

Группы. Примеры числовых и нечисловых групп. Порядок элементов. Порядок группы.  
Циклическая группа. Порождающие элементы.  
Понятие изоморфизма групп.  
Таблицы и диаграммы Кэли

## 1 Группы

**Определение 1.1.** Пусть есть множество  $M$  и операция  $\circ$ , а также выполняется:

0. замкнутость относительно операции  $\forall a, b \in M \hookrightarrow (a \circ b) \in M$
1. ассоциативность  $\forall a, b, c \in M \hookrightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
2. существование нейтрального  $\exists! e : \forall a \in M \hookrightarrow a \circ e = e \circ a = a$
3. существование обратного  $\forall a \in M \exists! a^{-1} \in M : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Тогда будем говорить, что  $(M, \circ)$  - группа.

**Замечание 1.1.** При выполнении замкнутости:

Выполнение первого пункта  $\iff$  полугруппа.

Выполнение первого и второго пунктов  $\iff$  моноид.

Выполнение трёх пунктов + коммутативность  $\forall a, b \in M \hookrightarrow a \circ b = b \circ a \iff$  абелева группа.

**Замечание 1.2.** Существует два варианта записи: мультипликативная и аддитивная. Их использовать одновременно НЕЛЬЗЯ

Мультипликативная	Аддитивная
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$
$\exists! e$ (обознач. "1") : $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$\exists! e$ (обознач. "0") : $a + 0 = 0 + a = a$
Обр.: $\exists! x^{-1} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$	Обр.: $\exists! -x : x + (-x) = (-x) + x = 0$

## 2 Примеры числовых и нечисловых групп

### 2.1 Числовые группы

- $(\mathbb{Z}_m, +)$ : нейтральный - 0, обратный -  $(m - a)$
- $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$ : нейтральный - 1, обратный -  $a^{p-2}$

### 2.2 Нечисловые группы

- Группа перестановок (об этом в третьем билете темы)
- Группа симметрий правильного  $n$ -угольника (группа Диэдра): повороты и осевые симметрии, переводящие многоугольник в себя. Нейтральный - поворот на 0, обратный - поворот на  $2\pi - \alpha$  или такая же симметрия

## 3 Порядки групп и элементов в группе

**Определение 3.1.** Группу  $G$  будем называть конечной, если  $|G| \in \mathbb{N}$ .

**Определение 3.2.** Порядок конечной группы - количество элементов  $|G|$ .

**Определение 3.3.** Порядок элемента  $a \in G$  - наименьшее  $m \in \mathbb{N} : a^m = e$ .

**Замечание 3.1.** В конечной группе порядки элементов конечны. Порядок элемента не больше порядка группы.

*Доказательство.* Возьмём какой-то  $a \in G$ . Рассмотрим его степени от 1 до  $|G| + 1$ . По принципу Дирихле найдутся хотя бы две степени, значения которых совпадут, так как в группе всего  $|G|$  элементов, а степень не выходит за пределы группы. Получаем ситуацию  $a^i = a^j \implies a^{|i-j|} = e$ . Тогда  $\text{ord}(a) \mid |i - j|$ , а  $|i - j| \leq |G|$ .  $\square$

**Лемма 3.1.** Если  $a^m = e$ , то  $\text{ord}(a) \mid m$ .

*Доказательство.* Пусть  $m = \text{ord}(a) * q + r$ , где  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r < \text{ord}(a)$ . Тогда  $a^m = a^{\text{ord}(a)*q+r} = (a^{\text{ord}(a)})^q * a^r$ . Но  $a^m = e = e^q = (a^{\text{ord}(a)})^q$ . Получаем  $a^r = e$ . Так как  $\text{ord}(a)$  - наименьшая подходящая натуральная степень, а  $r < \text{ord}(a)$ , то  $r = 0$ .  $\square$

## 4 Циклическая группа. Порождающие элементы

**Определение 4.1.** Группа  $G$  называется циклической, если  $\exists a \in G : \forall b \in G \ \exists m \in \mathbb{Z} : a^m = b$ . При этом  $a$  называется порождающим элементом.

**Замечание 4.1.** Группа не обязана быть конечной. Порождающий элемент  $a$  может быть не единственным. Например  $(\mathbb{Z}, +)$  - элементов бесконечно, порождающим может быть как 1, так и -1.

**Замечание 4.2.** Конечные циклические группы ( $|G| = m$ ) будем обозначать  $C_m$ .

**Замечание 4.3.** Порядок порождающего равен порядку группы  $\text{ord}(a) = |G|$ .

## 5 Таблица и диаграмма Кэли

**Определение 5.1.** Таблица Кэли (нет в программе, но может пригодиться) - это квадратная таблица, которая описывает операцию в конечной группе.

**Замечание 5.1.** В каждой строке и каждом столбце элементы не повторяются.

*Доказательство.* Пусть в строке встретилось 2 одинаковых элемента. Тогда выполнено равенство  $c \circ d = c \circ k$ . Домножим на  $c^{-1}$  слева и получим  $d = k \implies$  это один и тот же столбец.  $\square$

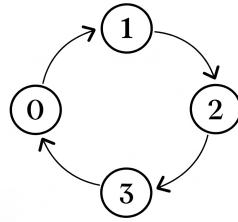
Примеры таблиц Кэли:

		·			·			·				
		e	a	b	e	a	b	c	e	a	b	c
·	e	e	a	b	e	e	a	b	e	a	b	c
	a	a	b	e	a	a	b	c	e	a	c	b
	b	b	e	a	b	b	c	e	a	b	c	e
		c	c	e	a	b	c	c	b	a	e	

**Определение 5.2.** Диаграмма Кэли (нет в программе)- это ориентированный граф, который визуализирует структуру группы, порожденную конкретным набором образующих элементов.

## 6 Гомоморфизм и изоморфизм групп

**Определение 6.1.** Гомоморфизм из группы  $G$  в группу  $G'$  ( $G = (M, \bullet), G' = (M', \times)$ ) - это  $\varphi : G \mapsto G'$  такое, что  $\forall a, b \in G \hookrightarrow \varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$  ( $\text{Im } \varphi \subset G'$ ).

Рис. 1: Диаграмма Кэли для  $\mathbb{Z}_4$ , порождённой 1

Свойства:

1.  $\varphi(e) = e'$

*Доказательство.*  $\varphi(a \bullet e) = \varphi(a) \times \varphi(e) = \varphi(a) = \varphi(e) \times \varphi(a) = \varphi(e \bullet a) \implies \varphi(e)$  - нейтральный в  $G'$ .  $\square$

2.  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

*Доказательство.*  $\varphi(a \bullet a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \bullet a) = \varphi(e) = e' = \varphi(a) \times \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) \times \varphi(a) \implies \varphi(a^{-1})$  - обратный элемент к  $\varphi(a)$  в  $G'$ .  $\square$

**Определение 6.2.** Сюръективный гомоморфизм из  $G$  на  $G'$ :  $\forall b \in G' \exists a \in G : \varphi(a) = b$  ( $Im\varphi = \varphi(G) = G'$ ).

**Определение 6.3.** Изоморфизм - гомоморфизм, являющийся биекцией (обозначается  $\cong$ ).

**Замечание 6.1.** У изоморфных групп совпадают таблицы Кэли с точностью до перестановки столбцов.

**Замечание 6.2.** Все группы порядка 2 изоморфны между собой. То же самое с группами порядка 3 (видно из единственности таблиц Кэли для этих порядков).

**Замечание 6.3.** Циклические группы одного порядка изоморфны между собой (достаточно перевести нейтральный в нейтральный и порождающий в порождающий).

**Замечание 6.4.** Порядок  $\varphi(a)$  является делителем порядка  $a$ :  $ord(\varphi(a)) \mid ord(a)$

*Доказательство.* Пусть  $m = ord(a)$ . Тогда  $\varphi(a^m) = \varphi(e) = e'$ , но  $\varphi(a^m) = (\varphi(a))^m$ . Получаем  $(\varphi(a))^m = e' \implies ord(\varphi(a)) \mid m$ .  $\square$

## 7 На посмеяться после тяжёлого бота

Сидишь techaeшь билет, хочешь вставить таблицу со сравнением мультипликативной и аддитивной записей, просишь помочь квен, а он такой:

**Сравните мульгативная  
и арьдиттивьа үззи րори —**

<i>Митиркатвна յэввյ</i>		<i>Аддихтивна յэввյ</i>	
<i>Identity</i>	$Z$		$= \frac{Q}{Q} =$
<i>Inferierse</i>	 $+ Q^*$		$Q - Q^*$
<i>Closenvroerty</i>	$+ \mathcal{I} =$	$\frac{?}{?}$	$Q = Q^*$
<i>Associatiive</i>	$Z_5$	$Q -$	$= Q^*$
<i>Example</i>	$Z_5$	$\mathcal{Q} =$	$= Q^*$