Топология числовой прямой. Компактность. Лемма Гейне-Бореля

1 Открытые и замкнутые множества на числовой прямой

Определение 1.1 (Точка прикосновения). *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — множество. Будем говорить, что $x \in \mathbb{R}$ является точкой прикосновения множества E, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$.*

Определение 1.2 (Замкнутое множество). *Множество называется замкнутым, если содержит все свои точки прикосновения.*

Замечание 1.1. *По определению $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ – замкнуты.*

Определение 1.3 (Замыкание). *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — множество. Замыкание E — множество всех точек прикосновения множества E. Будем обозначать это множество $cl(E)$.*

Замечание 1.2. *$E \subset cl(E)$. При этом E – замкнуто $\iff$ $E = cl(E)$.*

Определение 1.4 (Внутренняя точка). *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — множество. Тогда $x \in E$ называется внутренней точкой E, если $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E$.*

Определение 1.5 (Открытое множество). *Множество G называется открытым, если каждая его точка является внутренней.*

Замечание 1.3. *По определению $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ – открыты.*

Определение 1.6 (Множество всех внутренних точек). *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — множество. Тогда $int(E)$ — множество всех внутренних точек E.*

Замечание 1.4. *$int(E) \subset E$. При этом E – открыто $\iff$ $int(E) = E$.*

Лемма 1.1 (Закон двойственности). *$G \subset \mathbb{R}$ – открыто $\iff$ $\mathbb{R} \setminus G$ – замкнуто.*

Доказательство. Пусть $G \subset \mathbb{R}$ – открыто $\iff$ $\forall x \in G \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G$ $\iff$ $\forall x \in G = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus G) \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus G) = \varnothing$. Значит $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus G) = G \hookrightarrow x$ не является точкой прикосновения $\mathbb{R} \setminus G$ $\iff$ все точки прикосновения $\mathbb{R} \setminus G$ содержатся в $\mathbb{R} \setminus G$ $\iff$ $\mathbb{R} \setminus G$ – замкнуто. ☐

Теорема 1.1 (Объединение открытых, пересечение замкнутых). *Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – произвольное семейство открытых множеств, а также*

$$G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

Тогда G – открыто (I – индексное множество). Пусть $\{F_\beta\}_{\beta \in J}$ – произвольное семейство замкнутых множеств, а также

$$F = \bigcap_{\beta \in J} F_\beta$$

Тогда F – замкнуто.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда $\exists \underline{\alpha} \in I : x \in G_{\underline{\alpha}}$. Но $G_{\underline{\alpha}}$ – открыто $\implies$ $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G_{\underline{\alpha}} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$. Так как x было выбрано произвольно, то $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha = G$ – открытое множество.
Заметим, что: $\bigcap\limits_{\beta \in J} F_\beta = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\beta \in J} (\mathbb{R} \setminus F_\beta)$. Но по закону двойственности $\mathbb{R} \setminus F_\beta$ – открыто $\forall \beta \in J$. Значит $\bigcup\limits_{\beta \in J} (\mathbb{R} \setminus F_\beta)$ – открыто по доказанному выше $\implies$ $F = \bigcap\limits_{\beta \in J} F_\beta = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\beta \in J} (\mathbb{R} \setminus F_\beta)$ – замкнуто по закону двойственности. ☐

Замечание 1.5. *Пересечение бесконечного числа открытых может не быть открытым. Например, пусть*

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$$

Но при этом $\{0\}$ *– замкнуто.*

Замечание 1.6. *Объединение бесконечного числа замкнутых может не быть замкнутым. Например, пусть*

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1)$$

Но при этом $(0,1)$ *– открыто.*

Лемма 1.2. *Объединение любого конечного количества замкнутых множеств является замкнутым множеством. Пересечение любого конечного количества открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Докажем для открытых, так как для замкнутых по закону двойственности будет следовать требуемое. Пусть $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k$, где G_k – открыто $\forall k \in \{1, ..., N\}$. Также $\forall k \in \{1, ..., N\}\ \exists \delta_k > 0 : U_{\delta_k}(x) \subset G_k$. Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_N\} > 0$. Тогда $U_\delta(x) \subset G_k \quad \forall k \in \{1, ..., N\} \implies U_\delta(x) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k \iff \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k$ – открыто. □

Теорема 1.2 (Критерий точки прикосновения)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$*. Тогда* x *— точка прикосновения множества* $E \iff \exists \{x_n\} \subset E : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*.*

Доказательство. ($\implies$): x – точка прикосновения $E \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \varnothing$. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ x_n – произвольная точка из $U_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$. Получим последовательность $\{x_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Заметим, что

$$0 \leq |x - x_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Значит, по теореме о двух милиционерах $x_n \to x, n \to \infty$.

($\impliedby$): Пусть $\{x_n\} \subset E : x_n \to x, n \to \infty$. Покажем, что x – точка прикосновения E. По определению предела:

$$\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in U_\delta(x) \cap E$$

В частности

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow U_\delta(x) \cap E \neq \varnothing$$

Это равносильно тому, что x – точка приконовения E, что и требовалось. □

Определение 1.7 (Изолированная точка)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$*. Тогда* x *– изолированная точка* $E \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x) \cap E = \{x\}$

Определение 1.8 (Предельная точка)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$*. Тогда* x *– предельная точка* $E \iff \forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\delta(x) \cap E \neq \varnothing$*.*

2 Компактность