectivamente; $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_a}$ es el número de onda;

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon_r \left(1 - j\frac{\sigma^e}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) = \varepsilon(1 - j\tan\delta)$$

es la permitividad eléctrica compleja, que en el espacio libre tomá el valor $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F/m$;

$\mu_a = \mu_0 \mu_r$ es la permeabilidad magnética, que en el espacio libre toma el valor de $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$;

ε_r, μ_r son los valores relativos de la permitividad y permeabilidad;

σ^e es la conductividad eléctrica del medio, Sm/m ;

$\tan \delta = \frac{\sigma^e}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r}$ es la tangente del ángulo de pérdidas eléctricas;

∇ es el operador diferencial “curl” y ∇^2 es el operador laplaciano.

Se pueden modelar los campos en la guía de ondas separándolos en las componentes transversales a la dirección de propagación de la guía de ondas (\hat{u}, \hat{v}), y las componentes en el sentido de propagación, considerándose como \hat{z} . Además, separando la dependencia de las componentes transversales, y longitudinal:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u, v, z) &= [\mathbf{E}_t(u, v) + \hat{\mathbf{z}} \cdot E_z(u, v)] \cdot e^{\mp \gamma z} \\ \mathbf{H}(u, v, z) &= [\mathbf{H}_t(u, v) + \hat{\mathbf{z}} \cdot H_z(u, v)] \cdot e^{\mp \gamma z} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Los signos de la exponente representan la dirección de propagación del campo eléctrico, negativo es en el sentido positivo del eje z , y viceversa.

Por otro lado, se puede descomponer el operador laplaciano en las componentes transversales y axiales, obteniendo:

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} \quad (\text{A.6})$$

Entonces, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_z(u, v) + (\gamma^2 + k^2) E_z(u, v) &= 0 \\ \nabla^2 H_z(u, v) + (\gamma^2 + k^2) H_z(u, v) &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E}_t(u, v) + (\gamma^2 + k^2) \mathbf{E}_t(u, v) &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H}_t(u, v) + (\gamma^2 + k^2) \mathbf{H}_t(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

El sistema de ecuaciones anterior se puede solucionar, primero por las ecuaciones diferenciales escalares de E_z y H_z , sujeto a condiciones de contorno, y después obtener los campos transversales como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t(u, v) &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} [j\omega \varepsilon_a (\nabla_t \times \hat{\mathbf{z}} E_z) \mp \gamma \nabla_t H_z] \\ \mathbf{E}_t(u, v) &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} [-j\omega \mu (\nabla_t \times \hat{\mathbf{z}} H_z) \mp \gamma \nabla_t E_z] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Entonces en ondas guiadas, se pueden resolver las ecuaciones de Maxwell para distintos modos de propagación. Existen 3 familias de modos de propagación, llamadas modos TEM, modos TE y modos TM. Las tres familias de modos se pueden obtener imponiendo distintas restricciones las componentes axiales de campos electromagnéticos, es decir E_z y H_z .

A.2. En una Guía de onda rectangular

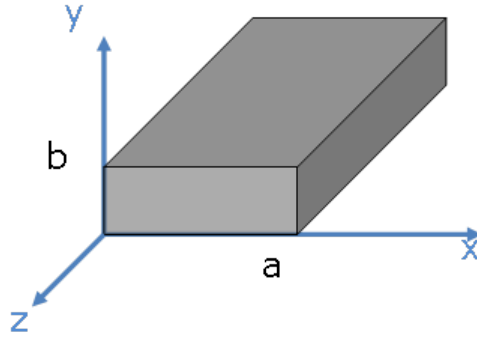


Fig. A.1: Estructura básica de una guía de onda rectangular

En una guía de onda rectangular, de dimensiones internas a , b , con $a > b$. Al estar completamente rodeada por paredes metálicas, sólo soporta los modos TE y TM, pero no el TEM, debido a las condiciones de contorno no lo permiten.

Tanto para TE como para TM, se trata de resolver las mismas ecuaciones de onda para campos transversales de A.7, es decir una de las dos últimas. Entonces se tiene la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 F_z(u, v) + k_c^2 F_z(u, v) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Donde F_z puede ser E_z o H_z , dependiendo del caso, y $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$ es conocida como el **número de onda de corte**. Entonces, debido a la forma rectangular de la guía de onda, se adoptan coordenadas cartesianas (x, y) para las componentes transversales y se pretende entonces resolver la ecuación:

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + k_c^2 F_z(x, y) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Si se aplica el método de separación de variables, haciendo $F_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, la ecuación A.10 queda:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_c^2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

La constante k_c puede descomponerse en las dos componentes ortogonales:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (\text{A.12})$$

resultando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -k_x^2, \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -k_y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, las soluciones de ambas ecuaciones de A.13 tienen la forma:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \\ Y(y) &= C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Con A, B, C, D constantes por determinar, en las soluciones modales.

A.2.1. Modos TE

Los Modos TE suceden cuando la componente eléctrica del campo no tiene componentes axiales, es decir es *puramente transversal*. Esto significa que $E_z = 0$. Con esta condición en las ecuaciones A.8, se obtiene:

$$\mathbf{H}_t(u, v) = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \quad (\text{A.15a})$$

$$\mathbf{E}_t(u, v) = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} (\nabla_t H_z \times \hat{\mathbf{z}} = Z_{TE}(\mathbf{H}_t \times \hat{\mathbf{z}})) \quad (\text{A.15b})$$

con $Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$. Nótese las componentes transversales son ortogonales entre sí, es decir $\mathbf{E}_t \perp \mathbf{H}_t \perp \hat{\mathbf{z}}$.

Por otro lado, de las condiciones de contorno se obtiene que \mathbf{H}_t es continua en las paredes del conductor (contorno) en su componente normal a éste. Aplicando esto en las dimensiones de la guía de onda rectangular, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial x}(x=0, y) &= 0, \quad \forall y \Rightarrow B = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x}(x=a, y) &= 0, \quad \forall y \Rightarrow \sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \\ \frac{\partial H_z}{\partial y}(x, y=0) &= 0, \quad \forall x \Rightarrow D = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial y}(x, y=b) &= 0, \quad \forall x \Rightarrow \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Entonces, la componente axial del campo magnético es:

$$H_z(x, y) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (\text{A.17})$$

y acudiendo a la ecuación A.15a, se tiene el campo magnético transversal:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x(x, y) &= j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \mathbf{H}_y(x, y) &= j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Usando estos resultados sobre A.15b, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(x, y) &= j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \mathbf{E}_y(x, y) &= -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\end{aligned}\tag{A.19}$$

Entonces se definen los números de onda de corte para cada modo TE dentro de una guía de onda rectangular, como:

$$k_{cmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots\tag{A.20}$$

Finalmente se pueden determinar distintos parámetros para la guía de onda rectangular, como frecuencia de corte, impedancia del modo, etc. El modo fundamental, para la guía de onda rectangular es el modo TE₁₀.

$$f_c|_{TE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}\tag{A.21}$$

$$f_c|_{TE_{mn}} = f_c|_{TE_{10}} \sqrt{m^2 + \left(\frac{na^2}{b}\right)^2}\tag{A.22}$$

La impedancia en cada modo TE está dada por:

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}\tag{A.23}$$

A.2.2. Modos TM

Los Modos TM suceden cuando la componente magnética del campo no tiene componentes axiales al contrario del modo TE, es decir es *la componente magnética es puramente transversal*. Esto significa que $H_z = 0$. Con esta condición en las ecuaciones A.8, se obtiene:

$$\mathbf{E}_t(u, v) = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z\tag{A.24a}$$

$$\mathbf{H}_t(u, v) = \frac{j\omega\epsilon_a}{k_c^2} (\nabla_t E_z \times \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{Z_{TM}} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t)\tag{A.24b}$$

$$\text{con } Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon_a}$$

Nótese nuevamente que las componentes transversales son ortogonales entre sí, es decir $\mathbf{E}_t \perp \mathbf{H}_t \perp \hat{\mathbf{z}}$.

Por otro lado, de las condiciones de contorno se obtiene que la componente tangencial al contorno del campo eléctrico, si el contorno se trata de una pared metálica perfecta, es 0. Esto es $E_z = 0$ en las paredes del conductor. Aplicando esto en las dimensiones de la guía de onda rectangular, se obtiene:

$$\begin{aligned}
E_z(x=0, y) &= 0, \quad \forall y \quad \Rightarrow A = 0 \\
E_z(x=a, y) &= 0, \quad \forall y \quad \Rightarrow \sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \\
E_z(x, y=0) &= 0, \quad \forall x \quad \Rightarrow C = 0 \\
E_z(x, y=b) &= 0, \quad \forall x \quad \Rightarrow \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Entonces, la componente axial del campo magnético es:

$$E_z(x, y) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{A.26}$$

y acudiendo a la ecuación A.24a, se tiene el campo eléctrico transversal:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(x, y) &= -j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
\mathbf{E}_y(x, y) &= -j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Usando estos resultados sobre A.24b, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_x(x, y) &= j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
\mathbf{H}_y(x, y) &= -j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Entonces se definen los números de onda de corte para cada modo TM dentro de una guía de onda rectangular, como:

$$k_{cmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \tag{A.29}$$

Como se puede observar, los números de onda de corte son los mismos para modos TM y TE, sin embargo la familia de modos TE contiene modos con el índice 0, sin embargo, como se observa en la ecuación A.26, esto no es posible en modos TM.