Принцип Дирихле

1 Формулировка принципа Дирихле

Определение 1.1 (Классическая формулировка). *Если n зайцев рассажены в m клеток и $n > m$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца.*

Определение 1.2 (Общая формулировка). *Пусть имеется n объектов, распределённых по m ящикам. Тогда:*

1. Если $n > m$, то хотя бы в одном ящике находится не менее двух объектов.

2. Если $n > km$, то хотя бы в одном ящике находится не менее $k + 1$ объектов.

Замечание 1.1. *Принцип Дирихле (также называемый принципом ящиков или принципом голубей и клеток) является одним из простейших, но мощных методов доказательства существования в комбинаторике, теории чисел, геометрии и других разделах математики.*

2 Примеры применения

2.1 Простейшие задачи

Пример 2.1 (Задача о носках). *В ящике лежат носки трёх цветов: чёрные, синие и красные. Какое минимальное количество носков нужно вытащить наугад, чтобы среди них гарантированно оказалась пара одного цвета?*

Решение 1. *Рассмотрим 3 цвета как 3 ящика. По принципу Дирихле: если вытащить 4 носка ($n = 4$, $m = 3$), то $4 > 3$, значит, хотя бы в одном цветовом ящике окажется не менее двух носков, то есть пара одного цвета. Минимальное количество — 4.*

Пример 2.2 (Задача о людях и рукопожатиях). *В компании из 5 человек каждый пожал руку нескольким другим. Доказать, что хотя бы два человека пожали одинаковое количество рук.*

Решение 2. *Возможное количество рукопожатий для одного человека: 0, 1, 2, 3, 4. Это 5 вариантов (ящиков). Но если кто-то пожал 4 руки, то все остальные пожали хотя бы одну (ему), значит, вариант «0 рукопожатий» невозможен. И наоборот, если кто-то не пожал никому руки, то никому не доступно 4 рукопожатия. Таким образом, фактически используется не более 4 ящиков (значений рукопожатий). Поскольку людей 5, по принципу Дирихле хотя бы два человека пожали одинаковое количество рук.*

2.2 Задачи на геометрию

Пример 2.3 (Задача о точках и квадрате). *В квадрате со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них не превышает $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Решение 3. *Разделим квадрат на 4 равных квадрата со стороной $\frac{1}{2}$. Диагональ каждого маленького квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. По принципу Дирихле: 5 точек (зайцев) в 4 квадратах (клетках) $\Rightarrow$ в одном квадрате хотя бы 2 точки. Расстояние между ними не превышает диагонали этого квадрата, то есть $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

2.3 Задачи на теорию чисел

Пример 2.4 (Задача об остатках). *Доказать, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два, дающих одинаковые остатки при делении на n.*

Решение 4. *Остатки при делении на n могут быть: 0, 1, 2, $\ldots$, $n-1$. Всего n различных остатков (ящиков). Если взять $n+1$ число (зайцев), то по принципу Дирихле хотя бы два числа попадут в один ящик, то есть дадут одинаковые остатки.*

3 Обобщения и вариации

Теорема 3.1 (Принцип Дирихле для средних)**.** *Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a, то хотя бы одно из них больше a. Аналогично, если меньше a, то хотя бы одно меньше a.*

Доказательство. Пусть числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\frac{x_1+\dots+x_n}{n} > a$. Предположим, что все $x_i \le a$. Тогда сумма $\le na$, а среднее $\le a$ — противоречие. □

Теорема 3.2 (Непрерывный принцип Дирихле)**.** *Если на отрезке длины L расположено несколько отрезков с суммарной длиной больше L, то хотя бы две точки этих отрезков пересекаются.*

4 Типичные приёмы применения

Замечание 4.1. *При решении задач с помощью принципа Дирихле важно:*

1. *Определить, что считать «зайцами» и «клетками».*
2. *Убедиться, что количество зайцев строго больше количества клеток (или выполнено соответствующее неравенство).*
3. *Интерпретировать результат: что означает попадание нескольких зайцев в одну клетку в контексте задачи.*

Пример 4.1 (Задача о сумме чисел)**.** *Дано 10 натуральных чисел. Доказать, что можно выбрать несколько из них, сумма которых делится на 10.*

Решение 5. *Рассмотрим суммы:*

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad S_{10} = a_1 + \dots + a_{10}.$$

Если какая-то S_k делится на 10, задача решена. Если нет, то остатки от деления S_k на 10 могут быть от 1 до 9 — всего 9 возможных остатков. Но сумм S_k у нас 10. По принципу Дирихле хотя бы две суммы S_i и S_j $(i < j)$ имеют одинаковые остатки. Тогда их разность $S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$ делится на 10.