1 Предел числовой последовательности

1.1 Определение предела последовательности

Определение 1.1. Последовательностью будет называть отображение $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 1.2. $\widehat{\mathbb{R}} := \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{\infty\}$ — расширенная числовая прямая.

Определение 1.3. (Эпсилон окрестность из $\widehat{\mathbb{R}}$) пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$U_\varepsilon(a) = \begin{cases} (a-\varepsilon, a+\varepsilon) & \text{если } a \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) & \text{если } a = +\infty \\ (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) & \text{если } a = -\infty \\ U_\varepsilon(-\infty) \cup U_\varepsilon(+\infty) & \text{если } a = \infty \end{cases}$$

Определение 1.4. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Будем говорить, что элемент $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$ и писать

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n \to a, n \to \infty, \tag{1}$$

если выполнено следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \to x_n \in U_\varepsilon(a)$$

Утверждение 1.1. Пусть $a \in \widehat{\mathbb{R}}, c \geq 1, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Следующие условия эквивалентны:

1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \leftrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \leftrightarrow x_n \in U_{c\varepsilon}(a)$.

Доказательство. Так как $c \geq 1$, то $U_\varepsilon \subset U_{c\varepsilon}$, откуда получаем импликацию (1) $\to$ (2) (при $\tilde{N}(\varepsilon) = N(\varepsilon)$). Теперь докажем (2) $\to$ (1). Так как для любого ε, то возьмём ε/c, то $\forall \varepsilon > 0 \; N(\varepsilon) := \tilde{N}(\varepsilon/c) : n \geq \tilde{N}(\varepsilon/c) \to x_n \in U_{c\,\varepsilon/c}(a) = U_\varepsilon(a)$. □

1.2 Свойства сходящихся последовательностей

Определение 1.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если она имеет конечный предел. В противном случае она называется расходящейся.

Определение 1.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если множество значений её элементов ограничено. То есть

$$\exists M \in [0; +\infty) : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leq M.$$

Определение 1.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty. \tag{2}$$

Из свойств бесконечно больших последовательностей можно выделить, что они неограничены, а обратное неверно.

Примечание. Притом если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \{x_n\}$ – бесконечно большая. Обратное неверно. Контрпример: $\{x_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Она бесконечно большая, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty, \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

Лемма 1.1 (Лемма о непересекающихся окрестностях). $\forall a, b \in \widehat{\mathbb{R}}, a \neq b \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.

Доказательство. Возможны 4 случая:

1. $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда возьмём $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.
2. $-\infty < a < b = +\infty$. $\varepsilon = \frac{1}{|a|+1}$ ($\varepsilon \leq 1$).
3. $-\infty = a < b < +\infty$. $\varepsilon = \frac{1}{|b|+1}$.
4. $-\infty = a < b = +\infty$. $\varepsilon = 1$.

Проверьте, что тогда окретсности не пересекаются. □

Теорема 1.1. Если у последовательности $\{x_n\}$ существует предел в $\widehat{\mathbb{R}}$, то он единственен в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Предположим, что $\exists a, b \in \mathbb{R} \to a \neq b, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тогда по лемме о непересекающихся окрестностях $\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b) = \emptyset$. Запишем определение предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \leftrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \leftrightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)$$

Подставим $\varepsilon = \varepsilon^*$. Следовательно, если мы возьмём $n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\}$, то $x_n \in (U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b)) = \emptyset$. Противоречие. Следовательно $a = b$. □

Примечание. В $\widehat{\mathbb{R}}$ предел может быть не единственен. Если $+\infty$ — предел, то и ∞ — предел).

Теорема 1.2. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена. Обратное неверно.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, значит у неё есть предел, назовём его a, и этот предел — число. Но тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \to x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Тогда в частности $\exists N = N(1) : \forall n \geq N(1) \to |x_n| < |a| + 1$ (следствие неравенства из предела). Поскольку вне хвоста конечное число элементов, то возьмём $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N(1)}|, |a| + 1\}$. Отсюда следует, $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
Контрпример для обратного: $\{x_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, но не является сходящейся. $\square$

1.3 Свойства пределов сходящихся последовательностей, связанные с арифметическими операциями

Определение 1.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если её предел равен 0.

Лемма 1.2. Произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей есть бесконечно малая последовательность. То есть, если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ бесконечно малая, то $\{z_n\} := \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность.

Доказательство. $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность $\Leftrightarrow \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leq M$.
$\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \to |y_n - 0| < \varepsilon$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \to |x_n \cdot y_n| < M \cdot \varepsilon$. Откуда требуемое. $\square$

Лемма 1.3. Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то есть, если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малая $\Rightarrow \{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. Докажем для суммы и разности. Тогда с учётом утверждения 2.1:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \to |x_n| \in U_{\ \varepsilon/2}(0)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \to |y_n| \in U_{\ \varepsilon/2}(0)$$

Возьмём $N(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \to x_n \pm y_n \in U_\varepsilon(0).$$

Тот факт, что $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно малая следует из того, что $\{x_n\}$ ограничена (а это следует из того, что она сходящаяся, так как она бесконечно малая) и $\{y_n\}$ — бесконечно малая. □

Лемма 1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \to$ последовательность $\{a - x_n\}$ бесконечно малая.

Лемма 1.5. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, при этом $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = a \cdot b$$

Доказательство. Используйте лемму выше и свойства бесконечно малых последовательностей. Про умножение: заметим, что $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$. Получает ограниченные на бесконечно малые. □

Лемма 1.6. Пусть $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{1/x_n\}$ ограничена. Действительно, по определению предела получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to x_n \in U_\varepsilon(x).$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, то $\exists N^* \in \mathbb{N} : \forall n > N^* \to x_n \in U_{|x|/2}(x)$.
Проверьте, что будет выполняться $\forall n > N^*$, $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Это можно понять геометрически – рисуйте окрестность
Возьмём $M := \max\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \dots, \frac{1}{|x_{N^*}|}, \frac{2}{|x|}\} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \to$ последовательность $\{1/x_n\}$ ограничена. Рассмотрим $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_n}{x x_n} = \frac{1}{x x_n}(x - x_n)$ и заметим, что $\{x - x_n\}$ бесконечно малая последовательность, а $\frac{1}{x x_n}$ ограничена, так как $\{1/x_n\}$ ограничена. Итого получаем $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}$ — бесконечно малая $\to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$. □

Следствие. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y, y \in \mathbb{R}$; $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ и $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться предыдущей леммой и леммой о пределе произведения последовательностей и рассмотреть $\frac{y_n}{x_n}$ как $y_n \cdot \frac{1}{x_n}$. □

1.4 Предельный переход в неравенствах

Лемма 1.7. Пусть есть два элемента $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$ и две числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ такие, что:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = B, \quad A < B.$$

Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to x_n < y_n$.

Доказательство. По лемме о непересекающихся окрестностях

$$\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(A) \cap U_{\varepsilon^*}(B) = \emptyset.$$

А так как $A < B$, то $\forall x \in U_{\varepsilon^*}(A)$ и $\forall y \in U_{\varepsilon^*}(B) \to x < y$. Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \to x_n \in U_\varepsilon(A);$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \to y_n \in U_\varepsilon(B).$$

Возьмём $N := \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\} \Rightarrow \forall n > N \to x_n \in U_{\varepsilon^*}(A)$ и $y_n \in U_{\varepsilon^*}(B) \Rightarrow x_n < y_n$, что нам и надо было. □

Теорема 1.3 (Теорема о предельном переходе в неравенстве). Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A, A \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = B, B \in \mathbb{R}$. Пусть $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n, \forall n \geq N$. Тогда $A \leq B$.

Доказательство. Предположим $A > B$. Воспользуйтесь леммой выше и придите к противоречию □

Теорема 1.4 (Теорема о двух миллиционерах). Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ — числовые последовательности. Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c, c \in \mathbb{R}$. Пусть $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to a_n \leq c_n \leq b_n$. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Доказательство. Распишем определение предела:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \to a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon);$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \to b_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon);$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{N}(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N\} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \to a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon);\ b_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon);\ \Rightarrow c_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} c_n = c$. □

Теорема 1.5. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \to y_n > x_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Аналогично для $-\infty$.

Доказательство. Такая же идея, что и выше. $\square$

1.5 Пределы монотонных последовательностей

Определение 1.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется нестрого возрастающей (нестрого убывающей), если $\forall n \in \mathbb{N} \to x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$.

Определение 1.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонной, если она нестрого возрастает или нестрого убывает.

Теорема 1.6 (Теорема Вейерштрасса). Любая монотонная последовательность $\{x_n\}$ имеет предел в $\widehat{\mathbb{R}}$. При этом если $\{x_n\}$ нестрого возрастает, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$. Соответственно, если $\{x_n\}$ нестрого убывает, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

Доказательство. Докажем для нестрого возрастающей последовательности. Для нестрого убывающей аналогично.
Сначала рассмотрим случай ограниченной сверху последовательности.
По теореме о существовании супремума $\exists M = \sup\{x_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. В силу второго пункта определения супремума $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : x_N > M - \varepsilon$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to x_n \geq x_N > M - \varepsilon$. В силу первого пункта определения супремума $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leq M$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \to x_n \in U_\varepsilon(M)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

(в билете будет ограниченная последовательность) Теперь рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : x_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n > N \to x_n \geq x_N > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. $\square$

1.6 Число e

Определяется как предел последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$. Для этого покажите, что она возрастающая и ограниченная.
Возрастание можно прочитать тут: https://dodem.ru/tasks/69/

Ограниченность:

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots = \\
= 1 + 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots < \\
< 1+1+1 = 3
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ и что каждое соответствующее слагаемое меньше $\frac{1}{n!}$, ведь, например, $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} < 1$ аналогично и с другими. Откуда получаем оценку на $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots < 1$. Откуда требуемое.