(Будет только в задачах) Комбинаторный и алгебраический подходы к получению тождеств с биномиальными коэффициентами: пути по узлам сетки, рекуррентные соотношения, производящие функции.

1 Производящие функции

Определение 1.1. *Пусть дана последовательность* $\{a_n\}$. *Пусть также*

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

Тогда $A(t)$ *называется производящей функцией последовательности* $\{a_n\}$.

Определение 1.2. *Будем называть последовательность* $\{a_n\}$ *финитной, если*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a_n = 0$$

Замечание 1.1. *Далее будем рассматривать только финитные последовательности.*

Пример 1.1. *Рассмотрим последовательность:*

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots \tag{1}$$

Запишем для неё производящую функцию (она легко следует из бинома Ньютона):

$$C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \ldots + C_n^n x^n + 0 + \ldots = (1+x)^n$$

Заметим, что $(1+x)^n$ *есть многочлен. Более того, для любой финитной последовательности производящая функция будет являтся многочленом.*

1.1 Получение тождеств при помощи производящих функций

Теорема 1.1.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Доказательство. Подставим $x = 1$ в производящую функцию последовательности (1). Легко видеть, что получим требуемое. □

Теорема 1.2.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

Доказательство. Подставим $x = -1$ в производящую функцию последовательности (1). Легко видеть, что получим требуемое. □

Теорема 1.3.

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

Доказательство. Запишем производящую функцию последовательности (1) в следующем представлениии:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Легко видеть, что это многочлен, а значит мы можем без труда взять от него производную. С одной стороны, это есть:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot x^{k-1}$$

С другой стороны, свернув это выражение в $(1+x)^n$ и взяв уже от него производную, получим:

$$((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$$

Так как обе полученные производные равны в силу равенства исходных функций, итого имеем:

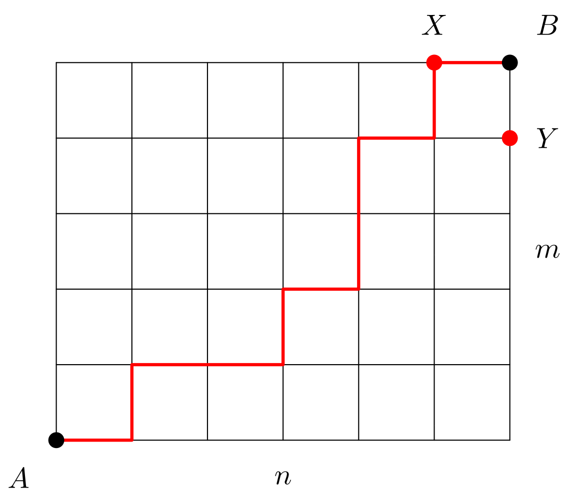
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

Тогда, подставив в полученное равенство $x = 1$, тривиально получим то, что и требовалось. □

2 Блуждание по сетке

Пример 2.1. *Рассмотрим робота, который может ходить только вверх и вправо. Сколькими способами, шагая по линиям сетки, робот может попасть из левого нижнего узла в правый верхний?*

Решение. Пусть $A(0,0)$ и $B(n,m)$ – левый нижний и правый верхний узлы соответственно.



Заметим, что любой путь из A в B всегда имеет одну и ту же длину, равную $n+m$. При этом в нем всегда m шагов вверх и n шагов вправо. Значит путь из A в B однозначно задается выбором мест, где мы пойдём вправо. Тогда всего путей и A в B ровно

$$C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}$$

□

Теорема 2.1.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Доказательство. Рассмотрим все того же робота из предыдущей задачи. Заметим, что любой путь из A в B проходит либо через X, либо через Y. При этом по предыдущему решению, количество путей из A в X равно C_{m+n-1}^{m}, а из A в Y – C_{m+n-1}^{m-1}. Значит итого, используя то, что всего путей из A в B ровно C_{m+n}^{m}, получим:

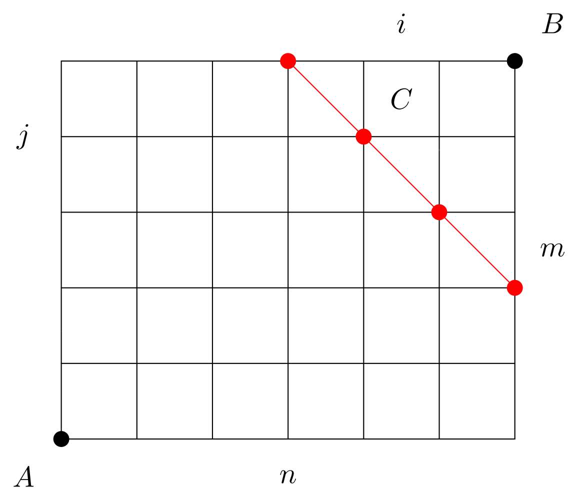
$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n-1}^{m} + C_{m+n-1}^{m-1}$$

Легко видеть, что получили требуемое тождество. □

Теорема 2.2.

$$\forall i \in \{1, \ldots, \min\{m, n\} - 1\} \hookrightarrow C_{m+n}^{m} = \sum_{j=0}^{i} C_{m+n-i}^{m-j} \cdot C_{i}^{j}$$

Доказательство. Рассмотрим все того же робота из доказательства предыдущей теоремы. Рассмотрим также i-ую диагональ сетки.



Ясно, каждый маршрут из A в B содержит ровно одну из красных точек. Рассмотрим красную точку C на j-той строке ($j \leq i$) и произвольный путь из A в C. Нетрудно видеть, что этот путь содержит $m - j$ шагов по вертикали и $n - (i - j)$ шагов по горизонтали. Теперь рассмотрим также путь из C в B. В нем очевидно j шагов по вертикали и $i - j$ шагов по горизонтали. Тогда, так как любой путь из A в B, содержщий точку C, есть объединение путей из A в C и из C в B, коих очевидно ровно $C_{(m-j)+(n-(i-j))}^{m-j}$ и $C_{j+(i-j)}^{j}$ соответственно, то, просуммировав по всем красным точкам j вспомнив, что всего путей из A в B ровно C_{m+n}^{m}, итого получим:

$$C_{m+n}^{m} = \sum_{j=0}^{i} C_{m+n-i}^{m-j} \cdot C_{i}^{j}$$

□

3 Рекуррентные соотношения

Определение 3.1. *Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что*

$$x_{n+k} = u_1 x_{n+k-1} + u_2 x_{n+k-2} + \ldots + u_k x_n, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad u_k \neq 0$$

Тогда такое соотношение называется линейным однородным рекуррентным соотношением k-ого порядка.

Определение 3.2. *Пусть дано линейное однородное рекуррентое соотношение k-ого порядка*

$$x_{n+k} = u_1 x_{n+k-1} + u_2 x_{n+k-2} + \ldots + u_k x_n, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad u_k \neq 0$$

Тогда характеристическим уравнением этого линейного однородного рекуррентного соотношения k-ого порядка будем называть следующее уравнение:

$$\lambda^k = u_1 \lambda^{k-1} + u_2 \lambda^{k-2} + \ldots + u_k$$

Ему в соответствие ставится также характеристический многочлен этого соотношения $X(\lambda)$:

$$X(\lambda) = \lambda^k - u_1\lambda^{k-1} - u_2\lambda^{k-2} - \ldots - u_k$$

Теорема 3.1. *Пусть дано линейное однородное рекуррентое соотношение k-ого порядка*

$$x_{n+k} = u_1 x_{n+k-1} + u_2 x_{n+k-2} + \ldots + u_k x_n, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad u_k \neq 0$$

Если у $X(\lambda)$ есть k различных действительных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то любая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая этому соотношению, может быть записана в виде:

$$a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \ldots + \alpha_k\lambda_k^n$$

Пример 3.1. *Пусть дана последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}$ с начальными условиями $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$. Найти общий вид n-ого члена этой последовательности.*

Решение. Заметим, что по определению эта последовательность удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Легко видеть, что перед нами линейное однородное рекуррентное соотношение 2 порядка. Запишем его характеристический многочлен:

$$X(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Его корни очевидны:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Легко видеть, что они различны и вещественны. Значит по предыдущей теореме получаем, что F_n имеет вид:

$$F_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Тогда, воспользовавшись начальными условиями, получаем систему:

$$\begin{cases} F_0 = 0 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ F_1 = 1 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

Отсюда тривиально:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Тогда итого:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$\square$