Una clase de métodos de tipo Steffensen con un orden óptimo de convergencia: Método Dehghan Hajariank (DHM)

La familia de métodos de Steffensen, son un tipo de métodos de cuarto orden de convergencia para resolver ecuaciones no lineales, calculando una mejor aproximación de la derivada de la función. Al solo poseer tres ecuaciones para resolver la función por medio de iteración, el índice de eficiencia corresponde a un 1.587.

Con el pasar del tiempo se han propuesto diferentes mejoras en la convergencia del método de Steffensen, de estas, el documento tratará específicamente la de Dehghon and Hajarian.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left[f(z_{n+1}) - f(x_n)\right]}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

Este método, se obtiene reemplazando la aproximación de diferencia directa en el método de Steffensen por la aproximación de diferencia central, cuya expresión es:

$$z_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

Cómo valores de entrada este método necesita un valor inicial, la función a evaluar, una tolerancia dada y el número máximo de iteraciones a realizar. Dentro de los valores de pruebas utilizados en el ejemplo funcional se encuentran los mostrados en la Tabla 1 utilizados con una tolerancia de 10e-8.

Función	x_o	Iteraciones	Aproximación
x^3+4x^2-10	1.5	7	1.365230
x^2-e^x-3x+2	0.7	7	0.257530
x^3-10	2	7	2.154435
$\cos(x)-x$	1	6	0.739085

Tabla 1. Resultados de las pruebas ejecutadas.

Dentro de las principales **ventajas** que este método presenta, es no poseer derivadas por lo que evita restricciones a nivel de optimización a diferencia de los métodos de Newton que poseen derivadas de segundo orden, restringiendo su aplicación. Por otra parte, este método posee una buena aproximación, dando un índice de eficiencia optima de 1.682.

La principal **desventaja** de este método es que al ser de tercer orden son necesarias cuatro evaluaciones funcionales por iteración, bajando su eficiencia en tiempo de ejecución.

A modo de implementación, para poder ejecutar la ecuación computacionalmente deben efectuarse los siguientes pasos:

$k = 0$
$x_k = x_0$
$error = tol + 1$

$while\ (error > tol\ \boldsymbol{and}\ k < iter_{\max})$ **do**
$dem = f\big(x_k + f(x_k)\big) - f\big(x_k - f(x_k)\big)$
$z_k + 1 = x_k - \dfrac{2\big(f(x_k)\big)^2}{dem}$
$x_{k+1} = x_k - \dfrac{2f(x_k)[f(z_{k+1}) - f(x_k)]}{dem}$
$error = |f(x_k)|$
$k = k + 1$

end

$return\ [x_k, error, k]$