Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного

1 Производные высших порядков

Определение 1.1. *Пусть f определена на $U_\delta(x_0)$. Определим высшие производные по индукции, т.е. если при $k \in \mathbb{N}_0$ определена $f^{(k)}$ на $U_\delta(x_0)$, то*

$$f^{(k+1)}(x_0) := (f^{(k)})'(x_0)$$

Замечание 1.1. *База индукции $f^{(0)} \equiv f$*

2 Дифференциал второго порядка

Первый дифференциал был определён автором в предыдущем пункте программы.

Определение 2.1. *Пусть f определена в $U_\delta(x_0)$. Определим дифференциал второго порядка:*

$$d^2 f(x_0) := d(df)_{x_0}$$

Замечание 2.1. *В df dx считается фиксированным при вычислении (без паники, потом разъясним).*

3 Дифференциалы высших порядков (нет в программе, но является явным продолжением темы и помогает понять замечание 2.1)

Определение 3.1. *Далее по индукции: если $\exists d^k f(x)$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$ при нектором $k \in \mathbb{N}$, то*

$$d^{k+1} f(x_0) := d(d^k f)\Big|_{x=x_0}$$

Замечание 3.1. *В df^k dx считается фиксированным при вычислении.*

Теорема 3.1. *Если f k раз дифференцируема в т. x_0 (т.е. $\exists f^{(k)}(x_0) \in \mathbb{R}$), то*

$$d^k f_{x_0} = f^{(k)}(x_0)(dx)^k$$

Доказательство. Случай с $k = 1$ уже где-то мы видели (в определении первого дифференциала). Это отлично, докажем по индукции, определив $k = 1$ как базу. Пусть доказано для $k = s$. Посмотрим, что происходит при $k = s + 1$:

$$d^{s+1} f(x_0) = d(d^s f)\Big|_{x=x_0} = d(f^{(s)}(x)(dx)^s)\Big|_{x=x_0} = f^{(s+1)}(x_0)(dx)^{s+1}$$

$\square$

Замечание 3.2. *Давайте разбираться с фиксацией (заморозкой) dx на примере нашего подсчёта в доказательстве выше. По определению дифференциала высшего порядка получили*

$$d^{s+1} f(x_0) = d(d^s f)\Big|_{x=x_0}$$

Уже с этого момента на время перестаём писать x_0, т.к. это конкретная точка, следовательно, любая запись по типу $d(d^k f(x_0))$ будет просто обращаться в ноль как дифференциал от константы. Вместо этого будем миленько приписывать $x = x_0$ как напоминание о наших намерениях. Внутренний дифференциал переписываем, так как наше предположение для $k = s$ верно. Получаем

$$d(d^s f)\Big|_{x=x_0} = d(f^{(s)}(x)(dx)^s)\Big|_{x=x_0}$$

Здесь как раз начинается заморозка / фиксация dx. На время она ведёт себя для нас как константа, поэтому можно её вынести и взять дифференциал от s-й производной:

$$d(f^{(s)}(x)(dx)^s)\Big|_{x=x_0} = (dx)^s df_x^{(s)}(dx)\Big|_{x=x_0} = f^{(s+1)}(x_0)(dx)^{s+1}$$

Когда дифференциалы убегают, мы не боимся глупых занулений и возвращаем x_0.

Замечание 3.3. *Обязательно ставьте скобки, когда возводите dx в степень, потому что по записи dx^s непонятно, возводите ли вы dx в степень s или берёте первый дифференциал от x^s.*

4 Отсутствие инвариантности формы дифференциала второго порядка относительно замены переменного

Пункт сам за себя всё сказал. Давайте на это посмотрим)
Если $z = z(y)$ (y - независимая переменная), то спокойно получаем из предыдущего пункта

$$d^2z = z''(y)(dy)^2$$

Если же $y = y(x)$ и $z = z(y(x))$, то становится неприятнее (пользуемся производной композиции):

$$d^2z = d(z'(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx)$$

Далее опять замораживаем dx и, как константу, таскаем её за собой. Берём производную от произведения:

$$d(z'(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx) = z''(y(x)) \cdot (y'(x))^2 \cdot (dx)^2 + z'(y(x)) \cdot y''(x) \cdot (dx)^2$$

Первое слагаемое запишется как

$$z''(y)(dy)^2$$

Второе слагаемое запишется как

$$z'(y)d^2y$$

Приплыли... Для $z = z(y(x))$ получили

$$d^2z = z''(y)(dy)^2 + z'(y)d^2y$$

Форма записи отличается от той, которая возникает для $z = z(y)$.

5 Формула Лейбница для n-й производной произведения функций

Теорема 5.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\exists u^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и $\exists v^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\exists (uv)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)}(x_0) \cdot v^{(n-k)}(x_0)$$

Замечание 5.1. *Автор считает, что формулу для числа сочетаний все держат в уме)*

Доказательство. Докажем по индукции (автор предлагает читателю запомнить, что десятый пункт программы очень любит индукцию). Для $n = 1$ очев проходили и доказывали. Выполним шаг, зная, что утверждение выполнено для $n = k \in \mathbb{N}$.

$$(uv)^{(k+1)}(x_0) := \left((uv)^{(k)}(x)\right)'\Big|_{x=x_0} = \left(\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot u^{(s)}(x) \cdot v^{(k-s)}(x)\right)'\Bigg|_{x=x_0}$$

Берём производную от произведения, так как производная от суммы - это сумма производных, а C_k^s - просто константа:

$$\left(\sum_{s=0}^{k} C_k^s \cdot u^{(s)}(x) \cdot v^{(k-s)}(x)\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \left[u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0) + u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right]$$

Зачем смотреть на одну сумму, если можно сразу на две)

$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s \left[u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0) + u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} C_k^s \left(u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0)\right) + \sum_{s=0}^{k} C_k^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right)$$

Из первой суммы вытянем $C_k^k \left(u^{(k+1)}(x_0) \cdot v^{(0)}(x_0)\right) = u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0)$.

Из второй суммы вытянем $C_k^0 \left(u^{(0)}(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0)\right) = u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0)$.

Остаток первой суммы перепишем как

$$\sum_{s=1}^{k} C_k^{s-1} \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right)$$

Вторая сохранит вид, но потеряет первое слагаемое:

$$\sum_{s=1}^{k} C_k^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right)$$

Теперь посмотрим, чему же равно $C_k^s + C_k^{s-1}$:

$$C_k^s + C_k^{s-1} = \frac{k!}{s!(k-s)!} + \frac{k!}{(s-1)!(k-s+1)!} = \frac{(k+1)!}{s!(k-s+1)!} = C_{k+1}^s$$

Но тогда

$$\sum_{s=1}^{k} C_k^{s-1} \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right) + \sum_{s=1}^{k} C_k^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right)$$

Теперь вернём вытянутые слагаемые и получим, что

$$(uv)^{(k+1)}(x_0) = u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0) + \sum_{s=1}^{k} C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right) + u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k+1} C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0)\right)$$

$\square$