Исследование функций.

Лемма 1. Пусть функция f дифференцируема на (a,b), где $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Тогда:

1) $f'(x) \ge 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ нестрого возрастает на (a,b).

2) $f'(x) \le 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ нестрого убывает на (a,b)

3) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ строго возрастает на (a,b)

4) $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ строго убывает на (a,b).

Замечание. В условиях 3 и 4 импликация только в одну сторону. В самом деле, приведём пример $f(x)=x^3$. Ясно, что она строго возрастает на $\mathbb{R}$. Но при этом $f'(0)=0$.

$\square$ Докажем 1 и 3, т.к. 2 и 4 доказываются аналогично.

(1): ($\Longrightarrow$): Пусть $a<x_1<x_2<b$. Тогда по Th Лагранжа о среднем для функции f на $[x_1,x_2]\subset(a,b)$:

$$\exists \xi\in(x_1,x_2):\ f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(\xi)}_{\geqslant 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}$$

Отсюда легко видеть, что $f(x_2) \geq f(x_1)$.
Но $x_1, x_2 \in (a, b)$: $x_1 < x_2$ были выбраны произвольно, что и требовалось.

($\Leftarrow$): Зафиксируем $x \in (a, b)$. Тогда:

$$\forall \Delta x > 0 \hookrightarrow \quad \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

$x + \Delta x \in (a, b)$

$$\forall \Delta x < 0 \hookrightarrow \quad \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

Значит рассматриваемое выражения неотрицательно для всех $\Delta x \neq 0$.
Тогда, переходя к пределу в рассматриваемом нер-ве при $\Delta x \to 0$, в силу $\exists f'(x) \in \mathbb{R}$ и Th определённой пере-

ходе в неравенстве получим, что $f'(x) \geq 0$. Но $x \in (a,b)$ был выбран произвольно, что и требовалось.

(3): Пусть $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$. Снова возьмём $a < x_1 < x_2 < b$ и применим Th Лагранжа о среднем для f на $[x_1, x_2] \subset (a,b)$:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2): \ f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$$

Тогда $f(x_2) > f(x_1)$. Но $x_1, x_2 \in (a,b)$: $x_1 < x_2$ были выбраны произвольно, а значит требуемое доказано. ∎

Лемма 2. (Достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной): Пусть $f \in C(U_\delta(x_0))$ и f дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$. Тогда, если

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0 & \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \\ f'(x) \geq 0 & \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \end{cases} \qquad (1)$$

то x_0 - точка локального минимума. Если же

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 & \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \\ f'(x) \leq 0 & \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \end{cases} \qquad (2)$$

то x_0 - точка локального максимума. При замене всех знаков неравенств на строгие, получим строгий локальный минимум и строгий локальный максимум соответственно.

$\square$ Докажем (2), так как (1) доказывается аналогично. Для любого $x \in \mathring{U}_\delta^+(x_0)$ применим Th Лагранжа о среднем для функции f на $[x_0, x]$:

$$\exists\, \xi(x) \in (x_0, x) : f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(\xi(x))}_{\leq 0} \underbrace{(x - x_0)}_{>0}$$

Следовательно, $f(x) \leq f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}^{+}_{\delta}(x_0)$. Применяя по аналогии Th Лагранжа о среднем $\forall x \in \mathring{U}^{-}_{\delta}(x_0)$, получим, что $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)$. Отсюда получаем, что x_0 — нестрогий локальный максимум, что и требовалось.

$\blacksquare$

Th1. (Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных): Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Тогда, если n-чётно, $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) > 0$ $(f^{(n)}(x_0) < 0)$, то x_0 — точка строгого локального минимума (максимума).

$\square$ Т.к. $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + o((x-x_0)^n),$$
$$x \to x_0$$

Поделив обе части равенства на $(x-x_0)^n$, получим:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

Здесь $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to x_0$. Следовательно, по определению предела:

$$\exists \sigma \in (0, \delta) : \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow \varepsilon(x) > -\frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}$$

Тогда:

$$\forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!} \quad (*)$$

Значит, если n – чётно и $f^{(n)}(x_0) > 0$,

то:

$$\forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow (x - x_0)^n > 0 \text{ и } \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!} > 0$$

Отсюда сразу из $(*)$ получаем, что:

$$\forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$$

Следовательно, x_0 – строгий локальный минимум. Проделав аналогичные рассуждения для чётного n и $f^{(n)}(x_0)<0$, заключаем, что требуемое доказано. $\blacksquare$

<u>Замечание 1</u>. Если не требовать в формулировке предыдущей Th строгий знак нер-ва у $f^{(n)}(x_0)$, то утверждение Th, вообще говоря, неверно. В самом деле, пусть $f(x)=x^5$. Ясно, что $\exists f'(0)=0$ и $\exists f''(0)=0$. Но в точке 0 нет локального экстремума.

Замечание 2. Если все условия предыдущей Th выполнены и при $n=2k-1$ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то экстремума в точке x_0 нет.

□ В самом деле, проделав аналогичные действия из доказательства Th, получим:

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} > \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}$$

Если $f^{(n)}(x_0)>0$, то при $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_\delta(x_0)$ $f(x)>f(x_0)$, а при $x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_\delta(x_0)$ $f(x)<f(x_0)$.

Значит в точке x_0 нет экстремума. Если $f^{(n)}(x_0)<0$, то в силу

$\varepsilon(x)\longrightarrow 0,\ x\longrightarrow x_0$ существует

$\gamma\in(0,\delta)$ такое, что:

$$\forall x\in \mathring{U}_\gamma(x_0) \hookrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} < \frac{3}{2}\cdot\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}<0$$

Значит, при $x\in \mathring{U}^+_\gamma(x_0)$ $f(x)<f(x_0)$,

а при $x\in \mathring{U}^-_\gamma(x_0)$ $f(x)>f(x_0)$. Тогда

в точке x_0 вновь нет экстремума. $\blacksquare$

Th2. (Необходимые условия локального экстремума): Пусть $f: U_\delta(x_0)\longmapsto \mathbb{R}$.

Пусть x_0 - точка локального экстремума. Тогда:

1) Если $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то $f'(x_0) = 0$.

2) Если же $\exists f''(x_0) \in \mathbb{R}$, то $f''(x_0) \geqslant 0$, если x_0 – точка локального минимума, и $f''(x_0) \leqslant 0$, если x_0 – точка локального максимума.

□ Пункт 1 является Th Ферма и был доказан ранее. Докажем пункт 2. Пусть x_0 – точка локального максимума, т.к. для локального минимума доказательство аналогично. Если от противного предположить, что $f''(x_0) > 0$, то в силу $\exists f''(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 0$ из первого пункта и чётности числа 2, по Th 1 немедленно получаем, что x_0 – точка строгого локального минимума. Получаем противоречие, а значит $f''(x_0) \le 0$, что и требовалось. ■

<u>Замечание</u>. Нестрогие знаки в формулировке Th 2 нельзя заменить на строгие. В самом деле, рассмотрим $f(x) = x^4$. Ясно, что точка 0 явля-

ется точкой строгого локального минимума, но $f''(0)=0$.

Выпуклость

Опр. Пусть $f:(a,b)\longmapsto\mathbb{R}$. Будем говорить, что f выпукла вниз на (a,b) (выпукла вверх на (a,b)), если:

$$\forall x_1,x_2\in(a,b),\ \forall t\in(0,1)\ \hookrightarrow$$

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

$$\Big(f(tx_1+(1-t)x_2)\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\Big)$$

Th (Критерий выпуклости в терминах второй производной): Пусть

$f:(a,b)\longmapsto\mathbb{R}$ дважды дифференцируема на (a,b). Тогда:

1) f - выпукла вниз на $(a,b) \Longleftrightarrow f''(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$.

2) f - выпукла вверх на $(a,b) \Longleftrightarrow f''(x)\leq 0$ $\forall x\in(a,b)$.

$\square$ Докажем пункт 1, т.к. пункт 2 доказывается аналогично.

$(\Longrightarrow)$: Пусть f выпукла вниз на (a,b). Зафиксируем произвольно $x_0\in(a,b)$. Пусть $h\in(0,\min\{x_0-a,b-x_0\})$. Положим $x_1=x_0-h$, $x_2=x_0+h$. Тогда $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$.

Т.к. f дважды дифференцируема на (a,b), то по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(-u)+\frac{f''(x_0)\cdot u^2}{2}+o(u^2),\ u\to+0$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot u+\frac{f''(x_0)\cdot u^2}{2}+o(u^2),\ u\to+0$$

Используем теперь условие выпуклости при $t=\frac{1}{2}$:

$$f(x_0)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Подставляя в полученное нер-во выражения для $f(x_1)$ и $f(x_2)$, имеем:

$$f(x_0)\leqslant\frac{2f(x_0)+f''(x_0)\cdot u^2+o(u^2)}{2}=$$

$$= f(x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{u^2}{2} + o(u^2),\ u \to +0$$

Отсюда получаем следующее:

$$f''(x_0)\cdot\frac{u^2}{2} + o(u^2) \geqslant 0,\ u \to +0$$

Поделив обе части нер-ва на u^2, получим:

$$\frac{f''(x_0)}{2} + \overbrace{o(1)}^{=\varepsilon(u),\ \varepsilon(u)\to 0,\ u\to +0} \geqslant 0,\ u \to +0$$

Тогда, переходя к пределу в полученном нер-ве при $u \to +0$, окончательно имеем, что $f''(x_0) \geqslant 0$.

$(\Longleftarrow)$: Пусть теперь $f''(x) \geqslant 0\ \forall x \in (a,b)$. Покажем, что f выпукла вниз на

(a,b). Зафиксируем произвольно точки

$x_1 < x_2$

$x_1, x_2 \in (a,b)$ и $t \in (0,1)$. Покажем, что:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Обозначим $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. Так как f дважды дифференцируема на (a,b), то $\exists f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \overbrace{\frac{f''(\xi_1)}{2}}^{\geqslant 0}(x_1 - x_0)^2$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \overbrace{\frac{f''(\xi_2)}{2}}^{\geqslant 0}(x_2 - x_0)^2$$

Здесь $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ и $\xi_2 \in (x_0, x_2)$. Т.к. $f''(\xi_1) \geqslant 0$ и $f''(\xi_2) \geqslant 0$, то справедливы неравенства:

$$f(x_1) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$f(x_2) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

Отсюда получаем:

$$t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \geqslant$$

$$\geqslant t f(x_0) + (1-t) f(x_0) + t f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1-t) f'(x_0)(x_2 - x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\left[t(x_1 - x_0) + (1-t)(x_2 - x_0)\right] =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\Big[\underbrace{\left(t x_1 + (1-t) x_2\right)}_{x_0} - \underbrace{\left(t x_0 + (1-t) x_0\right)}_{x_0}\Big] = f(x_0)$$

Вспоминая вновь, чему равно x_0 по

определенно, из цепочки неравенств выше окончательно получаем:

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \geqslant f(tx_1+(1-t)x_2)$$

$\blacksquare$

<u>Опр.</u> Пусть $f \in C(U_\delta(x_0))$, $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Будем говорить, что x_0 — точка перегиба функции f, если f меняет направление выпуклости при переходе через точку x_0

<u>Th</u> (Критерий точки перегиба): Пусть $f \in C(U_\delta(x_0))$. Пусть $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ и f дважды дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

Тогда x_0 – точка перегиба функции f

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} f''(x)\geq 0 \ \forall x\in(x_0-\delta, x_0) \text{ и } f''(x)\leq 0 \ \forall x\in(x_0, x_0+\delta) \\ f''(x)\leq 0 \ \forall x\in(x_0-\delta, x_0) \text{ и } f''(x)\geq 0 \ \forall x\in(x_0, x_0+\delta) \end{array}\right.$$

$\square$ Доказательство состоит в применении определения и критерия выпуклости. $\blacksquare$

Асимптоты.

Опр. Говорят, что $f: \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \longmapsto \mathbb{R}$ имеет вертикальную асимптоту в точке x_0, если: $\left[\begin{array}{l} f(x_0-0)=\pm\infty \\ f(x_0+0)=\pm\infty \end{array}\right.$

Опр. Пусть $f:(a,+\infty)\longmapsto\mathbb{R}$. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой функции f при $x\to+\infty$, если:

$$\exists\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(kx+b)\big)=0$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x\longrightarrow-\infty$.

Th (Критерий невертикальной асимптоты): Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой функции $f:(a,+\infty)\longmapsto\mathbb{R}$ при $x\longrightarrow+\infty$ $\Longleftrightarrow$

1) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

2) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to -\infty$.

$\square$ ($\Rightarrow$): Пусть прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота f. Тогда:

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx+b)) = 0 \qquad (*)$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, то по Th об арифметических операциях с пределами:

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$$

В силу того, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}\right)=k$, то по всё той же замечательной Th:

$$\exists \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

При этом, т.к. b - const, то из (*) немедленно получаем:

$$\exists \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$$

($\Leftarrow$): Просто только из 2 пункта условия немедленно следует, что:

$$\exists \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$$

Это по определению и означает,

что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой f. ■