Производная функции одного переменного. Односторонние производные.

Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал.

Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций.

Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций.

Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного.

Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

1 Сравнение функций

1.1 Эквивалентность функций

Определение 1.1. *Пусть* $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$, $\delta_0 > 0$, $f, g \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. *Будем говорить, что функции* f *и* g *эквивалентны при* $x \to x_0$, *и записывать это* $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$, *если:*

$$\exists \Theta \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 1 \ \ \textit{и} \ \ f(x) = \Theta(x) \cdot g(x) \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0),\ \delta \in (0, \delta_0]$$

Пример 1.1. *Приведём несколько примеров эквивалентных функций при* $x \to 0$. *Справедливость каждого из нижеследующих фактов тривиально следует из первого и второго замечательного пределов.*

1. $\sin x \sim x,\ x \to 0$
2. $\tan x \sim x,\ x \to 0$
3. $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$
4. $\ln(1 + x) \sim x,\ x \to 0$
5. $\arcsin x \sim x,\ x \to 0$

Лемма 1.1. *Это действительно отношение эквивалентности.*

Доказательство. Покажем, что выполнены все аксиомы отношения эквивалентности.

1. *Рефлексивность*. Пусть $f \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Покажем, что $f(x) \sim f(x),\ x \to x_0$. В самом деле, положим $\Theta(x) \equiv 1$ и получим требуемое.

2. *Симметричность*. Пусть $f, g \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$. Покажем, что тогда $g(x) \sim f(x),\ x \to x_0$. Так как $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$, то по определению получим:

$$\exists \Theta \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : \Theta(x) \to 1,\ x \to x_0 \ \ \text{и} \ \ f(x) = \Theta(x) \cdot g(x) \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0),\ \delta_1 \in (0, \delta_0]$$

Так как $\Theta(x) \to 1,\ x \to x_0$, то в некоторой малой окрестности числа 1 функция $\Theta(x)$ не обращается в 0, то есть:

$$\exists \delta_2 \in (0, \delta_1] : \Theta(x) > 0 \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0)$$

Положим также

$$\widetilde{\Theta}(x) := \frac{1}{\Theta(x)} \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0)$$

Легко видеть, что $\widetilde{\Theta}(x) \to 1,\ x \to x_0$. Тогда окончательно получаем:

$$\exists \widetilde{\Theta} \colon \mathring{U}_{\delta_2}(x_0) \to \mathbb{R} : \widetilde{\Theta}(x) \to 1,\ x \to x_0 \ \ \text{и} \ \ g(x) = \widetilde{\Theta}(x) \cdot f(x) \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0),\ \delta_2 \in (0, \delta_0]$$

Это по определению означает, что $g(x) \sim f(x),\ x \to x_0$, а значит требуемое доказано.

3. *Транзитивность*. Пусть $f, g, h \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Пусть $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$ и $g(x) \sim h(x),\ x \to x_0$. Покажем, что тогда $f(x) \sim h(x),\ x \to x_0$. Распишем каждую из данных эквивалентностей по определению:

$$\begin{cases} \exists \Theta_1 \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : \Theta_1(x) \to 1,\ x \to x_0 \ \ \text{и} \ \ f(x) = \Theta_1(x) \cdot g(x) \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0),\ \delta_1 \in (0, \delta_0] \\ \exists \Theta_2 \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : \Theta_2(x) \to 1,\ x \to x_0 \ \ \text{и} \ \ g(x) = \Theta_2(x) \cdot h(x) \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0),\ \delta_2 \in (0, \delta_0] \end{cases}$$

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ясно, что тогда $f(x)$ можно реализовать следующим образом:

$$f(x) = \Theta_1(x)\Theta_2(x)h(x) \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

При этом очевидно, что $\Theta_1(x)\Theta_2(x) \to 1,\ x \to x_0$ по теореме об арифметических операциях с пределами функций. Значит, положив $\Theta(x) := \Theta_1(x)\Theta_2(x)$, окончательно получим:

$$\exists \Theta \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : \Theta(x) \to 1,\ x \to x_0 \ \text{ и } \ f(x) = \Theta(x) \cdot h(x) \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0),\ \delta \in (0, \delta_0]$$

Это по определению означает, что $f(x) \sim h(x),\ x \to x_0$, а значит требуемое доказано.

□

1.2 o-малое

Определение 1.2. *Пусть $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$, $\delta_0 > 0$, $f, g \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, если:*

$$\exists \varepsilon \colon \mathring{U}_{\delta_0} \to \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \ \text{ и } \ f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x) \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0), \delta \in (0, \delta_0]$$

Замечание 1.1. *$o(g(x))$ — это класс функций. Поэтому в нашем случае надо воспринимать знак равенства как знак принадлежности ($\in$). Следовательно, писать что-то наподобие $o(g(x)) = f(x)$ нельзя.*

1.3 $\mathcal{O}$-большое

Определение 1.3. *Пусть $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$, $\delta_0 > 0$, $f, g \colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $x \to x_0$, если:*

$$\exists C > 0, \exists \delta \in (0, \delta_0] : |f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

Замечание 1.2. *$\mathcal{O}(g(x))$ — это тоже класс функций. Далее рассуждения аналогичны $o(g(x))$.*

1.4 Операции со всем, что выше

Лемма 1.2. *Начинаются смешные правила, которые доказываются проверкой определения. Поэтому ни автор, ни лектор доказательства писать не хотят.*

1. $o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x)),\ x \to x_0$
2. $\mathcal{O}(f(x)) \pm \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x)),\ x \to x_0$
3. $(o(f(x)))^\alpha = o((f(x))^\alpha),\ x \to x_0$, *если $f(x)$ неотрицательно и $\alpha > 0$*

2 Дифференцируемость функции в точке

Определение 2.1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $f \colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f дифференцируема в точке x_0, если:*

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0 \tag{$*$}$$

Для лучшего понимания можно воспринимать $f(x_0) + A(x - x_0)$ как уравнение прямой, а $o(x - x_0)$ как погрешность.

3 Производная функции в точке

Определение 3.1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $f\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. *Производной* f *в точке* x_0 *называется*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \widehat{\mathbb{R}}$$

Если предел не существует, то говорят, что не существует производной в точке x_0. *Производная в точке* x_0 *обозначается следующим образом:*

$$f'(x_0) \quad \textit{или} \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

Замечание 3.1. *На практике с бесконечными производными мы не работаем, а вот существование конечной производной в точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке. Давайте докажем эту смешную штуку)*

Теорема 3.1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $f\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. *Функция* f *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Действительно, равенство ($*$) равносильно тому, что $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполнено:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \to 0, \ x \to x_0$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим, что условие выше эквивалентно следующему:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$$

Так как все переходы были равносильными, то требуемое доказано. □

4 Односторонние производные

Определение 4.1. *Пусть* $f\colon U_\delta^+(x_0) \to \mathbb{R}$, *где* $U_\delta^+(x_0) := [x_0, x_0 + \delta)$. *Тогда правосторонней производной функции в точке* x_0 *называется*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Определение 4.2. *Пусть* $f\colon U_\delta^-(x_0) \to \mathbb{R}$, *где* $U_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta, x_0]$. *Тогда левосторонней производной функции в точке* x_0 *называется*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $f\colon U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \iff \exists f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}, \ \exists f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \ \textit{ и } \ f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Доказательство. Доказательство следует из утверждения для пределов, то есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$ существует тогда и только тогда, когда существуют левосторонний и правосторонний пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ и они равны. □

5 Непрерывность функции, имеющей производную

Теорема 5.1 (Необходимое условие дифференцируемости)**.** *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $f\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Если f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Перейдём к пределу при $x \to x_0$ в равенстве ($*$), которое справедливо в некоторой окрестности точки x_0, и в силу того, что $A(x-x_0) \to 0,\ x \to x_0$ и $o(x-x_0) \to 0,\ x \to x_0$, получим:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Замечание 5.1. *Из непрерывности не следует дифференцируемость. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Очев, что она непрерывна в нуле, но при этом:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$$

Легко видеть, что полученный выше предел не существует, а значит и производной функции f в нуле не существует. Но из теоремы 3.1 получаем, что дифференцируемость в точке равносильна существованию конечной производной в этой точке, чего, как нетрудно видеть, не случилось. Значит функция f является непрерывной в нуле, но не является дифференцируемой в этой точке.

6 Дифференциал

Определение 6.1. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Дифференциалом функции f в точке x_0 называется линейная функция*

$$df_{x_0}(dx) = f'(x_0)dx, \quad dx = x - x_0$$

Замечание 6.1. *Для лучшего понимания можно заметить, что в определении дифференцируемости 2.1 посредством замены $A(x-x_0)$ на $df_{x_0}(dx)$ получим:*

$$f(x) = f(x_0) + df_{x_0}(dx) + o(x - x_0),\ x \to x_0$$

7 Геометрический смысл производной и дифференциала

7.1 Геометрический смысл производной

Пусть дана функция $f\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Давайте рассмотрим график функции и его секущие, проходящие через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, где для нашего удобства $\Delta x > 0$.
Выходит, что каждая секущая задаётся как

$$y_{\text{сек}}[\Delta x](h) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot h$$

Здесь h — просто свободный параметр на прямой. Тогда если

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}}[\Delta x](h) \in \mathbb{R}$$

то говорим, что существует невертикальная касательная к графику f в точке $(x_0, f(x_0))$. При этом $\forall h \in \mathbb{R}$ этот существующий конечный предел назовём $y_{\text{кас}}(h)$.

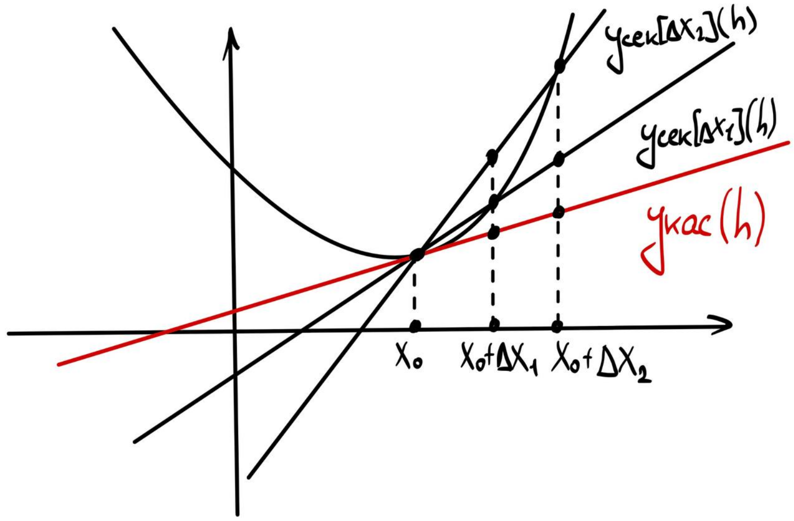
Лемма 7.1 (Геометрический смысл дифференцируемости)**.** *Дифференцируемость f в точке x_0 равносильна существованию невертикальной касательной к графику f в точке $(x_0, f(x_0))$.*

Доказательство. В самом деле:

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}}[\Delta x](h) \in \mathbb{R} \iff \forall h \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot h \in \mathbb{R} \iff$$

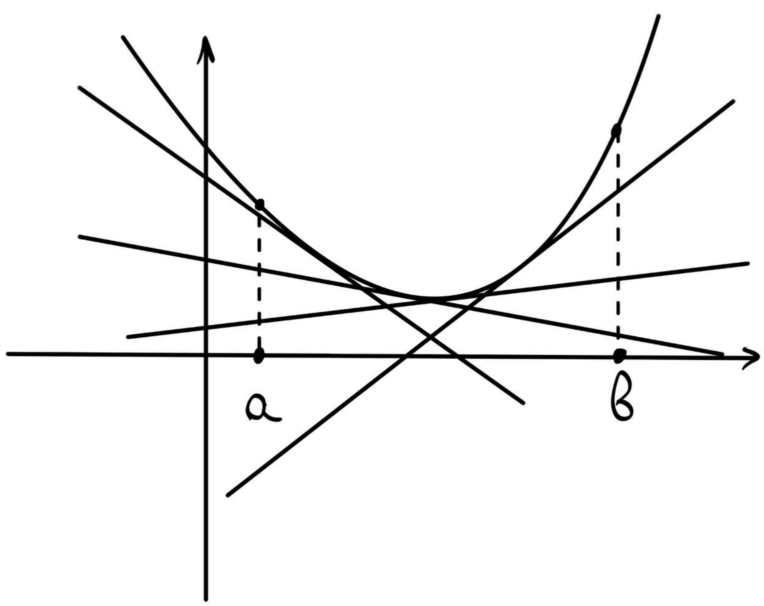
$$\iff \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R} \iff f \text{ дифференцируема в точке } x_0$$

□



7.2 Геометрический смысл дифференциала

Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Геометрический смысл дифференциала в точке x_0 — касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, смещённая в начало координат. Ясно, что дифференциал, по большому счёту, является функцией двух переменных: первым аргументом выступает как бы точка приложения касательной, а вторым — свободный параметр dx, параметризующий прямую. Если точку не фиксируем, то можем следить за эволюцией касательной.



8 Правила дифференцирования

Теорема 8.1 (Арифметические операции с производными). *Пусть $f, g\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ и f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда:*

1. *$f \pm g$ дифференцируемо в точке x_0, и при этом:*
$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2. *$f \cdot g$ дифференцируемо в точке x_0, и при этом:*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

3. *Если дополнительно $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f}{g}$ определено в некоторой $U_\delta(x_0)$ и дифференцируемо в точке x_0, а также:*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Доказательство. Положим для удобства:
$$\Delta f := f(x) - f(x_0),\ \Delta g := g(x) - g(x_0)$$

1. Заметим, что:
$$\Delta(f \pm g) = \Delta f \pm \Delta g$$
Так как работаем в проколотой окрестности нуля, то:
$$\frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$
Так как функции дифференцируемы, перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$ и получим:
$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$
Легко видеть, что предел в левой части равенства есть по определению $(f \pm g)'(x_0)$. При этом предел существует и конечен, а значит $f \pm g$ дифференцируемо в точке x_0, и к тому же справедливо равенство выше.

2. Заметим, что:
$$\Delta(fg) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x)g(x) - f(x_0)g(x)) + (f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0))$$
Так как работаем в проколотой окрестности нуля, то:
$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$$
Первое слагаемое представимо в виде:
$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) g(x)$$
Ясно, что оно стремится к $f'(x_0)g(x_0)$ при $\Delta x \to 0$ по теореме об арифметических операциях с пределами функций: первый множитель в силу дифференцируемости f в точке x_0 и определения производной стремится к $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ при $\Delta x \to 0$, а $g(x) \to g(x_0)$ при $x \to x_0$ в силу того, что g

дифференцируема в точке x_0, а значит g непрерывна в точке x_0.
Второе слагаемое представимо в виде:

$$\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{\Delta x}\right) f(x_0)$$

Ясно, что оно стремится к $f(x_0)g'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, так как второй множитель просто число, а первый множитель в силу дифференцируемости g в точке x_0 и определения производной стремится к $g'(x_0) \in \mathbb{R}$ при $\Delta x \to 0$.
Суммируя сказанное выше и переходя к пределу в вышеописанном равенстве при $\Delta x \to 0$, окончательно получаем:

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Легко видеть, что предел в левой части равенства есть по определению $(f \cdot g)'(x_0)$. При этом предел существует и конечен, а значит $f \cdot g$ дифференцируемо в точке x_0, и к тому же справедливо равенство выше.

3. Так как g дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0. При этом $g(x_0) \neq 0$, а значит по лемме о сохранении знака $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда функция $\frac{f}{g}$ определена в этой окрестности. Рассмотрим следующее чудо:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}$$

Так как работаем в проколотой окрестности нуля, то:

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)}$$

Всё ещё страшно, поэтому, как и в умножении, воспользуемся умным нулём:

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} - \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)}$$

Из непрерывности g, определения производной, теоремы об арифметических операциях с пределами функций и лени автора получим подобно промежуточным итогам для произведения:

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} \to \frac{f'(x_0)g(x_0)}{(g(x_0))^2},\ \Delta x \to 0$$

$$\frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} \to \frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2},\ \Delta x \to 0$$

О чудо, мы получили искомое:

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\square$

Теорема 8.2 (Арифметические операции с дифференциалами)**.** *Пусть* $f, g\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ *и* f, g *дифференцируемы в точке* x_0*. Тогда:*

$$d(f \pm g)_{x_0} = df_{x_0} \pm dg_{x_0}$$
$$d(fg)_{x_0} = g(x_0)df_{x_0} + f(x_0)dg_{x_0}$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = \frac{g(x_0)df_{x_0} - f(x_0)dg_{x_0}}{(g(x_0))^2},\ g(x_0) \neq 0$$

Доказательство. Доказательство сразу следует из соответствующей теоремы для производных, доказанной выше, и определения дифференциала. □

9 Производная сложной функции / композиции

Теорема 9.1. *Пусть функция* f *дифференцируема в точке* $y_0 \in \mathbb{R}$*, функция* g *дифференцируема в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$*, а также* $y_0 = g(x_0)$*. Тогда в некоторой окрестности точки* x_0 *определена композиция* $(f \circ g)$ *и эта композиция дифференцируема в точке* x_0*. Более того, справедливо равенство*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке y_0, то она определена в $U_{\delta_0}(y_0)$. Так как функция g дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, по определению предела:

$$\exists \sigma_0 > 0 : \forall x \in U_{\sigma_0}(x_0) \hookrightarrow g(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

Значит в $U_{\sigma_0}(x_0)$ определена композиция $f \circ g$.
Дифференцируемость функции g в точке x_0 равносильна следующему:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_g(x)(x - x_0) \quad \forall x \in U_{\sigma_0}(x_0) \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon_g(x) \to 0,\ x \to x_0$.
Доопределим ε_g в нуле, ведь от этого глобально ничего не изменится ($x - x_0$ всё равно занулит любую константу), то есть положим $\varepsilon_g(x_0) := 0$.
Дифференцируемость функции f в точке y_0 равносильна следующему:

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \varepsilon_f(y)(y - y_0) \quad \forall y \in U_{\delta_0}(y_0) \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon_f(y) \to 0,\ y \to y_0$.
Доопределим ε_f в нуле по тем же рассуждениям, то есть положим $\varepsilon_f(y_0) := 0$. Тогда функция ε_f становиться непрерывной в точке y_0.
Так как $\forall x \in U_{\sigma_0}(x_0) \hookrightarrow g(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$, то подставим в (2) $y = g(x)$ и воспользуемся (1):

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot \left[g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_g(x)(x - x_0)\right] + \varepsilon_f(g(x)) \cdot \left[g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_g(x)(x - x_0)\right]$$

Причешем и получим:

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot \left[f'(g(x_0))\varepsilon_g(x) + \varepsilon_f(g(x))g'(x_0) + \varepsilon_f(g(x))\varepsilon_g(x)\right]$$

Теперь поймём, что $\varepsilon_f(g(x)) \to 0,\ x \to x_0$ по второй теореме о замене переменной при вычислении предела в силу непрерывности функции ε_f, и при этом $\varepsilon_g(x) \to 0,\ x \to x_0$ по определению. Производные в вышеописанном равенстве являются числами, так как соответствующие функции дифференцируемы в соответствующих точках. Тогда все слагаемые в квадратной скобке стремятся к нулю, а значит по теореме об арифметических операциях с пределами функций всё соответствующее выражение стремится к нулю при $x \to x_0$. Тогда мы можем всё квадратную скобку обозначить как $\varepsilon(x)$. Получим:

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0) \quad \forall x \in U_{\sigma_0}(x_0)$$

А это как раз значит, что $(f \circ g)$ дифференцируема в точке x_0 и её производная равна $f'(g(x_0))g'(x_0)$ по теореме 3.1, что и требовалось. □

10 Инвариантность формы первого дифференциала

Теорема 10.1. *Пусть функция $z = z(y)$ дифференцируема в точке y_0, а функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда дифференциал функции z как функции независимой переменной y и дифференциал функции z как композиции $z(y(x))$ имеют одинаковую запись, а именно:*

$$dz = z'(y_0)dy$$

При этом в первом случае $dy = y - y_0$, а во втором dy — дифференциал y как функции от x.

Доказательство. В первом случае $z = z(y)$, откуда просто по определению:

$$dz_{y_0} = z'(y_0)dy, \quad dy = y - y_0$$

Во втором случае по теореме 9.1 о производной композиции:

$$dz_{x_0} = z'(y(x_0))y'(x_0)dx, \quad dx = x - x_0$$

Заметив, что $y'(x_0)dx = dy_{x_0}$, окончательно получаем:

$$dz_{x_0} = z'(y(x_0))y'(x_0)dx = z'(y(x_0))dy_{x_0}$$

Итого, в обоих случаях, если освободиться от лишних подробностей, можно записать в виде:

$$dz = z'(y_0)dy$$

□

11 Производная обратной функции

Теорема 11.1. *Пусть функция f непрерывна и строго монотонна на $U_{\delta_0}(x_0)$. Пусть также f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists f^{-1} \in C(U_{\sigma_0}(f(x_0)))$, f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности, что и f, а также f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причём*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Из теоремы об обратной функции для интервала, с доказательством которой предлагается ознакомиться в седьмом билете, немедленно получаем:

$$\exists f^{-1} \in C(U_{\sigma_0}(f(x_0))), \quad f^{-1} \text{ имеет тот же характер строгой монотонности, что и } f$$

Остаётся лишь доказать утверждение про дифференцируемость f^{-1} и соответствующее равенство для производной f^{-1} в точке y_0. По определению производной в точке:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Смотрится непонятно, поэтому заметим, что $\forall y \in \mathring{U}_{\sigma_0}(y_0)$ справедливо равенство:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$$

В силу строгой монотонности f^{-1} выполнено:

$$f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) \quad \forall y \in \mathring{U}_{\sigma_0}(y_0)$$

Но при этом в силу непрерывности f^{-1} в точке y_0:

$$f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0),\ y \to y_0$$

Теперь спокойно по первой теореме о замене переменной при вычислении предела можем заменить $f^{-1}(y)$ на x, а $f^{-1}(y_0)$ на x_0, и получить:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

12 Производные элементарных функций

$$(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(const)' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1},\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ -1 < x < 1$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},\ -1 < x < 1$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{-1}{\operatorname{ch}^2 x},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Доказательство. Докажем некоторые из утверждений выше, так как остальные либо очевидны, либо легко сводятся к доказанным.
(1) :

$$(e^x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{e^y - 1}{y}}_{1} = e^{x_0}$$

(2) :

$$(a^x)' = \left(e^{x\cdot \ln a}\right)' = [\text{теорема о производной композиции}] = a^x \ln a$$

(3) :

$$(\sin x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= [\text{первый замечательный} + \text{непрерывность косинуса}] = \cos x_0$$

(4) : Аналогично (3), если вспомнить, что:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(6) :

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha\cdot \ln x} = [\text{теорема о производной композиции} + (7)] = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

(7) :

$$(\ln x)'\Big|_{x=x_0} = [\text{теорема о производной обратной функции}] = \frac{1}{e^{\ln x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

(8) :

$$(\arcsin x)'\Big|_{x=x_0} = [\text{теорема о производной обратной функции}] = \frac{1}{\cos(\arcsin x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-(x_0)^2}}$$

□

13 Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

Определение 13.1. *Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой $U_{\delta_0}(t_0)$, $\delta_0 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, причём функция x непрерывна и строго монотонна в этой окрестности. По теореме об обратной функции у функции x существует обратная функция $t = t(x)$. Тогда функция $\varphi = \varphi(x) = y(t(x))$, определённая в $U_\delta(x_0)$, $x_0 = x(t_0)$, называется параметрически заданной функцией.*

Теорема 13.1. *Пусть функция $x = x(t)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой $U_{\delta_0}(t_0)$, а также $x_0 = x(t_0)$. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причём $x'(t_0) \neq 0$. Тогда:*

$$\exists y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

Доказательство. По теореме о производной обратной функции $\exists t = t(x)$, причём:

$$t'_x(x_0) = \frac{1}{x'_t(t_0)}$$

Тогда по теореме о производной композиции окончательно:

$$(y \circ t)'_x\,(x_0) = y'_t(t_0)\cdot t'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

□