Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Следствия из теоремы Лагранжа о среднем об отсутствии разрывов первого рода у производной дифференцируемой функции. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

1 Теоремы о среднем

Определение 1.1 (Локальный максимум). *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$. Будем говорить, что x_0 — точка нестрогого (строгого) локального максимума функции f, если $\exists \delta_0 > 0:$*

$$f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) \cap X$$

$$\Big(f(x) < f(x_0)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X\Big)$$

Определение 1.2 (Локальный минимум). *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$. Будем говорить, что x_0 — точка нестрогого (строгого) локального минимума функции f, если $\exists \delta_0 > 0:$*

$$f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) \cap X$$

$$\Big(f(x_0) < f(x)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X\Big)$$

Определение 1.3 (Локальный экстремум). *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$. Будем говорить, что x_0 — точка (строгого) локального экстремума функции f, если x_0 является точкой (строгого) локального максимума или точкой (строгого) локального минимума функции f.*

Теорема 1.1 (Теорема Ферма). *Пусть f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Если x_0 — точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Докажем для случая локального максимума, так как в случае локального минимума доказательство аналогично. По определению локального максимума:

$$f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Заметим, что при $x \in \mathring{U}_\delta^+(x_0)$ выполнено $x > x_0$, а значит, пользуясь полученным выше неравенством, получим:

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta^+(x_0) \hookrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Но функция f дифференцируема в точке x_0, а значит $\exists f'(x_0)$. Следовательно, существуют односторонние производные, откуда:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

По аналогии рассмотрев $x \in \mathring{U}_\delta^-(x_0)$ и знак того же выражения при этих x, а затем совершив предельных переход, получим:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Но в силу существования $f'(x_0)$ получаем, что:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Значит

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \implies f'(x_0) = 0$$

$\square$

Определение 1.4. *Множество функций, дифференцируемых в каждой точке числового множества X, будем обозначать $DIF(X)$.*

Теорема 1.2 (Теорема Ролля)**.** *Пусть $f \in C([a,b])$, $f \in DIF((a,b))$ и $f(a) = f(b)$. Тогда:*

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$

Доказательство. Пусть $f \equiv const$. Тогда в качестве ξ подойдёт любая точка интервала (a,b).
Пусть $f \not\equiv const$. Тогда в силу непрерывности на $[a,b]$ по теореме Вейерштрасса получаем, что f достигает своего максимума и минимума на $[a,b]$. Так как $f \not\equiv const$, то $\exists \xi \in (a,b)$, которая является точкой локального экстремума f, и при этом $f(\xi) \neq f(a)$ (минимум и максимум не могут совпасть). Тогда по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$, что и требовалось. □

Теорема 1.3 (Теорема Коши о среднем)**.** *Пусть $f, g \in C([a,b])$, $f, g \in DIF((a,b))$. Пусть также $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$. Тогда:*

$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Замечание 1.1. *Заметим, что $g(b) \neq g(a)$. Действительно, если бы от противного $g(b) = g(a)$, то для функции g справедлива теорема Ролля, а значит найдется точка из интервала (a,b), в которой производная функции g равна 0, что невозможно в силу требования $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$.*

Доказательство. Положим

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - kg(x)$. Ясно, что h непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b) как разность непрерывных на $[a,b]$ и дифференцируемых на (a,b) функций. При этом:

$$h(b) - h(a) = (f(b) - kg(b)) - (f(a) - kg(a)) = (f(b) - f(a)) - k(g(b) - g(a))$$

Подставив в равенство выше значение k, получим, что $h(b) - h(a) = 0$, то есть $h(a) = h(b)$. Тогда по теореме Ролля для функции h имеем:

$$\exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0$$

Но

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi)$$

Значит окончательно получаем:

$$k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Вспомнив, чему равно k по определению, осознаём, что требуемое доказано. □

Теорема 1.4 (Теорема Лагранжа о среднем)**.** *Пусть $f \in C([a,b])$, $f \in DIF((a,b))$. Тогда*

$$\exists \xi \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Доказательство. Пусть $g(x) = x$. Легко видеть, что $g \in C([a,b])$, $g \in DIF((a,b))$ и $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow g'(x) = 1 \neq 0$. Тогда применим теорему Коши о среднем для функций f и g. Получим:

$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}$$

Несложно видеть, что получили требуемое. □

2 Следствия из теорем о среднем

Теорема 2.1. *Пусть $f \in C([a,b])$, $f \in DIF((a,b))$. Пусть также*

$$\exists \lim_{x \to a+0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} f'(x)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для левосторонней производной f в точке b.

Доказательство. По определению правосторонней производной:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Тогда $\forall x \in (a,b)$ применим теорему Лагранжа о среднем для функции f на отрезке $[a,x] \subset [a,b]$. Получим:

$$\exists \xi(x) \in (a,x) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi(x))$$

При этом заметим, что $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow \xi(x) \in (a,x)$, а значит $\xi(x) \neq a$ $\forall x \in (a,b)$, то есть $\forall x \in (a,b)$ значение $\xi(x)$ лежит в проколотой правой полуокрестности a. Тогда можно воспользоваться теоремой о замене переменной при вычислении предела. Сделав это, получим:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+0} f'(\xi(x)) = \lim_{\xi \to a+0} f'(\xi)$$

Из равенства выше очевидно, что требуемое доказано. □

Теорема 2.2 (Следствие об отсутствии разрывов 1-ого рода)**.** *Если f дифференцируема на (a,b), то f' не может иметь устранимых разрывов и разрывов 1-ого рода.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$. Так как $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{cases} \exists f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \\ \exists f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

При этом $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Покажем, что f' не может иметь устранимых разрывов. Предположим, что x_0 — точка устранимого разрыва f', то есть:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) \;\wedge\; f'(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Ясно, что:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = A \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = A \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x) = A \end{cases}$$

Тогда по теореме 2.1 получаем:

$$\begin{cases} \exists f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \\ \exists f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \end{cases}$$

Но тогда:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Получаем противоречие, а значит требуемое доказано. Покажем теперь, что у f' не может быть разрывов 1-ого рода.
Предположим, что x_0 — точка разрыва 1-ого рода f'. Тогда по определению:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) \in \mathbb{R} \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \wedge \lim_{x \to x_0+0} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f'(x)$$

Но тогда по теореме 2.1:

$$\begin{cases} \exists f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) \in \mathbb{R} \\ \exists f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \wedge \quad f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

Следовательно, не существует $f'(x_0)$. Получаем противоречие с тем, что f дифференцируема на всем интервале (a, b), а значит требуемое доказано. □

Замечание 2.1. *Приведем пример функции f, которая дифференцируема на $\mathbb{R}$, и при этом f' имеет разрыв 2-ого рода.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Если $x = 0$, то:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

При этом ясно, что не существует $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ в силу того, что не существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, что легко доказать, предъявив две последовательности Гейне в точке 0. Следовательно, f' имеет в нуле разрыв 2-ого рода.

3 Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной

Лемма 3.1. *Пусть f дифференцируема на (a, b). Пусть*

$$x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \ \wedge \ f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$$

Тогда

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = 0$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) > 0$. Рассмотрим f на отрезке $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Ясно, что f дифференцируема на $[x_1, x_2]$, а значит f непрерывна на $[x_1, x_2]$. Но тогда по теореме Вейерштрасса f достигает максимума и минимума на этом отрезке (рассмотрено как-бы сужение f на $[x_1, x_2]$, на котором и понимается максимум и минимум). Пусть x_M — точка максимума f на $[x_1, x_2]$. Заметим, что $f'_+(x_M) \leq 0$ и $f'_-(x_M) \geq 0$. Но тогда x_M не может совпасть с точками x_1 и x_2 из неравенств выше. Значит $x_M \in (x_1, x_2)$. Следовательно, x_M — точка локального максимума. Тогда по теореме Ферма $f'(x_M) = 0$. Легко видеть, что получили требуемое. □

Теорема 3.1 (Теорема Дарбу)**.** *Пусть f дифференцируема на интервале (a, b). Пусть также $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 \neq x_2$. Пусть $f'(x_1) = A$ и $f'(x_2) = B$. Тогда:*

$$\forall C \in (\min\{A, B\}, \max\{A, B\})\ \exists x_C \in (x_1, x_2) : f'(x_C) = C$$

Доказательство. Для простоты считаем, что $A < B$. Фиксируем $C \in (A, B)$. Рассмотрим

$$h(t) = f(t) - C \cdot t$$

Заметим, что тогда:

$$h'(x_1)h'(x_2) = (A - C)(B - C) < 0$$

Значит по предыдущей лемме получаем, что:

$$x_C \in (x_1, x_2) : h'(x_C) = 0$$

Отсюда следует, что:

$$f'(x_C) = C$$

Легко видеть, что получили требуемое. □

4 Формула Тейлора

Определение 4.1. *Полиномом Тейлора (многочленом Тейлора) степени n функции f с центром в точке x_0 будем называть следующий полином:*

$$T^n_{x_0}[f](x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Определение 4.2. *Формальным остатком (остаточным членом) формулы Тейлора будем называть следующую величину:*

$$r^n_{x_0}[f](x) := f(x) - T^n_{x_0}[f](x)$$

Замечание 4.1. *При $n = 1$, если $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, из определения дифференцируемости:*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T^1_{x_0}[f](x)} + \underbrace{o(x - x_0)}_{r^1_{x_0}[f](x)},\ x \to x_0$$

Лемма 4.1. *Рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n,\ n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}$. Справедливо следующее:*

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi_n^{(k)}(x_0) = \begin{cases} n!, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. (1): Если $k > n$ очевидно. Далее $0 \le k \le n$. Покажем требуемое индукцией по k.
База. При $k = 1$:

$$\varphi_n'(x) = n(x - x_0)^{n-1}$$

Шаг. Пусть при $k < n$ утверждение справедливо. Рассмотрим следующее:

$$\varphi_n^{(k+1)}(x) = \left(\varphi_n^{(k)}(x)\right)' = \left(n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}\right)' = n(n-1)\dots(n-k)(x-x_0)^{n-(k+1)}$$

Тривиально получаем требуемое.
(2): Если $k > n$ очевидно. Далее рассмотрим $0 \le k < n$. Но тогда $n - k > 0$, откуда:

$$(x - x_0)^{n-k}\Big|_{x=x_0} = 0$$

Значит по доказанному утверждению (1) получаем, что:

$$\varphi_n^{(k)}(x)\Big|_{x=x_0} = 0, \quad 0 \le k < n$$

При этом, рассмотрев $k = n$, получим:

$$\varphi_n^{(n)}(x)\Big|_{x=x_0} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot (x - x_0)^0 = n!$$

Очевидно, что требуемое доказано. □

Лемма 4.2. *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

$$\left(r_{x_0}^n[f](x)\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0} = 0 \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\}$$

Доказательство. По определению формального остатка:

$$r_{x_0}^n[f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Зафиксируем $k \in \{1, \ldots, n\}$, так как при $k = 0$ очевидно, и, вспомнив о линейности k-ой производной, рассмотрим k-ую производную формального остатка в точке x_0:

$$\left(r_{x_0}^n[f](x)\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j\right)^{(k)}\Bigg|_{x=x_0}$$

При подстановке $x = x_0$ все слагаемые при $j > k$ сократятся. Значит:

$$\left(r_{x_0}^n[f](x)\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\left((x - x_0)^j\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0}$$

Более того, при $j < k$ по лемме 4.1 все слагаемые также будут нулевыми, а при $j = k$ по той же самой лемме производная, вычисленная при $x = x_0$, будет равна $n!$. Тогда получим:

$$\left(r_{x_0}^n[f](x)\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k! = 0$$

□

Теорема 4.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

$$r_{x_0}^n[f](x) = o\left((x - x_0)^n\right), \ x \to x_0$$

Доказательство. Для того, чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно показать, что:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x-x_0)^n} \to 0,\ x \to x_0$$

Это, в свою очередь, равносильно:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} \to 0,\ x \to x_0$$

Тривиально видеть, что:

$$\begin{cases} r_{x_0}^n[f](x_0) = 0 \\ \varphi_n(x_0) = 0 \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_{x_0}^n[f](x) - r_{x_0}^n[f](x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)} \tag{$*$}$$

Далее считаем, что $n \geq 2$, так как при $n = 1$ формула Тейлора переходит в определение дифференцируемости. Заметим, что в силу дифференцируемости $r_{x_0}^n[f]$ в окрестности точки x_0 получаем, что $r_{x_0}^n[f]$ непрерывен в этой окрестности (коль скоро функция дважды дифференцируема, её первая производная должна существовать уже в целой окрестности точки). Более того, так как φ_n суть полином, то он тоже непрерывен в окрестности точки x_0. Тогда в частности $r_{x_0}^n[f]$ и φ_n непрерывны на $[x_0, x]$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$. Кроме того, эти функции дифференцируемы на интервале (x_0, x) (или, понятное дело, на (x, x_0), в зависимости от расположения точки $x \in U_\delta(x_0)$) из рассуждений выше, а также производная φ_n не обнуляется на (x_0, x) в силу леммы 4.1 и того, что $n \geq 2$. Тогда по теореме Коши о среднем для $r_{x_0}^n[f]$ и φ_n на $[x_0, x]$ получаем:

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x) : \frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_{x_0}^n[f](x) - r_{x_0}^n[f](x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)} = \frac{(r_{x_0}^n[f])'(\xi_1(x))}{\varphi_n'(\xi_1(x))}$$

Теперь увидим, что таким образом можно продолжить равенство выше. Действительно, по леммам 4.1 и 4.2:

$$\begin{cases} \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(x_0) = 0 \\ (\varphi_n)^{(k)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Тогда:

$$\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(\xi_k)}{(\varphi_n)^{(k)}(\xi_k)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(\xi_k) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(x_0)}{(\varphi_n)^{(k)}(\xi_k) - (\varphi_n)^{(k)}(x_0)}$$

Значит, коль скоро $k < n-1$, можно применять далее теорему Коши о среднем (так как все производные до $(n-2)$-ой включительно непрерывны в целой окрестности точки x_0 в силу существования $(n-1)$-ой производной также в целой окрестности точки, которая существует в целой окрестности, в свою очередь, потому, что по условию существует n-ая производная в точке x_0). Тогда:

$$\exists \xi_{k+1} \in (x_0, \xi_k) : \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(\xi_k)}{(\varphi_n)^{(k)}(\xi_k)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(\xi_k) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k)}(x_0)}{(\varphi_n)^{(k)}(\xi_k) - (\varphi_n)^{(k)}(x_0)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{(\varphi_n)^{(k+1)}(\xi_{k+1})}$$

Значит, применяя теорему Коши о среднем $n-1$ раз, получим:

$$\exists \xi_{n-1}(x) \in (x_0, x) : \frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))}{(\varphi_n)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))}$$

Но тогда по лемме 4.1 получаем:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))}{(\varphi_n)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))} = \frac{1}{n!}\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))}{\xi_{n-1}(x) - x_0}$$

При этом заметим, что по лемме 4.2 выполнено:

$$\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Значит:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!}\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x)) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}(x) - x_0} \qquad (**)$$

Более того, $\xi_{n-1}(x) \neq x_0 \ \forall x \in (x_0, x)$, а также $\xi_{n-1}(x) \to x_0,\ x \to x_0$ по теореме о двух милиционерах. Тогда, переходя к пределу в $(**)$ при $x \to x_0$, по теореме о замене переменной при вычислении предела получим:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{\varphi_n(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{n!}\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x)) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}(x) - x_0} =$$

$$= \lim_{\xi\to x_0}\frac{1}{n!}\frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(\xi) - \left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

Поняв, что последнее равенство справедливо по лемме 4.2, заключаем, что требуемое доказано. □

Замечание 4.2. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена.*

Теорема 4.2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть*

$$\exists f^{(n+1)}(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Тогда:

$$\exists \xi \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\}) : f(x) = T_{x_0}^n[f](x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Доказательство. Рассмотрим вновь следующее выражение:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

По аналогии с предыдущим доказательством применяем теорему Коши о среднем $(n+1)$ раз (это можно сделать просто потому, что $(n+1)$-ая производная существует в целой окрестности точки x_0, а значит все производные от 0 до n-ой включительно непрерывны в этой окрестности). Итого получим:

$$\exists \xi \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\}) : \frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Но $\left(r_{x_0}^n[f]\right)^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$ по лемме 4.2. Тогда окончательно:

$$\frac{r_{x_0}^n[f](x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Легко видеть, что получили то, что и требовалось. □

Теорема 4.3 (Теорема единственности)**.** *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0 \qquad (\star)$$

Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Замечание 4.3. *Если априори не требовать существования $f^{(n)}(x_0)$, то утверждение теоремы единственности неверно. Действительно, рассмотрим следующую функцию ($\mathcal{D}$ — функция Дирихле)*

$$f(x) = x^4 \cdot \mathcal{D}(x)$$

Заметим, что:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^3 \cdot \mathcal{D}(x) = 0$$

При этом f разрывна в любой точке $x \neq 0$. Тогда в любой точке $x \neq 0$ не существует $f'(x)$. Но тогда не может существовать вторая производная f в нуле, так как для этого первая должна существовать в целой окрестности нуля. Значит нельзя раскладывать f в нуле по формуле Тейлора до второго порядка просто по условию теоремы. Но при этом очевидно, что:

$$f(x) = x^4 \cdot \mathcal{D}(x) = o(x^2),\ x \to 0$$

Это означает, что:

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + o(x^2),\ x \to 0$$

Но из этого не следует, что коэффициенты вышеописанного полинома равны соответственно коэффициентам многочлена Тейлора из условия теоремы единственности хотя бы потому, что вторая производная f в нуле просто не существует.

Доказательство. Ясно, что ($\star$) справедливо в некоторой $U_\delta(x_0)$. Подставим в ($\star$) $x = x_0$:

$$f(x_0) = a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$$

Тогда получим, что:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + a_2(x - x_0) + \dots$$

Взяв предел при $x \to x_0$ от обеих частей равенства выше, получим:

$$\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

Из соотношений выше легко видеть, что требуемое доказано для коэффициентов a_0 и a_1. Далее заметим, что в силу $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0 \qquad (\star\star)$$

Тогда, приравняв ($\star$) и ($\star\star$) и вспомнив, что для коэффициентов a_0 и a_1 требуемое доказано, получим:

$$\sum_{k=2}^{n} a_k(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right),\ x \to x_0$$

Поделим обе части равенства выше на $(x-x_0)^2$ и перейдём к пределу при $x \to x_0$. Тогда по аналогии с доказательством требуемого для a_0 и a_1 получим:

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$$

Продолжив вышеописанную процедуру по индукции, получим то, что и требовалось. □

Теорема 4.4 (Теорема о почленном дифференцировании). *Пусть* $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right), \ x \to x_0$$

Тогда

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right), \ x \to x_0$$

Доказательство. По теореме единственности:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

С другой стороны, применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано к f' (ясно, что можно разложить до $n - 1$ порядка):

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^{n-1}\right), \ x \to x_0$$

Ясно, что $(f')^{(k)}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$. Далее положим $j = k+1$ (сдвиг индекса суммирования) и получим:

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!} (x - x_0)^{j-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right), \ x \to x_0$$

Легко видеть, что:

$$\frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!} = j \cdot a_j$$

Подставляя это выражение в полученное выше разложение производной и заменяя индекс суммирования для удобства на k, окончательно имеем:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right), \ x \to x_0$$

Смотрим, и получаем удовольствие. $\square$

Теорема 4.5 (Теорема о почленном интегрировании). *Пусть* $\exists f^{(n+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$. *Пусть*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right), \ x \to x_0$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), \ x \to x_0$$

Доказательство. По теореме единственности:

$$a_k = \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Теперь применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для f (очевидно, что можем разложить до $n + 1$ порядка):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^{n+1}\right), \ x \to x_0$$

Выпишем отдельно от основной суммы слагаемое при $k = 0$, а затем вновь выполним сдвиг индекса суммирования, положив $j = k - 1$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x_0)}{(j+1)!}(x - x_0)^{j+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right),\ x \to x_0$$

Осталось лишь заменить для удобства индекс суммирования обратно на k и заметить, что:

$$\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{a_k}{k+1}$$

Отсюда окончательно:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right),\ x \to x_0$$

Получили то, что и требовалось. □

Лемма 4.3. *Пусть f дифференцируема в некоторой окрестности нуля. Тогда, если f чётная, то f' нечётная. Если f нечётная, то f' чётная. В частности, если f чётная, то $f'(0) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим случай чётной f, так как для нечётной доказательство аналогично. Зафиксируем произвольный $x \in U_\delta(0)$. Далее рассмотрим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

В силу чётности f преобразуем равенство выше следующим образом:

$$f'(x) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x - \Delta x) - f(-x)}{-\Delta x}$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $-\Delta x \to 0$. Положим тогда $h = -\Delta x$ и по теореме о замене переменной при вычислении предела получим:

$$f'(x) = -\lim_{h \to 0} \frac{f(-x + h) - f(-x)}{h} = -f'(-x)$$

Получили, что:

$$\forall x \in U_\delta(0) \hookrightarrow f'(x) = -f'(-x)$$

Значит f' нечётная, что и требовалось.
Поймём теперь, что если f чётная, то $f'(0) = 0$. В самом деле:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(-h)}{h} = -\lim_{h \to +0} \frac{f(-h)}{-h} = -f'_-(0)$$

Но f дифференцируема в нуле, откуда, пользуясь полученным выше равенством, имеем:

$$f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = -f'(0) \implies f'(0) = 0$$

Легко видеть, что получили требуемое. □

Теорема 4.6 (Следствие)**.** *Пусть* $f\colon U_\delta(0) \to \mathbb{R}$ *— чётная. Пусть* $\exists f^{(2n)}(0) \in \mathbb{R}$*. Тогда:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right), \ x \to 0$$

Аналогично, если f *— нечётная и* $\exists f^{(2n+1)}(0) \in \mathbb{R}$*, то:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right), \ x \to 0$$

Доказательство. Докажем для случая чётной f, так как для второго случая доказательство аналогично. По предыдущей лемме получаем следующую цепочку:

$$f \text{ — чётная} \implies f' \text{ — нечётная} \implies f'' \text{ — чётная} \implies \ldots \implies f^{(2n-1)} \text{ — нечётная}$$

Более того, по той же лемме имеем (она применима потому, что $\exists f^{(2n)}(0)$, а значит все производные от 0 до $2n-1$ включительно существуют уже в целой окрестности нуля):

$$f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(2n-1)}(0) = 0$$

Следовательно, по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получаем то, что и требовалось. ☐

5 Основные разложения по формуле Тейлора

1. Ясно, что $(e^x)^{(k)}\Big|_{x=0} = 1$. Из этого немедленно получаем:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right), \ x \to 0 \tag{3}$$

2. По определению: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Значит функция $\operatorname{sh} x$ — нечётная. При этом $(\operatorname{sh} x)^{(2k+1)}\Big|_{x=0} = 1$.

   Значит по теореме 4.6 получаем:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \ x \to 0 \tag{4}$$

3. По определению: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Значит функция $\operatorname{ch} x$ — чётная. При этом $(\operatorname{ch} x)^{(2k)}\Big|_{x=0} = 1$.

   Значит по теореме 4.6 получаем:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \ x \to 0 \tag{5}$$

4. Функция $\sin x$ — нечётная. При этом

$$(\sin x)^{(2k+1)}\Big|_{x=0} = \sin\left(x + \frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\Big|_{x=0} = (-1)^k$$

   Тогда по теореме 4.6 получаем:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \ x \to 0 \tag{6}$$

5. Функция $\cos x$ — чётная. При этом

$$(\cos x)^{(2k)}\Big|_{x=0} = \cos\left(x + \frac{2\pi k}{2}\right)\Big|_{x=0} = (-1)^k$$

Тогда по теореме 4.6 получаем:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right), \ x \to 0 \tag{7}$$

6. Рассмотрим теперь функцию $(1+x)^\alpha$, $x \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим по определению:

$$C_\alpha^k := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Далее заметим, что:

$$((1+x)^\alpha)^{(k)}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\Big|_{x=0} = k! \cdot C_\alpha^k \cdot (1+x)^{\alpha-k}\Big|_{x=0} = k! \cdot C_\alpha^k$$

Тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано немедленно получаем:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k \cdot x^k + o\left(x^n\right), \ x \to 0 \tag{8}$$

7. В частности, из (8) следует, что:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right), \ x \to 0 \tag{9}$$

8. Из (9) по теореме о почленном интегрировании получаем:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right), \ x \to 0 \tag{10}$$

9. Для функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ и $\operatorname{arcctg} x$ достаточно по аналогии с пунктом выше разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано их производные, а затем воспользоваться теоремой о почленном интегрировании.

6 Правила Лопиталя

Теорема 6.1 (Правило Лопиталя $\frac{0}{0}$). *Пусть функции f и g дифференцируемы на (a, b), где $-\infty < a < b < +\infty$. Пусть*

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

Пусть

$$\forall x \in (a, b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

Доказательство. Так как у функций f и g существуют правосторонние пределы в точке a, равные 0, то доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Значит $f, g \in C([a, b))$. Тогда $\forall x \in (a, b)$ выполнено, что $f, g \in C([a, x])$ и f и g дифференцируемы на (a, x), а также $g'(x) \neq 0$. Применяя тогда теорему Коши о среднем для функций f и g на $[a, x]$ и учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$, получим:

$$\exists \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$$

При этом $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow \xi(x) \neq a$ и $\xi(x) \to a + 0,\ x \to a + 0$ по теореме о двух милиционерах. Тогда, переходя к пределу при $x \to a+0$ в равенстве выше, по теореме о замене переменной при вычислении предела получим:

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = C$$

$\square$

Теорема 6.2 (Правило Лопиталя $\frac{0}{0}$ для луча)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на луче $(A, +\infty)$, $A > 0$. Пусть*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

Пусть

$$\forall x \in (A, +\infty) \hookrightarrow g'(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $t(x) = \dfrac{1}{x}$. Если $x \in (A, +\infty)$, то $t(x) \in \left(0, \dfrac{1}{A}\right)$. При этом $x(t) = \dfrac{1}{t}$. Рассмотрим тогда функции

$$\widetilde{f}(t) = f(x(t)) = f\left(\frac{1}{t}\right), \quad \widetilde{g}(t) = g(x(t)) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

Ясно, что функция $\dfrac{1}{t}$ дифференцируема на $\left(0, \dfrac{1}{A}\right)$. Но тогда $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ дифференцируемы на $\left(0, \dfrac{1}{A}\right)$ как композиции дифференцируемых на этом интервале функций. Значит по теореме о замене переменной при вычислении предела получим:

$$\lim_{t \to +0} \widetilde{f}(t) = \lim_{t \to +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{t \to +0} \widetilde{g}(t) = \lim_{t \to +0} g\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

При этом заметим, что по условию $\forall t \in \left(0, \dfrac{1}{A}\right) \hookrightarrow g'\left(\dfrac{1}{t}\right) \neq 0$. Тогда отсюда:

$$\forall t \in \left(0, \frac{1}{A}\right) \hookrightarrow \widetilde{g}'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \neq 0$$

Тогда по теореме 6.1, применительно для функций $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ на $\left(0, \dfrac{1}{A}\right)$, получаем:

$$\lim_{t \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to +0} \frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

Тогда вновь по теореме о замене переменной при вычислении предела получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C$$

$\square$

Теорема 6.3 (Правило Лопиталя $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на (a,b), где $-\infty<a<b<+\infty$. Пусть*

$$\exists\lim_{x\to a+0}|f(x)|=\infty\quad\wedge\quad\exists\lim_{x\to a+0}|g(x)|=\infty$$

Пусть

$$\forall x\in(a,b)\hookrightarrow g'(x)\neq 0\quad\wedge\quad\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C\in\overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=C$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon\in(0,1)$ и найдём $a_\varepsilon\in(a,b)$ такой, что:

$$\forall x\in(a,a_\varepsilon)\hookrightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}\in U_\varepsilon(C)\ \wedge\ f(x)\neq 0\ \wedge\ g(x)\neq 0$$

Такое $a_\varepsilon\in(a,b)$ существует по определению предела и также потому, что при $x\to a+0$ функции f и g по модулю бесконечно большие, а значит, если потребуется, можно уменьшить a_ε таким образом, чтобы дополнительно стало выполняться $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$. Далее фиксируем произвольный $x\in(a,a_\varepsilon)$. Заметим, что f и g дифференцируемы на $[x,a_\varepsilon]$, а значит $f,g\in C([x,a_\varepsilon])$. При этом $\forall x_0\in[x,a_\varepsilon]\hookrightarrow g'(x_0)\neq 0$. Тогда применим теорему Коши о среднем для функций f и g на $[x,a_\varepsilon]$:

$$\exists\xi(x)\in(x,a_\varepsilon):\frac{f(x)-f(a_\varepsilon)}{g(x)-g(a_\varepsilon)}=\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$$

В силу того, что $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$, вынесем $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в левой части равенства:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}}{1-\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$$

Теперь выберем $x\in(a,a_\varepsilon)$ так, что:

$$\frac{|f(a_\varepsilon)|}{|f(x)|}<\frac{\varepsilon}{3}\quad\wedge\quad\frac{|g(a_\varepsilon)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}\cdot\frac{1-\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}}\tag{$*$}$$

При этом заметим, что:

$$1-\varepsilon<\frac{1-\frac{\varepsilon}{3}}{1+\frac{\varepsilon}{3}}<\frac{1-\frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}}<\frac{1+\frac{\varepsilon}{3}}{1-\frac{\varepsilon}{3}}<1+\varepsilon\tag{$**$}$$

Рассмотрим тогда несколько случаев:

1. $C \in \mathbb{R}$. Значит, учитывая $(*)$ и $(**)$ и то, как выбиралось a_ε, получим:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in ((C-\varepsilon)(1-\varepsilon), (C+\varepsilon)(1+\varepsilon))$$

Упрощая выражение выше, получим:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \left(C - C \cdot \varepsilon + \varepsilon^2, C + C \cdot \varepsilon + \varepsilon^2\right)$$

Исходя из этого заключаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдено a_ε такое, что для всех x, достаточно близких к a, выполнено условие выше, откуда по определению предела немедленно получаем, что:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

2. $C = +\infty$. Учитывая по аналогии с пунктом выше все полученные оценки и равенства, имеем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}, +\infty\right)$$

Из этого также по аналогии с пунктом выше получаем, что:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

При $C = -\infty$ рассуждения аналогичны рассуждениям в этом пункте.

Из всего вышеописанного легко видеть, что требуемое доказано. □

Теорема 6.4 (Правило Лопиталя $\frac{\infty}{\infty}$ для луча)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на луче $(A, +\infty)$, $A > 0$. Пусть*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \infty \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to +\infty} |g(x)| = \infty$$

Пусть

$$\forall x \in (A, +\infty) \hookrightarrow g'(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству правила Лопиталя $\frac{0}{0}$ для луча, то есть выполняется редукция к предыдущей теореме посредством замены $x(t) = \dfrac{1}{t}$. □

Пример 6.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Найти:*

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$$

Решение. Несложно видеть, что имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Так как работаем в проколотой окрестности нуля, то сделаем замену $t = \dfrac{1}{x}$. По теореме о замене переменой при вычислении предела получим:

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = \lim_{t \to +\infty} t^n e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^t} = [\text{Лопиталь } n \text{ раз}] = 0$$

□