Непрерывность функции в точке. Полунепрерывность функции сверху и снизу в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрыв монотонных функций.

1 Непрерывность функции в точке

Определение 1.1. *Пусть* $\delta_0 > 0, \quad f : U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. *Функция* f *называется непрерывной в точке* x_0, *если* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Определение 1.2. *Если* f *не является непрерывной в точке* x_0, *то она называется разрывной в точке* x_0.

Определение 1.3. *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f : X \to \mathbb{R},\ x_0$ *— точка прикосновения для* X. *Функция* f *называется непрерывной в точке* x_0 *по множеству* X, *если*

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ — изолированная точка для } X \\ \begin{cases} x_0 \text{ — предельная точка для } X \\ \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0) \end{cases} \end{array}\right.$$

2 Полунепрерывность функции сверху и снизу в точке

Определение 2.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X$. *Функция* f *называется полунепрерывной сверху в точке* x_0 *по множеству* X, *если*

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ — изолированная точка} \\ \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \leq f(x_0) \end{array}\right.$$

Определение 2.2. *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X$. *Функция* f *называется полунепрерывной снизу в точке* x_0 *по множеству* X, *если*

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ — изолированная точка} \\ \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \geq f(x_0) \end{array}\right.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in X$. *Тогда* f *непрерывна в точке* x_0 *по множеству* $X \iff$ *она полунепрерывна снизу в точке* x_0 *по множеству* X *и полунепрерывна сверху в точке* x_0 *по множеству* X.

Доказательство. Если x_0 — изолированнная точка, то теорема верна по определению непрерывности и полунепрерывности сверху и снизу в точке.
($\Longrightarrow$) Если f непрерывна в точке x_0 по множеству X, то

$$\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0)$$

Следовательно, f по определению полунепрерывна сверху и снизу в точке x_0 по множеству X.
($\Longleftarrow$) Если f полунепрерывна сверху и снизу в точке x_0 по множеству X, то

$$f(x_0) \leq \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \leq \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \leq f(x_0) \Longrightarrow f(x_0) = \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0)$$

$\square$

3 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 3.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0 \in X,\quad f,\ g : X \to \mathbb{R},\ f$ *и* g *непрерывна в точке* x_0 *по множеству* X*, тогда*

1. *Функция* $f \pm g$ *непрерывна в точке* x_0 *по множеству* X
2. *Функция* $f \cdot g$ *непрерывна в точке* x_0 *по множеству* X
3. *Если* $g(x) \neq 0\ \forall x \in X$*, то функция* $\frac{f}{g}$ *непрерывна в точке* x_0 *по множеству* X

Доказательство.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = g(x_0)$$

Воспользуемся определением предела функции по Гейне:
пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке x_0, причем нам не нужно условие $x_n \neq x_0$, поскольку при $x_n = x_0$ выполнено $f(x_n) = f(x_0)$. Тогда

$$\exists \lim_{n \to \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = f(x_0) \pm g(x_0)$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$\text{Если } g(x_n) \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ то } \exists \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Так как последовательность Гейне была выбрана произвольно, то в силу эквивалентности определений по Коши и Гейне получаем требуемое. ☐

4 Односторонняя непрерывность

Определение 4.1. $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — *предельная точка для* X. $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0) \cap X \neq \varnothing$, *функция* f *называется непрерывной справа в точке* x_0 *по множеству* X*, если*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

Определение 4.2. $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — *предельная точка для* X. $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0) \cap X \neq \varnothing$, *функция* f *называется непрерывной слева в точке* x_0 *по множеству* X*, если*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$$

5 Непрерывность сложной функции

Теорема 5.1. *Пусть*

$$f :\ U_{\delta_0}(y_0) \to \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R},\ \delta_0 > 0 \text{ и } f \text{ непрерывна в точке } y_0$$

$$y :\ U_{\sigma_0}(x_0) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R},\ \sigma_0 > 0 \text{ и } y \text{ непрерывна в точке } x_0,\ y(x_0) = y_0$$

тогда $\exists \sigma^* \in (0; \sigma_0] :$ *в окрестности* $U_{\sigma^*}(x_0)$ *определена композиция* $f \circ y$ *и* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = f(y(x_0))$

Доказательство. Так как y непрерывна в точке x_0:

$$\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = y(x_0) \iff \forall\delta > 0\ \exists\sigma(\delta) \in (0;\sigma_0] : \ \forall x \in U_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow |y(x) - y(x_0)| < \delta \qquad (*)$$

в частности, взяв $\delta = \delta_0,\ \sigma^* := \sigma(\delta_0)$, получим

$$\forall x \in U_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow |y(x) - y(x_0)| < \delta_0$$

тогда $\forall x \in U_{\sigma^*}$ определена $f(y(x)) \Longrightarrow f \circ y$ определена в $U_{\sigma^*}(x_0),\ f \circ y : \ U_{\sigma^*}(x_0) \to \mathbb{R}$

$$f \text{ непрерывна в } y_0 = y(x_0) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0) : \ \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)} \hookrightarrow |f(y) - f(y(x_0))| < \varepsilon$$

применим (*) при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in U_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \Longrightarrow |f(y(x)) - f(y(x_0))| < \varepsilon$$

тогда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\widetilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)),\ \widetilde{\sigma}(\varepsilon) \in (0;\sigma^*] : \ \forall x \in U_{\widetilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow |f(y(x)) - f(y(x_0))| < \varepsilon \Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = f(y(x_0))$$

Следовательно, функция $f(y(x))$ непрерывна в точке x_0. □

6 Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

Теорема 6.1. *Пусть*

$$f : \ U_{\delta_0}(y_0) \to \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R},\ \delta_0 > 0 \text{ и } f \text{ непрерывна в точке } y_0$$

$$y : \ \mathring{U}_{\sigma_0}(x_0) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \sigma_0 > 0$$
$$\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = y_o \in \mathbb{R}$$

тогда $\exists\sigma^* \in (0;\sigma_0]$: *в окрестности* $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$ *определена композиция* $f \circ y$ *и* $\exists \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$

Доказательство.

$$\exists \lim_{x\to x_0} y(x) = y_0 \iff \forall\delta > 0\ \exists\sigma(\delta) \in (0;\sigma_0] : \ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \mathring{U}_{\delta}(y_0) \qquad (*)$$

в частности, взяв $\delta = \delta_0,\ \sigma^* := \sigma(\delta_0)$, получим

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

тогда $\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}$ определена $f(y(x)) \Longrightarrow f \circ y$ определена в $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0),\ f \circ y : \ \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \to \mathbb{R}$

$$f \text{ непрерывна в } y_0 \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \in (0;\delta_0) : \ \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)} \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

применим (*) при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \Longrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

тогда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\widetilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)),\ \widetilde{\sigma}(\varepsilon) \in (0;\sigma^*] : \ \forall x \in \mathring{U}_{\widetilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

□

7 Точки разрыва, их классификация.

Замечание 7.1. *Следующие обозначения эквивалентны:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \Longleftrightarrow f(x_0 - 0)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \Longleftrightarrow f(x_0 + 0)$

Определение 7.1. *Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, но либо функция f не определена в точке x_0, либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.*

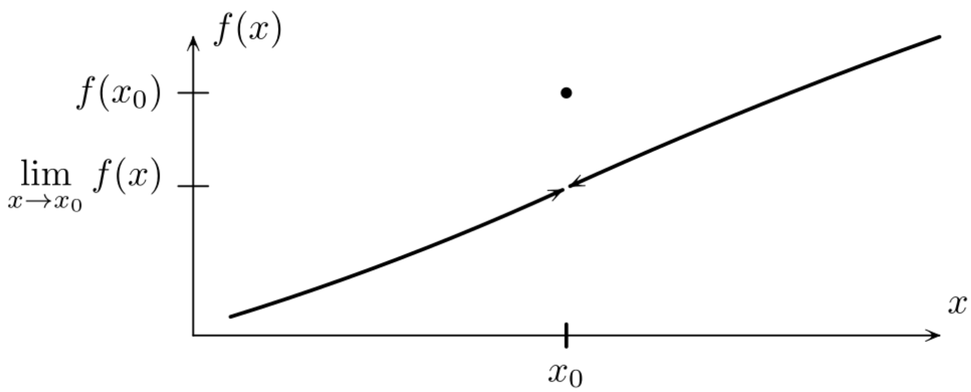

Рис. 1: Пример устранимого разрыва

Определение 7.2. *Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если*

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \end{cases}$$

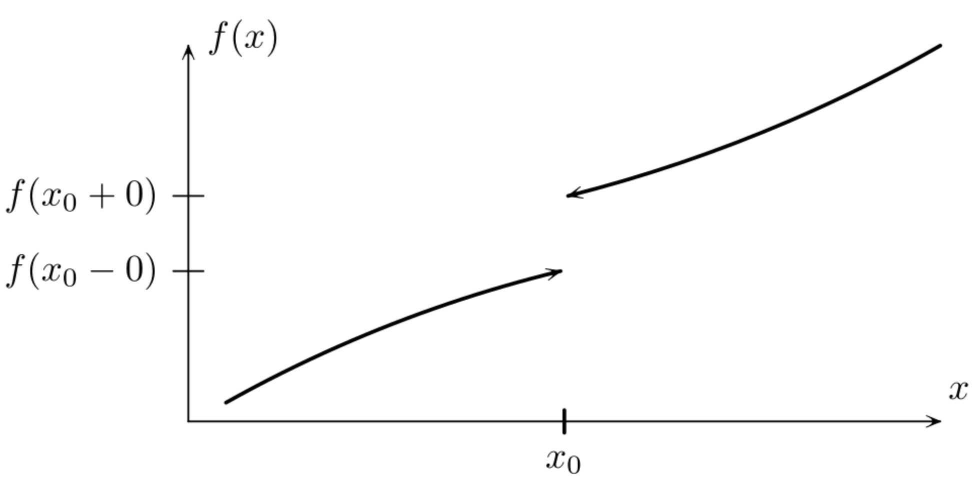

Рис. 2: Пример разрыва первого рода

Определение 7.3. *Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.*

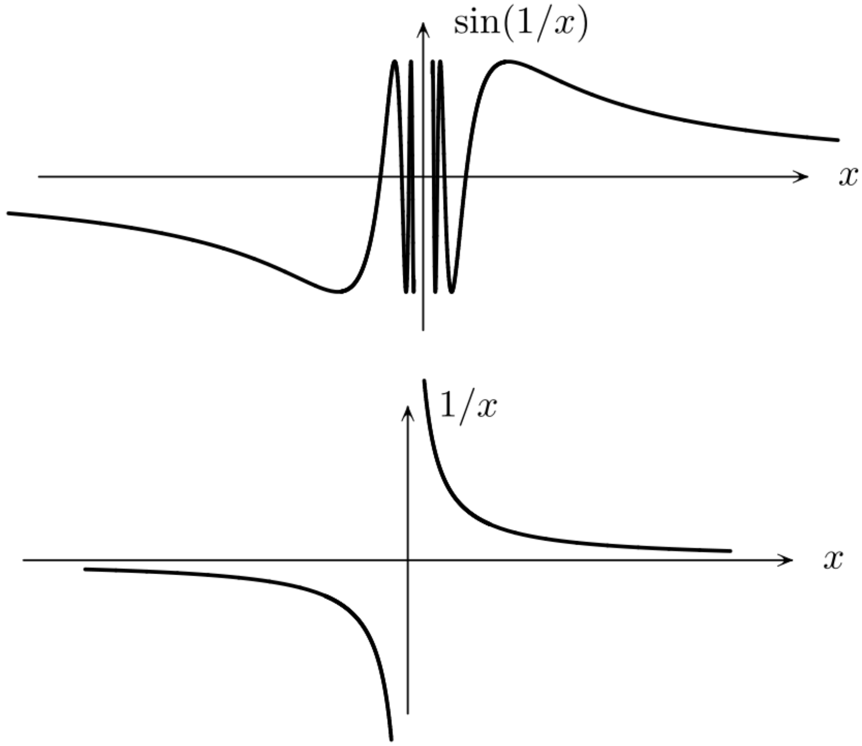

Рис. 3: Примеры разрыва второго рода

8 Разрыв монотонных функций

Лемма 8.1. *Между любыми различными действительными числами есть рациональное число*

Доказательство. Пусть $a < b \in \mathbb{R}$, рассмотрим число $\frac{1}{b-a} > 0$. По лемме Архимеда,

$$\exists n \in \mathbb{N}: \; n > \frac{1}{b-a} \Longrightarrow \frac{1}{n} < b - a$$

Разобьем числовую прямую на отрезки длиной $\frac{1}{n}$, тогда найдется такое $k \in \mathbb{Z}: \; a < \frac{k}{n} < b$

$$\text{Положим } k = \lfloor an \rfloor + 1, \text{ тогда выполнено } \frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

Итого, нашли рациональное число

$$\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}: \; \frac{k}{n} \in (a; b)$$

□

Лемма 8.2. *У монотонной функции могут быть только неустранимые разрывы первого рода и их не более, чем счетно.*

Доказательство. Пусть для определенности функция возрастает.
1) Покажем, что разрывы могут быть только неустранимыми первого рода:

Во-первых, устранимых разрывов быть не может, так как в таком случае должно быть: $f(x_0+0) = f(x_0-0)$. Но функция определена во всех точках отрезка, следовательно, и в точке разрыва, то есть $f(x_0) > f(x_0-0)$ (для меньше рассуждения аналогичные). Но тогда $f(x_0) > f(x_0+0)$, что нарушает условие монотонного возрастания.
Во-вторых, разрывов второго рода также не может быть. Пусть у функции в точке a разрыв. Функция возрастает при $x < a$ и $f(x) < f(a)$ в силу монотонности, то есть функция ограничена сверху, а значит, имеет предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, то есть предел слева, причем конечный. Аналогично доказывается существование предела справа. Значит, разрыва второго рода быть не может.
2) Покажем, что разрывов не более, чем счетное число.
Рассмотрим точку разрыва a. Обозначим $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Как было доказано выше, $A \neq B$. Оба числа действительные, очевидно. Но тогда, так как между любыми двумя действительными числами всегда найдется рациональное, $\exists C \in \mathbb{Q} : \ A \leq C \leq B$. Таким образом, мы поставили в соответствие каждому разрыву некоторое рациональное число. Причем числа все время разные в силу монотонности и того, что разрывы неустранимые. Множество рациональных чисел счетно, следовательно, множество точек разрыва также не более, чем счетно. $\square$