

Размещения, перестановки, сочетания с
повторениями и без

1 Основные понятия комбинаторики

1.1 Выборки без повторений

Определение 1.1. Пусть имеется множество из n различных элементов.

1. *Перестановкой* без повторений называется любой упорядоченный набор всех n элементов.
2. *Размещением* из n по k ($k \leq n$) называется любой упорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из n .
3. *Сочетанием* из n по k называется любой неупорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из n .

Пример 1.1. Пусть $n = 3$, элементы: $\{a, b, c\}$.

- Перестановки: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.
- Размещения из 3 по 2: ab, ac, ba, bc, ca, cb .
- Сочетания из 3 по 2: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

1.2 Формулы для выборок без повторений

Теорема 1.1 (Формулы для выборок без повторений). Для конечного множества из n различных элементов справедливы формулы:

1. Число перестановок:

$$P_n = n!$$

2. Число размещений:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}, \quad k \leq n$$

3. Число сочетаний:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}, \quad k \leq n$$

2 Выборки с повторениями

2.1 Основные определения

Определение 2.1. Пусть имеется n типов элементов, каждый из которых может быть выбран неограниченное число раз.

1. *Размещением с повторениями* из n по k называется любой упорядоченный набор из k элементов, где каждый элемент может быть любого из n типов.
2. *Сочетанием с повторениями* из n по k называется любой неупорядоченный набор из k элементов, где каждый элемент может быть любого из n типов.

Пример 2.1. Пусть есть 2 типа элементов: $\{a, b\}$, $k = 3$.

- Размещения с повторениями: $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$.
- Сочетания с повторениями: $\{a, a, a\}, \{a, a, b\}, \{a, b, b\}, \{b, b, b\}$.

2.2 Формулы для выборок с повторениями

Теорема 2.1 (Формулы для выборок с повторениями). *Справедливы следующие формулы:*

1. Число размещений с повторениями:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

2. Число сочетаний с повторениями:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

3 Сравнение и примеры

Замечание 3.1. Важно различать:

- **Упорядоченность:** размещения и перестановки учитывают порядок, сочетания — нет.
- **Повторения:** в выборках без повторений элементы уникальны, в выборках с повторениями могут повторяться.

Пример 3.1 (Задача). Сколько различных слов длины 4 можно составить из букв слова «МАТЕМАТИКА»?

Решение 1. В слове «МАТЕМАТИКА» есть повторяющиеся буквы: M(2), A(3), T(2), E(1), И(1), K(1), всего 10 букв. Это задача на "перестановки с повторениями":

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3628800}{24} = 151200.$$

Пример 3.2 (Задача). Сколькими способами можно выбрать 5 пирожных в кондитерской, где есть 4 вида пирожных?

Решение 2. Это задача на сочетания с повторениями:

$$\overline{C}_4^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56.$$