图论第三次作业

李徐瑾　202021110109
数学科学学院

更新：2021 年 5 月 24 日

1　习题六

习题 1.1 设 G 是一个有 n 个点 m 条边的简单连通平面图，则

(1) 若每个面至少由四条边围成，则 $m \leqslant 2n-4$；
(2) 若每个面至少由五条边围成，则 $3m \leqslant 5n-10$；
(3) 若每个面至少由六条边围成，则 $2m \leqslant 3n-6$.

解. 设图 G 有 ϕ 个面且面最小的次数为 l，根据次数公式，则有

$$2m = \sum_{\phi \in \Phi(G)} \phi \deg(\phi) \geq l\phi.$$

结合欧拉公式 $n - m + \phi = 2$，则有

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2).$$

(1) 此时 $l \geqslant 4$，故 $m \leqslant 2n-4$；
(2) 此时 $l \geqslant 5$，故 $3m \leqslant 5n-10$；
(3) 此时 $l \geqslant 6$，故 $2m \leqslant 3n-6$.

□

习题 1.2 设 G 是有 $n(n \geqslant 3)$ 个点 ϕ 个面的简单连通平面图. 证明：$\phi \leqslant 2n-4$.

解. 设图 G 有 m 条边且每个面的次数满足 $l \geqslant 3$，根据次数公式，则有

$$2m = \sum_{\phi \in \Phi(G)} \phi \deg(\phi) \geqslant 3\phi.$$

结合欧拉公式 $n-m+\phi=2$，则有

$$\begin{aligned}\phi &= 2-n+m \\ &\geqslant 2-n+3\phi/2 \\ &\Rightarrow \phi \leqslant 2n-4.\end{aligned}$$

□

习题 1.3 设 G 是一个有 $n(n\geqslant 3)$ 个点 m 条边 ϕ 个面的极大平面图，则

(1) $m=3n-6$;
(2) $\phi=2n-4$;
(3) $\kappa(G)\geqslant 3$.

解. (1-2) 图 G 的每个面的次数均为 3. 根据次数公式，则有

$$2m=3\phi.$$

结合欧拉公式 $n-m+\phi=2$，则有

$$\begin{aligned}m&=3n-6,\\ \phi&=2n-4.\end{aligned}$$

(3) 图 G 是 2 连通的. 当 $n=4$ 时，$G=K_4$，命题成立. 采用数学归纳法. 设 $n<k(k\geqslant 5)$ 时命题成立. 现置 $n=k,\kappa(G)=2$. 则存在 V 的子集 V_1,V_2 满足 $V_1\cup V_2\subset V$ 使得

$$G_1=G[V_1],\quad G_2=G[V_2],\quad G_1\cap G_2=\{uv\}.$$

我们断定 $uv\in E(G)$. 若不然，由于图 G 是极大平面图，则 $G+uv$ 不可平面. 根据 Kuratowski 定理，$G+uv$ 包含了 K_5 或 $K_{3,3}$ 的同胚子图，故 $uv\in E(G)$. 易知 G_1 和 G_2 均是极大平面图，因此 G_1 和 G_2 在三角形和 3 连通中两者必居其一. 事实上，我们可选取一种平面嵌入使得 uv 是 G_1 和 G_2 的边界，且存在 $w_1\in V(G_1),w_2\in V(G_2)$ 分别在边界面上，此时 $G+w_1w_2$ 是可平面的，矛盾.

□

习题 1.4 试证: 没有 6 连通的可平面图.

解. 反证法. 假设图 G 是 6 连通的可平面图，则有 $\kappa(G)\geqslant 6$. 已知

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G),$$

因此 $\delta(G)\geqslant 6$. 根据握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V(G)}d(v)\geqslant n\delta(G)=6n,$$

即 $m\geqslant 3n>3n-6$，矛盾. □

习题 1.5 试证: 若 G 是连通平面图，且所有顶点的度数不小于 3，则 G 至少有一个面 f，使得 $\deg(f) \leqslant 5$.

解. 反证法. 假设图 G 的每个面的次数均有 $\deg(f) \geqslant 6$. 根据次数公式，则有

$$2m = \sum_{f \in \Phi(G)} f \deg(f) \geqslant 6f$$

且由于图 G 的所有顶点的度数不小于 3，根据握手定理可知

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant n\delta(G) = 3n.$$

结合欧拉公式 $n - m + f = 2$，则有

$$\begin{aligned} 2 &= n - m + f \\ &\leqslant 2m/3 - m + m/3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

矛盾. □

习题 1.6 求图1中所示图的对偶图.

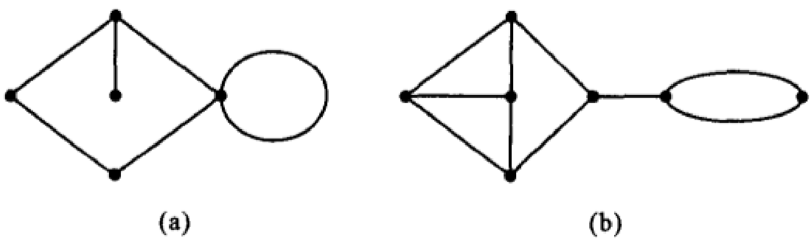

图 1

解. 图1的对偶图如图2所示.

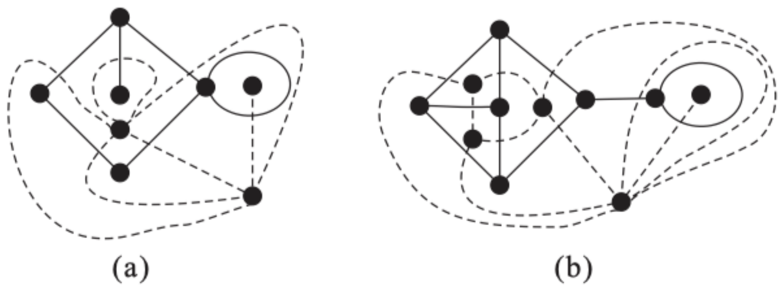

图 2

□

2 习题七

习题 2.1 求图3各图的边色数 χ' 和色数 χ，并分别给出各图的一个 χ' 边着色和 χ 着色.

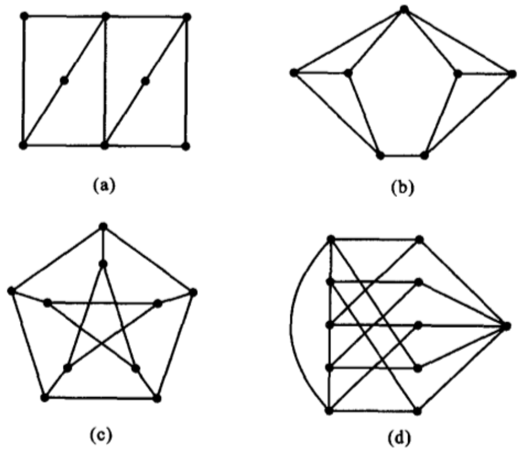

图 3

解. (a) 由于图 G_a 有两个相邻的最大度点且最大度 $\Delta = 4$，故 $\chi'(G_a) = 4$；由于图 G_a 有顶点邻接 2 个顶点且邻接的顶点之间不邻接，则点色数 $\chi(G_a)$ 至少为 2，且 2 种颜色能正常点着色，故 $\chi(G_a) = 2$.

(b) 由于图 G_b 有一个最大度点且最大度 $\Delta = 4$，故 $\chi'(G_b) = 4$；由于图 G_b 采用 3 着色时，不能正常点着色，但采用 4 着色时能正常点着色，故 $\chi(G_b) = 4$.

(c) 图 G_c 是 Peterson 图，故边色数 $\chi'(G_c) = 4$，点色数 $\chi(G_c) = 3$.

(d) 由于图 G_d 的最大度 $\Delta = 5$，因此图 G_d 至少需要 5 种颜色才能正常边着色，且采用 5 着色时能正常边着色，故 $\chi'(G_d) = 5$；由于图 G_d 有顶点邻接 4 个顶点且邻接的顶点之间不邻接，则点色数 $\chi(G_d)$ 至少为 2，而 2 种颜色不能正常点着色，但采用 3 着色时能正常点着色，故 $\chi(G_d) = 3$.

图3各图的一个 χ' 边着色和 χ 着色分别如图4和图5所示.

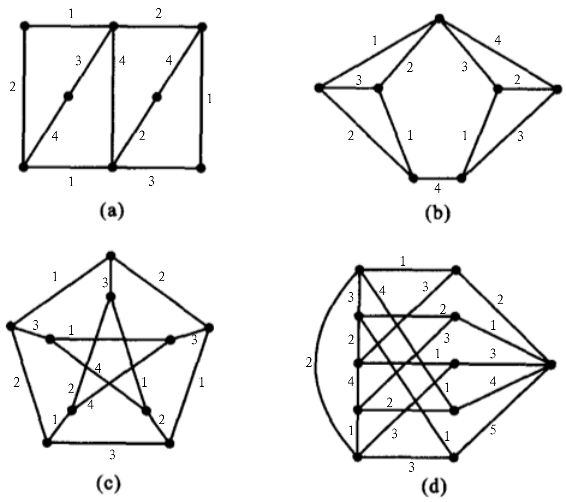

图 4

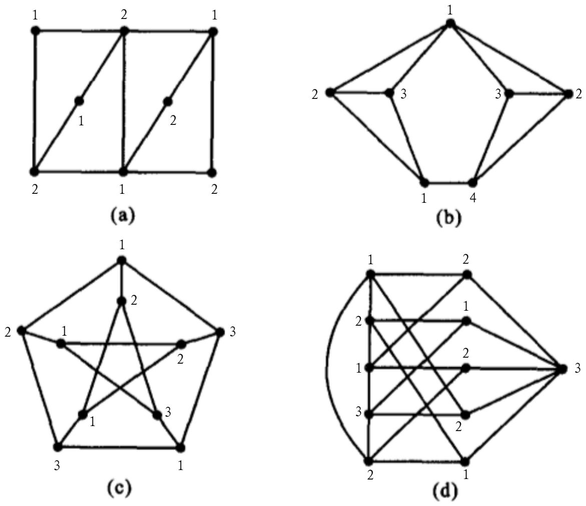

图 5

$\square$

习题 2.2 证明：若 G 是 n 阶非空的正则简单图且 n 为奇数，则 $\chi' = \Delta + 1$.

解. 由于图 G 是奇数阶图，故设图 G 的点数为 $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^+$，边数为 m. 且图 G 是非空正则图，因此图 G 任意一点的度数均为 Δ. 根据握手定理可知

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{v \in V(G)} d(v) = n\Delta \\ &= (2k+1)\Delta \\ &> 2k\Delta, \end{aligned}$$

即 $m > k\Delta$. 故 $\chi' = \Delta + 1$. $\square$

习题 2.3 证明：每个 3 正则 Hamilton 图都有 Tait 着色.(3 正则图的正常 3 边着色称为 Tait 着色)

解. 设图 G 是 3 正则的 Hamilton 图，C 是图 G 的一个 Hamilton 圈，则 C 是偶圈，即 C 是 2 可正常边着色的. 且 $G - C$ 是图 G 的一个 1 因子，即 $G - C$ 是 1 可正常着色的. 故图 G 是 3 可正常边着色的，即图 G 可 Tait 着色. $\square$

习题 2.4 计算图6中各图的色多项式:

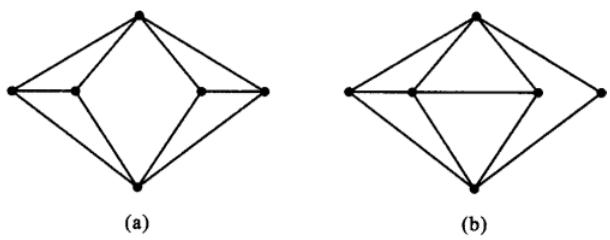

图 6

解. (a) 图6中 (a) 的补图 $\bar{G}_a$ 为

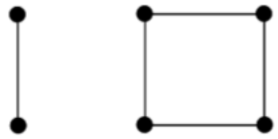

图 7

$\bar{G}_a$ 的两个连通分支分别记为 $\bar{G}_a^1$ 和 $\bar{G}_a^2$.
$\bar{G}_a^1$ 的伴随多项式为 $h(\bar{G}_a^1, x) = x + x^2$;
设 $\bar{G}_a^2$ 的伴随多项式为

$$h(\bar{G}_a^2, x) = r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

由于 $N_1(\bar{G}_a^2) = 0, N_2(\bar{G}_a^2) = 2, N_3(\bar{G}_a^2) = 4, N_4(\bar{G}_a^2) = 1$，故 $\bar{G}_a^2$ 的伴随多项式为

$$h(\bar{G}_a^2, x) = 2x^2 + 4x^3 + x^4.$$

因此 $\bar{G}_a$ 的伴随多项式为

$$\begin{aligned} h(\bar{G}_a, x) &= h(\bar{G}_a^1, x) \cdot h(\bar{G}_a^2, x) \\ &= (x + x^2) \cdot (2x^2 + 4x^3 + x^4) \\ &= 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6. \end{aligned}$$

故 G_a 的色多项式为

$$P_k(G_a) = 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6,$$

其中 $[k]_i = k(k-1)\cdots(k-i+1)$. 即

$$P_k(G_a) = k(k-1)(k-2)^2(k^2 - 5k + 8).$$

(b) 图6中 (b) 的补图 $\bar{G}_b$ 为

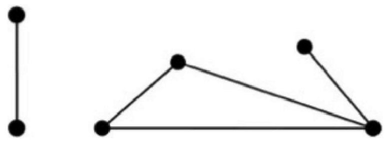

图 8

$\bar{G}_b$ 的两个连通分支分别记为 $\bar{G}_b^1$ 和 $\bar{G}_b^2$.
$\bar{G}_b^1$ 的伴随多项式为 $h(\bar{G}_b^1, x) = x + x^2$;
设 $\bar{G}_b^2$ 的伴随多项式为

$$h(\bar{G}_b^2, x) = r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

由于 $N_1(\bar{G}_b^2) = 0, N_2(\bar{G}_b^2) = 2, N_3(\bar{G}_b^2) = 4, N_4(\bar{G}_b^2) = 1$，故 $\bar{G}_b^2$ 的伴随多项式为

$$h(\bar{G}_b^2, x) = 2x^2 + 4x^3 + x^4.$$

因此 $\bar{G}_b$ 的伴随多项式为

$$\begin{aligned} h(\bar{G}_b, x) &= h(\bar{G}_b^1, x) \cdot h(\bar{G}_b^2, x) \\ &= (x + x^2) \cdot (2x^2 + 4x^3 + x^4) \\ &= 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6. \end{aligned}$$

故图 (b) 与图 (a) 具有相同的色多项式，即

$$P_k(G_b) = k(k-1)(k-2)^2(k^2 - 5k + 8).$$

$\square$

习题 2.5 试证图9所示的两个不同构的图 G_1 与 G_2 有相同的色多项式.

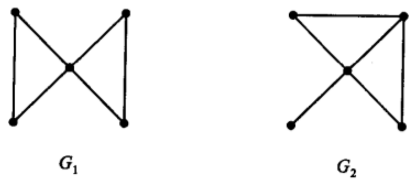

图 9

解. 图9中 G_1 和 G_2 的补图分别如图10所示

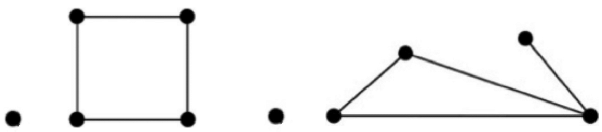

图 10

结合习题2.4的结论可知

$$\begin{aligned} h(\bar{G}_1, x) = h(\bar{G}_2, x) &= x(2x^2 + 4x^3 + x^4) \\ &= 2x^3 + 4x^4 + x^5. \end{aligned}$$

因此图 G_1 和 G_2 具有相同的伴随多项式. 故图 G_1 和 G_2 有相同的色多项式，即

$$\begin{aligned} P_k(G_1) = P_k(G_2) &= 2[k]_3 + 4[k]_4 + [k]_5 \\ &= 2k(k-1)(k-2) + 4k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &\quad + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\ &= k(k-1)^2(k-2)^2. \end{aligned}$$

$\square$