Эйлеровы маршруты. Критерий эйлеровости графа. Гамильтоновы маршруты. Двудольный граф, связь с двураскрашиваемостью и циклами нечётной длины. Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

1 Эйлеровы маршруты

Определение 1.1. *Связный граф называется эйлеровым, если существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз. Соответствующий цикл называется эйлеровым.*

Замечание 1.1. *Вместо связности также можно потребовать отсутствие изолированных вершин или посещение всех вершин циклом.*

Определение 1.2. *Эйлеров путь - путь, который проходит по каждому ребру графа ровно 1 раз (определение аналогично эйлерову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).*

2 Критерий эйлеровости графа

Теорема 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Граф эйлеров*
2. *Все степени вершин* ***связного графа*** *чётны*
3. *Рёбра* ***связного*** *графа можно разбить на непересекающиеся (по ребрам) циклы*

Доказательство. ($1 \Longrightarrow 2$): Эйлеров цикл проходит по всем вершинам. В каждую вершину он заходит и выходит из неё (по разным рёбрам). Получаем при каждом посещении увеличение степени на $+2$. Поэтому степени всех вершин чётны.

($2 \Longrightarrow 3$): Стартуем из произвольной вершины. Строим цикл, пока он не замкнётся. Следующий шаг всегда можно сделать из условия чётности степеней. Далее удалим все рёбра полученного цикла и повторим процедуру. Делаем это до тех пор, пока не исчерпаем все рёбра.

($3 \Longrightarrow 1$): Докажем индукцией по количеству непересекающихся (по ребрам) циклов.
База: если цикл один, то это и есть эйлеров цикл.
Шаг: Пусть для графов, распадающихся на не более, чем n циклов, утверждение верно. Рассмотрим граф с $n+1$ циклом. Рассмотрим (и запишем) $(n+1)$-й цикл

$$v_1 e_1 v_2 e_2 ... v_k e_k v_1$$

Удалим его рёбра из графа G. Новый граф G' распадается на m компонент связности, для каждой из которых выполнено предположение индукции (т.к. все компоненты распадаются на $\leqslant n$ циклов). Тогда для каждой компоненты связности есть эйлеров цикл (рёбра всех циклов для разных компонент связности попарно различны). При этом в каждом из этих циклов есть вершина из

$$v_1, v_2, ..., v_k$$

Покажем это. В самом деле, если в графе G' больше одной компоненты связности, то вершины из разных компонент до удаления были связаны путём из рёбер удалённого цикла. Тогда будем идти по удалённому циклу и, заходя в очередную вершину, обходить эйлеровым циклом её компоненту. Если компонента одна, то случай тривиален (после удаления получаем эйлеров граф G', у которого есть общая с удалённым циклом вершина; проходимся от неё эйлеровым циклом по G', а потом и по удалённому циклу). □

3 Гамильтоновы маршруты

~~Аналогично эйлеровым маршрутам :)~~

Определение 3.1. *Граф называется гамильтоновым, если существует цикл, проходящий по каждой вершине ровно 1 раз. Очев он связный. Соответствующий цикл называется гамильтоновым.*

Определение 3.2. *Гамильтонов путь - путь, который проходит по каждой вершине графа ровно 1 раз (определение аналогично гамильтонову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).*

4 Двудольный граф. Двураскрашиваемость

Определение 4.1. *Граф $G(V, E)$ - двудольный, если он разбивается на два графа (две доли) L и R так, что:*

1. $L \cup R = V$
2. $L \cap R = \varnothing$
3. $\forall e \in E\ e = (v_L, v_R)\ (v_L \in L \wedge v_R \in R)$

Определение 4.2. *Граф называется k-раскрашиваемым, если существует раскраска вершин в k цветов такая, что никакие 2 смежные вершины не имеют одного цвета. Соответствующая раскраска называется правильной.*

Определение 4.3. *Остовное дерево графа G - подграф, включающий в себя все вершины графа G и являющийся деревом. У связного графа всегда можно взять остовное дерево. (Поможет нам далее при доказательстве).*

Теорема 4.1. *Следующие утверждения эквиваленты:*

1. *Граф двудольный*
2. *Граф двураскрашиваемый*
3. *В графе нет циклов нечётной длины*

Доказательство. ($1 \iff 2$): очев (покрасьте одну долю в один цвет, а другую — в другой // киньте вершины одного цвета в первую долю, а дугого — во вторую).

($1 \implies 3$): Рассмотрим произвольный цикл

$$v_{L_1}, v_{R_1}, v_{L_2}, v_{R_2}, \ldots, v_{R_k}, v_{L_1}$$

Так как вершины из разных долей чередуются, то цикл имеет чётную длину.

($3 \implies 2$): Пусть исходный граф G разбивается на m компонент связности. Очевидно, что каждая из них является в сущности связным графом без циклов нечётной длины. Рассмотрим произвольную компоненту K и выделим в ней остовное дерево, которое затем правильно покрасим в 2 цвета.

Лемма 4.1. *Полученная раскраска правильная.*

Доказательство. От противного предположим, что это не так. Пусть есть ребро из K, но не из дерева, соединяющее вершины v_1 и v_2, имеющие один цвет. В дереве существует единственный простой путь от v_1 до v_2. Его длина чётна. Добавив к этому пути ребро $(v_1 v_2)$, получим цикл нечётной длины в исходном графе K. Получили противоречие, что и требовалось. □

Тогда, раскрасив каждую из компонент G правильно в 2 цвета, получим требуемую правильную раскраску G в 2 цвета. Значит G — двураскрашиваемый, что и требовалось. □

5 Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

Определение 5.1. *Паросочетание - набор несмежных рёбер.*

Определение 5.2. *Вершинное покрытие - подмножество вершин вершин $S \subset V$ графа $G(V, E)$ такое, что каждое ребро инцидентно по крайней мере одной вершине из S. (В программе нет).*

Замечание 5.1. *Далее полагаем, что в двудольном графе $G \hookrightarrow |L| \leqslant |R|$*

Определение 5.3. *Паросочетание P называют совершенным, если каждая вершина из L инцидентна какому-то ребру из паросочетания P.*

Теорема 5.1 (Теорема Холла о существовании совершенного паросочетания)**.** *В двудольном графе $G(|L| \leqslant |R|)$ существует совершенное паросочетание $\iff \forall X \subset L$ смежно не менее чем с $|X|$ вершинами из правой доли.*

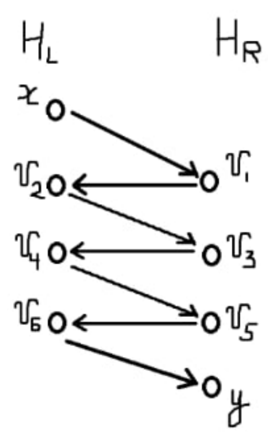
Замечание 5.2. *Вершины считаем смежными с множеством X, если она смежна хотя б с одной вершиной из X.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$): очев (берём в совершенном паросочетании нужные рёбра и получаем ровно $|X|$ вершин из правой доли).

($\Longleftarrow$): Пусть выполнено условие о количестве смежных. Покажем, что существует совершенное паросочетание.

Лемма 5.1. *Если в графе построено паросочетание размера $k < |L|$, то есть паросочетание размера $k + 1$ (при выполнении условия о количестве смежных).*

Доказательство. Покажем это индукцией по k.
База. При $k = 0$ из существования рёбер следует возможность построить паросочетание размера $k + 1 = 1$.
Шаг. Пусть построено паросочетание размера $k < |L|$. Ориентируем рёбра из паросочетания из R в L, а остальные — из L в R.



Рассмотрим $x \in L$, не участвующую в паросочетании. Пусть H — множество вершин, достижимых из x (с учётом ориентации).

Лемма 5.2. $\exists y \in H \cap R : y$ *не участвует в паросочетании.*

Доказательство. H_L содержит все пары H_R и ещё вершину x. Если бы все H_R участвовали в паросочетании, то $|H_L| > |H_R|$. Но с H_L смежны только вершины из H_R. Действительно, если найдется вершина z из правой доли, смежная с H_L, то из нее не может выходить рёбер в H_L, так как иначе получим противоречие с определением паросочетания (два ребра паросочетания будут смежны в силу того, что любая вершина H_L достижима из x по определению). Значит рёбра из H_L могут лишь входить в z. Но тогда z достижима из x. Следовательно, $z \in H_R$, что и требовалось. Но тогда получаем противоречие с тем, что смежных с H_L должно быть не менее $|H_L|$, а значит лемма доказана. □

Рассмотрим путь их x в y (смотрим на картинку выше). Исключим из паросочетания рёбра

$$(v_1v_2), (v_3v_4), \ldots, (v_{2k-1}v_{2k})$$

Затем добавим рёбра

$$(xv_1), (v_2v_3), \ldots, (v_{2k}y)$$

Легко видеть, что теперь размер паросочетания $k+1$, что и требовалось. □

Итого, по индукии получили паросочетание размера $|L|$, что и требовалось. □