

Определения предела функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Предел по множеству. Свойства пределов функций. Критерий Коши существования конечного предела функций. Теорема о замене переменного под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

## 1 Предел числовой функции одного переменного

**Определение 1.1** (Функция). Пусть  $X$  — абстрактное множество. Отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть функцией.

**Определение 1.2.** Проколотой окрестностью точки  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$  будем называть следующее множество:

$$\mathring{U}_{\delta_0}(x_0) = U_{\delta_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Если  $x_0 = \pm\infty$  или  $x_0 = \infty$ , то проколотая окрестность совпадает с непроколотой.

**Определение 1.3** (Предел по Коши). Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ ,  $\delta_0 > 0$ . Пусть  $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ . Будем говорить, что  $A$  — предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , и записывать это

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow x_0$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Определение 1.4.** Пусть  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ . Последовательность  $\{x_n\}$  называется последовательностью Гейне в точке  $x_0$ , если одновременно выполнено следующее:

$$1. \quad x_n \rightarrow x_0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$2. \quad x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Определение 1.5** (Предел по Гейне). Пусть  $f: \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ ,  $\delta_0 > 0$ . Пусть  $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ . Будем говорить, что  $A$  — предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , и записывать это

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow x_0$$

если  $\forall$  последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$  в точке  $x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

**Теорема 1.1.** Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Доказательство.** ( $\Rightarrow$ ) : Пусть выполнено определение предела по Коши. Покажем, что выполняется определение предела по Гейне.

Пусть  $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$  — произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \tag{*}$$

Так как  $\{x_n\}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$ , то из определения получим:

$$\forall \delta > 0 \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

Применим условие выше для  $\delta(\varepsilon)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$$

Но, коль скоро  $x_n$  попадает в  $\mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ , из условия (\*) получаем, что  $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ . Следовательно, по определению предела последовательности

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Но последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$  в точке  $x_0$  была выбрана произвольно, а значит требуемое доказано.

( $\Leftarrow$ ) : Пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено определение предела по Коши. Запишем отрицание к определению предела по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) : f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Будем использовать это условие при  $\delta_n = \frac{\delta_0}{n}$ . Получим:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0) : f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$$

Получили последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$  в точке  $x_0$ , и при этом  $f(x_n) \not\rightarrow A$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Это противоречит определению предела по Гейне, а значит требуемое доказано.  $\square$

## 2 Предел по множеству

**Определение 2.1** (Предельная точка). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ . Будем говорить, что  $x_0$  — предельная точка множества  $X$ , если:

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

**Определение 2.2** (Предел по Коши). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Будем говорить, что  $A \in \widehat{\mathbb{R}}$  — предел функции  $f$  в точке  $x_0$  по множеству  $X$ , и записывать это

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Определение 2.3** (Предел по Гейне). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Будем говорить, что  $A \in \widehat{\mathbb{R}}$  — предел функции  $f$  в точке  $x_0$  по множеству  $X$ , и записывать это

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$$

если  $\forall$  последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

**Теорема 2.1.** Пределы по Коши и по Гейне эквивалентны для пределов по множеству.

*Доказательство.* Аналогично доказательству выше, только надо понересекать все с  $X$

( $\Rightarrow$ ) : Пусть выполнено определение предела по Коши. Покажем, что выполняется определение предела по Гейне.

Пусть  $\{x_n\} \subset X$  — произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \quad (*)$$

Так как  $\{x_n\}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$ , то из определения получим:

$$\forall \delta > 0 \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X$$

Применим условие выше для  $\delta(\varepsilon)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X$$

Но, коль скоро  $x_n$  попадает в  $\dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X$ , из условия (\*) получаем, что  $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ . Следовательно, по определению предела последовательности

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Но последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$  была выбрана произвольно, а значит требуемое доказано.

( $\Leftarrow$ ) : Пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено определение предела по Коши. Запишем отрицание к определению предела по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X : f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Будем использовать это условие при  $\delta_n = \frac{\delta_0}{n}$ . Получим:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0) \cap X : f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$$

Получили последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$ , и при этом  $f(x_n) \not\rightarrow A$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Это противоречит определению предела по Гейне, а значит требуемое доказано.  $\square$

**Лемма 2.1.** *Пусть  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$  – непустые множества,  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$  является предельной точкой и для  $E_1$ , и для  $E_2$ . Тогда:*

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \iff \begin{cases} \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \\ \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \end{cases}$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) : Пусть

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A$$

Расписываем это по определению предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Так как  $x_0$  по условию является предельной точкой и для  $E_1$ , и для  $E_2$ , то

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \begin{cases} E_1 \cap \dot{U}_\delta(x_0) \neq \emptyset \\ E_2 \cap \dot{U}_\delta(x_0) \neq \emptyset \end{cases}$$

Заметим, что:

$$\dot{U}_\delta(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) = (\dot{U}_\delta(x_0) \cap E_1) \cup (\dot{U}_\delta(x_0) \cap E_2) \quad (\star)$$

Так как условие выполняется для объединения множеств, то оно естественным образом выполняется и для каждого из них по отдельности. Из этого получаем:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases} \iff \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases}$$

( $\Leftarrow$ ) : Пусть теперь справедлива система:

$$\begin{cases} \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

Определим  $\delta(\varepsilon) := \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ . Тогда, используя  $(*)$  и то, что  $x_0$  очевидным образом является предельной точкой для  $E_1 \cap E_2$ , получаем, что:

$$\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Итого, окончательно имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \iff \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A$$

□

**Пример 2.1.** Рассмотрим следующую функцию, называемую функцией Дирихле:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Покажем, что у этой функции не существует предела ни в одной точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ . В самом деле, зафиксируем точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Очевидно, что  $x_0$  является предельной точкой как для  $\mathbb{Q}$ , так и для  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  просто потому, что в любой окрестности любого действительного числа есть хотя бы одно рациональное и хотя бы одно иррациональное число. Тогда:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} \mathcal{D}(x) = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} \mathcal{D}(x)$$

Из этого по лемме 2.1 немедленно следует, что:

$$\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \mathbb{R}}} \mathcal{D}(x)$$

### 3 Свойства пределов функции

**Теорема 3.1** (Арифметические операции с пределами функции). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Пусть

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R}, \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \mathbb{R}$$

Тогда:

$$1. \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$2. \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\} \subset X$  — произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Из определения предела по Гейне по множеству получаем:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B \in \mathbb{R}$$

Тогда по теореме об арифметических операциях со сходящимися последовательностями имеем:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = A \cdot B$$

Так как последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$  была выбрана произвольно, то из определения предела по Гейне по множеству получаем требуемое. □

**Теорема 3.2.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Пусть

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R}, \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \mathbb{R}, B \neq 0$$

Пусть также

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X \rightarrow g(x) \neq 0$$

Тогда:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X \cap \dot{U}_{\delta_0}(x_0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\} \subset X \cap \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$  — произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Из определения предела по Гейне по множеству имеем:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= A \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) &= B \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

При этом в силу того, что последовательность Гейне в точке  $x_0$  берётся из  $X \cap \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ , получаем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow g(x_n) \neq 0$$

Тогда по теореме об арифметических операциях со сходящимися последовательностями имеем:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$$

Так как последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X \cap \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$  в точке  $x_0$  была выбрана произвольно, то из определения предела по Гейне по множеству получаем требуемое.  $\square$

**Лемма 3.1** (Лемма о сохранении знака). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ . Пусть:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

Тогда:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X \rightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} A$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $A \in \mathbb{R}$ , так как случай  $A = \pm\infty$  тривиален. Из определения предела по Коши по множеству получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Так как условие выше справедливо  $\forall \varepsilon > 0$ , рассмотрим его при  $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ :

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

Это, очевидно, равносильно следующему:

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \rightarrow A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}$$

Отсюда легко видеть, что:

$$\begin{cases} 0 < A - \frac{|A|}{2} < f(x), & A > 0 \\ f(x) < A + \frac{|A|}{2} < 0, & A < 0 \end{cases}$$

Из полученного выше ясно, что:

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \rightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} A$$

Несложно видеть, что получили требуемое.  $\square$

**Теорема 3.3** (Принцип локализации). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть

$$\exists \underline{\delta} > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\underline{\delta}}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) = g(x)$$

Тогда

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) \iff \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x)$$

При этом, если вышеуказанные пределы существуют, то они равны.

*Доказательство.*

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \widehat{\mathbb{R}} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \widehat{\mathbb{R}} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow g(x) \in U_\varepsilon(B)$$

Положим  $\delta(\varepsilon) := \min\{\underline{\delta}, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ . Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) = g(x)$$

Отсюда очевидно, что если оба предела существуют, то  $A = B$ . При этом, если один из них не существует, то не существует и другой, так как для двух этих функций в  $\delta(\varepsilon)$ -окрестности в силу их совпадения будет выполнено отрицание определения предела по Коши по множеству.  $\square$

**Теорема 3.4** (О двух милиционерах). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ ,  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$$

Пусть также

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$$

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть  $\{x_n\} \subset X$  — произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Рассмотрим числовые последовательности  $\{f(x_n)\}$ ,  $\{g(x_n)\}$  и  $\{h(x_n)\}$ . Из определения предела по Гейне по множеству немедленно получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A$$

К тому же из условия и их того, что  $\{x_n\} \subset X$ , имеем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$$

Применим тогда к этим последовательностям теорему о двух милиционерах для последовательностей. Получим:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A$$

Но последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$  была выбрана произвольно. Значит из определения предела по Гейне по множеству окончательно имеем:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$$

$\square$

**Теорема 3.5** (Предельный переход в неравенстве). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $X$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть также

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда, если  $\forall x \in X \rightarrow f(x) \leq g(x)$ , то  $A \leq B$ .

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть  $\{x_n\} \subset X$  — произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Рассмотрим числовые последовательности  $\{f(x_n)\}$  и  $\{g(x_n)\}$ . Из определения предела по Гейне по множеству немедленно получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$$

К тому же из условия и их того, что  $\{x_n\} \subset X$ , имеем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow f(x_n) \leq g(x_n)$$

Применим теорему о предельном переходе в неравенстве для  $\{f(x_n)\}$  и  $\{g(x_n)\}$ . Получим, что  $A \leq B$ . Так как последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$  была выбрана произвольно, то из определения предела по Гейне по множеству получаем требуемое.  $\square$

## 4 Критерий Коши существования конечного предела функции

**Лемма 4.1.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$  — предельная точка для  $X$ . Пусть  $\forall$  последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$  выполнено, что:

$$\exists A(\{x_n\}) \in \widehat{\mathbb{R}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A(\{x_n\})$$

Тогда  $\exists A \in \widehat{\mathbb{R}} : A = A(\{x_n\}) \forall$  последовательности Гейне в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\} \subset X$  и  $\{y_n\} \subset X$  — последовательности Гейне в точке  $x_0$ . Покажем, что  $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$ .

Определим следующую последовательность:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \begin{cases} x_k, & \text{если } n = 2k \\ y_k, & \text{если } n = 2k - 1 \end{cases}$$

Ясно, что  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Но тогда по условию:

$$\exists A(\{z_n\}) \in \widehat{\mathbb{R}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A(\{z_n\})$$

При этом очевидно, что:

$$\begin{cases} \{f(x_k)\} — подпоследовательность последовательности \{f(z_n)\} \\ \{f(y_k)\} — подпоследовательность последовательности \{f(z_n)\} \end{cases}$$

Но предел любой подпоследовательности равен пределу исходной последовательности при условии его существования, а значит имеем следующие равенства:

$$A(\{x_k\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = A(\{z_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_k) = A(\{y_k\})$$

Из этой цепочки заключаем, что  $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$ . Значит предел в самом деле не зависит от выбора последовательности Гейне в точке  $x_0$ , что и требовалось.  $\square$

**Теорема 4.1** (Критерий Коши). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$  – предельная точка для  $X$ . Функция  $f$  имеет конечный предел в точке  $x_0$  по множеству  $X$  тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (**)$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) : Пусть

$$\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$$

Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно, по неравенству треугольника получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ) : Пусть выполнено условие Коши. Пусть  $\{x_n\} \subset X$  – произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Из определения последовательности Гейне в точке  $x_0$ , получим:

$$\forall \delta > 0 : \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \dot{U}_{\delta}(x_0) \cap X$$

Взяв  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , где  $\delta(\varepsilon)$  берётся из условия Коши (\*\*), и применив это условие для  $x' = x_n$  и  $x'' = x_m$ , получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Следовательно, последовательность  $\{f(x_n)\}$  удовлетворяет условию Коши для последовательности. Тогда в силу критерия Коши для последовательности

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

Но по лемме 4.1 это число  $A$  не зависит от выбора последовательности Гейне. Значит:

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \text{последовательности Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Из полученного легко видеть, что выполнено определение предела по Гейне. Следовательно:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

□

## 5 Теорема о замене переменного под знаком предела

**Теорема 5.1** (Первая теорема о замене переменной при вычислении предела). Пусть

$$f: \dot{U}_{\delta_0}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}, y_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \delta_0 > 0$$

$$y: \dot{U}_{\sigma_0}(x_0) \rightarrow \dot{U}_{\delta_0}(y_0), x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A \in \widehat{\mathbb{R}}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = A$$

*Доказательство.*

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall y \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \iff \forall \delta > 0 \ \exists \sigma(\delta) \in (0; \sigma_0] : \forall x \in \dot{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \dot{U}_\delta(y_0)$$

Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и применяем второе условие при  $\delta = \delta(\varepsilon)$ :

$$\exists \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma_0] : \forall x \in \dot{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \implies f(y(x)) \in U_\varepsilon(A)$$

Но  $\varepsilon > 0$  был выбран произвольно, а значит итого получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma = \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma_0] : \forall x \in \dot{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow f(y(x)) \in U_\varepsilon(A) \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = A$$

□

**Теорема 5.2** (Вторая теорема о замене переменной при вычислении предела). *Пусть*

$$f: U_{\delta_0}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad \delta_0 > 0 \text{ и } f \text{ непрерывна в точке } y_0$$

$$y: \dot{U}_{\sigma_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \quad \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

Тогда  $\exists \sigma^* \in (0; \sigma_0]$  такая, что в  $\dot{U}_{\sigma^*}(x_0)$  определена композиция  $f \circ y$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0)$ .

*Доказательство.*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \iff \forall \delta > 0 \ \exists \sigma(\delta) \in (0; \sigma_0] : \forall x \in \dot{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_\delta(y_0) \quad (*)$$

В частности, взяв  $\delta = \delta_0$  в  $(*)$  и положив по определению  $\sigma^* := \sigma(\delta_0)$ , получим:

$$\forall x \in \dot{U}_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

Тогда  $\forall x \in \dot{U}_{\sigma^*}(x_0)$  определено  $f(y(x))$ . Следовательно, композиция  $f \circ y$  определена в  $\dot{U}_{\sigma^*}(x_0)$ , то есть  $f \circ y: \dot{U}_{\sigma^*}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Далее увидим, что:

$$f \text{ непрерывна в } y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Тогда применим  $(*)$  при  $\delta = \delta(\varepsilon)$ :

$$\forall x \in \dot{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \implies |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

Суммируя сказанное, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma^*] : \forall x \in \dot{U}_{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

□

## 6 Существование односторонних пределов у монотонных функций

**Определение 6.1.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $f$  нестрого возрастает (нестрого убывает) на  $X$ , если:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\left( \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \right)$$

Если знаки неравенств строгие, то получаем определение строгого возрастания на  $X$  и строгого убывания на  $X$  соответственно.

**Определение 6.2** (Монотонность). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $f$  (строго) монотонна на  $X$ , если  $f$  (строго убывает) нестрого убывает на  $X$  или (строго возрастает) нестрого возрастает на  $X$ .

**Определение 6.3** (Односторонние окрестности).

$$\mathring{U}_\delta^+(x_0) := (x_0; x_0 + \delta) — проколотая правая полуокрестность$$

$$\mathring{U}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta; x_0) — проколотая левая полуокрестность$$

**Определение 6.4.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — правая предельная точка для  $X$ , то есть:

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^+(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

Тогда:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^+(x_0) \cap X}} f(x) — правосторонний предел в точке  $x_0$$$

**Определение 6.5.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — левая предельная точка для  $X$ , то есть:

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

Тогда:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^-(x_0) \cap X}} f(x) — левосторонний предел в точке  $x_0$$$

**Теорема 6.1** (Вейерштрасса). Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — левая предельная точка для  $X$ , то есть:

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \emptyset$$

Пусть  $f$  нестрого возрастает (нестрого убывает) на  $X$ , а также  $\forall x \in X \hookrightarrow x < x_0$ . Тогда:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0 \\ x \in X}} f(x) = \sup_X f$$

$$\left( \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0 \\ x \in X}} f(x) = \inf_X f \right)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для правосторонних пределов.

*Доказательство.* Докажем для нестрогого возрастания и левостороннего предела, так как остальные случаи аналогичны. Обозначим  $M = \sup_X f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ . По определению супремума:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M)$$

Но  $f$  нестрого возрастает. Значит:

$$\forall x > x_\varepsilon : x \in X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$$

В самом деле:

1. Если  $M \in \mathbb{R}$ , то  $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$
2. Если  $M = +\infty$ , то  $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$

Осталось лишь явно предъявить для каждого  $\varepsilon > 0$  искомое  $\delta(\varepsilon)$ . Рассмотрим несколько случаев:

$$1. x_0 \in \mathbb{R} \implies \delta(\varepsilon) := x_0 - x_\varepsilon.$$

$$2. x_0 = +\infty \implies \delta(\varepsilon) := \frac{1}{|x_\varepsilon| + 1}$$

Тогда из всего вышеописанного итого получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \iff \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = M$$

□