Гомоморфизм и изоморфизм в группах.
Теорема Кэли.

1 Гомоморфизм

Определение 1.1. *Гомоморфизм из группы* $G = (M, \cdot)$ *в группу* $G' = (M', *)$ *— это* $\varphi : G \to G'$ *такое, что* $\forall a, b, \in G \hookrightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$
Образ гомоморфизма $Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subset G'$

Свойства гомоморфизма:

- $\varphi(e) = e'$

  Доказательство. $\varphi(a \cdot e) = \varphi(a) * \varphi(e) = \varphi(a) = \varphi(e \cdot a) = \varphi(e) * \varphi(a)$ □

- $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

  Доказательство. $\varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) = e' = \varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) * \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a^{-1})$ — обратный элемент к $\varphi(a)$ в G' □

Утверждение 1.1. $Im\varphi < G'$

Доказательство. $\forall c, d \in Im\varphi\ \exists a, b \in G : \varphi(a) = c,\ \varphi(b) = d$
Рассмотрим $c * d^{-1} = \varphi(a) * (\varphi(b))^{-1} = \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) = \varphi(a \cdot b^{-1}) \in Im\varphi \Rightarrow Im\varphi < G'$ (по критерию подгруппы) □

Определение 1.2. *Ядро гомоморфизма* $Ker\varphi = \{g \mid g \in G,\ \varphi(g) = e' \in G'\}$

Утверждение 1.2. $Ker\varphi \triangleleft G$

Доказательство.

1. $\forall a, b \in Ker\varphi \hookrightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) = e' * (e')^{-1} = e' \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow Ker\varphi < G$ (по критерию подгруппы)
2. Рассмотрим произвольный $g \in G$:
   $\forall t \in g \cdot Ker\varphi\ \exists h \in Ker\varphi :\ t = g \cdot h$. Рассмотрим $\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(h) * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(g^{-1}) = e' \Rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow g \cdot h \in (Ker\varphi) \cdot g \Rightarrow t \in (Ker\varphi) \cdot g \Rightarrow g \cdot Ker\varphi = Ker\varphi \cdot g$

□

Определение 1.3. *Сюръективный гомоморфизм из* G *на* G' : $\forall b \in G'\ \exists a \in G :\ \varphi(a) = b$
$(Im\varphi = \varphi(G) = G')$

Определение 1.4. *Изоморфизм — гомоморфизм, являющийся биекцией (обозначается* $\cong$*)*

Утверждение 1.3. *Рассмотрим факторгруппу* $G/Ker\varphi,\ g \cdot Ker\varphi \in G/Ker\varphi$
$\forall a \in G \hookrightarrow a \in g \cdot Ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(g)$

Доказательство.

- $(\Rightarrow)$ $a \in g \cdot Ker\varphi \Rightarrow \exists h_a \in Ker\varphi :\ a = g \cdot h_a$
  $\varphi(a) = \varphi(g \cdot h_a) = \varphi(g) * \varphi(h_a) = \varphi(g)$
- $(\Leftarrow)$ $\varphi(a) = \varphi(g) \Rightarrow \varphi(a \cdot g^{-1}) = \varphi(a) * (\varphi(g))^{-1} = e' \Rightarrow a \cdot g^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow (a \cdot g^{-1}) \cdot g \in (Ker\varphi) \cdot g = g \cdot Ker\varphi$

□

Теорема 1.1. ~~*Гомоморфный образ группы до победы коммунизма изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма*~~ $Im\varphi \cong G/Ker\varphi$

Доказательство. Биекция между $Im\varphi$ и $G/Ker\varphi$: $f : \varphi(g) \leftrightarrow g \cdot Ker\varphi$
$f(\varphi(g)) = g \cdot Ker\varphi$
$f(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) = f(\varphi(a \cdot b)) = (ab) \cdot Ker\varphi$
$f(\varphi(a)) * f(\varphi(b)) = (a \cdot Ker\varphi) * (b \cdot Ker\varphi) = (ab) \cdot Ker\varphi$ $\square$