Неориентированные графы. Степень вершины. Сумма степеней вершин. Количество вершин с нечетной степенью. Определение подграфа. Определение маршрута, пути и простого пути. Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы. Связные графы и компоненты связности.

1 Неориентированные графы

Определение 1.1. *Граф G: V — множество объектов (вершины), E — множество пар объектов (рёбра)*
$u, v \in V$ *, e = (u,v) — ребро*

Определение 1.2. *Если* $\forall u, v$ *считаем, что (u,v) = (v,u), то есть порядок вершин в паре не имеет значения, то граф неориентированный.*

2 Степень вершины

Определение 2.1. *Степень вершины v в графе G — количество рёбер, исходящих из v. Обозначается degv.*

3 Сумма степеней вершин. Количество вершин с нечетной степенью

Определение 3.1. *Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер в графе:*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

Теорема 3.1. *В графе чётное количество вершин с нечётной степенью.*

4 Определение подграфа

Определение 4.1. *Подграф графа G(V,E) — это граф* $G'(V', E')$*:* $V' \subseteq V, E' \subseteq E$*.*

Замечание 4.1. *Так как подграф прежде всего должен являться графом, то нельзя выбирать* V', E' *совсем произвольно.*

5 Определение маршрута, пути и простого пути

Определение 5.1. *Маршрут* $(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_k, e_k, v_{k+1})$*, где* $v_i \in V, e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$*.*

Определение 5.2. *Путь — маршрут, у которого все рёбра различны.*

Определение 5.3. *Простой путь — маршрут, у которого все вершины различны (кроме,возможно, первой и последней).*

Утверждение. Если между двумя несовпадающими вершинами u и v есть маршрут, то есть и простой путь.

Доказательство. $(u = v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_j, v_{j+1} = v)$, $\varphi = (v_1, e_1, v_2)$
На каждом шаге добавляем следующую вершину из маршрута в рассматриваемый фрагмент. Если в φ появились повторяющиеся вершины, удалим из фрагмента все, что между ними, и сам повтор. В конце получим простой путь, что и требовалось. $\square$

6 Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы

Определение 6.1. *Маршрут замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 6.2. *Путь замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 6.3. *Простой путь замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

Утверждение. Если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.

Доказательство. $(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{k+1} = v_1)$
Возьмём кратчайший фрагмент этой последовательности, начальная и конечная вершины которого совпадают: $(v_i, e_i, ..., e_j, v_{j+1} = v_i)$
1) В фрагменте не менее 3 различных вершин (так как vev — нет петель, ve_1ue_2v — нет кратных рёбер)
2) Все вершины, кроме начала и конца, различны
Итого, этот фрагмент является простым циклом □

7 Связные графы и компоненты связности

Определение 7.1. *Граф называется связным, если* $\forall u, v \in V$ *существует путь (маршрут, простой путь) из* u *в* v.

Пусть есть множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и его подмножества: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 5\}$
Максимальное по включению подмножество — это то подмножество, которое не содержится в каком-то другом ($\{2, 3, 6\}$,$\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 5\}$ — максимальные по включению)

Определение 7.2. *Пусть граф не является связным. Максимальные по включению связные подграфы называются компонентами связности.*