

Формула включений-исключений

1 Формула включений-исключений

Теорема 1.1. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — конечные множества. Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Записывают короче так:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum (-1)^{m+1} \left| \bigcap_{i_1 < \dots < i_m} A_{i_k} \right|$$

Доказательство. Покажем требуемое индукцией по количеству множеств n .

База. При $n \in \{1, 2, 3\}$ легко убедиться в справедливости утверждения, рассмотрев вхождения произвольного элемента в правую и левую часть равенства.

Шаг. Пусть для $n \leq N$ формула выполняется. Рассмотрим два множества: A_{N+1} и $B = \bigcup_{i=1}^N A_i$.

Очевидно, что для любых трёх конечных множеств A, B и C выполнено:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Тогда рассмотрим следующее:

$$|A_{N+1} \cup B| = |A_{N+1}| + |B| - |A_{N+1} \cap B|$$

Воспользовавшись предположением индукции для B , далее получим:

$$\begin{aligned} & |A_{N+1}| + |B| - |A_{N+1} \cap B| = |A_{N+1}| + \\ & + \left(\sum_{1 \leq i \leq N} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq N} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{m+1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|}_{S} + \dots \right) - \\ & - \left(\sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m < i_{m+1} = N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|}_{S} \right) = \sum_{1 \leq i \leq N} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq N} |A_i \cap A_j| + \dots + \\ & + \left((-1)^{m+1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|}_{S} + (-1)(-1)^{(m-1)+1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m = N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|}_{S} \right) + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} & (-1)^{m+1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|}_{S} + (-1)(-1)^{(m-1)+1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m = N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|}_{S} = \end{aligned}$$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N+1 \\ S}} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|$$

Тогда из полученного равенства легко видеть, что формула верна при $n = N + 1$, что и требовалось.

□