Подгруппы. Смежные классы. Факторгруппы.

1 Подгруппы

Определение 1.1. *H называется подгруппой группы $G = (M, \cdot)$ (обозначается $H < G$), если $H \subseteq G$ и H является группой относительно той же групповой операции.*

Определение 1.2. *(эквивалентное определение подгруппы) H — подгруппа $G = (M, \cdot)$, если:*

1. $H \subseteq G$
2. $\forall a, b, \in H \hookrightarrow a \cdot b \in H$
3. $\forall a \in H \hookrightarrow a^{-1} \in H$

Теорема 1.1. *(Критерий подгруппы)*

$$H < G \iff \forall a, b \in H \hookrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$$

Доказательство. Докажем ($\Longleftarrow$), так как в обратную сторону тривиально проверятся непосредственной подстановкой. Достаточно проверить справедливость определения выше:

1. $a = a,\ b = a \implies a \cdot a^{-1} = e \in H$
2. $a = e \implies b^{-1} \in H$
3. $a, b \in H \implies a \cdot b^{-1} \in H$. Тогда $a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in H$

□

2 Смежные классы

Определение 2.1. *Пусть $H < G,\ g \in G$. Тогда $g \cdot H = \{g \cdot h \,|\, h \in H\}$ — левый смежный класс по подгруппе H с представителем g ($H \cdot g = \{h \cdot g \,|\, h \in H\}$ — правый смежный класс по подгруппе H с представителем g)*

Теорема 2.1. *Левые смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают (для правых аналогично).*

Доказательство. Предположим, что

$$\exists z \in G :\ z \in a \cdot H \cap b \cdot H$$

Тогда

$$\exists h_1, h_2 \in H : z = a \cdot h_1 = b \cdot h_2$$

Умножив на h_1^{-1} справа и h_2^{-1} справа, получим:

$$\begin{cases} a = b \cdot h_2 \cdot h_1^{-1} \\ b = a \cdot h_1 \cdot h_2^{-1} \end{cases}$$

Значит:

$$\forall t \in a \cdot H \hookrightarrow t = a \cdot \widetilde{h} = b \cdot h_2 \cdot h_1^{-1} \cdot \widetilde{h}$$

Но

$$h_2 \cdot h_1^{-1} \cdot \widetilde{h} \in H$$

Тогда

$$t \in b \cdot H$$

□

Теорема 2.2. *(Теорема Лагранжа)*
$$|G| = (G : H) \cdot |H|$$

Здесь $(G : H)$ — индекс подгруппы (количество различных смежных классов по подгруппе)

Доказательство.

1. $|g \cdot H| = |H|$, так как $\forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow h_1 \neq h_2 \iff g \cdot h_1 \neq g \cdot h_2$

2. $\forall g \in G \hookrightarrow g \in g \cdot H$, поскольку $e \in H \implies g \cdot e = g \in g \cdot H$

3. Смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают

Из этого получаем, что G разбита на непересекающиеся подмножества с одинаковым количеством элементов и $\forall g \in G \hookrightarrow g$ принадлежит какому-то подмножеству G. Значит:

$$|G| = (G : H) \cdot |H|$$

Притом $(G : H)$ — количество несовпадающих левых смежных классов по H, что и требовалось. □

Определение 2.2. *Подгруппа $H < G$ называется нормальной и обозначается $H \triangleleft G$, если:*

$$\forall g \in G \hookrightarrow g \cdot H = H \cdot g$$

Теорема 2.3.
$$H \triangleleft G \iff \forall g \in G,\ \forall h \in H \hookrightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$): По определению

$$H \triangleleft G \iff g \cdot H = H \cdot g$$

Тогда
$$\forall h_1 \in H\ \exists h_2 \in H : g \cdot h_1 = h_2 \cdot g$$

Домножив на g^{-1} справа, получим:
$$g \cdot h_1 \cdot g^{-1} = h_2 \in H$$

($\Longleftarrow$):
$$\forall g \in G, \forall h \in H \hookrightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$$

Рассмотрим
$$g \cdot H \cdot g^{-1} = \{g \cdot h \cdot g^{-1} \mid h \in H\} \subseteq H$$

Легко видеть, что:
$$\forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow h_1 \neq h_2 \iff g \cdot h_1 \cdot g^{-1} \neq g \cdot h_2 \cdot g^{-1}$$

Тогда получаем:
$$g \cdot H \cdot g^{-1} = H$$

Отсюда очевидно:
$$g \cdot H = H \cdot g \implies H \triangleleft G$$

□

3 Факторгруппы

Определение 3.1. *Пусть $H \triangleleft G$. Рассмотрим смежные классы (для определённости левые, естественным образом по H). Введем операцию*

$$(a \cdot H) * (b \cdot H) = (a \cdot b) \cdot H$$

Лемма 3.1. *Множество смежных классов относительно данной операции образуют группу, называемую факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H и обозначаемую G/H.*

Доказательство. Действительно, выполнены все аксиомы группы:

1. Ассоциативность:

$$\forall a, b, c \in G \hookrightarrow \begin{cases} ((a \cdot H) * (b \cdot H)) * (c \cdot H) = ((a \cdot b) \cdot H) * (c \cdot H) = (a \cdot b \cdot c) \cdot H \\ (a \cdot H) * ((b \cdot H) * (c \cdot H)) = (a \cdot H) * ((b \cdot c) \cdot H) = (a \cdot b \cdot c) \cdot H \end{cases}$$

2. $e \cdot H = H$ — нейтральный элемент:

$$\forall a \in G \hookrightarrow (a \cdot H) * (e \cdot H) = (a \cdot e) \cdot H = a \cdot H$$

Если $n \cdot H$ и $e \cdot H$ — нейтральные элементы, то

$$(n \cdot H) * (e \cdot H) = n \cdot H = e \cdot H$$

3. Существование обратного:

$$\forall a \in G \hookrightarrow (a \cdot H) * (a^{-1} \cdot H) = (a \cdot a^{-1}) \cdot H = e \cdot H = H$$

□

Замечание 3.1. *Нормальность подгруппы H нужна для корректности, то есть для независимости представителя.*
Действительно, если рассмотреть представителя $a \in G$ и смежный класс $a \cdot H$, а затем взять $a_1 \in a \cdot H$, то

$$a_1 \cdot H = a \cdot H$$

По аналогии рассматривая смежный класс $b \cdot H$ с представителем $b \in G$, получим, что для элемента $b_1 \in b \cdot H$ выполнено:

$$b_1 \cdot H = b \cdot H$$

Это следует из того, что смежные классы не пересекаются или совпадают.
Было бы неловко, если бы

$$(a \cdot H) * (b \cdot H) = (a \cdot b) \cdot H \neq (a_1 \cdot b_1) \cdot H = (a_1 \cdot H) * (b_1 \cdot H)$$

Для того, чтобы таких печальных ситуаций не происходило, требуется нормальность подгруппы H. Проверим, что при соблюдении нормальности все будет хорошо, доказав нижеследующую лемму.

Лемма 3.2. *Если*

$$H \triangleleft G, \quad a, b \in G, \quad a_1 \in a \cdot H, \quad b_1 \in b \cdot H$$

то

$$a_1 \cdot b_1 \in (a \cdot b) \cdot H$$

Доказательство.

$$\begin{cases} a_1 \in a \cdot H \iff \exists h_a \in H : a_1 = a \cdot h_a \\ b_1 \in b \cdot H \iff \exists h_b \in H : b_1 = b \cdot h_b \end{cases} \tag{1}$$

Отсюда

$$a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b$$

Так как $H \triangleleft G$, то

$$\forall h_a \in H \ \exists \widetilde{h} \in H : \ h_a \cdot b = b \cdot \widetilde{h}$$

Заменяя в (1) $h_a \cdot b$ на $b \cdot \widetilde{h}$, окончательно получим:

$$a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b = a \cdot b \cdot \widetilde{h} \cdot h_b \in (a \cdot b) \cdot H$$

□