Действительные числа. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел

1 Множество действительных чисел

Определение 1.1 (Действительные числа)**.** *Множество действительных чисел* $\mathbb{R}$ *это множество, на котором заданы 2 отображения:*

1. $" + " : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - *сложение*
2. $" \cdot " : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - *умножение*

и отношение порядка "$\leqslant$"*. Все они удовлетворяют следующим аксиомам:*

1. *Аксиомы сложения*
   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + b = b + a$ - *коммутативность*
   (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$ - *ассоциативность*
   (c) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + 0 = 0 + a = a$ - *существование нейтрального*
   (d) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists(-a) : a + (-a) = (-a) + a = 0$ - *существование обратного*
2. *Аксиомы умножения*
   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$ - *коммутативность*
   (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ - *ассоциативность*
   (c) $\exists 1 \neq 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ - *существование нейтрального*
   (d) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ - *существование обратного*
3. *Связь сложения и умножения*
   (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ - *дистрибутивность*
4. *Аксиомы порядка*
   (a) $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow a = b\ \forall a, b \in \mathbb{R}$
   (b) $(a \leqslant c) \wedge (c \leqslant b) \Rightarrow a \leqslant c \leqslant b\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
5. *Связь сложения и порядка*
   (a) $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
6. *Связь умножения и порядка*
   (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (0 \leqslant c) \hookrightarrow a \leqslant b \implies a \cdot c \leqslant b \cdot c$
7. *Аксиома непрерывности*
   Пусть A, B *- непустые подмножества* $\mathbb{R}$ *такие, что:*
   $$\forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$$
   Тогда:
   $$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A\ \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$$

Замечание 1.1. *Множество* $\mathbb{Q}$ *удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиомы непрерывности*

Доказательство. Пусть заданы множества:

$$A := \left\{x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0 : x^2 < 2\right\},\ B := \left\{x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0 : x^2 > 2\right\}$$

Предположим, что $\exists c \in \mathbb{Q}$, разделяющая A и B.
Тогда $a \leqslant c \leqslant b \forall a \in A, \forall b \in B$. Следовательно,

$$(c^2 \leqslant 2) \wedge (c^2 \geqslant 2) \implies c^2 = 2$$

Предположим, что

$$\exists \tfrac{m}{n} \text{ - несократимая, } m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ \tfrac{m^2}{n^2} = 2$$

$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ - чётное $\Rightarrow m = 2k, k \in \mathbb{N}$
$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4k^2}{n^2} = 2 \Rightarrow n^2$ - чётное $\Rightarrow n$ - чётное $\Rightarrow n = 2l \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2k}{2l} = \frac{k}{l}$ - дробь сократима $\Rightarrow$ противоречие

$\implies \nexists c \in \mathbb{Q}$: $c^2 = 2$ ☐

2 Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Определение 2.1 (Верхняя грань). *Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является верхней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \hookrightarrow x \leqslant M$.*

Определение 2.2 (Нижняя грань). *Будем говорить, что $m \in \mathbb{R}$ является нижней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \hookrightarrow m \leqslant x$.*

Определение 2.3 (Ограниченное сверху (снизу) множество). *Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists$ конечная верхняя (нижняя) грань этого множества.*

Определение 2.4 (Ограниченное множество). *Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.*

Определение 2.5 (Точная верхняя грань). *Пусть $E \subset \mathbb{R},\ E \neq \varnothing$. Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является точной верхней гранью E ($M = \sup E$), если:*

1. *M - верхняя грань множества E*
2. *$\forall M' \in \mathbb{R}$ (M' - верхняя грань E) $\hookrightarrow M' \geqslant M$*

Определение 2.6 (Альтернативное определение супремума). *Пусть $E \subset \mathbb{R},\ E \neq \varnothing,\ M \in \mathbb{R}$ - супремум E, если:*

1. *$\forall a \in E \hookrightarrow a \leqslant M$*
2. *$\forall M' < M\ \exists \widetilde{a} \in E : M' < \widetilde{a} \leqslant M$*

Теорема 2.1. *$\forall$ ограниченного сверху непустого множества $E \subset \mathbb{R}$ супремум существует и единственен.*

Доказательство. Т.к. E ограничено сверху, то $\exists$ хотя бы одна верхняя грань этого множества.
Пусть B - множество всех верхних граней множества E. $B \neq \varnothing$ и E расположено левее множества B.
$\Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти множества: $a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in E$ и $\forall b \in B$.
Покажем, что $c = \sup E$:

1. П.1 выполнен, т.к. в силу $a \leqslant c \hookrightarrow$ c - верхняя грань.

2. В силу $c \leqslant b$ выполнено условие 2 определения супремума т.к. B - множество всех верхних граней.

Единственность: пусть M_1 и M_2 - различные супремумы множества E. $M_1 = \sup E$. В силу пункта 2 $\forall M'$ - верхняя грань $E \hookrightarrow M' \geqslant M_1$, но M_2 - верхняя грань $\Rightarrow M_2 \geqslant M_1$.
Аналогично доказывается, что $M_1 \geqslant M_2$.
Следовательно, $M_1 = M_2$. ☐

Определение 2.7 (Неограниченное сверху множество)**.** *Если множество $E \subset \mathbb{R}$ неограничено сверху, то по определению его супремум считается равным $+\infty$.*

Определение 2.8 (Точная нижняя грань)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Число $m \in \mathbb{R}$ назовем точной нижней гранью E ($m = \inf E$), если:*

1. m - нижняя грань множества E

2. $\forall m' \in \mathbb{R}$ (m' - нижняя грань E) $\hookrightarrow m' \leqslant m$

Определение 2.9 (Альтернативное определение инфимума)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, $m \in \mathbb{R}$ - инфимум E, если:*

1. $\forall a \in E \hookrightarrow a \geqslant m$

2. $\forall m' > m \ \exists \widetilde{a} \in E : m \leqslant \widetilde{a} < m'$

Замечание 2.1. *С помощью альтернативных определений супремума и инфимума можно записать их определения в $\overline{\mathbb{R}}$ (ранее они могли принимать только числовые значения).*

Теорема 2.2. *$\forall$ непустого ограниченного снизу множества $E \subset \mathbb{R}$ инфимум существует и единственен.*

Доказательство. Аналогично с супремумом. ☐

3 Счётность множества рациональных чисел

Теорема 3.1. *Множество $\mathbb{Q}$ счётно.*

Доказательство. Построим бесконечную табличку (представлена ниже) и будем двигаться по ней змейкой, пропуская числа, которые уже встречались ранее. Тем самым мы получили биекцию из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$.
Это инъекция, потому что пропускали повторяющиеся числа. Это сюръекция, т.к. каждое число попадает в некоторый квадрат, а значит змейка его пройдет.

	0	-1	1	-2	$\dots$	-m	m
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\dots$	$\frac{-m}{1}$	$\frac{m}{1}$
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\dots$	$\frac{-m}{2}$	$\frac{m}{2}$
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\dots$	$\frac{-m}{3}$	$\frac{m}{3}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\frac{0}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{-2}{n}$	$\dots$	$\frac{-m}{n}$	$\frac{m}{n}$

☐

4 Несчётность множества действительных чисел

Теорема 4.1. *Множество $\mathbb{R}$ несчётно.*

Доказательство. $\mathbb{R}$ - бесконечно, т.к. содержит $\mathbb{N}$. Покажем, что $\mathbb{R}$ не биективно $\mathbb{N}$.
Предположим, что $\exists$ биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$. Тогда занумеруем:

$$\mathbb{R} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}$$

Пусть I_1 - отрезок, не содержащий x_1. Внутри I_1 найдем отрезок I_2, не содержащий x_2 - база индукции.
Предположим, что построены отрезки $I_1 \supset \ldots \supset I_n,\ n \in \mathbb{N}$ т.ч. $x_1, \ldots, x_n \notin I_n$.
Тогда выберем I_{n+1} - такой отрезок, который не содержит x_{n+1} - шаг индукции.
По теореме Кантора получаем, что $\exists$ общая точка **c** последовательности вложенных отрезков, которая оказалась незанумерованной, так как по построению $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \neq x_k$. Противоречие.

$\square$