Биномиальные и полиномиальные коэффициенты

1 Бином Ньютона и ~~бинарная ку~~ биномиальные коэффициенты

Теорема 1.1.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство.

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n}$$

Если временно забыть про коммутативность умножения, то при перемножении скобок друг на друга будем получать всевозможные комбинации вида:

$$\underbrace{xxyx\dots xy}_{n} \tag{1}$$

Теперь зафиксируем k и рассмотрим общий вид k-ого слагаемого. Наша задача — выбрать те k мест из n, на которых будет стоять x в ряду (1). Количество таких способов есть C_n^k. А значит если вспомнить, что умножение все же коммутативно, то получим, что всего слагаемых вида $x^k y^{n-k}$ ровно C_n^k. Тогда общий вид k-ого слагаемого есть:

$$C_n^k x^k y^{n-k}$$

Из этого очевидно следует требуемое. □

Определение 1.1. *Коэффициенты* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *в разложении бинома* $(x+y)^n$ *называются биномиальными коэффициентами.*

2 Полиномиальные коэффициенты

2.1 Разогрев

Рассмотрим следующее выражение:

$$(x+y+z)^n = \dots + (?)x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3} + \dots$$

где $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Найдём коэффициент при данном слагаемом. Вновь вдруг забудем про коммутативность умножения и по аналогии с доказательством бинома Ньютона рассмотрим цепочки из множителей x, y и z, которые получаются при последовательном перемножении скобок:

$$\underbrace{xyzzyx\dots xzy}_{n}$$

Чтобы получить слагаемое $x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$, выберем k_1 мест в цепочке, на которых будет стоять x, а затем из оставшихся $n-k_1$ мест выберем те k_2 мест, на которых будут стоять y (z расставляются после этого однозначно). Ясно, что число способов сделать это составляет:

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!}$$

Понятно также, что при таком подсчёте каждая цепочка учитывается ровно один раз. Теперь вспомнив, что ~~пора есть~~ умножение коммутативно, заключаем, что это и есть требуемый коэффициент.

2.2 Обобщение

Пусть дано следующее выражение:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \ldots + (?)x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m} + \ldots$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. По аналогии с $m = 3$ получаем, что при рассматриваемом слагаемом коэффициент равен:

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \ldots C_{n-(k_1+\ldots+k_{m-2})}^{k_{m-1}} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!}$$

Определение 2.1. *Коэффициенты*

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots k_m = n$, получающиеся при раскрытии полинома $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$, называются полиномиальными коэффициентами.