Действительные числа. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел

1 Множество действительных чисел

Определение 1.1 (Действительные числа)**.** *Множество действительных чисел R это множество, на котором заданы 2 отображения:*

1. $" + " : R \times R \to R$ *- сложение*

2. $" \cdot " : R \times R \to R$ *- умножение*

и отношение порядка "$\leqslant$". Все они удовлетворяют следующим аксиомам:

1. Аксиомы сложения

   (a) $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{R}$
   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   (c) $\exists 0 \in \mathbb{R}$*:* $a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$
   (d) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists(-a)$*:* $a + (-a) = 0$

2. Аксиомы умножения

   (a) $ab = ba, \forall a, b \in \mathbb{R}$
   (b) $a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   (c) $\exists 1 \in \mathbb{R}$*:* $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$
   (d) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists \frac{1}{a}$*:* $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

3. Связь сложения и умножения

   (a) $(a + b)c = ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

4. Аксиомы порядка

   (a) $a \leqslant b, b \leqslant a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in \mathbb{R}$
   (b) $a \leqslant c, c \leqslant b \Rightarrow a \leqslant c \leqslant b, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

5. Связь сложения и порядка

   (a) $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

6. Связь умножения и порядка

   (a) $0 \leqslant a, 0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$

7. Аксиома непрерывности (принцип Дедекинда)
   Пусть A, B - непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что:

$$a \leqslant b\ \forall a \in A, \forall b \in B$$

   Тогда:

$$a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in A, \forall b \in B$$

Замечание 1.1. *Множество $\mathbb{Q}$ удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиомы непрерывности*

Доказательство. Пусть заданы множества:

$$\text{B}:=\{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\},\ \text{A}:=\{x \in \mathbb{Q} \land x > 0 : x^2 < 2\}$$

Предположим, что $\exists c \in \mathbb{Q}$ разделяет A и B
Тогда $a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in A, \forall b \in B$
$c^2 \leqslant 2$, $c^2 \geqslant 2 \Rightarrow c^2 = 2$
Предположим, что $\exists \frac{m}{n}$ - несократимая, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ $\frac{m^2}{n^2} = 2$
$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ - чётное $\Rightarrow m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$
$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4k^2}{n^2} = 2 \Rightarrow n^2$ - чётное $\Rightarrow$ n - чётное $\Rightarrow n = 2l \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2k}{2l} = \frac{k}{l}$ - дробь сократима $\Rightarrow$ противоречие
$\nexists c \in \mathbb{Q}$: $c^2 = 2$ □

2 Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Определение 2.1 (Верхняя грань). *Пусть $M \in \mathbb{R}$ является верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \hookrightarrow x \leqslant M$.*

Определение 2.2 (Нижняя грань). *Будем говорить, что $m \in \mathbb{R}$ - нижняя грань непустого множества $X \subset \mathbb{R}$, если $m \leqslant x\ \forall x \in X$.*

Определение 2.3 (Ограниченное сверху (снизу) множество). *Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists$ конечная верхняя (нижняя) грань этого множества*

Определение 2.4 (Ограниченное множество). *Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.*

Определение 2.5 (Точная верхняя грань). *Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$. Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является точной верхней гранью E (M=supE), если:*

1. *M - верхняя грань множества E*
2. *$\forall M' \in \mathbb{R}$: M' - верхняя грань $E \hookrightarrow M' \geqslant M$*

Теорема 2.1. *$\forall$ ограниченного сверху числового непустого множества $E \subset \mathbb{R}$ супремум существует и единственен.*

Доказательство. Т.к. E ограничено сверху, то $\exists$ хотя бы одна верхняя грань этого множества.
Пусть B - множество всех верхних граней множества E. B $\neq \nexists$ и E расположено левее множества B.
$\Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$ разделяющее эти множества, $a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in E$ и $\forall b \in B$.
Покажем, что c=supE:

1. П. 1 выполнен, т.к. в силу $a \leqslant c \hookrightarrow$ c - верхняя грань.
2. В силу $c \leqslant b$ выполнено условие 2 определения супремума т.к. B - множество всех верхних граней.

Единственность: пусть M_1 и M_2 - различные супремумы множества E. $M_1 = \sup E$. В силу пункта 2 $\forall M'$ - верхняя грань E $\hookrightarrow M' \geqslant M_1$, но M_2 - верхняя грань $\Rightarrow M_2 \geqslant M_1$.
Аналогично доказывается, что $M_1 \geqslant M_2$.
Следовательно, $M_1 = M_2$. □

Определение 2.6 (Неограниченное сверху множество). *Если множество $E \subset \mathbb{R}$ неограничено сверху, то по определению его супремум считается $= +\infty$.*

Определение 2.7 (Точная нижняя грань). *Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$. Число $m \in \mathbb{R}$ назовем точной нижней гранью E ($M = \inf E$), если:*

1. *M - нижняя грань множества E*

2. *$\forall m' \in \mathbb{R}$: m' - нижняя грань $E \hookrightarrow m' \leqslant m$*

Теорема 2.2. *$\forall$ непустого ограниченного снизу множества $E \subset \mathbb{R}$ инфинум существует и единственен.*

Доказательство. Аналогично с супремумом. □

3 Счётность множества рациональных чисел

Теорема 3.1. *Множество $\mathbb{Q}$ счётно.*

Доказательство. Двигаемся по змейке, пропуская числа, которые уже встречались ранее. Тем самым мы получили биекцию из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$.
Это инъекция, потому что пропускали повторяющиеся числа. Это сюръекция, т.к. каждое число попадает в некоторый квадрат, а значит змейка его пройдет.

	0	-1	1	-2	$\cdots$	-n	n
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\cdots$	$\frac{-m}{1}$	$\frac{m}{1}$
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\cdots$	$\frac{-n}{2}$	$\frac{n}{2}$
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\cdots$	$\frac{-m}{3}$	$\frac{m}{3}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$\frac{0}{n}$	$\frac{-1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{-2}{n}$	$\cdots$	$\frac{-m}{n}$	$\frac{m}{n}$

□

4 Несчётность множества действительных чисел

Теорема 4.1. *Множество $\mathbb{R}$ несчётно.*

Доказательство. $\mathbb{R}$ - бесконечно, т.к. содержит $\mathbb{N}$. Покажем, что $\mathbb{R}$ не биективно $\mathbb{N}$.
Предположим, что $\exists$ биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{R} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}$.
Пусть I_1 - отрезок, не содержащий x_1. Внутри I_1 найдем отрезок, не содержащий x_2 - база индукции.
Предположим, что построены отрезки $I_1 \supset \ldots \supset I_n$, $n \in \mathbb{N}$ т.ч. $x_1, \ldots, x_n \notin I_n$.
Тогда выберем I_{n+1} - такой отрезок, который не содержит x_{n+1}.
По теореме Кантора $\exists$ общая точка последовательности отрезков, которая оказалась незанумерованной. Противоречие.

□