

Непрерывность функции в точке.

Полунепрерывность функции сверху и снизу в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность.

Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация.

Разрыв монотонных функций.

1 Непрерывность функции в точке

Определение 1.1 (Классическое определение непрерывности). Пусть $\delta_0 > 0, f: U_{\delta_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция f непрерывна в точке x_0 , если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 1.2. Если функция $f: U_{\delta_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке x_0 , то она называется разрывной в точке x_0 .

Определение 1.3 (Непрерывность в точке по множеству). Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ — точка прикосновения множества X . Будем говорить, что f непрерывна в точке x_0 по множеству X , если выполнено одно из двух условий:

1. x_0 — изолированная точка множества X
2. x_0 — предельная точка множества X и $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$

Замечание 1.1. Заметим, что оба условия из определения выше можно переписать в виде одного кванторного выражения следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Если x_0 — изолированная точка множества X , то берём $\delta(\varepsilon)$ такое, что $U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X = \{x_0\}$, и всё становится тривиально. Если же x_0 — предельная точка множества X , то написано просто определение предела функции по Коши по множеству, за исключением только лишь того, что x берётся не из проколотой окрестности. Но это, очевидно, не влияет на предел, так как в случае обращения x в x_0 , получаем тривиальное неравенство $0 < \varepsilon$.

Также можно переписать оба этих условия в терминах Гейне:

$$\forall \{x_n\} \subset X : x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty \hookrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0), n \rightarrow \infty$$

Это запись действительно эквивалентна совокупности двух условий, а также кванторному выражению, в силу соображений, аналогичных вышеописанным.

2 Полунепрерывность функции сверху и снизу в точке

Определение 2.1 (Полунепрерывность снизу). Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in X$ — предельная точка для множества X . Будем говорить, что f полунепрерывна снизу в точке x_0 по множеству X , если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \geq f(x_0)$$

Если x_0 — изолированная точка для множества X , то f полунепрерывна снизу в ней по определению.

Определение 2.2 (Полунепрерывность сверху). Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in X$ — предельная точка для множества X . Будем говорить, что f полунепрерывна сверху в точке x_0 по множеству X , если

$$\overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq f(x_0)$$

Если x_0 — изолированная точка для множества X , то f полунепрерывна сверху в ней по определению.

Теорема 2.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Функция f непрерывна в точке x_0 по множеству X тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу в точке x_0 по множеству X и полунепрерывна сверху в точке x_0 по множеству X .

Доказательство. Если x_0 — изолированная точка множества X , то теорема верна по определению непрерывности и полунепрерывности сверху и снизу в точке. Далее полагаем x_0 предельной точкой множества X .

Непрерывность функции f в точке x_0 по множеству X равносильна следующему:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

Но предел по множеству существует и равен $A \in \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда существует верхний предел по множеству, существует нижний предел по множеству и они равны A (с доказательством сего факта предлагается ознакомиться в соответствующем разделе седьмого билета), то есть:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

Это эквивалентно тому, что:

$$f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq f(x_0)$$

Полученное, в свою очередь, очевидным образом равносильно тому, что f одновременно полунепрерывна сверху в точке x_0 по множеству X и полунепрерывна снизу в точке x_0 по множеству X . Так как все переходы были равносильными, то требуемое доказано. \square

3 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 3.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, f и g непрерывны в точке x_0 по множеству X . Тогда:

1. Функция $f \pm g$ непрерывна в точке x_0 по множеству X
2. Функция $f \cdot g$ непрерывна в точке x_0 по множеству X
3. Если дополнительно $g(x) \neq 0 \forall x \in X$, то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0 по множеству X

Доказательство. Если x_0 — изолированная точка множества X , то всё тривиально. Далее полагаем x_0 предельной точкой множества X . Так как функции f и g непрерывны в точке x_0 по множеству X , то:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = g(x_0) \in \mathbb{R}$$

Тогда по теореме об арифметических операциях с пределами функции немедленно получаем, что:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} (f(x) \pm g(x)) = f(x_0) \pm g(x_0)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} (f(x) \cdot g(x)) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Также, если дополнительно $g(x) \neq 0 \forall x \in X$, то всё по той же теореме имеем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Тривиально видеть, что по определению непрерывности в точке по множеству получаем требуемое. \square

4 Односторонняя непрерывность

Определение 4.1 (Односторонние окрестности).

$\mathring{U}_\delta^+(x_0) := (x_0; x_0 + \delta)$ — проколота правая полуокрестность

$\mathring{U}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta; x_0)$ — проколота левая полуокрестность

Определение 4.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — правая предельная точка для X , то есть:

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^+(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

Тогда:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^+(x_0) \cap X}} f(x) \text{ — правосторонний предел в точке } x_0$$

Определение 4.3. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — левая предельная точка для X , то есть:

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

Тогда:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^-(x_0) \cap X}} f(x) \text{ — левосторонний предел в точке } x_0$$

Определение 4.4. $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — правая предельная точка для X . Функция f называется непрерывной справа в точке x_0 по множеству X , если

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

Определение 4.5. $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — левая предельная точка для X . Функция f называется непрерывной слева в точке x_0 по множеству X , если

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

5 Непрерывность сложной функции

Теорема 5.1. Пусть

$f: U_{\delta_0}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$ и f непрерывна в точке y_0

$y: U_{\sigma_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 > 0$, $y_0 = y(x_0)$ и y непрерывна в точке x_0

Тогда $\exists \sigma^* \in (0; \sigma_0]$ такая, что в $U_{\sigma^*}(x_0)$ определена композиция $f \circ y$, причём она непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Непрерывность функции y в точке x_0 равносильна:

$$\forall \delta > 0 \exists \sigma(\delta) \in (0, \sigma_0] : \forall x \in U_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta}(y_0) \quad (*)$$

В частности, взяв $\delta = \delta_0$ в $(*)$ и положив по определению $\sigma^* := \sigma(\delta_0)$, получим:

$$\forall x \in U_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

Тогда $\forall x \in U_{\sigma^*}(x_0)$ определено $f(y(x))$. Следовательно, композиция $f \circ y$ определена в $U_{\sigma^*}(x_0)$, то есть $f \circ y: U_{\sigma^*}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Далее увидим, что:

$$f \text{ непрерывна в } y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Тогда применим $(*)$ при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in U_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \implies |f(y(x)) - f(y(x_0))| < \varepsilon$$

Суммируя сказанное, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma^*] : \forall x \in U_{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y(x_0))| < \varepsilon$$

Легко видеть, что выражение выше равносильно непрерывности $f \circ y$ в точке x_0 , а значит требуемое доказано. \square

6 Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции

Теорема 6.1. Пусть

$$f: U_{\delta_0}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad \delta_0 > 0 \text{ и } f \text{ непрерывна в точке } y_0$$

$$y: \mathring{U}_{\sigma_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \quad \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \sigma^* \in (0; \sigma_0]$ такая, что в $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$ определена композиция $f \circ y$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0)$.

Доказательство.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \iff \forall \delta > 0 \exists \sigma(\delta) \in (0; \sigma_0] : \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta}(y_0) \quad (*)$$

В частности, взяв $\delta = \delta_0$ в $(*)$ и положив по определению $\sigma^* := \sigma(\delta_0)$, получим:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

Тогда $\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$ определено $f(y(x))$. Следовательно, композиция $f \circ y$ определена в $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$, то есть $f \circ y: \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Далее увидим, что:

$$f \text{ непрерывна в } y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Тогда применим $(*)$ при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \implies |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Суммируя сказанное, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma^*] : \forall x \in \mathring{U}_{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

\square

7 Точки разрыва, их классификация

Замечание 7.1. Следующие обозначения эквивалентны:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \iff f(x_0-0)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \iff f(x_0+0)$

Определение 7.1 (Устранимый разрыв). Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, но либо функция f не определена в точке x_0 , либо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

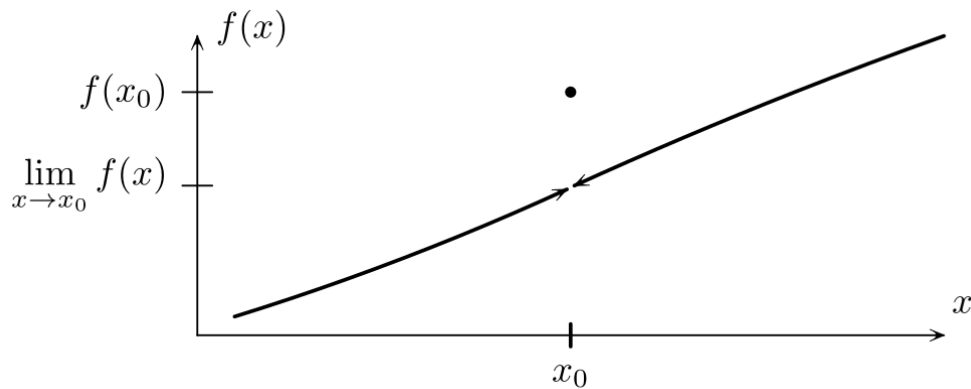


Рис. 1: Пример устранимого разрыва

Определение 7.2 (Разрыв первого рода). Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если:

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \end{cases}$$

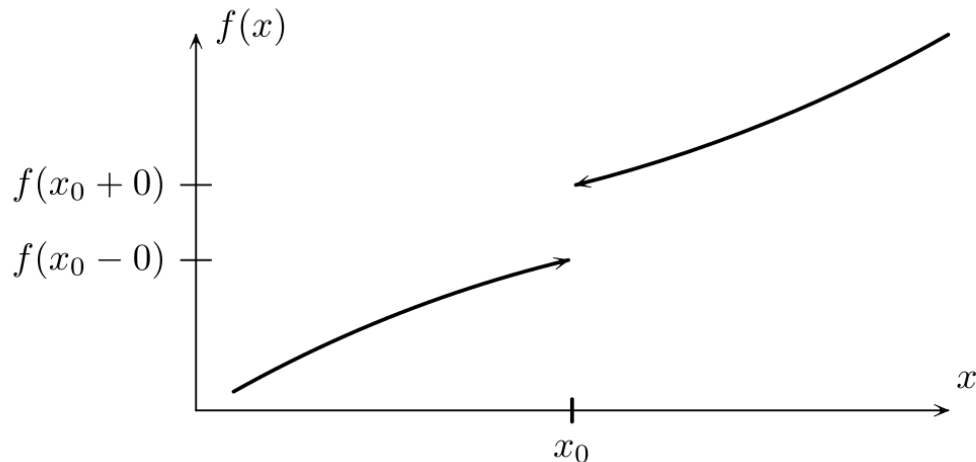


Рис. 2: Пример разрыва первого рода

Определение 7.3 (Разрыв второго рода). *Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо равен $\pm\infty$ или ∞ .*

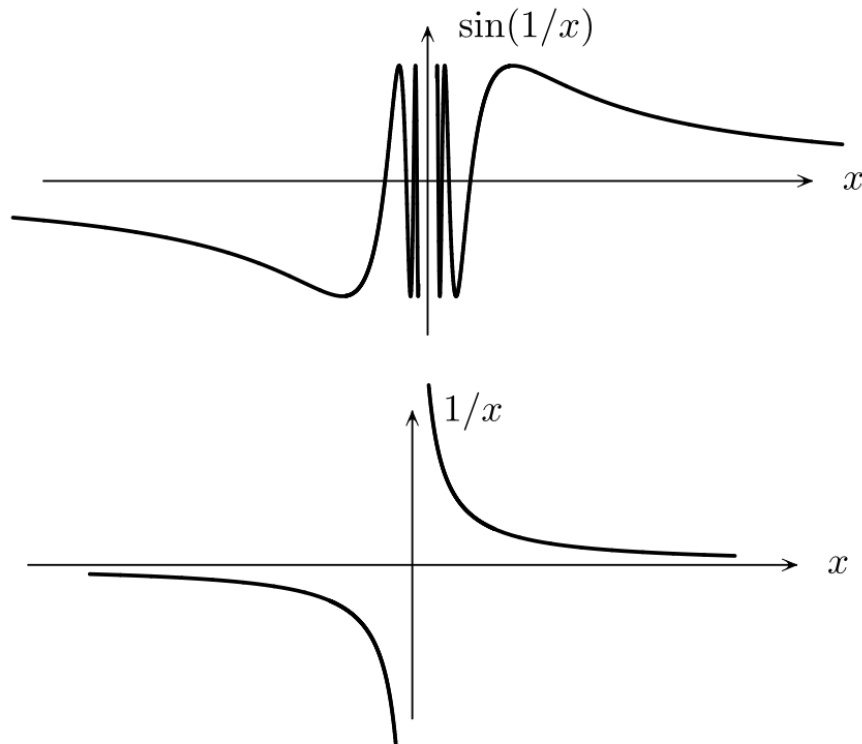


Рис. 3: Примеры разрыва второго рода

8 Разрыв монотонных функций

Лемма 8.1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall \delta > 0$ в $U_\delta(x_0)$ содержится хотя бы одна рациональная и хотя бы одна иррациональная точка.*

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что в $U_\delta(x_0)$ содержится хотя бы одна рациональная точка. Рассмотрим

$$k \in \mathbb{N} : k \geq \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1 \implies \frac{1}{k} < \delta$$

Рассмотрим $\forall m \in \mathbb{Z}$ следующие промежутки:

$$I_{k,m} := \left[\frac{m}{2k}, \frac{m+1}{2k} \right)$$

Очевидно, что $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}$ числа $\frac{m}{2k}$ определяют рациональные дроби (возможно, сократимые, но это не имеет значения). Заметим, что:

$$\exists m \in \mathbb{Z} : I_{k,m} \subset U_\delta(x_0)$$

В самом деле, число $x_0 - \delta$ принадлежит единственному из рассматриваемых сегментов, а значит следующий за этим сегмент уж точно попадёт в нужную окрестность, так как суммарная длина двух этих промежутков меньше δ в силу выбора k . Но тогда левый конец попавшего в окрестность

сегмента также будет лежать в ней, и при этом он является рациональным числом. Следовательно, в рассматриваемой окрестности лежит хотя бы одно рациональное число, что и требовалось. Покажем теперь, что $U_\delta(x_0)$ содержит хотя бы одна иррациональная точка. С давних пор известно, что число $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда нетрудно видеть, что:

$$\frac{\sqrt{2}}{4k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Рассмотрим точку

$$x_m = \frac{m}{2k} + \frac{\sqrt{2}}{4k}$$

Очевидно, что $x_m \in I_{k,m}$. Но выше было доказано, что $I_{k,m} \subset U_\delta(x_0)$, и при этом легко видеть, что $x_m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Получили, что иррациональная точка x_m попадает в $U_\delta(x_0)$, а значит требуемое доказано. \square

Теорема 8.1. Пусть функция $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна на интервале (a, b) , где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Тогда функция f может иметь лишь разрывы первого рода. Более того, множество точек разрыва функции f не более, чем счётно.

Доказательство. Пусть для определенности функция f нестрого возрастает.

1) Покажем, что разрывы функции f могут быть только разрывами первого рода. Зафиксируем $x_0 \in (a, b)$ — точку разрыва функции f . По теореме Вейерштрасса, применительно к функции f на (a, x_0) и (x_0, b) , немедленно получаем:

$$\exists f(x_0 - 0) = \sup_{(a, x_0)} f, \quad \exists f(x_0 + 0) = \inf_{(x_0, b)} f$$

Более того, в силу монотонности имеем:

$$f(x_0 - 0) = \sup_{(a, x_0)} f \leq f(x_0) \leq \inf_{(x_0, b)} f = f(x_0 + 0) \quad (*)$$

Из этого тривиально следует, что $f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$ и $f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$, а значит x_0 по определению не может являться точкой разрыва второго рода. При этом x_0 — точка разрыва функции f , откуда получаем, что в $(*)$ хотя бы один из знаков неравенств строгий, то есть $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Следовательно, x_0 по определению не может являться и точкой устранимого разрыва. Тогда x_0 может быть лишь точкой разрыва первого рода, что и требовалось.

2) Покажем теперь, что множество точек разрыва функции f не более, чем счётно.

Пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка разрыва функции f . Из рассуждений выше x_0 — точка разрыва первого рода функции f , а значит $\exists f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$ и $\exists f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$. Положим тогда $A = f(x_0 - 0)$, $B = f(x_0 + 0)$. Очевидно, что $A < B$. Рассмотрим интервал (A, B) . По лемме 8.1 в нём находится хотя бы одна рациональная точка. Зафиксируем произвольную такую точку.

Таким образом, каждой точке разрыва функции f поставлено в соответствие рациональное число. При этом в силу монотонности все эти числа различны, а значит построено инъективное отображение из множества всех точек разрыва функции f в множество рациональных чисел \mathbb{Q} . Но множество рациональных чисел \mathbb{Q} является счётным, откуда немедленно получаем, что множество всех точек разрыва функции f не более, чем счётно, что и требовалось. \square