Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

1 Так называемые вектор-функции

Замечание 1.1. *Автор всем сердцем уповает на то, что уважаемые читатели заботали 14 билет (в противном случае автор очень советует это сделать, потому что ему не хочется копировать все определения из 14 билета, дабы у читателей не случился приступ от количества страниц) и поймут весь ужас, происходяший далее.*

Определение 1.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Вектор-функцией называется отображение из E в $\mathbb{R}^n$.*

$$\overline{a}: \ E \to \mathbb{R}^n$$

Замечание 1.2. *Задать вектор-функцию $\iff$ задать n скалярных функций.*

$$\forall t \in E, \quad t \to \overline{a}(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$\overline{a}(t) = (\overline{a_1}(t), \ \ldots, \ \overline{a_n}(t)) \implies \text{ определены } n \text{ функций } \quad t \in E, \ t \to \overline{a_i}(t) \in \mathbb{R}, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$\overline{a_i}$ — координатная функция отображения $\overline{a}$

Лемма 1.1. *Последовательность $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ (т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^m - x^*|| = 0$) тогда и только тогда, когда*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow x_i^m \to x_i^*, \ m \to \infty$$

Доказательство. ($\implies$) Пусть $||x^m - x^*|| \to 0, \ m \to \infty$ Заметим, что

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow 0 \leq |x_i^m - x_i^*| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j^* - x_j^m|^2} = ||x^m - x^*|| \text{ (пример 1.3 из 14 билета)}$$

Из этого неравенства по теореме о 2 милиционерах получим, что

$$x_i^m \to x_i^*, \text{ при } i \to \infty$$

($\implies$) Пусть

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow x_i^m \to x_i^*, \ m \to \infty$$

Тогда

$$|x_i^* - x_i^m|^2 \to 0, \ m \to \infty \implies \sum_{j=1}^{n} |x_j^* - x_j^m|^2 \to 0, \ m \to \infty \implies ||x^* - x^m|| \to 0, \ m \to \infty$$

□

Лемма 1.2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, t_0 — предельная точка для E. Пусть $\overline{a}: \ E \to \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\overline{A} = (\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}) \in \mathbb{R}^n$$

является пределом вектор-функции $\overline{a}$ по множеству E при $t \to t_0$ и обозначается

$$\overline{A} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \overline{a}(t) \tag{*}$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow \ \overline{A_i} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in E}} \overline{a_i}(t)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что определения предела по множеству в терминах Коши и Гейне эквивалентны, и учтем лемму 1.1:

$$(*) \iff \overline{A} = \lim_{n\to\infty} \overline{a}(t_n) \quad \forall \text{ последовательности } \{t_n\} \subset E \text{ и } t_n \neq t_0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \to t_0,\ n \to \infty \iff$$
$$\iff \forall i \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \ \overline{A_i} = \lim_{n\to\infty} \overline{a_i}(t_n) \ \iff \overline{A_i} = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{a_i}(t) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

□

Теорема 1.1 (Больцано–Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$)**.** *Из любой ограниченной последовательности* $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность* $\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$.

Доказательство. Доказательство проведём по индукции по n.
База индукции. При $n = 1$ утверждение доказано ранее.
Шаг. Пусть утверждение верно для $n_0 \in \mathbb{N}$. Докажем его для $n_0 + 1$. Пусть

$$x^m = (x_1^m, \dots, x_{n_0+1}^m) \in \mathbb{R}^{n_0+1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и последовательность $\{x^m\}$ ограничена. Рассмотрим проекции точек x^m на $\mathbb{R}^n \times \{0\}$:

$$\overline{x}^m = (x_1^m, \dots, x_{n_0}^m).$$

Так как

$$\|\overline{x}^m\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0} (x_i^m)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n_0+1} (x_i^m)^2} = \|x^m\|,$$

то последовательность $\{\overline{x}^m\}$ ограничена в $\mathbb{R}^{n_0}$.
По предположению индукции существует подпоследовательность

$$\{\overline{x}^{m_k}\},$$

сходящаяся к некоторому вектору $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n_0}$.
Рассмотрим ограниченную числовую последовательность $(n_0 + 1)$-х координат:

$$\{x_{n_0+1}^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Она ограничена в $\mathbb{R}$, поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность

$$x_{n_0+1}^{m_{k_j}} \to x_{n_0+1}^* \in \mathbb{R}, \quad j \to \infty.$$

Рассмотрим вектор

$$x^* = (\overline{x}, x_{n_0+1}^*) \in \mathbb{R}^{n_0+1}$$

Так как

$$\overline{x}^{m_{k_j}} \to \overline{x},\ j \to \infty \quad \text{в } \mathbb{R}^{n_0},$$

то для всех $i \in \{1, \dots, n_0\}$ выполняется

$$x_i^{m_{k_j}} \to \overline{x}_i,\ j \to \infty$$

Следовательно, в силу леммы 1.2

$$x^{m_{k_j}} = (\overline{x}^{m_{k_j}}, x_{n_0+1}^{m_{k_j}}) \to (\overline{x}, x_{n_0+1}^*) = x^*,\ j \to \infty$$

Таким образом, из последовательности $\{x^m\}$ выделена сходящаяся подпоследовательность

$$\{x^{m_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty} \text{ в } \mathbb{R}^{n_0+1}$$

Следовательно, сделали шаг индукции. □

Лемма 1.3. *Если* $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{a}(t) = \overline{A}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{b}(t) = \overline{B}$, *то*

1. $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \big(\overline{a}(t) + \overline{b}(t)\big) = \overline{A} + \overline{B}$,

2. $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \big(\overline{a}(t), \overline{b}(t)\big) = (\overline{A}, \overline{B})$.

Доказательство.

1.
$$||\overline{a}(t) + \overline{b}(t) - (\overline{A} + \overline{B})|| \leq ||\overline{a}(t) - \overline{A}|| + ||\overline{b}(t) - \overline{B}|| \to 0 \quad \text{при } t \to t_0.$$

2.
$$||(\overline{a}(t), \overline{b}(t)) - (\overline{A}, \overline{B})|| = ||(\overline{a}(t), \overline{b}(t)) - (\overline{A}, \overline{b}(t)) + (\overline{A}, \overline{b}(t)) - (\overline{A}, \overline{B})|| \leq$$
$$\leq ||\overline{a}(t) - \overline{A}|| \cdot ||\overline{b}(t)|| + ||\overline{A}|| \cdot ||\overline{b}(t) - \overline{B}|| \to 0 \cdot ||\overline{B}|| + ||\overline{A}|| \cdot 0 = 0 \quad \text{при } t \to t_0.$$

□

Лемма 1.4. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, t_0 *— предельная точка для* E. *Пусть* $\overline{a}: E \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{a}(t) = \overline{A}, \qquad \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \varphi(t) = \varphi_0$$

Тогда

$$\exists \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \varphi(t) \cdot \overline{a}(t) = \varphi_0 \cdot \overline{A}$$

Доказательство.

$$||\varphi(t) \cdot \overline{a}(t) - \varphi_0 \cdot \overline{A}|| = ||\varphi(t) \cdot \overline{a}(t) - \varphi(t) \cdot \overline{A} + \varphi(t) \cdot \overline{A} - \varphi_0 \cdot \overline{A}|| \leq$$
$$\leq |\varphi(t)| \cdot ||\overline{a}(t) - \overline{A}|| + |\varphi(t) - \varphi_0| \cdot ||\overline{A}|| \to |\varphi_0| \cdot 0 + 0 \cdot ||\overline{A}|| = 0 \quad \text{при } t \to t_0.$$

□

Лемма 1.5. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, $\overline{a}$, $\overline{b}: E \to \mathbb{R}^3$ *— векторные функции,* t_0 *— предельная точка множества* E. *Тогда, если*

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{a}(t) = \overline{A} \\ \exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{b}(t) = \overline{B}, \end{cases} \quad \text{то} \quad \exists \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} [\overline{a}(t),\ \overline{b}(t)] = [\overline{A}, \overline{B}]$$

Доказательство.

$$\big|[\overline{a}(t),\ \overline{b}(t)] - [\overline{A}, \overline{B}]\big| \leq \big|[\overline{a}(t) - \overline{A},\ \overline{b}(t)]\big| + \big|[\overline{A},\ \overline{b}(t) - \overline{B}]\big| \leq$$
$$\leq \big|[\overline{a}(t) - \overline{A}]\big| \cdot |\overline{b}(t)| + |\overline{A}| \cdot \big|[\overline{b}(t) - \overline{B}]\big| \to 0 \text{ при } t \to t_0$$

□

Определение 1.2. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, t_0 *— предельная точка для* E. *Пусть* $\overline{a}: E \to \mathbb{R}^n$, $\overline{a}$ *называется непрерывной в точке* t_0 *по множеству* E, *если выполнено одно из двух условий:*

1. t_0 *— изолированная точка множества* E

2. t_0 *— предельная точка множества* E *и* $\exists \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in E}} \overline{a}(t) = \overline{a}(t_0)$

Определение 1.3. *Пусть* $\overline{a} : U_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$. *Производной вектор-функции* $\overline{a}$ *в точке* t_0 *называется*

$$\overline{a}'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{a}(t) - \overline{a}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$$

Если указанный предел не существует, то будем говорить, что не существует производной вектор-функции $\overline{a}$ *в точке* t_0.

Лемма 1.6.

$$\exists \overline{a}'(t_0) \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} \hookrightarrow \exists \overline{a}_i'(t_0) \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Немедленно следует из леммы 1.2

$$\frac{\overline{a}(t) - \overline{a}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{\overline{a_1}(t) - \overline{a_1}(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{\overline{a_n}(t) - \overline{a_n}(t_0)}{t - t_0} \right)$$

□

Лемма 1.7. *(правила дифференцирования) Пусть*

$$\overline{a}, \overline{b} \colon U_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi \colon U_\delta(t_0) \to \mathbb{R}.$$

Пусть указанные функции дифференцируемы (имеют производные в точке t_0*). Тогда:*

1.
$$(\overline{a} + \overline{b})'(t_0) = \overline{a}'(t_0) + \overline{b}'(t_0)$$

2.
$$(\overline{a}, \overline{b})'(t_0) = \big(\overline{a}'(t_0), \overline{b}(t_0)\big) + \big(\overline{a}(t_0), \overline{b}'(t_0)\big)$$

3.
$$(\varphi\, \overline{a})'(t_0) = \varphi'(t_0)\, \overline{a}(t_0) + \varphi(t_0)\, \overline{a}'(t_0)$$

4.
$$[\overline{a}, \overline{b}]'(t_0) = [\overline{a}(t_0), \overline{b}'(t_0)] + [\overline{a}'(t_0), \overline{b}(t_0)]$$

Доказательство. Докажем (4), так как (1), (2), (3) доказываются аналогично.

$$\text{Обозначим } \Delta\overline{a} = \overline{a}(t_0 + \Delta t) - \overline{a}(t_0), \quad \Delta\overline{b} = \overline{b}(t_0 + \Delta t) - \overline{b}(t_0).$$

$$[\overline{a}, \overline{b}]'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\overline{a}(t_0 + \Delta t), \overline{b}(t_0 + \Delta t)] - [\overline{a}(t_0), \overline{b}(t_0)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\overline{a}(t_0) + \Delta\overline{a}, \overline{b}(t_0) + \Delta\overline{b}] - [\overline{a}(t_0), \overline{b}(t_0)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\Delta\overline{a}, \overline{b}(t_0)] + [\overline{a}(t_0), \Delta\overline{b}] + [\Delta\overline{a}, \Delta\overline{b}]}{\Delta t} =$$

$$= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{a}}{\Delta t}, \overline{b}(t_0)\right] + \left[\overline{a}(t_0), \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{b}}{\Delta t}\right] + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{a}}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\overline{b}\right] =$$

$$= [\overline{a}'(t_0), \overline{b}(t_0)] + [\overline{a}(t_0), \overline{b}'(t_0)]$$

□

Лемма 1.8. *(производная сложной функции)* $t: \ U_\sigma(s_0) \to U_\delta(t_0)$ *— скалярная функция,* $t_0 = t(s_0)$. $\overline{a}: U_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$. *Пусть* $\exists\, t'(s) \in \mathbb{R}$ *и* $\exists\, \overline{a}'(t)$.
Тогда в точке s_0 *существует производная сложной функции*

$$\overline{b} = \overline{a} \circ t: \ U_\sigma(s_0) \to \mathbb{R}^n,$$

$$\boxed{\overline{b}(s) = \overline{a}\big(t(s)\big) \quad \forall\, s \in U_\sigma(s_0)} \qquad \text{и} \qquad \overline{b}'(s_0) = \overline{a}'\big(t(s_0)\big) \cdot t'(s_0)$$

Доказательство. Доказательство состоит в применении леммы 1.6 и правила дифференцирования скалярной сложной функции. □

Определение 1.4. *Пусть задана скалярная фукция* $\varphi: \ \mathring{U}_\delta(t_0) \to \mathbb{R}$ *и* $\overline{a}: \ \mathring{U}_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$. *Будем говорить, что* $\overline{a}(t) = \overline{o}\big(\varphi(t)\big)$, $t \to t_0$, *если*

$$\exists\, \overline{\varepsilon}: \ \mathring{U}_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n \ \text{такой, что}\ \overline{a}(t) = \varphi(t) \cdot \overline{\varepsilon}(t) \quad \forall\, t \in \mathring{U}_\delta(t_0),$$

и при этом $\overline{\varepsilon}(t) \to \overline{0}$, $t \to t_0$.

Лемма 1.9. *Пусть* $\overline{a}: \mathring{U}_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$ *и* $\varphi: \mathring{U}_\delta(t_0) \to \mathbb{R}$.

$$\overline{a}(t) = \overline{o}\big(\varphi(t)\big), \ t \to t_0 \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}: \ \overline{a}_i(t) = o\big(\varphi(t)\big), \ t \to t_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\big(\overline{a}_1(t) = o(\varphi(t)), \ldots, \overline{a}_n(t) = o(\varphi(t))\big)$$

Доказательство. Доказательство следует из определения и леммы 1.2. □

Определение 1.5. *Пусть* $\overline{a}: U_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$. *Вектор-функция* $\overline{a}$ *называется дифференцируемой в точке* t_0, *если* $\exists\, \overline{A} \in \mathbb{R}^n$:

$$\Delta\overline{a}(t) = \overline{a}(t_0) + \overline{A} \cdot \Delta t + \overline{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0, \ \Delta t = t - t_0$$

Линейная вектор-функция $\overline{A} \cdot \Delta t$ *называется дифференциалом вектор-функции* $\overline{a}$ *в точке* t_0:

$$d\overline{a}(t_0) := \overline{A} \cdot \Delta t = \overline{A} \cdot dt$$

Лемма 1.10.

$$\exists\ d\overline{a}(t_0) \iff \exists\ \overline{a}'(t_0)$$

Доказательство. Для дифференцируемой вектор-функции:

$$d\overline{a}(t_0) = \overline{a}'(t_0)dt$$

Аналогично доказательству теоремы о связи производной и дифференциала для скалярных функций. □

Теорема 1.2. *(Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции) Пусть вектор-функция* $\overline{a}(t)$ *непрерывна на* $[t_0, t_1]$ *и дифференцируема на* (t_0, t_1). *Тогда*

$$\exists \xi \in (t_0, t_1): \ \big|\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big| \leq \big|\overline{a}'(\xi)\big|(t_1 - t_0)$$

Доказательство. Определим скалярную функцию

$$\varphi(t) := \big(\overline{a}(t), \overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big)$$

По теореме Лагранжа о среднем для скалярной функции $\varphi(t)$:

$$\exists \xi \in (t_0, t_1): \ \varphi(t_1) - \varphi(t_0) = \varphi'(\xi)(t_1 - t_0),$$

то есть,

$$\big(\overline{a}(t_1), \overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big) - \big(\overline{a}(t_0), \overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big) = \big(\overline{a}'(\xi), \overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big)(t_1 - t_0),$$

следовательно,

$$\big|\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big|^2 \leq \big|\overline{a}'(\xi)\big|\big|\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big|(t_1 - t_0)$$

Если $\overline{a}(t_1) = \overline{a}(t_0)$, то доказываемое неравенство выполняется автоматически $\forall \xi \in (t_0, t_1)$. Если $\overline{a}(t_1) \neq \overline{a}(t_0)$, то, сокращая последнее неравенство на $\big|\overline{a}(t_1) - \overline{a}(t_0)\big|$, получаем требуемое утверждение. □

Теорема 1.3. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) Пусть вектор-функция $\overline{a}(t)$ определена в $U_\delta(t_0)$ и $\exists \overline{a}^{(n)}(t_0)$. Тогда*

$$\overline{a}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{a}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \overline{o}\big((t - t_0)^n\big) \quad \textit{при} \quad t \to t_0$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для каждой компоненты вектор-функции $\overline{a}(t)$. Поскольку остаточные члены для каждой компоненты являются $o\big((t - t_0)^n\big)$, то в силу леммы 1.9 составленный из них вектор является $\overline{o}\big((t - t_0)^n\big)$. □

2 Кривые на плоскости и в пространстве

Определение 2.1. *Кривой Γ будем называть образ некоторой непрерывной вектор-функции*

$$\overline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \quad \textit{тогда } \Gamma := \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$$

$\overline{r}(t)$ — параметризация кривой

Определение 2.2. *Будем говорить, что $\overline{r_0} \in \mathbb{R}^n$ является точкой самопересечения кривой*

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\},$$

если

$$\exists t_1 \neq t_2, \quad t_1, \ t_2 \in [a, b] \ \textit{такие, что } \overline{r}(t_1) = \overline{r}(t_2) = \overline{r_0}$$

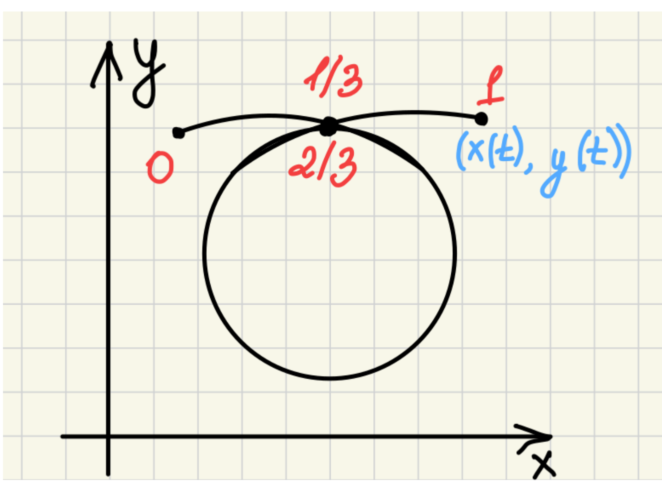

Рис. 1: Точка самопересечения

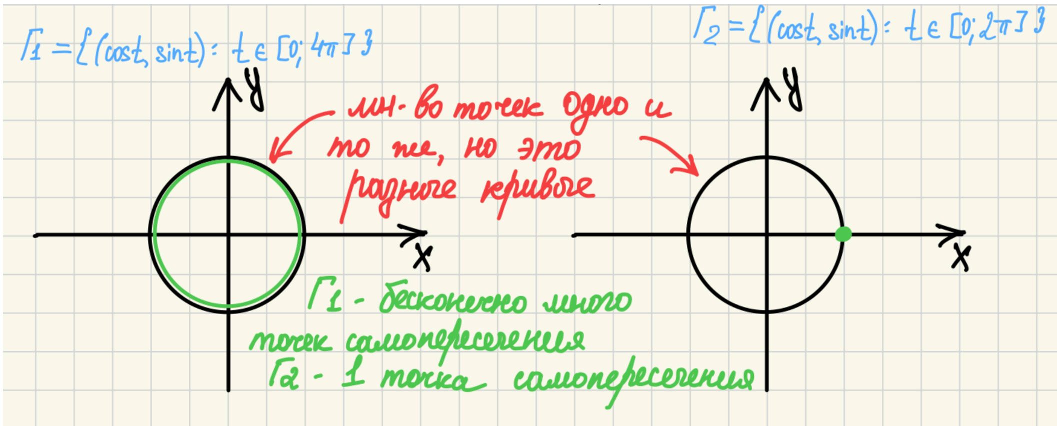

Рис. 2: картиночка для понимания хохохо

Определение 2.3. *Кривая* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ *называется простой, если нет других точек самопересечения, кроме, быть может, начала и конца. То есть, если*

$$a < t_1 \neq t_2 < b, \ \text{то } \overline{r}(t_1) \neq \overline{r}(t_2)$$

Определение 2.4. *Кривая* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ *называется замкнутой, если* $\overline{r}(a) \neq \overline{r}(b)$.

Определение 2.5. *Пусть* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ *— простая и незамкнутая кривая. Будем говорить, что точка* $\overline{r_2} \in \Gamma$ *следует за точкой* $\overline{r_1} \in \Gamma$ *и записывать* $\overline{r_2} \succcurlyeq \overline{r_1}$, *если*

$$\overline{r_2} = \overline{r}(t_1), \ \overline{r_1} = \overline{r}(t_1) \quad \text{и} \quad t_2 > t_1$$

При этом кривую называют ориентированной по возрастанию параметра t.

Определение 2.6. *Разбиение отрезка* $[a,b]$ *— конечный набор точек*

$$T = \{t_0, \dots, t_N\}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

Определение 2.7. *Пусть* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$. *Пусть* T *— разбиение отрезка* $[a,b]$. *Тогда будем говорить, что* Γ *разбита на кривые* Γ_i, *где*

$$\Gamma_i = \{\overline{r}(t) : \ t \in [t_{i-1}, t_i]\}, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

Определение 2.8. *Пусть* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a,b]\}$. Γ *разбита на конечное число простых кривых* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$. *Пусть* $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ *кривая* Γ_i *ориентирована по возрастанию параметра* t. *Тогда упорядоченная по возрастанию параметра* t *совокупность кривых* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *называется ориентацией кривой* Γ.

$$\forall \ \overline{r_i} \in \Gamma_i \text{ считается следующей за } \forall \ \overline{r_j} \in \Gamma_j, \text{ если } j > i$$

А на каждом простом куске ориентация по возрастанию параметра t.

Замечание 2.1. *Одна и та же кривая может быть задана разными вектор-функциями.*

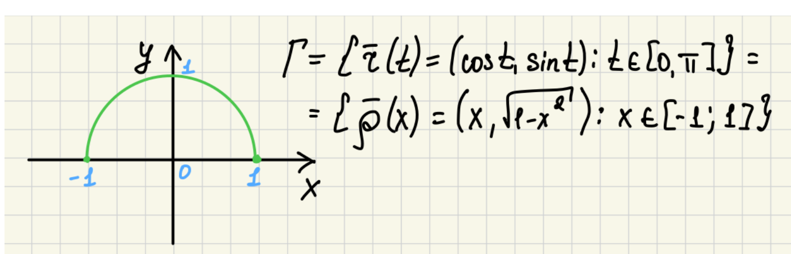

Рис. 3: еще картиночка хохохо

Определение 2.9. *Пусть* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [t_1, t_2]\}$ *— кривая. Будем говорить, что вектор-функция* $\overline{\rho} = \overline{\rho}(s), \ s \in [s_1, s_2]$ *задает допустимую параметризацию* Γ*, если существует непрерывная строго возрастающая функция* $t = t(s), \ t : [s_1, s_2] \to [t_1, t_2]$

$$\begin{cases} t(s_1) = t_1 \\ t(s_2) = t_2 \\ \forall s \in [s_1, s_2] \hookrightarrow \overline{r}(t(s)) = \overline{\rho}(s) \end{cases}$$

При этом считаем, что $\overline{r}$ *и* $\overline{\rho}$ *параметризуют одну и ту же кривую.*

3 Длина кривой

Определение 3.1. *Отрезок в* $\mathbb{R}^n$ $[\overline{r_1}, \overline{r_2}] := \{\overline{r_1} + t \cdot (\overline{r_2} - \overline{r_1}) : \ t \in [0, 1])\}$

Определение 3.2. *Пусть* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$ *и* $T = \{t_i\}_{i=0}^N, \ N \in \mathbb{N}$ *— разбиение отрезка* $[a, b]$ *Ломанной* $\mathcal{P}$*, вписанной в кривую* Γ *называется конечный набор отрезков*

$$\mathcal{P} = \{[\overline{r}(t_0), \overline{r}(t_1)], \ldots, [\overline{r}(t_{N-1}), \overline{r}(t_N)]\}$$

Определение 3.3. *Длина ломанной*

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})||$$

Определение 3.4. *Пусть* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$ *— кривая. Длина кривой — это* $\sup$ *длин ломанных, вписанных в* Γ*.*

$$l(\Gamma) = \sup_T \sum_{i=1}^{N(T)} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})||$$

Определение 3.5. *Если* $l(\Gamma) < +\infty$*, то кривая называется спрямляемой.*

Лемма 3.1. *Пусть кривая* Γ *спрямляемая и разбита на 2 кривые* Γ_1 *и* Γ_2*.*

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}, \quad \exists c : \ a < c < b :$$

$$\Gamma_1 = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, c]\}, \quad \Gamma_2 = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [c, b]\}$$

Тогда Γ_1 *спрямляема и* Γ_2 *спрямляема. Кроме того,* $l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_1$ — произвольная ломаннная, вписанная в Γ_1,
$\mathcal{P}_2$ — произвольная ломаннная, вписанная в Γ_2.
$\mathcal{P}$ — объединение ломанных $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, взятое в соответствующем порядке. Тогда, $\mathcal{P}$ — ломанная, вписанная в Γ.

$$l(\mathcal{P}) = l(\mathcal{P}_1) + l(\mathcal{P}_2) \le l(\Gamma) < +\infty$$

Следовательно,

$$l(\mathcal{P}_1) \le l(\mathcal{P}) < +\infty, \quad l(\mathcal{P}_2) \le l(\mathcal{P}) < +\infty$$

Значит, взяв $\sup$ по $\mathcal{P}_1$, а затем $\sup$ $\mathcal{P}_2$, получим, что

$$l(\Gamma_1) \le l(\Gamma) < +\infty, \quad l(\Gamma_2) \le l(\Gamma) < +\infty$$

Следовательно, Γ_1 и Γ_2 — спрямляемые кривые. Так как

$$l(\mathcal{P}_1) + l(\mathcal{P}_2) \le l(\Gamma) < +\infty,$$

то взяв sup по $\mathcal{P}_1$ от всех частей неравенства при фиксированном $\mathcal{P}_2$, а потом взяв sup от всех частей неравенства по $\mathcal{P}_2$, получим, что

$$l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2) \leq l(\Gamma) < +\infty,$$

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольная ломаннная, вписанная в Γ, $\mathcal{P}$ задается разбиением $T = \{t_i\}_{i=0}^N,\ N \in \mathbb{N}$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} \leq c < t_j < \dots < t_n = b$$

Образуем ломаную $\widetilde{\mathcal{P}}$, которая строится по разбиению

$$\widetilde{T} = \{t_0, \dots, t_{j-1},\ c,\ t_j \dots, t_N\}$$

тогда

$$\begin{aligned} &\widetilde{T}_1 = \{t_0, \dots, c\}, \quad \text{порождает ломанную } \widetilde{\mathcal{P}}_1 \\ &\widetilde{T}_2 = \{c, \dots, t_N\} \quad \text{порождает ломанную } \widetilde{\mathcal{P}}_2 \end{aligned}$$

$$l(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{N} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^{j-1} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|| + ||\overline{r}(t_j) - \overline{r}(t_{j-1})|| + \sum_{i=j+1}^{N} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})||$$

По неравенсту треугольника

$$||\overline{r}(t_j) - \overline{r}(t_{j-1})|| \leq ||\overline{r}(t_j) - \overline{r}(c)|| + ||\overline{r}(c) - \overline{r}(t_{j-1})||$$

Получаем, что

$$l(\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{j-1} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|| + ||\overline{r}(c) - \overline{r}(t_{j-1})|| + \sum_{i=j+1}^{N} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|| + ||\overline{r}(t_j) - \overline{r}(c)||$$

Следовательно,

$$l(\mathcal{P}) \leq l(\widetilde{\mathcal{P}}_1) + l(\widetilde{\mathcal{P}}_2) \leq l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$$

Но $\mathcal{P}$ — произвольная ломаннная $\Longrightarrow$ взяв sup по $\mathcal{P}$, по определению длины кривой получим, что $l(\Gamma) \leq l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$ Следовательно,

$$l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$$

$\square$

Определение 3.6. $C^1([a,b])$ — *множество всех непрерывно дифференцируемых на* $[a,b]$ *функций.*

$$f \in C^1([a,b]) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall t \in (a,b) \quad \exists\ f'(t) \in \mathbb{R} \\ \exists\ f'_+(a) \in \mathbb{R} \\ \exists\ f'_-(b) \in \mathbb{R} \\ f' \text{ является непрерывной на } [a,b] \text{ функцией} \end{cases}$$

если $f \in C^1([a,b])$*, то* f *называется непрерывно дифференцируемой на* $[a,b]$
Аналогично $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ — *множество всех непрерывно дифференцируемых вектор-функций*

$$\overline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

Теорема 3.1. *(Достаточное условие спрямляемости кривой) Пусть* $\overline{r} \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$*.*
Тогда $\Gamma = \{\overline{r}(t) : t \in [a,b]\}$ *является спрямляемой кривой и*

$$l(\Gamma) \leq (b-a) \cdot \max_{t \in [a,b]} ||\overline{r}'(t)||$$

Доказательство. Так как $\overline{r}'$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, то $||\overline{r}'||$ – непрерывная на $[a,b]$ скалярная функция. Следовательно, max существует.
Пусть $\mathcal{P}$ — произвольная ломаннная, вписанная в Γ, $\mathcal{P}$ задается разбиением $T=\{t_i\}_{i=0}^N,\ N\in\mathbb{N}$ $\forall i\in\{1,\dots,N\}$ применим теорему 1.2 Лагрнажа о среднем для вектор-функции $\overline{r}$

$$||\overline{r}(t_i)-\overline{r}(t_{i-1})||\le||\overline{r}'(\xi_i)||\cdot(t_i-t_{i-1}),\quad \xi_i\in(t_{i-1},t_i)$$

Следовательно,

$$||\overline{r}(t_i)-\overline{r}(t_{i-1})||\le\max_{a\le\xi\le b}||\overline{r}'(\xi)||\cdot(t_i-t_{i-1})$$

Тогда

$$l(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^N||\overline{r}(t_i)-\overline{r}(t_{i-1})||\le\sum_{i=1}^N\max_{a\le\xi\le b}||\overline{r}'(\xi)||\cdot(t_i-t_{i-1})==\max_{a\le\xi\le b}||\overline{r}'(\xi)||\cdot(b-a)$$

но $\mathcal{P}$ была выбрана произвольно $Longrightarrow$ взяв sup по всем $\mathcal{P}$, вписанным в Γ, получим, что

$$l(\Gamma)\le(b-a)\cdot\max_{t\in[a,b]}||\overline{r}'(t)||$$

□

4 Производная переменной длины дуги

Определение 4.1. *Пусть* $\Gamma=\{\overline{r}(t)\ :\ t\in[a,b]\}$ *— спрямляемая кривая.* $\forall t\in[a,b]$

$$\Gamma_t=\{\overline{r}(\tau)\ :\ \tau\in[a,t]\}\ \text{— дуга кривой } \Gamma$$

Функцию $s(t):=l(\Gamma_t),\ t\in[a,b]$ *назовем переменной длиной дуги кривой* Γ.

Теорема 4.1. *Пусть* $\Gamma=\{\overline{r}(t)\ :\ t\in[a,b]\},\ \overline{r}\in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $s\in C^1([a,b])$ *и*

$$\forall t\in[a,b]\hookrightarrow s'(t)=||\overline{r}'(t)||$$

(при $t=a$ и $t=b$ имеем односторонние производные)

Доказательство. Пусть $t\in[a,b)$ и $\Delta t\in(0,b-t)$

$$\Delta s:=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),\quad \Delta\overline{r}:=\overline{r}(t_0+\Delta t)-\overline{r}(t_0),\quad \Delta\Gamma:=\{\overline{r}(t):t\in[t_0,t_0+\Delta t]\}$$

Применим лемму 3.1 к кривой $\Gamma_{t_0+\Delta t}$ и Γ_{t_0}

$$l(\Gamma_{t_0+\Delta t})=l(\Gamma_{t_0})+l(\Delta\Gamma)\implies l(\Delta\Gamma)=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

Заметим, что

$$||\overline{r}(t_0+\Delta t)-\overline{r}(t_0)||=||\Delta\overline{r}||\ \le\ l(\Delta\Gamma)$$

Тогда

$$\frac{||\Delta\overline{r}||}{\Delta t}\le\frac{l(\Delta\Gamma)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Применим теорему 3.1 к кривой $\Delta\Gamma$. Получим

$$l(\Delta\Gamma)\le\max_{t_0\le t\le t_o+\Delta t}||\overline{r}'(t)||\cdot\Delta t\implies\frac{||\Delta\overline{r}||}{\Delta t}\le\frac{\Delta s}{\Delta t}\le||\overline{r}'(\xi)||,$$

где $\xi \in [t_0, t_0 + \Delta t]$, в точке ξ достигается max.

$$\frac{||\Delta \overline{r}||}{\Delta t} = \left|\left|\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}\right|\right| \to ||\overline{r}'(t_0)|| \text{ при } \Delta t \to +0$$

Так как

$$\xi \to t_0 + 0 \text{ при } \Delta t \to +0,$$

то по теореме о замене переменной при вычислении предела:

$$\lim_{\Delta t \to +0} ||\overline{r}'(\xi(\Delta t))|| = ||\overline{r}'(t_0)||$$

Следовательно, по теореме о 2 милиционерах,

$$\exists s'_+(t_0) = ||\overline{r}'(t_0)||$$

Так как t_0 была выбрана произвольно, то $s \in C^1([a, b])$
Аналогично

$$\forall t_0 \in (a, b] \ \exists s'_-(t_0) = ||\overline{r}'(t_0)||$$

. □

5 Натуральный параметр

Определение 5.1. *Будем говорить, что $\overline{\rho} : [0,\ l(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ является натуральной параметризацией спрямляемой кривой $\Gamma = \{\overline{\rho}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$, если*

$$\forall t \in [0,\ l(\Gamma)] \ \hookrightarrow l(\Gamma_t) = t$$

Определение 5.2. *Кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$ называется гладкой, если*

1. *Возможна натуральная параметризация $\Gamma = \{\overline{\rho}(s) : \ s \in [0, l(\Gamma)]\}$*

2. $\overline{\rho} \ \in \ C^1([0, l(\Gamma)],\ \mathbb{R}^n)$

Определение 5.3. *Пусть $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$. Пусть $\overline{r}$ дифференцируема на $[a, b]$. Точка t_0 называется особой точкой параметризации $\overline{r}$, если $\overline{r}'(t_0) = 0$.*

Теорема 5.1. *(О существовании натуральной параметризации) Пусть $\Gamma = \{\overline{r}(t) \ : \ t \in [a, b]\}$. Пусть $\overline{r} \ \in \ C^1([a, b],\ \mathbb{R}^n)$ не имеет особых точек. Тогда:*

1. *$\exists$ натуральная параметризация $\overline{\rho} : [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ кривой Γ является допустимой;*

2. *$\forall\, t \in [a, b] \ \exists\, \overline{\rho}\,'(s)\big|_{s=s(t)} = \dfrac{\overline{r}\,'(t)}{||\overline{r}\,'(t)||}$;*

3. *кривая Γ является гладкой.*

Доказательство.

1. По теореме 4.1 $\forall\, t \in [a, b] \ \exists\, s'(t) = ||\overline{r}\,'(t)||$. Так как $\overline{r}\,'(t) \neq \overline{0}$, то $s'(t) > 0$. Следовательно, переменная длина дуги $s(t)$ является строго возрастающей непрерывной функцией. Поэтому существует обратная к ней функция $t(s)$, которая также строго возрастает и непрерывна. По определению допустимой параметризации получаем, что параметризация

$$\overline{\rho}(s) = \overline{r}(t(s)), \qquad s \in [0, l(\Gamma)],$$

является допустимой.

2. Так как $\exists\, s'(t) = ||\overline{r}\,'(t)|| \neq 0$, то по теореме о производной обратной функции

$$\exists\, t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{||\overline{r}\,'(t)||}$$

. По теореме о производной сложной функции

$$\exists\, \overline{\rho}\,'(s) = \overline{r}\,'(t) \cdot t'(s) = \frac{\overline{r}\,'(t)}{||\overline{r}\,'(t)||}.$$

3. Так как вектор-функция $\overline{r}(t)$ непрерывно дифференцируема и $\overline{r}\,'(t) \neq \overline{0}$, то вектор-функция

$$\overline{\rho}\,'(s) = \frac{\overline{r}\,'(t(s))}{|\overline{r}\,'(t(s))|}$$

непрерывна, следовательно, вектор-функция $\overline{\rho}(s) \in\ C^1([0, l(\Gamma)],\ \mathbb{R}^n)$ и кривая Γ — гладкая.

□

6 Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра.

Определение 6.1. *Пусть* $\Gamma := \{\overline{\rho}(s) :\ s \in [0, l(\Gamma)]\}$

$$y_{\text{сек}}(\Delta s, u) = \overline{r}(s_0) + u \cdot \frac{\overline{\Delta\rho}}{\Delta s}$$

Будем говорить, что в точке s_0 у кривой существует касательная, если

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{\Delta s \to 0} y_{\text{сек}}(\Delta s, u)$$

Лемма 6.1. *Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(s) :\ s \in [0, l(\Gamma)]\}$ задана в натуральной параметризации. Тогда существование касательной к кривой Γ в точке $\overline{r}(s_0)$ эквивалентно $\exists \overline{\rho}'(s_0) = \overline{\tau}(s_0)$. Более того, $||\overline{\tau}(s_0)|| = 1$ и он направлен по возрастанию параметра s.*

Доказательство. Из определения касательной следует, что существование касательной равносильно

$$\exists \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overline{\Delta\rho}}{\Delta s} =: \overline{\rho}'(s_0)$$

В силу теоремы 4.1

$$||\overline{\rho}'(s_0)|| = s'(s_0) = 1$$

Заметим, что $\forall \Delta s \neq 0 \quad \dfrac{\overline{\Delta\rho}}{\Delta s}$ направлен в соответствии с направлением параметра $s \implies$ то же верно для вектора $\overline{\tau}$. □

Лемма 6.2. *Пусть кривая Γ задана в натуральной параметризации ($\overline{\rho}(s),\ s \in [0,\ l(\Gamma)]$). Пусть $\exists \overline{\rho}'(s_0)$. Тогда*

$$\overline{\rho}(s) = \overline{r}_{\text{кас}}(s - s_0) + \overline{0}(s - s_0), \quad s \to s_0$$

где $\overline{r}_{\text{кас}}(u) = \overline{r}(s_0) + \overline{\tau}(s_0) \cdot u$

Доказательство. Так как $\exists \overline{\rho}'(s_0)$, то по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\overline{\rho}(s) = \overline{\rho}(s_0) + \overline{\rho}'(s_0)(s - s_0) + \overline{o}(s - s_0), \quad s \to s_0$$

так как

$$\overline{\rho}(s_0) + \overline{\rho}'(s_0)(s - s_0) = \overline{r}_{\text{кас}}(s - s_0),$$

то получаем требуемое. □

Теорема 6.1. *(достаточное условие существования касательной к кривой)*
Пусть $\Gamma = \{\overline{r}(t) : \ t \in [a, b]\}$. *Пусть* $\overline{r} \ \in \ C^1([a, b], \ \mathbb{R}^n)$ *и* $\overline{r}'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a, b]$. *Тогда*

$$\forall t \in [a, b] \quad \exists \text{ касательная к кривой } \Gamma \text{ в точке } \overline{r}(t)$$

Доказательство. В силу теоремы 5.1 кривую Γ можно задать в натуральной параметризации:

$$\overline{\rho}(s) = \overline{r}(t(s)),$$

где $t(s)$ — функция, обратная к переменной длине дуги. По лемме 6.1 вектор

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{\Delta\rho}}{\Delta s}$$

является единичным вектором касательной, направленным по возрастанию параметра s (а значит, и по возрастанию параметра t). В силу пункта 2 теоремы 5.1

$$\forall\, t \in [a, b] \quad \exists\ \overline{\tau} = \overline{\rho}'(s) = \frac{\overline{r}\,'(t(s))}{||\overline{r}\,'(t(s))||}$$

□

7 Кривизна кривой, формулы для ее вычисления

Определение 7.1. *Пусть кривая* $\Gamma = \{\overline{\rho}(s) : \ s \in [0, l(\Gamma)]\}$ *задана в натуральной параметризации. Пусть вектор-функция*

$$\overline{\rho} : [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$$

дважды дифференцируема на $[0, l(\Gamma)]$. *Пусть*

$$\overline{\tau}(s) = \frac{d\overline{r}(s)}{ds}$$

— единичный вектор касательной. Тогда число

$$k = k(s_0) = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}(s_0)\right| = |\overline{\rho}''(s)|$$

называется кривизной кривой Γ *в точке* $\overline{\rho}(s_0)$. *Если* $k(s_0) \neq 0$, *то:*

$$\overline{\nu}(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} \cdot \frac{d\overline{\tau}}{ds}(s_0) \text{ — вектор главной нормали.}$$

Лемма 7.1. *Если в точке* $\overline{\rho}(s_0)$ *существуют вектор* $\overline{\tau}(s_0)$ *и вектор главной нормали* $\overline{\nu}(s_0)$, *то они взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Так как

$$||\overline{\tau}(s)||^2 = (\overline{\tau}(s), \overline{\tau}(s)) = 1, \quad \forall s \in [0, l(\Gamma)]$$

Тогда

$$\frac{d}{ds}(\overline{\tau}(s), \overline{\tau}(s))\bigg|_{s=s_0} = 0$$

но поскольку

$$\frac{d}{ds}(\overline{\tau}(s), \overline{\tau}(s)) = (\overline{\tau}'(s), \overline{\tau}(s)) + (\overline{\tau}(s), \overline{\tau}'(s)) = 2(\overline{\tau}'(s), \overline{\tau}(s)) = 0 \implies$$
$$\implies (\overline{\tau}(s), \overline{\tau}'(s) = \overline{\nu}(s)) = 0 \implies \overline{\tau}(s) \perp \overline{\nu}(s)$$

□

Определение 7.2. *Радиус кривизны при* $k(s_0) \neq 0$

$$R(s_0) := \frac{1}{k(s_0)}$$

Теорема 7.1. *Пусть вектор-функция* $\overline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$*, параметризующая кривую*

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) : \ t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3,$$

дважды дифференцируема и не имеет особых точек (т. е. $\overline{r}\,'(t) \neq \overline{0}$*) на* $[a, b]$*. Тогда:*

1.

$$\left[\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right] = \frac{\left[\overline{r}\,'(t), \overline{r}\,''(t)\right]}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|^3};$$

2. кривизна кривой Γ *в каждой точке* $\overline{r}(t) \in \Gamma$ *существует и выражается формулой*

$$k = \frac{\left|\left[\overline{r}\,'(t), \overline{r}\,''(t)\right]\right|}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|^3}.$$

Доказательство. 1. По теореме 6.1 имеем $\overline{\tau} = \dfrac{\overline{r}\,'(t)}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|}$. Так как $\overline{r}(t)$ дважды дифференцируема, то

$$\exists \, \frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{\overline{r}\,''(t)}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|} + \overline{r}\,'(t)\left(\frac{1}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|}\right)'.$$

Так как по теореме 4.1 справедливо равенство

$$\frac{ds}{dt} = \left|\overline{r}\,'(t)\right|,$$

то

$$\exists \, \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d\overline{\tau}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|}\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{\overline{r}\,''(t)}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|^2} + \frac{\overline{r}\,'(t)}{\left|\overline{r}'(t)\right|}\left(\frac{1}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|}\right)'.$$

Еще раз используя равенство

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{r}\,'(t)}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|},$$

получаем

$$\left[\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right] = \frac{1}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|}\left[\overline{r}\,'(t), \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right] = \frac{\left[\overline{r}\,'(t), \overline{r}\,''(t)\right]}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|^3}.$$

2. Из существования $\dfrac{d\overline{\tau}}{ds}$ следует существование кривизны

$$k = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right|.$$

В силу леммы 7.1 векторы $\overline{\tau}$ и $\dfrac{d\overline{\tau}}{ds}$ взаимно перпендикулярны, кроме того, $|\overline{\tau}| = 1$, следовательно,

$$k = \left|\left[\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}\right]\right| = \frac{\left|\left[\overline{r}\,'(t), \overline{r}\,''(t)\right]\right|}{\left|\overline{r}\,'(t)\right|^3}.$$

$\square$

Следствия

1) Формула для вычисления кривизны, записанная через координаты вектор-функции $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, принимает вид

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{\left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right)^{3/2}}.$$

2) Если Γ — плоская кривая, т. е. $z(t) = 0$, то

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

3) Если плоская кривая Γ задана как график функции $y = f(x)$, то $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = f'$, $y'' = f''$ и, следовательно,

$$k = \frac{|f''|}{\left(1 + (f')^2\right)^{3/2}}.$$

8 Сопровождающий трехгранник пространственной кривой

Пусть кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3$

1. параметризована дважды дифференцируемой вектор-функцией $\overline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$,
2. не имеет особых точек (т. е. $\forall\, t \in [a, b]\ \overline{r}\,'(t) \neq \overline{0}$) и
3. кривизна не обращается в 0 (т. е. согласно теореме 2 §6 $\forall\, t \in [a, b]\ [\overline{r}\,'(t), \overline{r}\,''(t)] \neq \overline{0}$).

Определение 8.1. *Пусть $\overline{\tau}$ — единичный вектор касательной, $\overline{\nu}$ — единичный вектор главной нормали кривой Γ в точке $\overline{r}_0$. Тогда вектор $\overline{\beta} = [\overline{\tau}, \overline{\nu}]$ называется вектором бинормали в точке $\overline{r}_0$. Прямая с направляющим вектором $\overline{\beta}$, проходящая через точку $\overline{r}_0$, называется бинормалью кривой Γ в точке $\overline{r}_0$.*

Замечание 8.1. *Поскольку векторы $\overline{\tau}$ и $\overline{\nu}$ — единичные и взаимно перпендикулярны, то в силу определения векторного произведения тройка векторов $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$, $\overline{\beta}$ образует правый ортонормированный базис, а касательная, главная нормаль и бинормаль в данной точке — это три взаимно перпендикулярные прямые.*

Определение 8.2. *Отложим векторы $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$ и $\overline{\beta}$, вычисленные для точки $\overline{r}_0$ кривой Γ, от точки $\overline{r}_0$. Образовавшийся трехгранник называется сопровождающим трехгранником Френе кривой Γ.*

Трехгранник Френе в точке $\overline{r}_0$ задает следующие три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку $\overline{r}_0$:

1. *плоскость, перпендикулярная касательной, называется нормальной плоскостью,*
2. *плоскость, перпендикулярная бинормали, называется соприкасающейся плоскостью,*
3. *плоскость, перпендикулярная главной нормали, называется спрямляющей плоскостью.*

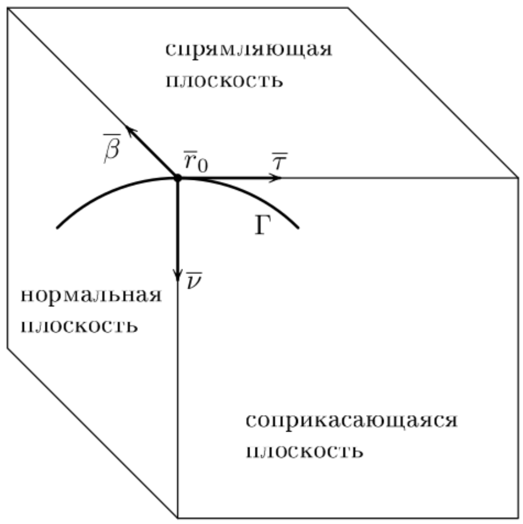

Рис. 4: сопровождающий трехгранник кривой

Уравнения плоскостей

- *Нормальная плоскость*:

$$(\overline{r}-\overline{r_0},\ \overline{\tau})=(\overline{r}-\overline{r_0},\ \overline{r_0}')=0$$

- *Спрямляющая плоскость*:

$$(\overline{r}-\overline{r_0},\ \overline{\nu})=(\overline{r}-\overline{r_0},\ [\overline{\beta},\overline{\tau}])=(\overline{r}-\overline{r_0},\ [[\overline{r_0}',\overline{r_0}''],\overline{r_0}'])=0$$

- *Соприкасающаяся плоскость*:

$$(\overline{r}-\overline{r_0},\ \overline{\beta})=(\overline{r}-\overline{r_0},\ [\overline{\tau},\overline{\nu}])=(\overline{r}-\overline{r_0},\ \overline{r_0}',\overline{r_0}'')=0$$