Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теоремы о верхнем и нижнем частичных пределах. Критерий Коши существования конечного предела последовательности.

1 Подпоследовательности, частичные пределы

Определение 1.1. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— числовая последовательность. Будем говорить, что* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$*, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$*, такая что*

$$\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} = y_k$$

Определение 1.2. *Будем говорить, что* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *— частичный предел последовательности* $\{x_n\}$*, если существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*, такая что*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$$

Определение 1.3. $\mathrm{PL}(\{x_n\}) = \{L \in \mathbb{R} : L$ *– частичный предел* $\{x_n\}\}$ *— множество всех частичных пределов последовательности* $\{x_n\}$.

Теорема 1.1. *(критерий частичного предела)*
Пусть $\{x_n\}$*— числовая последовательность. Следующие условие эквиваленты:*
1) $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *— частичный предел* $\{x_n\}$
2) $\forall \varepsilon > 0$ *в* $U_\varepsilon(A)$ *содержится значение бесконечного количества элементов последовательности* $\{x_n\}$
3) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n = n(\varepsilon, N) \geq N : x_n \in U_\varepsilon(A)$

Доказательство. 1) $\implies$ 2)
Пусть A – частичный предел $\implies$ $\exists$ строго возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$x_{n_k} \to A,\ k \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

но $\exists$ бесконечно много натуральных чисел $\geq K(\varepsilon) \implies \{n_k : k \geq K(\varepsilon)\}$ — бесконечно
$\implies \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\varepsilon(A)\}$ — бесконечное множество

2) $\implies$ 3)
$\forall \varepsilon > 0$ пусть I_ε – все такие $n \in \mathbb{N}$, что $\forall n \in I_\varepsilon \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A)$
2) $\Leftrightarrow I_\varepsilon$ – бесконечное множество $\implies \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in I_\varepsilon$ такой что $n \geq N$
(Действительно, если предположить противное, то получим, что I_ε — конечное множество, что неверно)
Итого $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in I_\varepsilon$ такой, что $n \geq N \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N} : \exists n(\varepsilon, N) \geq N : x_n \in U_\varepsilon(A)$

3) $\implies$ 1)
Построим строго возрастающую последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N} : \{x_{n_k}\} \to A, k \to \infty$
$n_1 = n(1,1)$ такой, что $n_1 \geq 1$ и $x_{n_1} \in U_1(A)$
$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad N = n_1 + 1 \implies$ в силу п.3) найдётся $n_2 \geq n_1 + 1$ и приэтом $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(A)$

Пусть определены индексы $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k$ и $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A)$

$$n_{k+1} = n(\frac{1}{k+1}, n_k + 1) \implies n_{k+1} \geq n_k + 1 \quad x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(A)$$

Итого $\forall k \in \mathbb{N}$ определены натуральные индексы n_k такие, что $n_{k+1} \geq n_k + 1$

$$\Big(\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A)\Big) \wedge \Big(U_{\frac{1}{k+1}}(A) \subset U_{\frac{1}{k}}(A)\Big) \implies \forall j \geq k \hookrightarrow x_{n_j} \in U_{\frac{1}{k}}(A)$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A) \subset U_{\frac{1}{K(\varepsilon)}}(A) \subset U_\varepsilon(A)$$

$$\implies \forall\varepsilon>0\ \exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall k\geq K(\varepsilon)\hookrightarrow x_{n_k}\in U_\varepsilon(A)\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=A$$

$\implies A$ — частичный предел

□

Теорема 1.2. *Пусть $A\in\overline{\mathbb{R}}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. Тогда $\forall$ подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ $\exists \lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$.*

Доказательство. $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall n\geq N(\varepsilon)\hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(A)$
Ключевое наблюдение: так как $\{n_k\}$ – строго возрастающая, то $\forall k\in\mathbb{N}\hookrightarrow n_k\geq k \implies$
$\forall\varepsilon>0\ \exists K(\varepsilon)=N(\varepsilon):\forall k\geq K(\varepsilon)\hookrightarrow n_k\geq k\geq K(\varepsilon)=N(\varepsilon) \implies x_{n_k}\in U_\varepsilon(A)$ □

Теорема 1.3. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Если $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то $\{+\infty\}$ является её частичным пределом. Если $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то $\{-\infty\}$ является её частичным пределом.*

Доказательство. Докажем для случая неограниченности сверху, так как для неограниченности снизу аналогично.
Последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:x_{(N_\varepsilon)}>\frac{1}{\varepsilon}$.
Ключевой момент: Пусть N – произвольное натуральное число, а также $\{y_n\}=\{x_{n+N}\}$.
Тогда $\{y_n\}$ не ограничена сверху $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ не ограничена сверху. Значит $\forall N\in\mathbb{N}\hookrightarrow\{x_{n+N}\}$ не ограничена сверху. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:x_{N(\varepsilon)+N}>\frac{1}{\varepsilon}$$

Итого:

$$\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n(\varepsilon,N)\geq N:x_{n(\varepsilon,N)}>\frac{1}{\varepsilon}$$

Тогда по критерию частичного предела $\{+\infty\}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. □

2 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2.1. *(Больцано-Вейерштрасса) Любая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы 1 конечный частичный предел.*

Доказательство.

$$\{x_n\}\text{ ограничена}\Leftrightarrow\exists M>0:|x_n|\leq M\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{*}$$

Положим $I_0=[-M,M]$. Поделим отрезок I_0 пополам и выберем ту половину, в которой содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$. Такая половина обязательно найдется, так как если предположить противное, то получим, что в каждой половине содержатся значения лишь конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$. Тогда и в I_0 содержатся значения лишь конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$, а это противоречит (*). Если такая половина не единственна, то выберем любую. Выбранную половину отрезка I_0 обозначим I_1. Получим базу индукции.

Шаг: предположим, что при некотором $k\in\mathbb{N}$ построены вложенные отрезки $I_0\supset I_1\supset\ldots\supset I_k$ и притом $l(I_j)=l(I_0)\cdot 2^{-j}\quad\forall j\in\{0,\ldots,k\}$
При этом в каждом из отрезков содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$. Поделим отрезок I_k пополам и выберем такую половину, в которой содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$. Такую половину обозначим I_{k+1}.

Итого, построена последовательность вложенных отрезков, которая является стягивающейся, так как
$$\frac{l(I_0)}{2^k} \le \frac{l(I_0)}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$I_0 \supset I_1 \supset ... \supset I_k \supset ...$$
При этом $\forall k \in \mathbb{N}$ на отрезке I_k содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$.
По теореме Кантора $\exists c \in \mathbb{R} : \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k = \{c\}$. Покажем, что c — частичный предел последовательности $\{x_n\}$.
Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. Так как $\frac{l(I_0)}{k} \to 0, k \to \infty$, то $\exists k^* \in \mathbb{N}$ такой, что
$$l(I_{k^*}) = \frac{l(I_0)}{2^{k^*}} \le \frac{l(I_0)}{k^*} < \varepsilon$$
Но тогда, так как $c \in I_{k^*} \subset U_\varepsilon(c)$ и в I_{k^*} содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$, то и в $U_\varepsilon(c)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$. Но $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно. Тогда по критерию частичного предела c – частичный предел. □

3 Теоремы о верхнем и нижнем частичных пределах

Определение 3.1. *(Обобщённый sup и обобщённый inf) Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, E \neq \varnothing$. Тогда*
$$M \in \overline{\mathbb{R}} \text{ есть } supE \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \hookrightarrow x \le M \\ \forall M' < M \ \exists x(M') \in E : x(M') > M' \end{cases}$$
$$m \in \overline{\mathbb{R}} \text{ есть } infE \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \hookrightarrow x \ge m \\ \forall m' > m \ \exists x(m') \in E : x(m') < m' \end{cases}$$

Определение 3.2.
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n := sup\mathrm{PL}(\{x_n\}) \text{ — верхний предел } \{x_n\}$$
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n := inf\mathrm{PL}(\{x_n\}) \text{ — нижний предел } \{x_n\}$$

Теорема 3.1. *(о принадлежности верхнего и нижнего пределов множеству* PL*) Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность. Тогда*
$$M = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \in \mathrm{PL}(\{x_n\})$$
$$m = \varliminf_{n\to\infty} x_n \in \mathrm{PL}(\{x_n\})$$

Доказательство. Докажем для верхнего, так как для нижнего аналогично.
По определнию обобщённого sup :
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M) : c \in \mathrm{PL}(\{x_n\})$$
По критерию частичного предела в $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(c)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$, притом
$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(c) \subset U_\varepsilon(M), \text{ так как } c \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M).$$
Тогда в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$.
Но $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно $\implies \forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$.
Тогда по критерию частичного предела M – частичный предел $\{x_n\} \Leftrightarrow M \in \mathrm{PL}(\{x_n\})$
□

Замечание 3.1. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность.*

$$\sup_{k\geq n} x_k := sup\{x_k : k \geq n\}$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k := inf\{sup\{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

Теорема 3.2. *(Эквивалентное определение верхнего и нижнего пределов) Пусть $\{x_n\}$ — произвольная числовая последовательность. Тогда:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$$

Доказательство. (докажем для верхнего, так как для нижнего аналогично)
Пусть $y_n = \sup_{k\geq n} x_k \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Шаг 0: Пусть $y_n = \sup_{k\geq n} x_k = +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. Заметим, что утверждение выше равносильно:

$$\exists n^* \in \mathbb{N} : y_{n^*} = +\infty$$

Докажем это: $\implies$ очевидно
$\impliedby$ заметим, что $\{x_k : k \geq n\}$ и $\{x_k : k \geq n^*\}$ отличаются лишь на конечное число элементов. Тогда $\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = +\infty$. Покажем, что $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq +\infty$$

Установим противоположное неравенство. По определению sup:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \geq n : x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{но } y_n = +\infty \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_\varepsilon \geq n : x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит $+\infty$ — частичный предел $\{x_n\} \implies sup\text{PL}(\{x_n\}) \geq +\infty$. Тогда $sup\text{PL}(\{x_n\}) = +\infty = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.
Шаг 1: $y_n < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$-\infty < y_n = \sup_{k\geq n} x_k < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Числовая последовательность $\{y_n\}$ монотонна: $y_{n+1} \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n$$

Шаг 2: Установим неравенство: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Так как верхний предел является частичным пределом, то

$$\exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} : \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

При этом заметим, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad x_{n_j} \leq y_{n_j} = \sup_{k\geq n_j} x_k \tag{1}$$

Но

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{n\to\infty} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n.$$

Тогда перейдём к пределу в (1) и получим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \leq \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n.$$

Шаг 3: Установим противоположное неравенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k \tag{2}$$

Достаточно показать, что $M = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k$ — частичный предел $\{x_n\}$.
По определению inf и того, что $\{y_n\}$ – монотонна:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M)$$

По определению $\{y_n\} : y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n\ x_k \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_n)$$

Но

$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_n) \subset U_\varepsilon(M)\ \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Значит:

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists k = max\{n, N(\varepsilon)\} : x_k \in U_\varepsilon(M)$$

Тогда по критерию частичного предела M — частичный предел $\{x_n\} \implies$ (2) доказано. Итого:

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \geq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

□

Теорема 3.3. *(о единственном частичном пределе) Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия эквивалентны:*
1)$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$
2)PL$(\{x_n\}) = \{A\}$
3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = A$

Доказательство. 1) $\implies$ 2)
Пусть $\{x_{n_k}\}$ — произвольная подпоследовательность $\{x_n\}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A)$$

так как $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то

$$\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow n_k \geq k \implies \text{при } k \geq N(\varepsilon)\ n_k \geq k \geq N(\varepsilon)$$

Поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

Так как последовательность $\{x_{n_k}\}$ произвольная, то $\forall\{x_{n_k}\} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A \implies A$ единственный частичный предел $\implies$ PL$(\{x_n\}) = \{A\}$

2) $\implies$ 3)
Очевидно по определению верхнего и нижнего пределов
3) $\implies$ 1)
Рассмотрим несколько случаев: 1)$A \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме об эквивалентном определении верхнего и нижнего пределов получим:

$$\begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k \\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k \end{cases}$$

Пусть:

$$\begin{aligned} y_n &= \sup_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R}, \\ z_n &= \inf_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — числовые последовательности и $\{y_n\}$ нестрого убывает, а $\{z_n\}$ нестрого возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = A = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n = \lim_{n\to\infty} z_n \implies \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$$

К тому же

$$z_n \leq x_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда по теореме о двух милиционерах

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

2) Рассмотрим случай $A = +\infty$, так как для $A = -\infty$ аналогично. По условию:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k = +\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n$$

Но $\{x_n\}$— монотонно возрастающая последовательность $\implies$ по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow z_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Тогда по определению $\{z_n\}$ выполнено:

$$x_k > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall k \geq n$$

Значит:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

□

4 Критерий Коши существования конечного предела последовательности

Определение 4.1. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши.*
Условие Коши:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Лемма 4.1. *Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. По условию Коши:

$$\text{при} \quad \varepsilon = 1 : \exists N(1) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(1) \hookrightarrow |x_n - x_m| n < 1$$

В частности, при $m = N(1)$ получим:

$$\forall n \geq N(1) \hookrightarrow \left|x_n - x_{N(1)}\right| < 1$$

Тогда при $n \geq N(1)$ по неравенству треугольника:

$$|x_n| - |x_{N(1)}| \leq |x_n - x_{N(1)}| < 1 \implies \forall n \geq N(1) \hookrightarrow |x_n| < |x_{N(1)}| + 1$$

Положим

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N(1)}|, |x_{N(1)}| + 1\}$$

Итого:

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M \Leftrightarrow \{x_n\}\text{—ограничена}$$

□

Теорема 4.1. *(критерий Коши) Числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ — фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость: пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Покажем, что $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши.
Так как $\{x_n\}$ сходится, то

$$\exists x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\implies \forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \wedge \forall m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Но тогда по неравенству треугольника

$$\hookrightarrow |x_n - x| + |x - x_m| \geq |(x_n - x) + (x - x_m)| = |x_n - x_m|$$

Итого:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Достаточность: пусть выполнено условие Коши для последовательности $\{x_n\}$. По доказанной выше лемме $\{x_n\}$ ограничена. Но тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности $\{x_n\}\exists$ конечный частичный предел.
То есть $\exists x \in \mathbb{R}$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_{n_k}| < \varepsilon$$

Так как для последовательности $\{x_n\}$ выполнено условие Коши, то

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Положим $L(\varepsilon) := \max\ \{N(\varepsilon), K(\varepsilon)\}$.

$$\text{Для } k \geq L(\varepsilon) \hookrightarrow n_k \geq k \geq L(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$$

$$\text{и} \begin{cases} |x - x_{n_k}| < \varepsilon \\ |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \ \forall n \geq N(\varepsilon) \end{cases}$$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \wedge \forall k \geq L(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Но тогда по неравенству треугольника

$$|x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| \geq |(x - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x_n)| = |x - x_n|$$

Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_n| < 2\varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ сходится}$$

$\square$