Свойства функций, полунепрерывных на отрезке — ограниченность снизу (для полунепрерывных снизу) и сверху (для полунепрерывных сверху), достижимость точных верхней (для полунепрерывной сверху) и нижней (для полунепрерывной сверху) граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке. Теорема об обратной функции.

1 Верхний и нижний пределы функции по множеству

Определение 1.1. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка для множества X.*

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) := \inf_{\delta>0} \sup_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) := \sup_{\delta>0} \inf_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

Обозначим также:

$$\overline{g_{x_0}}(\delta) = \sup_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x), \quad \underline{g_{x_0}}(\delta) = \inf_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

Лемма 1.1. *$\underline{g_{x_0}}(\delta)$ нестрого убывает на $(0,+\infty)$, а $\overline{g_{x_0}}(\delta)$ нестрого возрастает на $(0,+\infty)$.*

Доказательство. Действительно, требуемое очевидно из определений супремума и инфимума: супремум от большего множества не может быть меньше, инфимум от большего множества не может быть больше. □

Лемма 1.2.

$$\forall\overline{\delta} > 0 \hookrightarrow \sup_{\delta>0} \underline{g_{x_0}}(\delta) = \sup_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right)} \underline{g_{x_0}}(\delta)$$

$$\forall\overline{\delta} > 0 \hookrightarrow \inf_{\delta>0} \overline{g_{x_0}}(\delta) = \inf_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right)} \overline{g_{x_0}}(\delta)$$

Доказательство. Докажем для sup, так как для inf аналогично. Из определения супремума тривиально получаем:

$$\sup_{\delta>0} \underline{g_{x_0}}(\delta) \geq \sup_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right)} \underline{g_{x_0}}(\delta) \tag{$*$}$$

Теперь заметим, что

$$\forall\delta_2 > \overline{\delta},\ \forall\delta_1 \in \left(0,\overline{\delta}\right) \hookrightarrow \underline{g_{x_0}}(\delta_1) \geq \underline{g_{x_0}}(\delta_2)$$

Из этого следует:

$$\forall\delta_2 > \overline{\delta} \hookrightarrow \sup_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right)} \underline{g_{x_0}}(\delta) \geq \underline{g_{x_0}}(\delta_2)$$

Тогда, взяв от обеих частей полученного неравенства sup по всем $\delta_2 > \overline{\delta}$, получим:

$$\sup_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right)} \underline{g_{x_0}}(\delta) \geq \sup_{\delta\geq\overline{\delta}} \underline{g_{x_0}}(\delta)$$

Осталось лишь заметить, что, объединив множества $\left(0,\overline{\delta}\right)$ и $\delta \geq \overline{\delta}$ и взяв по полученному sup в правой части, знак не поменяется, так как слева sup уже берётся по $\left(0,\overline{\delta}\right)$, а он, очевидно, не меньше самого себя. Тогда итого имеем:

$$\sup_{\delta\in\left(0,\overline{\delta}\right)} \underline{g_{x_0}}(\delta) \geq \sup_{\delta>0} \underline{g_{x_0}}(\delta) \tag{$**$}$$

Объединяя $(*)$ и $(**)$, получаем то, что и требовалось. □

Теорема 1.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка для множества X. Тогда:*

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \inf\left\{\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\} - \text{последовательность Гейне в точке } x_0\right\}$$

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \sup\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\} - \text{последовательность Гейне в точке } x_0\right\}$$

Доказательство. Докажем для верхнего, так как для нижнего аналогично. Пусть

$$J = \sup\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\}\text{— последовательность Гейне в точке } x_0\right\}$$

Шаг 1. Покажем, что

$$J \le \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \tag{$*$}$$

Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0. Тогда

$$\begin{cases} x_n \to x_0, n\to\infty \\ x_n \ne x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда из условия выше получим:

$$\exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \tag{$\star$}$$

Далее вспомним, что по определению

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} f(x_k)$$

Понятно, что inf множества вышеуказанных sup по всем $n \in \mathbb{N}$ уж точно не больше, чем один из sup по всем $k \ge N(\delta)$, просто по определению inf. Значит:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} f(x_k) \le \sup_{k\ge N(\delta)} f(x_k)$$

Теперь заметим, что в силу ($\star$) все x_k при $k \ge N(\delta)$ лежат в $\mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$. Но sup по значениям f лишь от некоторых точек $\mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$ уж точно не больше, чем sup по всем точкам $\mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$. Тогда:

$$\sup_{k\ge N(\delta)} f(x_k) \le \sup_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

Из цепочки полученных неравенств заключаем, что:

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \le \sup_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

Зафиксируем далее $\{x_n\} \subset X$ — последовательность Гейне в точке x_0 и возьмём inf по всем $\delta > 0$ от обеих частей полученного выше неравенства:

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \le \inf_{\delta>0} \sup_{x\in \mathring{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x) = \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)$$

Но последовательность Гейне в точке x_0 была выбрана произвольно. Тогда, взяв от неравенства выше уже sup по всем последовательностям Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0, получим:

$$J = \sup\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\}\text{— последовательность Гейне в точке } x_0\right\} \le \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)$$

Легко видеть, что это и есть требуемое неравенство ($*$).
Шаг 2. Покажем теперь, что

$$J \ge \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \tag{$**$}$$

Для этого построим последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке x_0, в точности реализующую

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

По доказанной лемме 1.2

$$A = \inf_{\delta \in \left(0, \frac{1}{n}\right)} \overline{g_{x_0}}(\delta)$$

Далее по определению inf:

$$\exists \delta_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : \ \overline{g_{x_0}}(\delta_n) \in U_{\frac{1}{n}}(A)$$

Также вспомнив, чему равно по определению $\overline{g_{x_0}}(\delta_n)$, по определению sup получим:

$$\exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0) \cap X : f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(\overline{g_{x_0}}(\delta_n))$$

Тогда, объединив полученное только что условие и условие выше, получим:

$$\exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0) \cap X : f(x_n) \in U_{\frac{2}{n}}(A)$$

Но $n \in \mathbb{N}$ было выбрано произвольно. Тогда итого:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap X : f(x_n) \in U_{\frac{2}{n}}(A)$$

Отсюда ясно, что $\{x_n\} \subset X$ — последовательность Гейне в точке x_0, и при этом $f(x_n) \to A, n \to \infty$. Значит также

$$\varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Но тогда J, являющийся sup всех верхних пределов последовательностей значений f от последовательностей Гейне в точке x_0 уж точно не меньше A. То есть окончательно:

$$J = \sup \left\{ \varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset X, \{x_n\} \text{— последовательность Гейне в точке } x_0 \right\} \geq A = \varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$$

Несложно видеть, что получили $(**)$.
<u>*Шаг 3*</u>. Объединяя результаты $(*)$ и $(**)$, получаем, что доказаны 2 противоположных неравенства. Значит есть равенство, что и требовалось. □

Теорема 1.2 (Критерий предела)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка множества X. Тогда:*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \iff \begin{cases} \exists \varlimsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \\ \exists \varliminf\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \end{cases}$$

Доказательство. Из определения предела по Гейне по множеству получаем:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall \{x_n\} \subset X \text{ — последовательность Гейне в точке } x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Но предел числовой последовательности существует и равен $A \in \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда существует верхний предел последовательности, существует нижний предел последовательности, и они равны A (с доказательством сего факта предлагается ознакомиться в соответствующем разделе четвёртого билета). Тогда получаем:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \iff \begin{cases} \exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \\ \exists \varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \end{cases}$$

При этом ясно, что:

$$\forall \{x_n\} \text{ — последовательность Гейне в точке } x_0 \hookrightarrow \begin{cases} \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \\ \varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup\limits_{\{x_n\}} \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \\ \inf\limits_{\{x_n\}} \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \end{cases}$$

Но тогда из только что доказанной теоремы 1.1 немедленно получаем:

$$\begin{cases} \sup\limits_{\{x_n\}} \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \\ \inf\limits_{\{x_n\}} \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) = A \\ \exists \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) = A \end{cases}$$

Так как все переходы были равносильны, то требуемое доказано. □

2 Свойства функций, полунепрерывных на отрезке

Определение 2.1 (Полунепрерывность снизу). *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ — предельная точка для множества X. Будем говорить, что f полунепрерывна снизу в точке x_0 по множеству X, если*

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) \geq f(x_0)$$

Если x_0 — изолированная точка для множества X, то f полунепрерывна снизу в ней по определению.

Определение 2.2 (Полунепрерывность сверху). *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ — предельная точка для множества X. Будем говорить, что f полунепрерывна сверху в точке x_0 по множеству X, если*

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}} f(x) \leq f(x_0)$$

Если x_0 — изолированная точка для множества X, то f полунепрерывна сверху в ней по определению.

Определение 2.3 (Компакт). *Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется компактом, если $\forall \{x_n\} \subset K$ $\exists x \in K$ и $\exists \{x_{n_j}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ такие, что*

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x$$

Теорема 2.1. *Пусть $K \in \mathbb{R}$ — непустой компакт. Если $f\colon K \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу $\forall x \in K$, то она достигает свою точную нижнюю грань на K. Если $f\colon K \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху $\forall x \in K$, то она достигает свою точную верхнюю грань на K.*

Доказательство. Докажем для полунепрерывной сверху, так как для полунепрерывной снизу аналогично. Положим

$$M := \sup_K f$$

По определению sup:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K : f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(M)$$

Рассмотрим тогда полученную из условия выше последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$. Из того же условия легко видеть, что $f(x_n) \to M, n \to \infty$. Так как K — компакт, то $\exists x^* \in K$ и подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $x_{n_j} \to x^*, j \to \infty$. Значит $f(x_{n_j}) \to M, j \to \infty$ в силу того, что $\{f(x_{n_j})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, которая имеет пределом M. Далее, так как f полунепрерывна сверху $\forall x \in K$, то можно применить определение полунепрерывности сверху в точке x^*:

$$\varlimsup_{\substack{x \to x^* \\ x \in K}} f(x) \le f(x^*)$$

Но по теореме 1.1 имеем:

$$\varlimsup_{\substack{x \to x^* \\ x \in K}} f(x) = \sup \left\{ \varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) : \{x_n\} \subset K, \{x_n\} \text{— последовательность Гейне в точке } x^* \right\}$$

Тогда для любой последовательности Гейне $\{z_j\} \subset K$ в точке x^* выполнено:

$$\varlimsup_{j \to \infty} f(z_j) \le f(x^*)$$

Рассмотрим теперь $z_j = x_{n_j}\ \forall j \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$M = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = \varlimsup_{j \to \infty} f(x_{n_j}) \le f(x^*)$$

Отсюда получаем, что:

$$M \le f(x^*)$$

Но

$$M = \sup_K f$$

Значит

$$M \ge f(x^*)$$

Легко видеть, что показаны 2 противоположных неравенства. Значит есть равенство, то есть:

$$M = f(x^*)$$

Получили то, что и требовалось. □

3 Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Определение 3.1 (Непрерывность в точке по множеству)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, x_0 — точка прикосновения множества X. Будем говорить, что f непрерывна в точке x_0 по множеству X, если выполнено одно из двух условий:*

1. *x_0 — изолированная точка множества X*
2. *x_0 — предельная точка множества X и $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$*

Определение 3.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f непрерывна на множестве X и записывать $f \in C(X)$, если $\forall x_0 \in X$ выполнено, что f непрерывна в точке x_0 по множеству X.*

Теорема 3.1 (Образ компакта есть компакт)**.** *Пусть* $K \subset \mathbb{R}$ *— непустой компакт,* $f \in C(K)$*. Тогда* $f(K) := \{f(x) : x \in K\}$ *— компакт.*

Доказательство. Пусть есть произвольная последовательность $\{y_n\} \subset f(K)$. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ x_n — произвольная точка прообраза, то есть $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Получили последовательность $\{x_n\} \subset K$. По определению компакта существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и точка $x^* \in K$ такие, что: $x_{n_j} \to x^*, j \to \infty$. Но тогда в силу непрерывности f в точке x^* по Гейне

$$y_{n_j} = f(x_{n_j}) \to f(x^*), j \to \infty$$

Значит подпоследовательность $\{y_{n_j}\}$ последовательности $\{y_n\}$ сходится к значению $f(x^*) \in f(K)$. Но последовательность $\{y_n\}$ была выбрана произвольно. Тогда по определению компакта получаем, что $f(K)$ — компакт, что и требовалось. □

Теорема 3.2 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть* $K \subset \mathbb{R}$ *— непустой компакт,* $f \in C(K)$*. Тогда* f *достигает своего наибольшего и наименьшего значения на* K*.*

Доказательство. По предыдущей теореме $f(K)$ есть компакт. Следовательно, $f(K)$ — ограниченное и замкнутое множество. Тогда понятно, что sup и inf этого множества конечны. Пусть

$$m = \inf_K f \in \mathbb{R}, \quad M = \sup_K f \in \mathbb{R}$$

По определению sup и inf получаем, что точки m и M являются точками прикосновения множества $f(K)$. Но тогда в силу замкнутости этого множества получаем, что $m, M \in f(K)$. Значит:

$$\exists x_m \in K,\ \exists x_M \in K : f(x_m) = m \ \wedge \ f(x_M) = M$$

Легко видеть, что получили то, что и требовалось. □

Теорема 3.3 (Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** *Пусть* $f \in C([a, b])$*. Тогда:*

$$\forall c \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] \ \exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $f(a) < f(b)$.
Шаг 1. Зафиксируем $c \in (f(a), f(b))$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - c$. Тогда ясно, что $g(a) < 0$ и $g(b) > 0$. Достаточно доказать, что

$$\exists x_c \in [a, b] : g(x_c) = 0$$

Шаг 2. Пусть $I_0 = [a, b]$, $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. Видно, что значения на концах отрезка I_0 имеют разные знаки. Поделим отрезок I_0 пополам. Положим

$$I_1^1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad I_1^2 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

Если $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $x_c = \frac{a+b}{2}$. Если это не так, то существует половина такая, что значения g на её концах имеют разные знаки. Обозначим эти половину I_1. Положим это **базой индукции**.
Шаг 3. Пусть по индукции построены отрезки

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Значения g на концах каждого такого отрезка имеют разные знаки и

$$l(I_j) = \frac{l(I_0)}{2^j} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

На $(n+1)$-ом шаге рассмотрим I_n^1 и I_n^2 — половинки I_n. Либо g (середина I_n) $= 0$, и тогда завершаем построение, либо выбираем ту половину, где значения g имеют разные знаки на концах, и обозначаем её I_{n+1}.

Шаг 4. Либо за конечное число шагов находим x_c как середину какого-то отрезка I_n, либо получаем стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющую по теореме Кантора единственную общую точку

$$x_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Шаг 5. Покажем, что $g(x_c) = 0$. Так как последовательность отрезков стягивающаяся, то их концы $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются последовательностями Гейне в точке x_c, и к тому же

$$g(a_n) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

$$g(b_n) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{$**$}$$

В силу непрерывности g точке x_c:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(x_c) \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} g(b_n) = g(x_c) \end{cases}$$

Но тогда, переходя к пределу в $(*)$ и $(**)$, получим, что $g(x_c) \le 0$ и $g(x_c) \ge 0$. Следовательно, $g(x_c) = 0$, что и требовалось. □

Определение 3.3 (Промежуток)**.** *Пусть* $\lfloor a, b \rceil$ *— промежуток, то есть:*

$$\lfloor a, b \rceil = \left[\begin{array}{l} [a, b] \\ (a, b] \\ [a, b) \\ (a, b) \end{array} \right.$$

Теорема 3.4 (Обобщенная теорема Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** *Пусть*

$$f \in C(\lfloor a, b \rceil), \ m = \inf_{\lfloor a, b \rceil} f, \ M = \sup_{\lfloor a, b \rceil} f$$

Тогда:

$$\forall c \in (m, M) \ \exists x_c \in \lfloor a, b \rceil : f(x_c) = c$$

Доказательство. По определению inf:

1. $m \le f(x) \ \forall x \in \lfloor a, b \rceil$
2. $\forall m' > m \ \exists x_{m'} \in \lfloor a, b \rceil : f(x_{m'}) < m'$

По определению sup:

1. $f(x) \le M \ \forall x \in \lfloor a, b \rceil$
2. $\forall M' < M \ \exists x_{M'} \in \lfloor a, b \rceil : f(x_{M'}) > M'$

Теперь рассмотрим пункт 2 определений sup и inf при $m' = c$ и $M' = c$. Тогда:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in \lfloor a, b \rceil : f(x_1) < c \\ \exists x_2 \in \lfloor a, b \rceil : f(x_2) > c \end{cases}$$

Без ограничения общности $x_1 < x_2$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] \subset \lfloor a, b \rceil$. Ясно, что $f \in C([x_1, x_2])$. Тогда применим теорему Больцано-Коши о промежуточном значении к $[x_1, x_2]$. Получим, что:

$$\exists x_c \in [x_1, x_2] \subset \lfloor a, b \rceil : f(x_c) = c$$

Легко видеть, что получили то, что и требовалось. □

4 Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке

Определение 4.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f равномерно непрерывна на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in X : \left|x' - x''\right| < \delta(\varepsilon) \hookrightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$$

Теорема 4.1 (Теорема Кантора)**.** *Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — компакт. Функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на K тогда и только тогда, когда f непрерывна в каждой точке $x \in K$ по множеству K.*

Доказательство. $(\Longrightarrow)$: Пусть f равномерно непрерывна на K. Это по определению равносильно:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in K : \left|x' - x''\right| < \delta(\varepsilon) \hookrightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Заметим, что непрерывность f в каждой точке $x_0 \in K$ по множеству K равносильна следующему:

$$\forall x_0 \in K \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(x_0,\varepsilon)}(x_0) \cap K \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)) \qquad (**)$$

Тогда, положив в $(**)$ $\forall x_0 \in K$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\delta(x_0, \varepsilon) := \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ берется из $(*)$, получим следующее:

$$\forall x_0 \in K \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in K : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Несложно видеть, что требуемое доказано.
$(\Longleftarrow)$: Пусть f непрерывна в каждой точке $x \in K$ по множеству K. От противного предположим, что f не является равномерно непрерывной на K. Это равносильно:

$$\exists \varepsilon^* > 0 : \forall \delta > 0 \, \exists x', x'' \in K : \left|x' - x''\right| < \delta \ \wedge \ \left|f(x') - f(x'')\right| \geq \varepsilon^* \qquad (\star)$$

Рассмотрим $(\star)$ при $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Получим две последовательности $\{x'_n\} \subset K$ и $\{x''_n\} \subset K$ такие, что:

$$\begin{cases} \left|x'_n - x''_n\right| < \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| \geq \varepsilon^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Но K — компакт. Значит $\exists x^* \in K$ и существует подпоследовательность $\{x'_{n_j}\} \subset K$ последовательности $\{x'_n\}$ такие, что:

$$x'_{n_j} \to x^*, j \to \infty$$

При этом в силу того, что

$$\left|x'_{n_j} - x''_{n_j}\right| < \delta_{n_j} = \frac{1}{n_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

получим:

$$x''_{n_j} \to x^*, j \to \infty$$

Но f непрерывна в $x^* \in K$ по множеству K. Тогда, обращаясь к определению предела по Гейне, имеем:

$$\begin{cases} f(x'_{n_j}) \to f(x^*), \ j \to \infty \\ f(x''_{n_j}) \to f(x^*), \ j \to \infty \end{cases}$$

Следовательно, из определений пределов последовательностей по неравенству треугольника получаем:

$$\left|f(x'_{n_j}) - f(x''_{n_j})\right| \leq \left|f(x'_{n_j}) - f(x^*)\right| + \left|f(x^*) - f(x''_{n_j})\right| \to 0, \ j \to \infty$$

Но тогда:

$$\left|f(x'_{n_j}) - f(x''_{n_j})\right| \to 0, \ j \to \infty$$

Получаем противоречие с тем, что:

$$\left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| \geq \varepsilon^* \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда f равномерно непрерывна на K, что и требовалось. $\square$

5 Теорема об обратной функции

Лемма 5.1. *Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X, Y \neq \varnothing$, $f\colon X \to Y$. Существует $f^{-1}\colon Y \to X$ тогда и только тогда, когда f — инъекция и f — сюръекция.*

Доказательство. $(\Longleftarrow)$: Инъективность f равносильна:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \hookrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Сюръективность f равносильна:

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$$

Рассмотрим произвольное $y \in Y$. В силу сюръективности f возьмём $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Но такой x есть только один в силу инъективности f. Определим тогда $g(y) = x$. Покажем, что $g = f^{-1}$. Действительно:

1. $\forall x \in X \hookrightarrow g(f(x)) = x$ в силу того, что $f(x) = y$, а $g(y)$ есть тот x, подействовав на который f будет получен y.
2. $\forall y \in Y \hookrightarrow g(y) = x,\ f(x) = y \implies \forall y \in Y \hookrightarrow f(g(y)) = y$.

Из этого немедленно следует, что $g = f^{-1}$, что и требовалось.
$(\Longrightarrow)$: Пусть существует обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$.
Покажем, что f инъективно. Пусть

$$x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2$$

Тогда:

$$f^{-1}(f(x_1)) = x_1, \quad f^{-1}(f(x_2)) = x_2$$

Если $f(x_1) = f(x_2)$, то получаем противоречие с равенствами выше, а значит требуемое доказано.
Покажем, что f сюръективно. Так как определено $f^{-1}\colon Y \to X$, то

$$\forall y \in Y\ \exists x = f^{-1}(y)$$

Но $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$, а значит

$$\forall y \in Y\ \exists x : f(x) = y$$

Легко видеть, что требуемое доказано. □

Теорема 5.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, f — строго монотонна на X. Тогда $\exists f^{-1}$ и f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности на $f(X) = Y$, что и f.*

Доказательство. Докажем для строго возрастающей, так как для строго убывающей аналогично. Ясно, что f инъективна, так как из строгого возрастания f на X следует, что:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

При этом очевидно, что f сюръекция, так как f по определению действует из X <u>на</u> Y. Тогда из леммы 5.1 получаем, что $\exists f^{-1}\colon Y \to X$.
Покажем, что f^{-1} строго возрастает на Y. Зафиксируем произвольно $y_1, y_2 \in Y : y_1 < y_2$. Пусть

$$f^{-1}(y_1) = x_1, \quad f^{-1}(y_2) = x_2$$

Ясно, что $x_1 \neq x_2$, так как $f = (f^{-1})^{-1}$. Если предположить, что $x_1 > x_2$, то тогда в силу возрастания f получим:

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(x_1) > f(x_2) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

То есть $y_1 > y_2$, откуда получаем противоречие. Тогда $x_1 < x_2$, а значит f^{-1} строго возрастает на Y, что и требовалось. □

Теорема 5.2 (Теорема об обратной функции)**.** *Пусть $f \in C([a,b])$ и f строго монотонна на $[a,b]$. Тогда $\exists f^{-1} \in C([m,M])$, где $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$, и f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности, что и f.*

Доказательство. Из предыдущих утверждений (теорема 5.1, теорема 3.4 и теорема 3.2) следует, что:

$$\exists \min_{[a,b]} f, \quad \exists \max_{[a,b]} f, \quad f([a,b]) = [m,M], \quad \exists f^{-1} \colon [m,M] \to [a,b]$$

Более того, f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности, что и f. Рассмотрим случай строгого возрастания f, так как случай строгого убывания аналогичен. Тогда, очевидно, $m = f(a)$, $M = f(b)$. Докажем непрерывность f^{-1} $\forall y_0 \in (m,M)$, так как в концевых точках доказательство аналогично. Пусть $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Зафиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. Без ограничения общности считаем, что:

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$$

В силу непрерывности и строгой монотонности f переведёт $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ в $[f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. Но

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$$

Положим тогда

$$\delta(\varepsilon) := \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$$

Тогда получим, что

$$U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$$

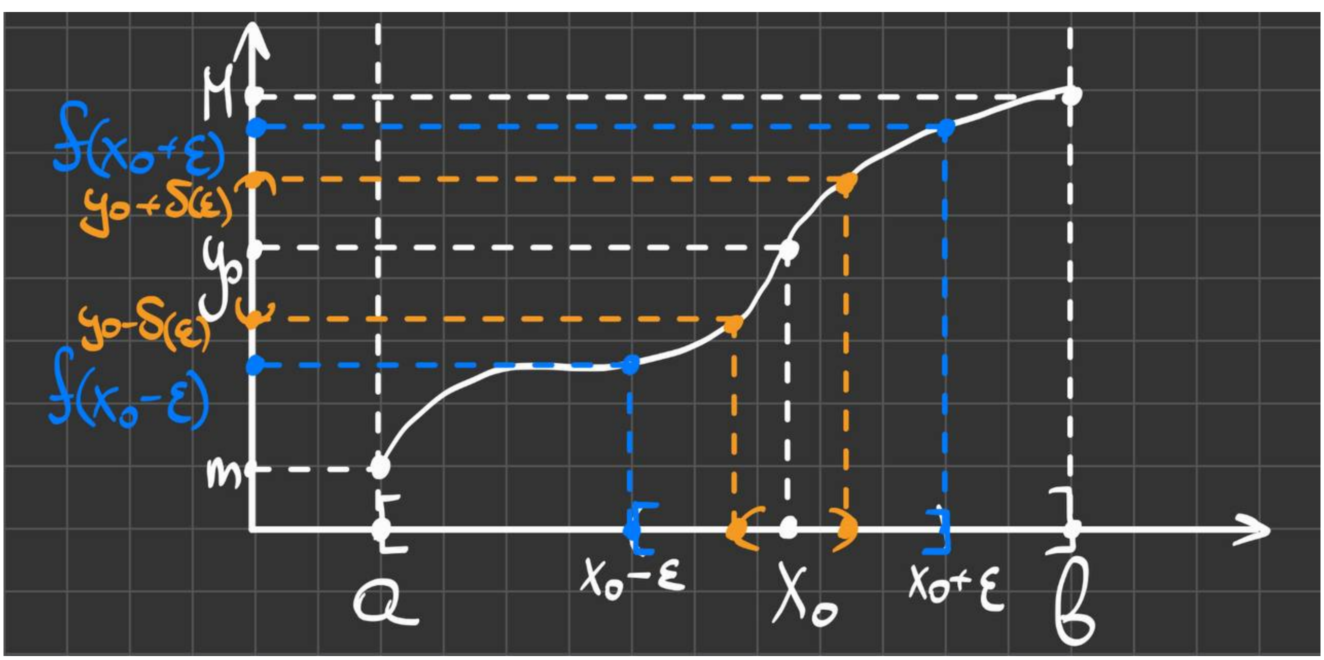
Но в силу того, что f — непрерывная **биекция**, получаем:

$$f^{-1}(U_{\delta(\varepsilon)}(y_0)) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Это равносильно:

$$\forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(x_0)$$

Но $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно. Тогда f^{-1} непрерывна в точке y_0, а значит получили то, что и требовалось.



□

Теорема 5.3 (Теорема об обратной функции для интервала). *Пусть* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. *Пусть* $f \in C((a,b))$ *и* f *строго монотонна на* (a,b). *Тогда* $\exists f^{-1} \in C((m,M))$, *где* $m = \inf\limits_{(a,b)} f$, $M = \sup\limits_{(a,b)} f$, *и* f^{-1} *имеет тот же характер строгой монотонности, что и* f.

Доказательство. Рассмотрим случай строгого возрастания f, так как случай строгого убывания рассматривается аналогично. Покажем, что $\operatorname{Im} f = (m,M)$. В самом деле, по теореме 3.4 сразу получаем, что $(m,M) \subset \operatorname{Im} f$. Покажем противоположное включение. От противного предположим, что $M \in \operatorname{Im} f$. Это равносильно тому, что:

$$\exists x_M \in (a,b) : f(x_M) = M$$

Но тогда в силу строгого возрастания f на (a,b) получаем:

$$\exists x'_M > x_M : x'_M \in (a,b) \implies M = f(x_M) < f(x'_M)$$

Получаем противоречие с определением супремума, а значит $M \notin \operatorname{Im} f$. Доказав аналогично, что и $m \notin \operatorname{Im} f$, заключаем, что $\operatorname{Im} f \subset (m,M)$, что и требовалось. Легко видеть, что показаны два противоположных включения, а значит есть равенство, то есть $\operatorname{Im} f = (m,M)$.
Далее, так как f строго монотонна на (a,b), то по теореме 5.1 получаем, что $\exists f^{-1} \colon (m,M) \to (a,b)$, и при этом f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности, что и f. Осталось лишь доказать, что f^{-1} непрерывна на (m,M).
Фиксируем $y_0 \in (m,M)$. Так как y_0 лежит строго в интервале (a,b), то:

$$\exists y_1, y_2 \in (m,M) : m < y_1 < y_0 < y_2 < M$$

Обозначим $x_1 := f^{-1}(y_1) \in (a,b)$, $x_2 := f^{-1}(y_2) \in (a,b)$, и рассмотрим функцию f на отрезке $[\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}] \subset (a,b)$. Очевидно, что $f \in C([\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}])$ и f строго монотонна на $[\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}]$. Тогда по теореме об обратной функции для отрезка $[\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}]$ получаем, что f^{-1} непрерывна в каждой точке $[y_1,y_2]$, а значит, в частности, f^{-1} непрерывна в точке $y_0 \in [y_1,y_2]$. Но точка $y_0 \in (m,M)$ была выбрана произвольно. Следовательно, $f^{-1} \in C((m,M))$, что и требовалось. $\square$