Неориентированные графы. Степень вершины. Сумма степеней вершин. Количество вершин с нечетной степенью. Определение подграфа. Определение маршрута, пути и простого пути. Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы. Связные графы и компоненты связности.

1 Неориентированные графы

Определение 1.1. *Граф G: V — множество объектов (вершины), E — множество пар объектов (рёбра)*
$u, v \in V$*,* $e = (u, v)$ *— ребро.*

Определение 1.2. *Если* $\forall u, v$ *считаем, что* $(u, v) = (v, u)$*, то есть порядок вершин в паре не имеет значения, то граф неориентированный.*

2 Степень вершины

Определение 2.1. *Степень вершины* v *в графе* G *— количество рёбер, исходящих из* v*. Обозначается* $\deg v$.

3 Сумма степеней вершин. Количество вершин с нечетной степенью

Теорема 3.1. *Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер в графе:*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

Доказательство. Действительно, в сумме степеней вершин каждое ребро было подсчитано дважды: один раз со стороны первой вершины ребра, второй раз — со второй вершины ребра. Отсюда немедленно получаем требуемое. □

Лемма 3.1. *В графе чётное количество вершин с нечётной степенью.*

Доказательство. Тривиально следует из предыдущей теоремы. □

4 Определение подграфа

Определение 4.1. *Подграф графа* $G(V, E)$ *— это граф* $G'(V', E')$*:* $V' \subseteq V, E' \subseteq E$.

Замечание 4.1. *Так как подграф прежде всего должен являться графом, то нельзя выбирать* V', E' *совсем произвольно.*

5 Определение маршрута, пути и простого пути

Определение 5.1. *Маршрутом в графе* $G(V, E)$ *будем назвать следующий список:*

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_k, e_k, v_{k+1})$$

Здесь $v_i \in V, e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$.

Определение 5.2. *Путь — маршрут, у которого все рёбра различны.*

Определение 5.3. *Простой путь — маршрут, у которого все вершины различны (кроме, возможно, первой и последней).*

Теорема 5.1. *Если между двумя несовпадающими вершинами u и v есть маршрут, то есть и простой путь.*

Доказательство. Пусть дан следующий маршрут:

$$(u = v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_j, v_{j+1} = v)$$

Будем идти последовательно по маршруту. На каждом шаге добавляем следующую вершину из маршрута в рассматриваемый фрагмент. Изначально фрагмент положим $\varphi = (v_1, e_1, v_2)$. Если в φ появились повторяющиеся вершины, удалим из фрагмента все, что между ними, и сам повтор. Ясно, что сам фрагмент φ в каждый момент времени является маршрутом. При этом в каждый момент времени в нем нет повторяющихся вершин, а в конце остается маршрут из u в v. Значит в конце получим простой путь из u в v, что и требовалось. □

6 Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы

Определение 6.1. *Маршрут замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 6.2. *Путь замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 6.3. *Простой путь замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 6.4. *Замкнутый путь будем называть циклом.*

Определение 6.5. *Замкнутый простой путь будем называть простым циклом.*

Теорема 6.1. *Если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.*

Доказательство. Пусть дан следующий цикл:

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{k+1} = v_1)$$

Возьмём кратчайший фрагмент этой последовательности, начальная и конечная вершины которого совпадают:

$$(v_i, e_i, ..., e_j, v_{j+1} = v_i)$$

Утверждается следующее:

1. В этом фрагменте не менее 3 различных вершин. Действительно, фрагмент не может выглядеть так (vev) в силу отсутствия петель, а также не имеет вида (ve_1ue_2v) в силу отсутствия кратных рёбер.

2. Все вершины, кроме начала и конца, различны.

Тогда этот фрагмент является простым циклом, что и требовалось. □

7 Связные графы и компоненты связности

Определение 7.1. *Граф называется связным, если* $\forall u, v \in V$ *существует путь (маршрут, простой путь) из* u *в* v.

Пример 7.1. *Пусть есть множество* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *и его подмножества:* $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 5\}$. *Максимальное по включению подмножество — это то подмножество, которое не содержится в каком-то другом (*$\{2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 5\}$ *— максимальные по включению)*

Определение 7.2. *Пусть граф не является связным. Максимальные по включению связные подграфы называются компонентами связности.*