Определения предела функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Предел по множеству. Свойства пределов функций. Критерий Коши существования конечного предела функций. Теорема о замене переменного под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

1 Предел числовой функции одного переменного

Определение 1.1 (Функция). *Пусть X — абстрактное множество. Отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$ будем называть функцией.*

Определение 1.2. *Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ будем называть следующее множество:*

$$\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) = U_{\delta_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Если $x_0 = \pm\infty$ или $x_0 = \infty$, то проколотая окрестность совпадает с непроколотой.

Определение 1.3 (Предел по Коши). *Пусть $f\colon \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0$. Пусть $A \in \widehat{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что A — предел функции f в точке x_0, и записывать это*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A,\ x \to x_0$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Определение 1.4. *Пусть $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Гейне в точке x_0, если одновременно выполнено следующее:*

1. $x_n \to x_0,\ n \to \infty$
2. $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$

Определение 1.5 (Предел по Гейне). *Пусть $f\colon \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0$. Пусть $A \in \widehat{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что A — предел функции f в точке x_0, и записывать это*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A,\ x \to x_0$$

если $\forall$ последовательности Гейне $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке $x_0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теорема 1.1. *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. $(\Longrightarrow)$: Пусть выполнено определение предела по Коши. Покажем, что выполняется определение предела по Гейне.
Пусть $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \qquad (*)$$

Так как $\{x_n\}$ — последовательность Гейне в точке x_0, то из определения получим:

$$\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$$

Применим условие выше для $\delta(\varepsilon)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$$

Но, коль скоро x_n попадает в $\overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$, из условия $(*)$ получаем, что $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Следовательно, по определению предела последовательности

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Но последовательность Гейне $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке x_0 была выбрана произвольно, а значит требуемое доказано.

$(\Longleftarrow)$: Пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено определение предела по Коши. Запишем отрицание к определению предела по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : \ f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Будем использовать это условие при $\delta_n = \dfrac{\delta_0}{n}$. Получим:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0) : \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$$

Получили последовательность Гейне $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке x_0, и при этом $f(x_n) \not\to A, \ n \to \infty$. Это противоречит определению предела по Гейне, а значит требуемое доказано. □

2 Предел по множеству

Определение 2.1 (Предельная точка)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$. Будем говорить, что x_0 — предельная точка множества X, если:*

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$$

Определение 2.2 (Предел по Коши)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}, \ X \neq \varnothing, \ f\colon X \to \mathbb{R}, \ x_0$ — предельная точка для X. Будем говорить, что $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ — предел функции f в точке x_0 по множеству X, и записывать это*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Определение 2.3 (Предел по Гейне)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}, \ X \neq \varnothing, \ f\colon X \to \mathbb{R}, \ x_0$ — предельная точка для X. Будем говорить, что $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ — предел функции f в точке x_0 по множеству X, и записывать это*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$$

если $\forall$ последовательности Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке $x_0 \hookrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

Теорема 2.1. *Пределы по Коши и по Гейне эквивалентны для пределов по множеству.*

Доказательство. ~~Аналогично доказательству выше, только надо понерессекать все с X~~
$(\Longrightarrow)$: Пусть выполнено определение предела по Коши. Покажем, что выполняется определение предела по Гейне.
Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \tag{$*$}$$

Так как $\{x_n\}$ — последовательность Гейне в точке x_0, то из определения получим:

$$\forall \delta > 0 \ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$$

Применим условие выше для $\delta(\varepsilon)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X$$

Но, коль скоро x_n попадает в $\mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X$, из условия $(*)$ получаем, что $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Следовательно, по определению предела последовательности

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Но последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0 была выбрана произвольно, а значит требуемое доказано.
$(\Longleftarrow)$: Пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено определение предела по Коши. Запишем отрицание к определению предела по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X: \ f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Будем использовать это условие при $\delta_n = \dfrac{\delta_0}{n}$. Получим:

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0) \cap X: \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$$

Получили последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0, и при этом $f(x_n) \not\to A, \ n \to \infty$.
Это противоречит определению предела по Гейне, а значит требуемое доказано. □

Лемма 2.1. *Пусть $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ — непустые множества, $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ является предельной точкой и для E_1, и для E_2. Тогда:*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Доказательство. $(\Longrightarrow)$: Пусть

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A$$

Расписываем это по определению предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Так как x_0 по условию является предельной точкой и для E_1, и для E_2, то

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \begin{cases} E_1 \cap \mathring{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing \\ E_2 \cap \mathring{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing \end{cases}$$

Заметим, что:

$$\mathring{U}_\delta(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) = \left(\mathring{U}_\delta(x_0) \cap E_1\right) \cup \left(\mathring{U}_\delta(x_0) \cap E_2\right) \tag{$\star$}$$

Так как условие выполняется для объединения множеств, то оно естественным образом выполняется и для каждого из них по отдельности. Из этого получаем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases}$$

$(\Longleftarrow)$: Пусть теперь справедлива система:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0: \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

Определим $\delta(\varepsilon) := \min\{\delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon)\}$. Тогда, используя ($\star$) и то, что x_0 очевидным образом является предельной точкой для $E_1 \cap E_2$, получаем, что:

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Итого, окончательно имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \iff \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A$$

□

Пример 2.1. *Рассмотрим следующую функцию, называемую функцией Дирихле:*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Покажем, что у этой функции не существует предела ни в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. В самом деле, зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Очевидно, что x_0 является предельной точкой как для $\mathbb{Q}$, так и для $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ просто потому, что в любой окрестности любого действительного числа есть хотя бы одно рациональное и хотя бы одно иррациональное число. Тогда:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} \mathcal{D}(x) = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} \mathcal{D}(x)$$

Из этого по лемме 2.1 немедленно следует, что:

$$\nexists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \mathbb{R}}} \mathcal{D}(x)$$

3 Свойства пределов функции

Теорема 3.1 (Арифметические операции с пределами функции)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка для X. Пусть*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \mathbb{R}$$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Из определения предела по Гейне по множеству получаем:

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B \in \mathbb{R}$$

Тогда по теореме об арифметических операциях со сходящимися последовательностями имеем:

$$\exists \lim_{n \to \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = A \cdot B$$

Так как последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0 была выбрана произвольно, то из определения предела по Гейне по множеству получаем требуемое. □

Теорема 3.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка для X. Пусть*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \mathbb{R},\ B \neq 0$$

Пусть также

$$\exists \delta_0 > 0 :\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X \hookrightarrow g(x) \neq 0$$

Тогда:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X \cap \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X \cap \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Из определения предела по Гейне по множеству имеем:

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

При этом в силу того, что последовательность Гейне в точке x_0 берётся из $X \cap \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, получаем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow g(x_n) \neq 0$$

Тогда по теореме об арифметических операциях со сходящимися последовательностями имеем:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$$

Так как последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X \cap \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке x_0 была выбрана произвольно, то из определения предела по Гейне по множеству получаем требуемое. $\square$

Лемма 3.1 (Лемма о сохранении знака)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка для X. Пусть:*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

Тогда:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X \hookrightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} A$$

Доказательство. Рассмотрим случай $A \in \mathbb{R}$, так как случай $A = \pm\infty$ тривиален. Из определения предела по Коши по множеству получим:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Так как условие выше справедливо $\forall \varepsilon > 0$, рассмотрим его при $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

Это, очевидно, равносильно следующему:

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}$$

Отсюда легко видеть, что:

$$\begin{cases} 0 < A - \frac{|A|}{2} < f(x), & A > 0 \\ f(x) < A + \frac{|A|}{2} < 0, & A < 0 \end{cases}$$

Из полученного выше ясно, что:

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} A$$

Несложно видеть, что получили требуемое. $\square$

Теорема 3.3 (Принцип локализации)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 *— предельная точка для* X, $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Пусть*

$$\exists \underline{\delta} > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\underline{\delta}}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) = g(x)$$

Тогда

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) \iff \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x)$$

При этом, если вышеуказанные пределы существуют, то они равны.

Доказательство.

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \widehat{\mathbb{R}} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow g(x) \in U_\varepsilon(B)$$

Положим $\delta(\varepsilon) := \min\{\underline{\delta}, \ \delta_1(\varepsilon), \ \delta_2(\varepsilon)\}$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) = g(x)$$

Отсюда очевидно, что если оба предела существуют, то $A = B$. При этом, если один из них не существует, то не существует и другой, так как для двух этих функций в $\delta(\varepsilon)$-окрестности в силу их совпадения будет выполнено отрицание определения предела по Коши по множеству. □

Теорема 3.4 (О двух милиционерах)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 *— предельная точка для* X, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$. *Пусть*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$$

Пусть также

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$$

Доказательство. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Рассмотрим числовые последовательности $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$. Из определения предела по Гейне по множеству немедленно получаем:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = A$$

К тому же из условия и их того, что $\{x_n\} \subset X$, имеем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$$

Применим тогда к этим последовательностям теорему о двух милиционерах для последовательностей. Получим:

$$\exists \lim_{n \to \infty} h(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = A$$

Но последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0 была выбрана произвольно. Значит из определения предела по Гейне по множеству окончательно имеем:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$$

□

Теорема 3.5 (Предельный переход в неравенстве)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ *— предельная точка для* $X,\ f, g : X \to \mathbb{R}$*. Пусть также*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},\ \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда, если $\forall x \in X \hookrightarrow f(x) \leq g(x)$*, то* $A \leq B$*.*

Доказательство. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Рассмотрим числовые последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$. Из определения предела по Гейне по множеству немедленно получаем:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B$$

К тому же из условия и их того, что $\{x_n\} \subset X$, имеем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f(x_n) \leq g(x_n)$$

Применим теорему о предельном переходе в неравенстве для $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$. Получим, что $A \leq B$. Так как последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0 была выбрана произвольно, то из определения предела по Гейне по множеству получаем требуемое. □

4 Критерий Коши существования конечного предела функции

Лемма 4.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f\colon X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ *— предельная точка для* X*. Пусть* $\forall$ *последовательности Гейне* $\{x_n\} \subset X$ *в точке* x_0 *выполнено, что:*

$$\exists A(\{x_n\}) \in \widehat{\mathbb{R}} : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A(\{x_n\})$$

Тогда $\exists A \in \widehat{\mathbb{R}} : A = A(\{x_n\})\ \forall$ *последовательности Гейне в точке* x_0*.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X$ и $\{y_n\} \subset X$ — последовательности Гейне в точке x_0. Покажем, что $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$.
Определим следующую последовательность:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \begin{cases} x_k, & \text{если } n = 2k \\ y_k, & \text{если } n = 2k - 1 \end{cases}$$

Ясно, что $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Гейне в точке x_0. Но тогда по условию:

$$\exists A(\{z_n\}) \in \widehat{\mathbb{R}} : \lim_{n \to \infty} f(z_n) = A(\{z_n\})$$

При этом очевидно, что:

$$\begin{cases} \{f(x_k)\} \text{ — подпоследовательность последовательности } \{f(z_n)\} \\ \{f(y_k)\} \text{ — подпоследовательность последовательности } \{f(z_n)\} \end{cases}$$

Но предел любой подпоследовательности равен пределу исходной последовательности при условии его существования, а значит имеем следующие равенства:

$$A(\{x_k\}) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = A(\{z_n\}) = \lim_{k \to \infty} f(y_k) = A(\{y_k\})$$

Из этой цепочки заключаем, что $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$. Значит предел в самом деле не зависит от выбора последовательности Гейне в точке x_0, что и требовалось. □

Теорема 4.1 (Критерий Коши)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f\colon X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ — предельная точка для X. Функция f имеет конечный предел в точке x_0 по множеству X тогда и только тогда, когда выполнено* ***условие Коши****:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon \qquad (**)$$

Доказательство. $(\Longrightarrow)$: Пусть

$$\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$$

Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно, по неравенству треугольника получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| \leq \left|f(x') - A\right| + \left|A - f(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(\Longleftarrow)$: Пусть выполнено условие Коши. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Из определения последовательности Гейне в точке x_0, получим:

$$\forall \delta > 0 :\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \cap X$$

Взяв $\delta = \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ берётся из условия Коши (**), и применив это условие для $x' = x_n$ и $x'' = x_m$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условию Коши для последовательности. Тогда в силу критерия Коши для последовательности

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

Но по лемме 4.1 это число A не зависит от выбора последовательности Гейне. Значит:

$$\exists A \in \mathbb{R} :\ \forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Из полученного легко видеть, что выполнено определение предела по Гейне. Следовательно:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

□

5 Теорема о замене переменного под знаком предела

Теорема 5.1 (Первая теорема о замене переменной при вычислении предела)**.** *Пусть*

$$f\colon \mathring{U}_{\delta_0}(y_0) \to \mathbb{R},\ y_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0$$

$$y\colon \mathring{U}_{\sigma_0}(x_0) \to \mathring{U}_{\delta_0}(y_0),\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{y \to y_0} f(y) = A \in \widehat{\mathbb{R}}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$$

Тогда

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(y(x)) = A$$

Доказательство.

$$\exists \lim_{y\to y_0} f(y) = A \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] :\ \forall y \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = y_0 \iff \forall\delta > 0\ \exists\sigma(\delta) \in (0;\sigma_0] :\ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \mathring{U}_\delta(y_0)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и применяем второе условие при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\exists\sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0;\sigma_0] :\ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \implies f(y(x)) \in U_\varepsilon(A)$$

Но $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно, а значит итого получаем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma = \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0;\sigma_0] :\ \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow f(y(x)) \in U_\varepsilon(A) \iff \exists \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = A$$

$\square$

Теорема 5.2 (Вторая теорема о замене переменной при вычислении предела)**.** *Пусть*

$$f\colon U_{\delta_0}(y_0) \to \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R},\ \delta_0 > 0 \text{ и } f \text{ непрерывна в точке } y_0$$

$$y\colon \mathring{U}_{\sigma_0}(x_0) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists\sigma^* \in (0;\sigma_0]$ *такая, что в* $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$ *определена композиция* $f\circ y$ *и* $\exists \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$.

Доказательство.

$$\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = y_0 \iff \forall\delta > 0\ \exists\sigma(\delta) \in (0;\sigma_0] :\ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_\delta(y_0) \tag{$*$}$$

В частности, взяв $\delta = \delta_0$ в ($*$) и положив по определению $\sigma^* := \sigma(\delta_0)$, получим:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

Тогда $\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$ определено $f(y(x))$. Следовательно, композиция $f\circ y$ определена в $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$, то есть $f\circ y\colon \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \to \mathbb{R}$. Далее увидим, что:

$$f \text{ непрерывна в } y_0 \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0] :\ \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Тогда применим ($*$) при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \implies |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Суммируя сказанное, получаем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\widetilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0;\sigma^*] :\ \forall x \in \mathring{U}_{\widetilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \iff \exists \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

$\square$

6 Существование односторонних пределов у монотонных функций

Определение 6.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. *Будем говорить, что* f *нестрого возрастает (нестрого убывает) на* X, *если:*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\Big(\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\Big)$$

Если знаки неравенств строгие, то получаем определение строгого возрастания на X *и строгого убывания на* X *соответственно.*

Определение 6.2 (Монотонность)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. *Будем говорить, что* f *(строго) монотонна на* X, *если* f *(строго убывает) нестрого убывает на* X *или (строго возрастает) нестрого возрастает на* X.

Определение 6.3 (Односторонние окрестности)**.**

$$\mathring{U}_\delta^+(x_0) := (x_0; x_0 + \delta) \text{ — проколотая правая полуокрестность}$$

$$\mathring{U}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta; x_0) \text{ — проколотая левая полуокрестность}$$

Определение 6.4. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, x_0 *— правая предельная точка для* X, *то есть:*

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^+(x_0) \cap X \neq \varnothing$$

Тогда:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^+(x_0) \cap X}} f(x) \text{ — правосторонний предел в точке } x_0$$

Определение 6.5. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, x_0 *— левая предельная точка для* X, *то есть:*

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \varnothing$$

Тогда:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^-(x_0) \cap X}} f(x) \text{ — левосторонний предел в точке } x_0$$

Теорема 6.1 (Вейерштрасса)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, x_0 *— левая предельная точка для* X, *то есть:*

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \varnothing$$

Пусть f *нестрого возрастает (нестрого убывает) на* X, *а также* $\forall x \in X \hookrightarrow x < x_0$. *Тогда:*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = \sup_X f$$

$$\Big(\exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = \inf_X f\Big)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для правосторонних пределов.

Доказательство. Докажем для нестрогого возрастания и левостороннего предела, так как остальные случаи аналогичны. Обозначим $M = \sup\limits_X f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. По определению супремума:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X :\ f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M)$$

Но f нестрого возрастает. Значит:

$$\forall x > x_\varepsilon : x \in X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$$

В самом деле:

1. Если $M \in \mathbb{R}$, то $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$
2. Если $M = +\infty$, то $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$

Осталось лишь явно предъявить для каждого $\varepsilon > 0$ искомое $\delta(\varepsilon)$. Рассмотрим несколько случаев:

1. $x_0 \in \mathbb{R} \implies \delta(\varepsilon) := x_0 - x_\varepsilon$.
2. $x_0 = +\infty \implies \delta(\varepsilon) := \dfrac{1}{|x_\varepsilon| + 1}$

Тогда из всего вышеописанного итого получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \iff \exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = M$$

□