

Действительные числа. Теорема о
существовании и единственности точной
верхней (нижней) грани числового множества,
ограниченного сверху (снизу). Счетность
множества рациональных чисел, несчетность
множества действительных чисел

1 Множество действительных чисел

Определение 1.1 (Действительные числа). Множество действительных чисел \mathbb{R} это множество, на котором заданы 2 отображения:

1. $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - сложение

2. \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - умножение

и отношение порядка " \leq ". Все они удовлетворяют следующим аксиомам:

1. Аксиомы сложения

(a) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + b = b + a$ - коммутативность

(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$ - ассоциативность

(c) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + 0 = 0 + a = a$ - существование нейтрального

(d) $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) : a + (-a) = (-a) + a = 0$ - существование обратного

2. Аксиомы умножения

(a) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$ - коммутативность

(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ - ассоциативность

(c) $\exists 1 \neq 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ - существование нейтрального

(d) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ - существование обратного

3. Связь сложения и умножения

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ - дистрибутивность

4. Аксиомы порядка

(a) $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

(b) $(a \leq c) \wedge (c \leq b) \Rightarrow a \leq c \leq b \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

5. Связь сложения и порядка

(a) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

6. Связь умножения и порядка

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} (0 \leq c) \hookrightarrow a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

7. Аксиома непрерывности

Пусть A, B - непустые подмножества \mathbb{R} такие, что:

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$$

Тогда:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$$

Замечание 1.1. Множество \mathbb{Q} удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиомы непрерывности

Доказательство. Пусть заданы множества:

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0 : x^2 < 2\}, \quad B := \{x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0 : x^2 > 2\}$$

Предположим, что $\exists c \in \mathbb{Q}$, разделяющая A и B .

Тогда $a \leq c \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$. Следовательно,

$$(c^2 \leq 2) \wedge (c^2 \geq 2) \implies c^2 = 2$$

Предположим, что

$$\exists \frac{m}{n} - \text{несократимая}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 - \text{чётное} \Rightarrow m = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4k^2}{n^2} = 2 \Rightarrow n^2 - \text{чётное} \Rightarrow n - \text{чётное} \Rightarrow n = 2l \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2k}{2l} = \frac{k}{l} - \text{дробь сократима} \Rightarrow \text{противоречие}$$

$$\implies \nexists c \in \mathbb{Q}: c^2 = 2$$

□

2 Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Определение 2.1 (Верхняя грань). Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является верхней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \hookrightarrow x \leq M$.

Определение 2.2 (Нижняя грань). Будем говорить, что $m \in \mathbb{R}$ является нижней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \hookrightarrow m \leq x$.

Определение 2.3 (Ограниченное сверху (снизу) множество). Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху (снизу), если \exists конечная верхняя (нижняя) грань этого множества.

Определение 2.4 (Ограниченное множество). Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение 2.5 (Точная верхняя грань). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является точной верхней гранью E ($M = \sup E$), если:

1. M - верхняя грань множества E
2. $\forall M' \in \mathbb{R}$ (M' - верхняя грань E) $\hookrightarrow M' \geq M$

Определение 2.6 (Альтернативное определение супремума). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $M \in \mathbb{R}$ - супремум E , если:

1. $\forall a \in E \hookrightarrow a \leq M$
2. $\forall M' < M \exists \tilde{a} \in E : M' < \tilde{a} \leq M$

Теорема 2.1. \forall ограниченного сверху непустого множества $E \subset \mathbb{R}$ супремум существует и единственен.

Доказательство. Т.к. E ограничено сверху, то \exists хотя бы одна верхняя грань этого множества.

Пусть B - множество всех верхних граней множества E . $B \neq \emptyset$ и E расположено левее множества B .

\Rightarrow по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти множества: $a \leq c \leq b \forall a \in E$ и $\forall b \in B$.

Покажем, что $c = \sup E$:

1. П.1 выполнен, т.к. в силу $a \leq c \hookrightarrow c$ - верхняя грань.
 2. В силу $c \leq b$ выполнено условие 2 определения супремума т.к. B - множество всех верхних граней.
- Единственность: пусть M_1 и M_2 - различные супремумы множества E . $M_1 = \sup E$. В силу пункта 2 $\forall M'$ - верхняя грань $E \hookrightarrow M' \geq M_1$, но M_2 - верхняя грань $\Rightarrow M_2 \geq M_1$. Аналогично доказывается, что $M_1 \geq M_2$. Следовательно, $M_1 = M_2$. \square

Определение 2.7 (Неограниченное сверху множество). Если множество $E \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху, то по определению его супремум считается равным $+\infty$.

Определение 2.8 (Точная нижняя грань). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Число $m \in \mathbb{R}$ назовем точной нижней гранью E ($m = \inf E$), если:

1. m - нижняя грань множества E
2. $\forall m' \in \mathbb{R}$ (m' - нижняя грань E) $\hookrightarrow m' \leq m$

Определение 2.9 (Альтернативное определение инфимума). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ - инфимум E , если:

1. $\forall a \in E \hookrightarrow a \geq m$
2. $\forall m' > m \exists \tilde{a} \in E : m \leq \tilde{a} < m'$

Замечание 2.1. С помощью альтернативных определений супремума и инфимума можно записать их определения в $\overline{\mathbb{R}}$ (ранее они могли принимать только числовые значения).

Теорема 2.2. \forall непустого ограниченного снизу множества $E \subset \mathbb{R}$ инфимум существует и единственен.

Доказательство. Аналогично с супремумом. \square

Определение 2.10 (Неограниченное снизу множество). Если множество $E \subset \mathbb{R}$ не ограничено снизу, то по определению его инфимум считается равным $-\infty$.

3 Счётность множества рациональных чисел

Теорема 3.1. Множество \mathbb{Q} счётно.

Доказательство. Построим бесконечную табличку (представлена ниже) и будем двигаться по ней змейкой, пропуская числа, которые уже встречались ранее. Тем самым мы получили биекцию из \mathbb{N} на \mathbb{Q} .

Это инъекция, потому что пропускали повторяющиеся числа. Это сюръекция, т.к. каждое число попадает в некоторый квадрат, а значит змейка его пройдет.

	0	-1	1	-2	...	-m	m
1	$\frac{0}{1}$	$\xrightarrow{\text{red}} \frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\xrightarrow{\text{red}} \frac{-2}{1}$...	$\frac{-m}{1}$	$\frac{m}{1}$
2	$\frac{0}{2}$	$\xleftarrow{\text{red}} \frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\xleftarrow{\text{red}} \frac{-2}{2}$...	$\frac{-m}{2}$	$\frac{m}{2}$
3	$\frac{0}{3}$	$\xrightarrow{\text{red}} \frac{-1}{3}$	$\xrightarrow{\text{red}} \frac{1}{3}$	$\xrightarrow{\text{red}} \frac{-2}{3}$...	$\frac{-m}{3}$	$\frac{m}{3}$
...
n	$\frac{0}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{-2}{n}$...	$\frac{-m}{n}$	$\frac{m}{n}$

□

4 Несчётность множества действительных чисел

Теорема 4.1. *Множество \mathbb{R} несчётно.*

Доказательство. \mathbb{R} - бесконечно, т.к. содержит \mathbb{N} . Покажем, что \mathbb{R} не биективно \mathbb{N} :
Предположим, что \exists биекция между \mathbb{N} и \mathbb{R} . Тогда занумеруем:

$$\mathbb{R} = \{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$$

Пусть I_1 - отрезок, не содержащий x_1 . Внутри I_1 найдем отрезок I_2 , не содержащий x_2 - база индукции.

Предположим, что построены отрезки $I_1 \supset \dots \supset I_n$, $n \in \mathbb{N}$ т.ч. $x_1, \dots, x_n \notin I_n$.

Тогда выберем I_{n+1} - такой отрезок, который не содержит x_{n+1} - шаг индукции.

По теореме Кантора получаем, что \exists общая точка c последовательности вложенных отрезков, которая оказалась занумерованной, так как по построению $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \neq x_k$. Противоречие.

□