

Деревья. Теорема об эквивалентности четырёх
свойств.

1 Деревья

Теорема 1.1. Пусть задан граф $G(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество ребер. Следующие четыре определения эквивалентны:

Дерево — это

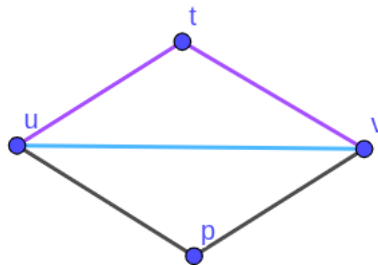
1. связный ациклический граф
2. граф, в котором между любыми 2 вершинами существует единственный простой путь
3. связный граф, такой что $|V| = |E| + 1$
4. ациклический граф, такой что $|V| = |E| + 1$

Доказательство.

- Покажем $(1) \Rightarrow (2)$:

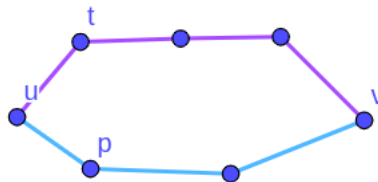
Так как граф связный, то между любыми двумя вершинами существует простой путь. Будем доказывать от противного: предположим, что простой путь не единственен.

База индукции: пусть существуют 2 простых пути между вершинами u и v и максимальный из них имеет длину 2 (так как путь длины 1 единственен).



Шаг: пусть для всех $k \leq n$ если между двумя вершинами есть два простых пути длины $\leq k$, то в графе есть цикл.


Рассмотрим 2 вершины, между которыми 2 простых пути длины не более $n + 1$:



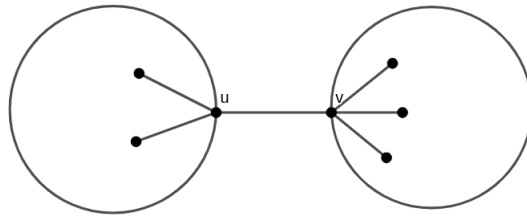
1. вершины t и p совпали: тогда применим предположение индукции к вершинам t и v
2. вершины t и p различны:
 - все остальные вершины различны \Rightarrow 2 пути образуют цикл
 - есть промежуточная вершина w , повторяющаяся в обоих путях. Тогда есть простой путь из u в w — фрагмент первого пути и простой путь из u в w — фрагмент второго пути. Эти фрагменты различны и имеют длину $\leq n \Rightarrow$ существует цикл.

- Покажем $(2) \Rightarrow (3)$:

Так как между любыми двумя вершинами существует простой путь, то граф связный. Докажем по индукции, что для всех графов, удовлетворяющих (2), выполняется $|V| = |E| + 1$

База: $|V| = 2$ 

Шаг: пусть предположение индукции верно для графов с $|V| \leq n$. Рассмотрим граф G , удовлетворяющий (2), с $n + 1$ вершиной, $(u, v) \in G$:



Удалим ребро (u, v) : граф перестанет быть связным, так как при удалении ребра другого пути из u в v не будет согласно (2). Также не может образоваться больше двух компонент связности, иначе будет компонента связности, не связанная ни с u , ни с v . Тогда при возвращении ребра (u, v) эта компонента по-прежнему не будет связана с u и v . Это противоречит связности графа.

Применяя предположение индукции к каждой из образовавшихся компонент связности, получаем: $|V_1| = |E_1| + 1$, $|V_2| = |E_2| + 1 \Rightarrow |V| = |V_1| + |V_2| = |E_1| + |E_2| + 2 = |E_1| + |E_2| + (u, v) + 1 = |E| + 1$

- Покажем $(3) \Rightarrow (4)$:

Пусть в графе существует простой цикл длины m на вершинах v_1, v_2, \dots, v_m . Рассмотрим вершины, не входящие в цикл, обозначим их w_1, w_2, \dots, w_k , $k + m = |V|$

Для каждой вершины w_i рассмотрим кратчайший путь до цикла.

Утверждение. Первые ребра этих путей попарно различны.

От противного: предположим, что

$$\begin{aligned} & w_i, (w_i, w_j), \underbrace{w_j, (w_j, t_1), t_1, \dots, v_i}_{l_1} \\ & w_j, (w_j, w_i), \underbrace{w_i, (w_i, z_1), z_1, \dots, v_j}_{l_2} \end{aligned}$$

Без ограничения общности считаем, что $l_1 \geq l_2$. Длина пути от w_i к циклу равна $l_1 + 1$, а из пути для w_j можно выделить путь от w_i до цикла длины $l_2 < l_1 + 1$ — противоречие.

Количество ребер из цикла $m + k$ различных ребер (по одному от каждого кратчайшего пути) $\Rightarrow |E| = k + m = |V| > |V| - 1$ — противоречие с (3).

- Покажем $(4) \Rightarrow (1)$:

Рассмотрим граф. Обозначим k — количество компонент связности. Рассмотрим каждую из компонент связности отдельно: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow |V_i| = |E_i| + 1 \Rightarrow |V| = |E| = k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ граф связный.

□