Гомоморфизм и изоморфизм в группах. Теорема Кэли.

1 Гомоморфизм

Определение 1.1. *Гомоморфизм из группы* $G = (M, \cdot)$ *в группу* $G' = (M', *)$ *— это* $\varphi : G \to G'$ *такое, что* $\forall a, b, \in G \hookrightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$
Образ гомоморфизма $Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subset G'$

Свойства гомоморфизма:

- $\varphi(e) = e'$

  Доказательство. $\varphi(a \cdot e) = \varphi(a) * \varphi(e) = \varphi(a) = \varphi(e \cdot a) = \varphi(e) * \varphi(a)$ □

- $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

  Доказательство. $\varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) = e' = \varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) * \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a^{-1})$ — обратный элемент к $\varphi(a)$ в G' □

Утверждение 1.1. $Im\varphi < G'$

Доказательство. $\forall c, d \in Im\varphi\ \exists a, b \in G : \varphi(a) = c,\ \varphi(b) = d$
Рассмотрим $c * d^{-1} = \varphi(a) * (\varphi(b))^{-1} = \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) = \varphi(a \cdot b^{-1}) \in Im\varphi \Rightarrow Im\varphi < G'$ (по критерию подгруппы) □

Определение 1.2. *Ядро гомоморфизма* $Ker\varphi = \{g \mid g \in G,\ \varphi(g) = e' \in G'\}$

Утверждение 1.2. $Ker\varphi \triangleleft G$

Доказательство.

1. $\forall a, b \in Ker\varphi \hookrightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) = e' * (e')^{-1} = e' \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow Ker\varphi < G$ (по критерию подгруппы)

2. Рассмотрим произвольный $g \in G$:
   $\forall t \in g \cdot Ker\varphi\ \exists h \in Ker\varphi :\ t = g \cdot h$. Рассмотрим $\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(h) * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(g^{-1}) = e' \Rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow g \cdot h \in (Ker\varphi) \cdot g \Rightarrow t \in (Ker\varphi) \cdot g \Rightarrow g \cdot Ker\varphi = Ker\varphi \cdot g$

□

Определение 1.3. *Сюръективный гомоморфизм из* G *на* G' : $\forall b \in G'\ \exists a \in G :\ \varphi(a) = b$
$(Im\varphi = \varphi(G) = G')$

Определение 1.4. *Изоморфизм — гомоморфизм, являющийся биекцией (обозначается* $\cong$*)*

Теорема 1.1. *(Теорема Кэли) Пусть* G *— конечная группа,* $|G| = n$*. Тогда* $\exists H < S_n :\ H \cong G$

Доказательство. Рассмотрим левые сдвиги $L_a,\ a \in G$:
$g_1 \ \to\ a \cdot g_1$
$g_2 \ \to\ a \cdot g_2$
$\dots$
$g_n \ \to\ a \cdot g_n$
$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\ g_i \in G$. Так как $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \hookrightarrow\ a \cdot g_i \in G$ и они попарно не равны, то L_a — перестановка G.
L_a для всех $a \in G$ образуют группу:

- $L_e = e'$ — тождественная перестановка

- $L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = L_e$
- $L_a \circ L_b = L_{a \cdot b} \Rightarrow (L_a \circ L_b) \circ L_c = L_a \circ (L_b \circ L_c) = L_{a \cdot b \cdot c}$

Следовательно, $G \cong L_G$. Так как $|L_G| = n$, $L_g \subset S_n$ и L_G — группа относительно той же групповой операции, что и $S_n \Rightarrow L_G < S_n \Rightarrow G \cong L_G < S_n$ □