Подгруппы. Смежные классы. Факторгруппы.

1 Подруппы

Определение 1.1. *H называется подгруппой группы $G = (M, \circ)$ (обозначается $H < G$), если $H \subseteq G$ и H является группой относительно той же групповой операции.*

Определение 1.2. *(эквивалентное определение подгруппы) H — подгруппа $= (M, \circ)$, если:*

1. $H \subseteq G$

2. $\forall a, b, \in H \hookrightarrow a \circ b \in H$

3. $\forall a \in H \hookrightarrow a^{-1} \in H$

Теорема 1.1. *(Критерий подгруппы) $H < G \Leftrightarrow \forall a, b \in H \hookrightarrow a \circ b^{-1} \in H$*

Доказательство. $(\Leftarrow)$

1. $a = a, b = a \Rightarrow a \circ a^{-1} = e \in H$

2. $a = e \Rightarrow b^{-1} \in H$

3. $a, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$, тогда $a \circ (b^{-1})^{-1} = a \circ b \in H$

□

2 Смежные классы

Определение 2.1. *Пусть $H < G$, $g \in G$, тогда $g \circ H = \{g \circ h | h \in H\}$ — левый смежный класс по подгруппе H с представителем g ($H \circ g = \{h \circ g | h \in H\}$ — правый смежный класс по подгруппе H с представителем g)*

Утверждение 2.1. *Левые смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают (для правых аналогично).*

Доказательство. Предположим, $z \in a \circ H \cap b \circ H$, тогда $\exists h_1, h_2 \in H : z = a \circ h_1 = b \circ h_2 \Rightarrow$ $a = b \circ h_2 \circ h_1^{-1}$ и $b = a \circ h_1 \circ h_2^{-1} \Rightarrow \forall t \in a \circ H \hookrightarrow t = a \circ \widetilde{h} = b \circ h_2 \circ h_1^{-1} \circ \widetilde{h}$, но $h_2 \circ h_1^{-1} \circ \widetilde{h} \in H \Rightarrow$ $t \in b \circ H$ □

Теорема 2.1. *(Теорема Лагранжа) $|G| = (G : H) \cdot |H|$, где $G : H$ — индекс подгруппы (количество различных смежных классов по подгруппе)*

Доказательство.

1. $|g \circ H| = |H|$, так как $\forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow h_1 \neq h_2 \Rightarrow g \circ h_1 \neq g \circ h_2$

2. $\forall g \in G \hookrightarrow g \in g \circ H$, поскольку $e \in H \Rightarrow g \circ e = g \in g \circ H$

3. смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают $\Rightarrow G$ разбита на непересекающиеся подмножества с одинаковым количеством элементов и $\forall g \in G \hookrightarrow g$ принадлежит какому-то подмножеству $G \Rightarrow |G|\ |H|$
$g_1 \circ H \cup g_2 \circ H \cup \dots \cup g_k \circ H = G$, $\forall i, j \hookrightarrow g_i \neq g_j \Rightarrow g_i \cap g_j = \varnothing$

□

Определение 2.2. *Подгруппа $H < G$ называется нормальной и обозначается $H \triangleleft G$, если $\forall g \in G \hookrightarrow g \circ H = H \circ g \Leftrightarrow g \circ H \circ g^{-1} = H$*

Теорема 2.2. $H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G,\ \forall h \in H \hookrightarrow g \circ h \circ g^{-1} \in H$

Доказательство.

- $(\Rightarrow)$ $H \triangleleft G \Rightarrow g \circ H = H \circ g$ (по определению) $\Rightarrow \forall h_1 \in H\ \exists h_2 \in H : g \circ h_1 = h_2 \circ g \Rightarrow g \circ h_1 \circ g^{-1} = h_2 \in H$
- $(\Leftarrow)$ $\forall g \in G, \forall h \in H \hookrightarrow g \circ h \circ g^{-1} \in H$. Рассмотрим $g \circ H \circ g^{-1} = \{g \circ h \circ g^{-1} \mid h \in H\} \subseteq H$.
  $\forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow h_1 \neq h_2 \Rightarrow g \circ h_1 \circ g^{-1} \neq g \circ h_2 \circ g^{-1} \Rightarrow g \circ H \circ g^{-1} = H \Rightarrow g \circ H = H \circ g \Rightarrow H \triangleleft G$

□

3 Факторгруппы

Определение 3.1. *Пусть $H \triangleleft G$, рассмотрим смежные классы. Введем операцию $(a \cdot H) \circ (b \cdot H) = (a \cdot b)H$. Множество смежных классов относительно данной операции образуют группу, называемую факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H и обозначаемую G/H.*

Доказательство.

1. $\forall a, b, c \in G \hookrightarrow ((a \cdot H) \circ (b \cdot H)) \circ (c \cdot H) = ((a \cdot b)H) \circ (c \cdot H) = (a \cdot b \cdot c)H$
   $(a \cdot H) \circ ((b \cdot H) \circ (c \cdot H)) = (a \cdot H) \circ ((b \cdot c) \cdot H) = (a \cdot b \cdot c)H$
2. $e \cdot H = H$ — нейтральный элемент: $(a \cdot H) \circ (e \cdot H) = (a \cdot e)H = a \cdot H$
   (Если $n \cdot H$ и $e \cdot H$ — нейтральные элементы, то $(n \cdot H) \circ (e \cdot H) = n \cdot H = e \cdot H$)
3. $\forall a \in G \hookrightarrow (a \cdot H) \circ (a^{-1} \cdot H) = (a \cdot a^{-1})H = e \cdot H = H$

□

Замечание 3.1. *Зачем нормальность подгруппы? Для корректности, то есть независимости представителя.*
$a_1 \in a \cdot H = a_1 \cdot H$, $b_1 \in b \cdot H = b_1 \cdot H$
$(a_1 \cdot H) \circ (b_1 \cdot H) = (a_1 \cdot b_1)H = (a \cdot b)H \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 \in (a \cdot b)H$

Доказательство. $a_1 \in a \cdot H \Rightarrow \exists h_a \in H : a_1 = a \cdot h_a$, $b_1 \in b \cdot H \Rightarrow \exists h_b \in H : b_1 = b \cdot h_b$
$a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b$. Так как $H \triangleleft G$, то $\forall h_a \in H\ \exists \widetilde{h} \in H :\ h_a \cdot b = b \cdot \widetilde{h} \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b = a \cdot b \cdot \widetilde{h} \cdot h_b \in (a \cdot b)H$ □