Формула включений-исключений

1 Формула включений-исключений

Теорема 1.1. *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— конечные множества. Тогда*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Записывают короче так:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum (-1)^{m+1} \left|\bigcap_{i_1<\ldots<i_m} A_{i_k}\right|$$

Доказательство. Покажем требуемое индукцией по количеству множеств n.
База. При $n \in \{1,2,3\}$ легко убедиться в справедливости утверждения, рассмотрев вхождения произвольного элемента в правую и левую часть равенства.

Шаг. Пусть для $n \leq N$ формула выполняется. Рассмотрим два множества: A_{N+1} и $B = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$. Очевидно, что для любых трёх конечных множеств A, B и C выполнено:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Тогда рассмотрим следующее:

$$|A_{N+1} \cup B| = |A_{N+1}| + |B| - |A_{N+1} \cap B|$$

Воспользовавшись предположением индукции для B, далее получим:

$$|A_{N+1}| + |B| - |A_{N+1} \cap B| = |A_{N+1}| +$$

$$+ \left(\sum_{1 \leq i \leq N} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq N} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq \underbrace{i_1 < \ldots < i_m}_{S} \leq N} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right| + \ldots \right) -$$

$$- \left(\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq \underbrace{i_1 < \ldots < i_m < i_{m+1}}_{S} = N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right| \right) = \sum_{1 \leq i \leq N+1} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} |A_i \cap A_j| + \ldots +$$

$$+ \left((-1)^{m+1} \sum_{1 \leq \underbrace{i_1 < \ldots < i_m}_{S} \leq N} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right| + (-1)(-1)^{(m-1)+1} \sum_{1 \leq \underbrace{i_1 < \ldots < i_m}_{S} = N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right| \right) + \ldots$$

Заметим, что:

$$(-1)^{m+1} \sum_{1 \leq \underbrace{i_1 < \ldots < i_m}_{S} \leq N} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right| + (-1)(-1)^{(m-1)+1} \sum_{1 \leq \underbrace{i_1 < \ldots < i_m}_{S} = N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right| =$$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{1 \le \underbrace{i_1 < \ldots < i_m}_{S} \le N+1} \left| \bigcap_{i_k \in S} A_{i_k} \right|$$

Тогда из полученного равенства легко видеть, что формула верна при $n = N + 1$, что и требовалось.

$\square$