图论第二次作业

李徐瑾　202021110109
数数学科学学院

更新：2021 年 5 月 9 日

1　习题四

习题 1.1 判断图1所示的四个图是否可以一笔画.

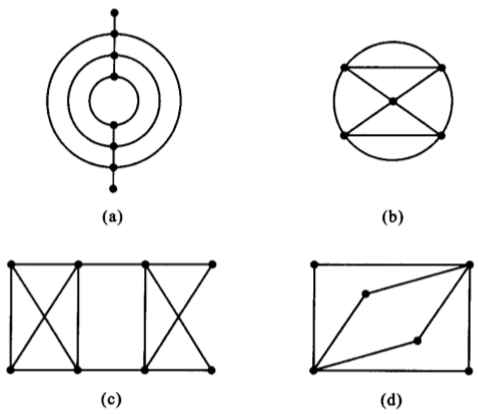

图 1

解. (a) 不可以；(b) 可以；(c) 可以；(d) 可以. □

习题 1.2 (1) 画一个有 Euler 闭迹和 Hamilton 圈的图；

(2) 画一个有 Euler 闭迹但没有 Hamilton 圈的图；

(3) 画一个有 Hamilton 圈但没有 Euler 闭迹的图；

(4) 画一个既没有 Euler 闭迹也没有 Hamilton 圈的图.

解. (1) 完全图 K_3；

(2) 两个恰好有 1 个公共顶点的圈；

(3) 完全图 K_4;

(4) Peterson 图.

$\square$

习题 1.3 设 n 阶无向简单图 G 有 m 条边. 证明: 若

$$m \geqslant C_{n-1}^2 + 2,$$

则 G 是 Hamilton 图.

解. 反证法. 设 G 是 $n \geqslant 3$ 的非 H 简单图. 对于某个正整数 $m < n/2$，G 度弱于 $C_{m,n}$. 已知

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|,$$

因此

$$\begin{aligned}
|E(G)| &\leqslant |E(C_{m,n})| \\
&= \frac{1}{2}[m^2 + (n-2m)(n-m-1) + m(n-1)] \\
&= C_{n-1}^2 + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (m-1)(n-2m-1) \\
&\leqslant C_{n-1}^2 + 1.
\end{aligned}$$

这是矛盾的. $\square$

习题 1.4 证明: 若 G 没有奇点，则存在边不重的圈 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 使得

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(Q_i).$$

解. 因为 G 没有奇点，所以 G 的每个非平凡连通分支都是 Euler 图. 因此，G 的每个连通分支的边集均可表示成边不重的圈的并. 故图 G 的边集可表示成边不重的圈的并. $\square$

习题 1.5 证明: 若 G 有 $2k > 0$ 个奇点，则存在 k 条边不重的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 使得

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(Q_i).$$

解. 假设图 G 是连通图. 图 G 的奇点记为 $\{v_i\}_{i=1}^{2k}$. 添加边 $e_i = (v_i, v_{i+1}), \forall 1 \leqslant i \leqslant k$ 得到图 G'. 显然图 G' 是 Euler 图. 且图 G' 的边集是一条回路 Q. 再从回路 Q 中去掉边 $\{e_i\}_{i=1}^{k}$，得到 k 条边不重的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$. 故有

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(Q_i).$$

$\square$

习题 1.6 证明: 若

(1) G 不是二连通的图，
(2) 或 G 是具有二分类 (X, Y) 的偶图，其中 $|X| \neq |Y|$，

则 G 是非 Hamilton 图.

解. (1) 因为图 G 不是二连通的，因此图 G 包含割点 v 使得 $\omega(G-v) \geqslant 2$. 故图 G 是非 Hamilton 图，
(2) 反证法. 若图 G 是 Hamilton 图，则其 Hamilton 圈必交替经过 X 和 Y 的顶点，因此 $|X| = |Y|$，这是矛盾的.

□

习题 1.7 证明: 若 G 有 Hamilton 路，则对于 V 的每个真子集 S，有 $\omega(G-S) \leqslant |S|+1$.

解. 设 G 的 H 圈是 C，S 是 V 的非空真子集.

(1) S 中只含 C 中诸邻接顶点. 这时图 $G-S$ 显然是一条路，因此有

$$\omega(C-S) = 1;$$

(2) S 中只含 r 个在 C 均不邻接的顶点. 这时图 $C-S$ 有 r 个分支，于是

$$\omega(C-S) = r.$$

一般而言，若 S 中既含有邻接的顶点又含有不邻接的顶点，则有

$$\omega(C-S) \leqslant |S|+1.$$

因为 $C-S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图，故

$$\omega(G-S) \leqslant \omega(C-S) \leqslant |S|+1.$$

□

习题 1.8 设 G 是有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 的非平凡简单图，其中 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$. 证明: 若不存在 $m < (n+1)/2$，使得 $d_m < m$ 且 $d_{n-m+1} < n-m$，则 G 有 Hamilton 路.

解. 增加点 v 使得 $v \notin V(G)$，将 v 与图 G 的所有点连接起来得到图 G'. 显然图 G 的度序列为 $(d_1+1, d_2+1, \cdots, d_n+1, n)$. 已知不存在 $m < (n+1)/2$，使得 $d_m+1 < m$ 且 $d_{n-m+1}+1 < n-m$. 根据度序列判断定理可知，G' 是 Hamilton 图，因此 G 包含 Hamilton 路. □

习题 1.9 对于下列问题给出一个好算法:

(1) 构作一个图的闭包；
(2) 若某图的闭包是完全图，求该图的 Hamilton 圈.

解. **步** 1 令 $G_0 = G, k = 0$;
步 2 在 G_k 中求顶点 u, v，使得

$$d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) = \max\{d_{G_k}(x) + d_{G_k}(y) \mid xy \notin E(G_k)\};$$

步 3 若 $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) \geqslant |G|$，转到步 4；否则停止，此时得到图 G' 的闭包；
步 4 令 $G_{k+1} = G_k + uv, k = k + 1$，转到步 2.

由于总运算量为 $\mathcal{O}(n^2)$，因此是好算法. 且若图 G 的闭包是完全图，则采用边交换技术把 G 的闭包中的一个 Hamilton 圈化为图 G 中的一个 Hamilton 圈. □

2 习题五

习题 2.1 (1) 证明: 每个 k 方体都有完美匹配 $(k > 2)$;
(2) 求 K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数.

解. (1) 由于 k 方体是 k 正则的二部图，故 k 方体中存在完美匹配；
(2) K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数分别为 $(2n-1)!!$ 和 $n!$.

□

习题 2.2 证明: 一棵树最多只有一个完美匹配.

解. 反证法. 设树 T 存在两个完美匹配 M_1 和 M_2，则 $M_1 \triangle M_2 \neq \varnothing$. 易知，在树 $T(M_1 \triangle M_2)$ 中的每个顶点的度数均为 2 度. 因此树 T 中存在圈，这是矛盾的. □

习题 2.3 对每一个 $k > 1$，找出一个没有完美匹配的 k 正则简单图的例子.

解. 当 k 为偶数时，完全图 K_{k+1} 没有完美匹配的 k 正则简单图.

当 k 为奇数时，构造图 H 使得 $V(H) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2k-1}\}$ 且

$$\begin{aligned} E(H) =& \{v_1v_2, v_1v_4, \cdots, v_1v_{2k-2}, v_3v_2, \cdots, v_3v_{2k-2}, \cdots, v_{2k-1}v_2, v_{2k-1}v_4, \cdots, v_{2k-1}v_{2k-2}\} \\ & \cup \{v_1v_3, v_5v_7, \cdots, v_{2k-5}v_{2k-3}\}. \end{aligned}$$

在 H 中的仅有 $\deg(v_{2k-1}) = k - 1$，其余顶点的度数均为 k. 先将 H 复制 k 次，再添加新顶点 u，并将 u 与每个 v_{2k-1} 连接得到图 G. 图 G 为阶数为 $k(2k-1)+1$ 的 k 正则图.

假设 G 包含完美匹配 M. 因为 H 有 $2k-1$ 个点，每个 H 中至多有 $k-1$ 条边属于 M. 且顶点 u 不在任何 H 中，故 $|M| \leqslant k(k-1)+1$. 因此，M 中包含的顶点数不超过 $2k(k-1)+2$. 当 $k > 1$ 时有

$$|V(G)| = k(2k-1) + 1 > 2k(k-1) + 2 \geqslant 2|M|.$$

故 M 不是 G 的生成子图，矛盾. 图 G 不包含完美匹配. □

习题 2.4 证明: K_4 有唯一的一个 1-因子分解. 并给出 K_8 的一个 1-因子分解.

解. 因为 K_4 有 3 不同的完美匹配，且 K_4 的每个 1-因子分解包含 3 个不同的完美匹配. 故 K_4 有唯一的一个 1-因子分解. K_8 的一个 1-因子分解有

$$G_1 = \{v_1v_8, v_2v_7, v_3v_6, v_4v_5\}, \quad \forall v_i \in V(K_8).$$

□

习题 2.5 求 $K_{3,3}$ 和 K_6 的 1-因子分解的数目.

解. 根据习题2.1的结论可知，$K_{3,3}$ 和 K_6 的 1-因子分解的数目分别为 6 个和 15 个. □

习题 2.6 证明: K_{6n-2} 有一个 3-因子分解.

解. 由于 K_{6n-2} 可分解为 $6n-3$ 个边不重的 1-因子的并，且 3 个边不重的 1-因子可合成一个 3-因子. 故 K_{6n-2} 可分解为 $2n-1$ 个边不重的 3-因子的并，即 K_{6n-2} 有一个 3-因子分解. □

习题 2.7 证明: 若 n 是偶数，且 $\delta(G) \geqslant n/2+1$，则 n 阶简单图 G 有 3-因子.

解. 因为 $\delta(G) \geqslant n/2+1$，根据 Dirac 定理可知，$n$ 阶简单图 G 有 Hamilton 路 C. 且 n 是偶数，故 C 是偶圈. 于是从偶圈 C 可得到两个 1-因子，记为 C_1 和 C_2. 先考虑 $G' = G - C_i, i = 1,2$，则 $\delta(G') \geqslant n/2$. 于是 G' 中有 Hamilton 路 C'. 作 $H = C_i \cup C', i = 1,2$，显然 H 是 G 的一个 3-因子. □

习题 2.8 证明: 对 $n \geqslant 1$，K_{4n+4} 是 4-因子可分解的.

解. 由于 K_{4n+1} 可分解为 $2n$ 个边不重的 2-因子的并，且 2 个边不重的 2-因子的并是一个 4-因子. 故 K_{4n+1} 可分解为 n 个边不重的 4-因子的并，即 K_{4n+4} 是 4-因子可分解的. □