Теорема Кантора о вложенных отрезках. Три эквивалентных формулировки аксиомы непрерывности вещественных чисел

1 Теорема Кантора о вложенных отрезках

1.1 Определения

Определение 1.1. *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}$ *зафиксирован отрезок* $[a_n; b_n]\,, a_n \leq b_n$. *Тогда будем говорить, что задана последовательность отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

Определение 1.2. *Будем говорить, что последовательность* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *является последовательностью вложенных отрезков, если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

1.2 Формулировка теоремы

Теорема 1.1 (Кантора о вложенных отрезках)**.** *Любая последовательность вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку, т.е.* $\exists c \in \mathbb{R}$ *т.ч.* $c \in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} \iff \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Доказательство. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ - множество левых концов отрезков
$B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ - множество правых концов отрезков
$\forall n, m \in \mathbb{N} \hookrightarrow -\infty < a_n \leqslant b_m < +\infty$.
Если $m \geqslant n \Rightarrow b_m \leqslant b_n \Rightarrow a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n \Longrightarrow a_n \leqslant b_m$.
Если $m < n \Rightarrow a_m \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_m \Longrightarrow a_n \leqslant b_m$.
Получаем, что A расположено "левее"$B \Longrightarrow$ в силу аксиомы непрерывности, $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leqslant c \leqslant b_m\ \forall n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n \leqslant c \leqslant b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow c \in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ ☐

2 Три эквивалентных формулировки аксиомы непрерывности вещественных чисел

Теорема 2.1 (Эквивалентность аксиом непрерывности)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Аксиома непрерывности.*

2. *Существование inf и sup у любого непустого множества.*

3. *Лемма Кантора о непустоте пересечения вложенной системы и лемма Архимеда.*

Замечание 2.1. *Ранее было доказанно, что (1) → (2),(2) → (3),(1) → (3). Рассмотрим более сложный переход: (3) → (1).*

Теорема 2.2. *Из леммы Кантора и леммы Архимеда следует аксиома непрерывности.*

Доказательство. Зафиксируем такие непустые множества $A, B \subset \mathbb{R}$, что A расположено левее B. Разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Поскольку A и B — непустые множества, зафиксируем произвольные $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Поскольку A расположено левее B, то $a_0 \leqslant b_0$.

Шаг 2. Если $a_0 = b_0$, то полагаем $c = a_0 = b_0$ и завершаем доказательство. Действительно, если последовательность A «левее» последовательности B, то из $a \leqslant b\ \forall a \in A, \forall b \in B$ и $a_0 \in A$ следует, что $\forall b \hookrightarrow b \geqslant a_0 = c$. Аналогично, $\forall a \hookrightarrow a \leqslant b_0 = c$.

Шаг 3. Пусть теперь $a_0 < b_0$.

База индукции. Положим $J^0 := [a_0, b_0]$. По построению отрезок J^0 имеет непустое пересечение с множеством A и множеством B.

Шаг индукции. Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}_0$ мы построили (при $n = 0$ мы это уже проверили) такие отрезки

$$J^0 = [a_0, b_0] \supset \ldots \supset J^n = [a_n, b_n],$$

что справедливо неравенство

$$l(J^j) = |a_j - b_j| \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{2^j} \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Кроме того,

$$J^j \cap A \neq \varnothing \quad \text{и} \quad J^j \cap B \neq \varnothing \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Поделим отрезок J^n на две равные части. Обозначим соответствующие отрезки символами I^1_{n+1}, I^2_{n+1} в порядке следования (слева направо). Возможны 2 случая.

В первом случае найдётся такой индекс $k^* \in \{1, 2\}$, что

$$I^{k^*}_{n+1} \cap A \neq \varnothing \quad \text{и} \quad I^{k^*}_{n+1} \cap B \neq \varnothing.$$

Тогда положим

$$J^{n+1} := I^{k^*}_{n+1}.$$

Во втором случае I^1_{n+1} имеет непустое пересечение только с A, а I^2_{n+1} имеет непустое пересечение только с B. Тогда положим $c_n := \frac{a_n+b_n}{2}$. Мы утверждаем, что

$$a < c_n < b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B.$$

Действительно, поскольку $I^1_{n+1} \cap A \neq \varnothing$ и A расположено левее B, то заведомо $B \subset [a_n, +\infty)$.

С другой стороны, $I^1_{n+1} \cap B \neq \varnothing$, откуда следует, что

$$B \subset [a_n, +\infty) \setminus [c_n, b_n] = \left(a_n + \frac{2}{b_n}, +\infty\right).$$

Аналогично доказывается, что $A \subset \left(-\infty, \frac{a_n+2}{b_n}\right)$. Таким образом, выполнено условие $a < c_n < b$. В частности, число c_n разделяет множества A и B.

Шаг 4. В итоге, возможны два случая. В первом случае (назовём его C_1), существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого левая половина отрезка $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ имеет непустое пересечение только с A, а правая половина имеет непустое пересечение только с B.

Во втором случае (назовём его C_2), мы получим бесконечную последовательность отрезков $\{J^n\}_{n=0}^{\infty}$, для которой выполнены следующие свойства:

(P1)

$$J^{n+1} \subset J^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0;$$

(P2)

$$J^n \cap A \neq \varnothing \text{ и } J^n \cap B \neq \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(P3)

$$l(J^n) = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n} \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Шаг 5. В случае (C_1) мы полагаем $c := \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}$ и завершаем построение, поскольку c разделяет A и B.

Шаг 6. В случае (C_2) заметим, что в силу (P1) и (P3) последовательность $\{J^n\}_{n=0}^{\infty}$ является стягивающейся последовательностью вложенных отрезков. Имея в виду теорему о существовании и единственности общей точки для стягивающейся последовательности вложенных отрезков, положим

$$c := \bigcap_{n=0}^{\infty} J^n. \tag{2}$$

Покажем, что в этом случае c разделяет A и B. Рассуждая методом от противного, предположим, что найдётся $a^* \in A$ такое, что $a^* > c$. В силу леммы Архимеда и (1) получим, что найдётся $n^* \in \mathbb{N}$ такое, что

$$l(J^{n^*}) < |c - a^*|. \tag{3}$$

Но тогда, имеем

$$x < a^* \quad \forall x \in J^{n^*}. \tag{4}$$

Действительно, в противном случае мы имели бы $|c - x| \geqslant |c - a^*|$ для некоторой точки $x \in J^{n^*}$, что в комбинации с (2) приводит к неравенству $l(J^{n^*}) \geqslant |c - a^*|$, которое противоречит (3).

В силу (P2) отрезок J^{n^*} имеет непустое пересечение с B, а значит существует $b^* \in J^{n^*} \cap B$. Учитывая (4) получаем, что

$$\exists b^* \in B : b^* < a^* \in A.$$

Это противоречит тому, что множество A расположено левее множества B. Наше про- тиворечие возникло от предположения, что существует точка $a^* \in A$, удовлетворяющая неравенству $a^* > c$. Значит наше предположение было неверно. Поэтому

$$a \leqslant c \quad \forall a \in A.$$

Аналогично доказывается, что

$$c \leqslant b \quad \forall b \in B.$$

Комбинируя последние два вывода, получаем аксиому непрерывности. □