# Гомоморфизм и изоморфизм в группах.
# Теорема Кэли.

# 1 Гомоморфизм и изоморфизм

**Определение 1.1.** *Гомоморфизмом из группы* $G = (M, \cdot)$ *в группу* $G' = (M', \circ)$ *будем называть такое отображение* $\varphi\colon G \to G'$*, что*

$$\forall a, b, \in G \hookrightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

*Образ гомоморфизма* $Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subset G'$

## 1.1 Свойства гомоморфизма

- $\varphi(e) = e'$

  *Доказательство.*
  $$\varphi(a \cdot e) = \varphi(a) \circ \varphi(e) = \varphi(a) = \varphi(e \cdot a) = \varphi(e) \circ \varphi(a)$$
  □

- $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

  *Доказательство.*
  $$\varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) = e' = \varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) \circ \varphi(a)$$
  □

- Порядок $\varphi(a)$ является делителем порядка $a$

  *Доказательство.* Пусть $m = ord(a)$. Тогда
  $$\varphi(a^m) = \varphi(e) = e'$$
  Но
  $$\varphi(a^m) = (\varphi(a))^m$$
  Получаем
  $$(\varphi(a))^m = e' \implies ord(\varphi(a)) \mid m$$
  □

**Теорема 1.1.** $Im\varphi < G'$

*Доказательство.* По определению образа гомоморфизма:

$$\forall c, d \in Im\varphi \quad \exists a, b \in G : \quad \varphi(a) = c, \quad \varphi(b) = d$$

Рассмотрим $c \circ d^{-1}$:

$$c \circ d^{-1} = \varphi(a) \circ (\varphi(b))^{-1} = \varphi(a) \circ \varphi(b^{-1}) = \varphi(a \cdot b^{-1}) \in Im\varphi$$

Тогда по критерию подгруппы получаем:

$$Im\varphi < G'$$

□

**Определение 1.2.** *Ядро гомоморфизма* $Ker\varphi = \{g \mid g \in G,\ \varphi(g) = e' \in G'\}$

**Теорема 1.2.** $Ker\varphi \triangleleft G$

*Доказательство.*

1. Покажем, что $Ker\varphi < G$. Действительно:

$$\forall a, b \in Ker\varphi \hookrightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \circ \varphi(b^{-1}) = e' \circ (e')^{-1} = e'$$

   Тогда:

$$\forall a, b \in Ker\varphi \hookrightarrow a \cdot b^{-1} \in Ker\varphi$$

   Значит окончательно по критерию подгруппы:

$$Ker\varphi < G$$

2. Покажем, что $Ker\varphi \triangleleft G$. В самом деле, $\forall g \in G,\ \forall h \in Ker\varphi$:

$$\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(h) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = e'$$

   Тогда получаем:

$$\forall g \in G,\ \forall h \in Ker\varphi \hookrightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in Ker\varphi$$

   Из этого по теореме об эквивалентном определении нормальной подгруппы получаем требуемое.

□

**Определение 1.3.** *Сюръективным гомоморфизмом из группы $G$ на $G'$ будем называть гомоморфизм $\varphi\colon G \to G'$, являющийся сюръекцией, то есть:*

$$\forall b \in G'\ \exists a \in G:\ \ \varphi(a) = b$$

*Ясно, что при этом*

$$Im\varphi = G'$$

**Определение 1.4.** *Изоморфизм — гомоморфизм, являющийся биекцией (обозначается $\cong$)*

## 2 Теорема Кэли

**Теорема 2.1.** *(Теорема Кэли) Пусть $G$ — конечная группа, $|G| = n$. Тогда*

$$\exists H < S_n:\ \ H \cong G$$

*Доказательство.* Пусть элементы группы $G$ суть множество:

$$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$$

Рассмотрим левые сдвиги $L_a,\ a \in G$:

$$\begin{aligned} g_1 &\longrightarrow a \cdot g_1 \\ g_2 &\longrightarrow a \cdot g_2 \\ &\ldots \\ g_n &\longrightarrow a \cdot g_n \end{aligned}$$

Утверждается, что:

1. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \hookrightarrow a \cdot g_i \in G$

2. $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} : i \neq j \hookrightarrow a \cdot g_i \neq a \cdot g_j$

Значит $L_a$ взаимнооднозначно соответствует перестановке элементов $G$. Теперь покажем, что $L_a$ для всех $a \in G$ образуют группу. В самом деле, все аксиомы группы выполнены:

1. Ассоциативность. По определению левого сдвига:

$$L_a \circ L_b = L_{a \cdot b}$$

   Тогда:

$$(L_a \circ L_b) \circ L_c = L_a \circ (L_b \circ L_c) = L_{a \cdot b \cdot c}$$

2. Существование нейтрального:

$$L_e = e'$$

   $L_e$ — тождественная перестановка

3. Существование обратного:

$$L_a \circ L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} \circ L_a = L_e$$

Далее заметим, что $G \cong L_G$. Действительно, соответствие взаимнооднозначно (достаточно домножить слева на обратный, чтобы однозначно восстановить образ) и, более того, в силу

$$L_a \circ L_b = L_{a \cdot b}$$

выполнено основное свойство гомоморфизма. Также очевидно, что $|L_G| = n$, $L_G \subset S_n$ и, более того, $L_G$ — группа относительно <u>той же</u> групповой операции, что и $S_n$. Тогда по определению подгруппы итого получаем:

$$L_G < S_n \implies G \cong L_G < S_n$$

$\square$