

Эйлеровы маршруты. Критерий эйлеровости графа. Гамильтоновы маршруты.

Двудольный граф, связь с двураскрашиваемостью и циклами нечётной длины.

Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

1 Эйлеровы маршруты

Определение 1.1. *Связный граф называется эйлеровым, если существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз. Соответствующий цикл называется эйлеровым.*

Замечание 1.1. *Вместо связности также можно потребовать отсутствие изолированных вершин или посещение всех вершин циклом.*

Определение 1.2. *Эйлеров путь - путь, который проходит по каждому ребру графа ровно 1 раз (определение аналогично эйлерову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).*

2 Критерий эйлеровости графа

Теорема 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Граф эйлеров*
2. *Все степени вершин **связного графа** чётны*
3. *Рёбра **связного** графа можно разбить на непересекающиеся (по ребрам) циклы*

Доказательство. $(1 \implies 2)$: Эйлеров цикл проходит по всем вершинам. В каждую вершину он заходит и выходит из неё (по разным рёбрам). Получаем при каждом посещении увеличение степени на $+2$. Поэтому степени всех вершин чётны.

$(2 \implies 3)$: Стартуем из произвольной вершины. Строим цикл, пока он не замкнётся. Следующий шаг всегда можно сделать из условия чётности степеней. Далее удалим все рёбра полученного цикла и повторим процедуру. Делаем это до тех пор, пока не исчерпаем все рёбра.

$(3 \implies 1)$: Докажем индукцией по количеству непересекающихся (по ребрам) циклов.

База: если цикл один, то это и есть эйлеров цикл.

Шаг: Пусть для графов, распадающихся на не более, чем n циклов, утверждение верно. Рассмотрим граф с $n + 1$ циклом. Рассмотрим (и запишем) $(n + 1)$ -й цикл

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k v_1$$

Удалим его рёбра из графа G . Новый граф G' распадается на m компонент связности, для каждой из которых выполнено предположение индукции (т.к. все компоненты распадаются на $\leq n$ циклов). Тогда для каждой компоненты связности есть эйлеров цикл (рёбра всех циклов для разных компонент связности попарно различны). При этом в каждом из этих циклов есть вершина из

$$v_1, v_2, \dots, v_k$$

Покажем это. В самом деле, если в графе G' больше одной компоненты связности, то вершины из разных компонент до удаления были связаны путём из рёбер удалённого цикла. Тогда будем идти по удалённому циклу и, заходя в очередную вершину, обходить эйлеровым циклом её компоненту. Если компонента одна, то случай тривиален (после удаления получаем эйлеров граф G' , у которого есть общая с удалённым циклом вершина; проходимся от неё эйлеровым циклом по G' , а потом и по удалённому циклу). \square

3 Гамильтоновы маршруты

Аналогично эйлеровым маршрутам :-)

Определение 3.1. Граф называется гамильтоновым, если существует цикл, проходящий по каждой вершине ровно 1 раз. Очев. он связный. Соответствующий цикл называется гамильтоновым.

Определение 3.2. Гамильтонов путь - путь, который проходит по каждой вершине графа ровно 1 раз (определение аналогично гамильтонову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).

4 Двудольный граф. Двураскрашиваемость

Определение 4.1. Граф $G(V, E)$ - двудольный, если он разбивается на два графа (две доли) L и R так, что:

1. $L \cup R = V$
2. $L \cap R = \emptyset$
3. $\forall e \in E \ e = (v_L, v_R) \ (v_L \in L \wedge v_R \in R)$

Определение 4.2. Граф называется k -раскрашиваемым, если существует раскраска вершин в k цветов такая, что никакие 2 смежные вершины не имеют одного цвета. Соответствующая раскраска называется правильной.

Определение 4.3. Остовное дерево графа G - подграф, включающий в себя все вершины графа G и являющийся деревом. У связного графа всегда можно взять остовное дерево. (Поможет нам далее при доказательстве).

Теорема 4.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф двудольный
2. Граф двураскрашиваемый
3. В графе нет циклов нечётной длины

Доказательство. $(1 \iff 2)$: очев (покрасьте одну долю в один цвет, а другую — в другой // киньте вершины одного цвета в первую долю, а другого — во вторую).

$(1 \implies 3)$: Рассмотрим произвольный цикл

$$v_{L_1}, v_{R_1}, v_{L_2}, v_{R_2}, \dots, v_{R_k}, v_{L_1}$$

Так как вершины из разных долей чередуются, то цикл имеет чётную длину.

$(3 \implies 2)$: Пусть исходный граф G разбивается на m компонент связности. Очевидно, что каждая из них является в сущности связным графом без циклов нечётной длины. Рассмотрим произвольную компоненту K и выделим в ней остовное дерево, которое затем правильно покрасим в 2 цвета.

Лемма 4.1. Полученная раскраска правильная.

Доказательство. От противного предположим, что это не так. Пусть есть ребро из K , но не из дерева, соединяющее вершины v_1 и v_2 , имеющие один цвет. В дереве существует единственный простой путь от v_1 до v_2 . Его длина чётна. Добавив к этому пути ребро $(v_1 v_2)$, получим цикл нечётной длины в исходном графе K . Получили противоречие, что и требовалось. \square

Тогда, раскрасив каждую из компонент G правильно в 2 цвета, получим требуемую правильную раскраску G в 2 цвета. Значит G — двураскрашиваемый, что и требовалось. \square

5 Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

Определение 5.1. Паросочетание - набор несмежных рёбер.

Определение 5.2. Вершинное покрытие - подмножество вершин $S \subset V$ графа $G(V, E)$ такое, что каждое ребро инцидентно по крайней мере одной вершине из S . (В программе нет).

Замечание 5.1. Далее полагаем, что в двудольном графе $G \hookrightarrow |L| \leq |R|$

Определение 5.3. Паросочетание P называют совершенным, если каждая вершина из L инцидентна какому-то ребру из паросочетания P .

Теорема 5.1 (Теорема Холла о существовании совершенного паросочетания). В двудольном графе $G(|L| \leq |R|)$ существует совершенное паросочетание $\iff \forall X \subset L$ смежно не менее чем с $|X|$ вершинами из правой доли.

Замечание 5.2. Вершины считаем смежными с множеством X , если она смежна хотя бы с одной вершиной из X .

Доказательство. (\implies): очев (берём в совершенном паросочетании нужные рёбра и получаем ровно $|X|$ вершин из правой доли).

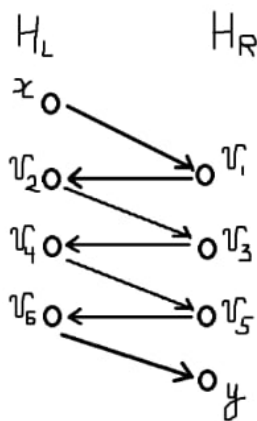
(\impliedby): Пусть выполнено условие о количестве смежных. Покажем, что существует совершенное паросочетание.

Лемма 5.1. Если в графе построено паросочетание размера $k < |L|$, то есть паросочетание размера $k + 1$ (при выполнении условия о количестве смежных).

Доказательство. Покажем это индукцией по k .

База. При $k = 0$ из существования рёбер следует возможность построить паросочетание размера $k + 1 = 1$.

Шаг. Пусть построено паросочетание размера $k < |L|$. Ориентируем рёбра из паросочетания из R в L , а остальные — из L в R .



Рассмотрим $x \in L$, не участвующую в паросочетании. Пусть H — множество вершин, достижимых из x (с учётом ориентации).

Лемма 5.2. $\exists y \in H \cap R$: y не участвует в паросочетании.

Доказательство. H_L содержит все пары H_R и ещё вершину x . Если бы все H_R участвовали в паросочетании, то $|H_L| > |H_R|$. Но с H_L смежны только вершины из H_R . Действительно, если найдется

вершина z из правой доли, смежная с H_L , то из нее не может выходить рёбер в H_L , так как иначе получим противоречие с определением паросочетания (два ребра паросочетания будут смежны в силу того, что любая вершина H_L достижима из x по определению). Значит рёбра из H_L могут лишь входить в z . Но тогда z достижима из x . Следовательно, $z \in H_R$, что и требовалось. Но тогда получаем противоречие с тем, что смежных с H_L должно быть не менее $|H_L|$, а значит лемма доказана. \square

Рассмотрим путь из x в y (смотрим на картинку выше). Исключим из паросочетания рёбра

$$(v_1v_2), (v_3v_4), \dots, (v_{2m-1}v_{2m})$$

Затем добавим рёбра

$$(xv_1), (v_2v_3), \dots, (v_{2m}y)$$

Легко видеть, что теперь размер паросочетания $k + 1$, что и требовалось. \square

Итого, по индукции получили паросочетание размера $|L|$, что и требовалось. \square