Примеры отношений частичного порядка, формальное определение. Линейный порядок. Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе).

1 Отношение эквивалентности

Определение 1.1. *Пусть M — множество. Бинарным отношением на множестве M называется произвольное подмножество его декартова произведения:*

$$R \subset M \times M$$

Если пара элементов (x, y) содержатся в отношении R, то говорят, что x относится к y по отношению R и записывают xRy. Запись xRy эквивалентна $(x, y) \in R$

Определение 1.2. *Пусть M — множество. Пусть также $\sim$ есть бинарное отношение на множестве M. Тогда $\sim$ называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. *Рефлексивность:* $\forall x \in M \hookrightarrow x \sim x$
2. *Симметричность:* $\forall x, y \in M \hookrightarrow (x \sim y) \implies (y \sim x)$
3. *Транзитивность:* $\forall x, y, z \hookrightarrow ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \implies (x \sim z)$

2 Отношения частичного порядка

Определение 2.1. *Пусть M — множество. Отношением частичного порядка на множестве M называется бинарное отношение, удовлетворющее нижеследующим аксиомам (такое отношение может быть строгим и нестрогим):*

Строгое ($\prec$)	*Нестрогое* ($\preceq$)
1. $\forall x \in M \quad x \not\prec x$ *2.* $\forall x, y \in M \quad \neg((x \prec y) \wedge (y \prec x))$ *3.* $\forall x, y, z \in M \quad ((x \prec y) \wedge (y \prec z)) \implies (x \prec z)$	*1.* $\forall x \in M \quad x \preceq x$ *2.* $\forall x, y \in M \quad ((x \preceq y) \wedge (y \preceq x)) \implies (x = y)$ *3.* $\forall x, y, z \in M \quad ((x \preceq y) \wedge (y \preceq z)) \implies (x \preceq z)$

Определение 2.2. *Пусть M — множество. Пусть также $\preceq$ — отношение частичного порядка на M. Будем называть такой порядок линейным, если*

$$\forall x, y \in M \quad (x \preceq y) \vee (y \preceq x)$$

3 Граф частичного порядка

Определение 3.1. *Графом частичного порядка будем назвать ориентированный граф $G(V, E)$ такой, что между V и M существует биекция (здесь M — множество, на котором задан частичный порядок), а также:*

$$(u, v) \in E \iff u \preceq v$$

Определение 3.2. *Транзитивной редукцией графа частичного порядка G будем называть операцию, при которой из G удаляются рёбра, которые можно восстановить из транзитивности.*

4 Отношение непосредственного следования

Определение 4.1. *Пусть M — множество. Пусть на M задано отношение частичного порядка $\preceq$. Будем говорить, что y непосредственно следует за x, и обозначать $x \preceq_n y$, если $x \preceq y$ и не существует такого z, что $x \neq z, y \neq z$ и $x \preceq z$ и $z \preceq y$.*

5 Диаграмма Хассе

Определение 5.1. *Диаграмма Хассе для $(M, \preceq)$ — это (определения эквивалентны):*

1. *Граф отношения частичного порядка после транзитивной редукции*

2. *Граф отношения непосредственного следования (вершинами выступают элементы M, а ребро проводится от x к y, если y непосредственно следует за x)*

Пример 5.1. *Пример диаграммы Хассе для Булева куба порядка 2:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathit{11} & \\
\mathit{10} \arrow[ur] & & \mathit{01} \arrow[ul] \\
 & \mathit{00} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$