

Производные высших порядков.

Формула Лейбница для n -й производной произведения функций.

Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного

1 Производные высших порядков

Первая производная была определена автором ранее в девятом пункте программы.

Определение 1.1. Пусть $f: U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Определим высшие производные по индукции, то есть, если при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определена $f^{(k)}$ на $U_\delta(x_0)$, то:

$$f^{(k+1)}(x_0) := \left(f^{(k)}\right)'(x_0)$$

Замечание 1.1. База индукции $f^{(0)} \equiv f$.

2 Дифференциал второго порядка

Первый дифференциал был определён автором ранее в девятом пункте программы.

Определение 2.1. Пусть $f: U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Определим дифференциал второго порядка:

$$d^2 f(x_0) := d(df) \Big|_{x=x_0}$$

Замечание 2.1. В df параметр dx считается фиксированным при вычислении (без паники, потом развясним).

3 Дифференциалы высших порядков

Определение 3.1. Пусть $f: U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Определим высшие дифференциалы по индукции, то есть, если $\exists d^k f(x) \forall x \in U_\delta(x_0)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то:

$$d^{k+1} f(x_0) := d(d^k f) \Big|_{x=x_0}$$

Замечание 3.1. В $d^k f$ параметр dx считается фиксированным при вычислении.

Теорема 3.1. Если функция f дифференцируема k раз в точке x_0 , то есть $\exists f^{(k)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то:

$$d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)(dx)^k$$

Доказательство. При $k = 1$ очевидно, так как это просто определение дифференциала. Положив $k = 1$ базой индукции, предположим, что при $k = s$ утверждение доказано. Посмотрим, что происходит при $k = s + 1$:

$$d^{s+1} f(x_0) = d(d^s f) \Big|_{x=x_0} = d(f^{(s)}(x)(dx)^s) \Big|_{x=x_0} = f^{(s+1)}(x_0)(dx)^{s+1}$$

□

Замечание 3.2. Давайте разбираться с фиксацией (заморозкой) dx на примере нашего подсчёта в доказательстве выше. По определению дифференциала высшего порядка получили

$$d^{s+1} f(x_0) = d(d^s f) \Big|_{x=x_0}$$

Уже с этого момента на время перестаём писать x_0 , так как это конкретная точка, и любая запись по типу $d(d^k f(x_0))$ будет просто обращаться в ноль как дифференциал от константы. Вместо этого будем миленько приписывать $x = x_0$ как напоминание о наших намерениях. Внутренний дифференциал переписываем, так как наше предположение для $k = s$ верно. Получаем

$$d(d^s f) \Big|_{x=x_0} = d(f^{(s)}(x)(dx)^s) \Big|_{x=x_0}$$

Здесь как раз начинается заморозка / фиксация dx . На время она ведёт себя для нас как константа, поэтому можно её вынести и взять дифференциал от s -й производной:

$$d(f^{(s)}(x)(dx)^s) \Big|_{x=x_0} = (dx)^s \cdot df^{(s)} \Big|_{x=x_0} = f^{(s+1)}(x_0)(dx)^{s+1}$$

Когда дифференциалы убегают, мы не боимся глупых занулений и возвращаем x_0 .

Замечание 3.3. Обязательно ставьте скобки, когда возводите dx в степень, потому что по записи dx^s непонятно, возводите ли вы dx в степень s или берёте первый дифференциал от x^s .

4 Отсутствие инвариантности формы дифференциала второго порядка относительно замены переменного

Пункт сам за себя всё сказал. Давайте на это посмотрим)

Если $z = z(y)$, y — независимая переменная, то спокойно получаем из предыдущего пункта:

$$d^2 z = z''(y)(dy)^2$$

Если же $y = y(x)$ и $z = z(y(x))$, то становится неприятнее (пользуемся производной композиции):

$$d^2 z = d(z'(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx)$$

Далее опять замораживаем dx и, как константу, таскаем её за собой. Берём дифференциал от произведения:

$$d(z'(y(x)) \cdot y'(x) \cdot dx) = z''(y(x)) \cdot (y'(x))^2 \cdot (dx)^2 + z'(y(x)) \cdot y''(x) \cdot (dx)^2$$

Первое слагаемое запишется как:

$$z''(y)(dy)^2$$

Второе слагаемое запишется как:

$$z'(y)d^2 y$$

Приплыли... Для $z = z(y(x))$ получили:

$$d^2 z = z''(y)(dy)^2 + z'(y)d^2 y$$

Форма записи отличается от той, которая возникает для $z = z(y)$.

5 Формула Лейбница для n -й производной произведения функций

Теорема 5.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\exists u^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и $\exists v^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exists (uv)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(k)}(x_0) \cdot v^{(n-k)}(x_0)$$

Доказательство. Докажем по индукции. Для $n = 1$ очев, проходили и доказывали. Выполним шаг, зная, что утверждение выполнено для $n = k \in \mathbb{N}$.

$$(uv)^{(k+1)}(x_0) := \left((uv)^{(k)}(x) \right)' \Big|_{x=x_0} = \left(\sum_{s=0}^k C_k^s \cdot u^{(s)}(x) \cdot v^{(k-s)}(x) \right)' \Big|_{x=x_0}$$

Берём производную от произведения, так как производная от суммы — это сумма производных, а C_k^s — просто константа:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s=0}^k C_k^s \cdot u^{(s)}(x) \cdot v^{(k-s)}(x) \right)' \Big|_{x=x_0} &= \sum_{s=0}^k C_k^s \left[u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0) + u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right] = \\ &= \sum_{s=0}^k C_k^s \left(u^{(s+1)}(x_0) \cdot v^{(k-s)}(x_0) \right) + \sum_{s=0}^k C_k^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right) \end{aligned}$$

Из первой суммы вытянем слагаемое

$$C_k^k \left(u^{(k+1)}(x_0) \cdot v^{(0)}(x_0) \right) = u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0)$$

Из второй суммы вытянем слагаемое

$$C_k^0 \left(u^{(0)}(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0) \right) = u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0)$$

Для остатка первой суммы выполняем сдвиг индекса суммирования (то есть кладём $j = s + 1$, переписываем с новым индексом суммирования, получаем то, что написано ниже, а потом для удобства j опять заменяем на s):

$$\sum_{s=1}^k C_k^{s-1} \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right)$$

Остаток второй суммы сохранит вид, но потеряет первое слагаемое, которое мы изъяли выше:

$$\sum_{s=1}^k C_k^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right)$$

Тогда можем привести подобные слагаемые, и сгруппировать две вышеуказанные суммы в одну, но прежде поймём, чему же равно $C_k^s + C_k^{s-1}$:

$$C_k^s + C_k^{s-1} = \frac{k!}{s!(k-s)!} + \frac{k!}{(s-1)!(k-s+1)!} = \frac{(k+1)!}{s!(k-s+1)!} = C_{k+1}^s$$

Тогда используя наблюдение выше, имеем:

$$\sum_{s=1}^k C_k^{s-1} \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right) + \sum_{s=1}^k C_k^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right) = \sum_{s=1}^k C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right)$$

Теперь вернём вытянутые слагаемые и получим, что:

$$\begin{aligned} (uv)^{(k+1)}(x_0) &= u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0) + \sum_{s=1}^k C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right) + u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= C_0^0 \cdot u(x_0) \cdot v^{(k+1)}(x_0) + \sum_{s=1}^k C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right) + C_{k+1}^{k+1} \cdot u^{(k+1)}(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= \sum_{s=0}^{k+1} C_{k+1}^s \left(u^{(s)}(x_0) \cdot v^{(k-s+1)}(x_0) \right) \end{aligned}$$

□