Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства показательной функции, логарифмической и степенной функций. Замечательные пределы.

1 Непрерывность элементарных тригонометрических функций

Лемма 1.1. *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *непрерывны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем непрерывность функции $\sin x$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующее выражение:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|$$

Заметим, что:

$$|\sin x| \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Тогда, оценив модуль косинуса в полученном выше произведении сверху единицей и применив соответствующее неравенство для модуля синуса, получим:

$$0 \le |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \le |x - x_0|$$

Следовательно, по теореме о двух милиционерах имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| \to 0,\ x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Легко видеть, что полученное равносильно непрерывности $\sin x$ в точке x_0. Но $x_0 \in \mathbb{R}$ было выбрано произвольно, а значит функция $\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
Теперь вспомним, что:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Отсюда из теоремы о непрерывности сложной функции и из того, что функция $x + \dfrac{\pi}{2}$ очевидным образом непрерывна на $\mathbb{R}$, немедленно получаем непрерывность функции $\cos x$ на $\mathbb{R}$ как композиции двух непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. $\square$

Замечание 1.1. *Функция* $\operatorname{tg} x$ *по определению есть:*

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Из доказанной выше леммы сразу следует, что $\operatorname{tg} x$ *непрерывна на* $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ *как частное двух непрерывных на этих интервалах функций.*
Функция $\operatorname{ctg} x$ *по определению есть:*

$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad x \ne \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Из доказанной выше леммы сразу следует, что $\operatorname{ctg} x$ *непрерывна на* $(\pi k, \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$ *как частное двух непрерывных на этих интервалах функций.*

2 Определение и свойства показательной функции, логарифмической и степенной функций

2.1 Показательная функция и её свойства

Определение 2.1 (Рациональный показатель)**.** *Пусть* $a > 0$. *Пусть* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $r = \dfrac{p}{q}$ *— несократимая дробь. Тогда:*

$$a^r := (\sqrt[q]{a})^p$$

Свойства показательной функции с рациональным показателем

1. $a^r > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$
2. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
4. Если $b, c > 0$, то $(bc)^r = b^r \cdot c^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$
5. При $a > 1$ функция a^r строго возрастает на $\mathbb{Q}$. При $a \in (0, 1)$ функция a^r строго убывает на $\mathbb{Q}$
6. $a^0 = 1$

Теорема 2.1 (Неравенство Бернулли 1)**.**

$$\forall x > -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Доказательство. Докажем требуемое по индукции.
База. При $n = 1$ неравенство очевидно.
Шаг. Пусть доказано при $n = k$. Рассмотрим $n = k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+xk)(1+x) = 1 + kx^2 + (k+1)x \geq 1 + (k+1)x$$

$\square$

Теорема 2.2 (Неравенство Бернулли 2)**.** *Пусть* $a > 1$*. Тогда:*

$$\forall r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \hookrightarrow |a^r - 1| \leq 2(a-1)|r|$$

Доказательство. Случай $r = 0$ тривиален.
Пусть для начала $r = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда, так как $a^{\frac{1}{n}} > 1$, то положим

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha, \ \alpha > 0$$

По неравенству Бернулли 2.1 получим:

$$a = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \implies 0 < \alpha \leq \frac{a-1}{n} = (a-1) \cdot r$$

Легко видеть, что получили требуемое.
Пусть теперь $r \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Очевидно, что:

$$\exists! n = n(r) \in \mathbb{N} : r \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

Нетрудно видеть, что $2r \geq \frac{1}{n}$. Тогда из монотонности получаем:

$$a^{\frac{1}{n+1}} < a^r \leq a^{\frac{1}{n}} \implies 0 < a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1$$

Но по доказанному выше $a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$, и при этом $\frac{1}{n} \leq 2r$, откуда окончательно:

$$0 < a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq 2r(a-1)$$

Пусть теперь $r \in [-1, 0) \cap \mathbb{Q}$. Ясно, что:

$$a^r = \frac{1}{a^{|r|}}$$

Тогда:

$$|a^r - 1| = a^r \left|1 - \frac{1}{a^r}\right| = a^r \left|1 - a^{|r|}\right| = \frac{1}{a^{|r|}} \cdot \left|a^{|r|} - 1\right| \leq \frac{2|r|(a-1)}{a^{|r|}} < 2|r|(a-1)$$

$\square$

Теорема 2.3 (Теорема-определение)**.** *Пусть $a > 0,\ a \neq 1$. Тогда при $x \in \mathbb{R}$ для любой последовательности $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ такой, что $r_n \to x,\ n \to \infty$, выполнено:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} =: a^x$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$.
Шаг 1. Пусть фиксирована произвольная последовательность $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ такая, что $r_n \to x, n \to \infty$. Так как $\{r_n\}$ сходится, то она ограничена, то есть:

$$\exists M \in \mathbb{N} : |r_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда из монотонности получим:

$$a^{-M} \leq a^{r_n} \leq a^M \tag{$*$}$$

Рассмотрим далее произвольные $n, m \in \mathbb{N}$ и выражение:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_n} \left|a^{r_m - r_n} - 1\right|$$

Так как $\{r_n\}$ сходится, то по критерию Коши имеем:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \hookrightarrow |r_n - r_m| < 1$$

Тогда в силу неравенства Бернулли 2.2 и ($*$) получаем:

$$\forall n, m \geq N \hookrightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_n} \left|a^{r_m - r_n} - 1\right| \leq 2a^M(a-1)|r_n - r_m| \tag{$**$}$$

Из ($**$) и фундаментальности последовательности $\{r_n\}$ очевидно, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ является фундаментальной. Тогда по критерию Коши последовательность $\{a^{r_n}\}$ имеет конечный предел, то есть получаем:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} =: a^x$$

Шаг 2. Пусть последовательности $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ сходятся к x. Тогда:

$$\left|a^{r'_n} - a^{r''_n}\right| = a^{r'_n} \left|1 - a^{r''_n - r'_n}\right|$$

В силу того, что обе выбранных последовательности сходятся к одному и тому же числу, очевидно:

$$\exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \widetilde{N} \hookrightarrow \left|r''_n - r'_n\right| < 1$$

Ясно, что достаточно рассмотреть последовательности $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ лишь при достаточно больших номерах, так как отбрасывание конечного числа членов последовательности не повлияет на её предел. При этом, начиная с $\widetilde{N}$, можем применить неравенство Бернулли 2.2. Тогда учитывая, что $\{a^{r'_n}\}$ ограничена некоторым числом $C \in \mathbb{N}$ в силу её сходимости, получим:

$$\forall n \geq \widetilde{N} \hookrightarrow \left|a^{r'_n} - a^{r''_n}\right| = a^{r'_n} \left|1 - a^{r''_n - r'_n}\right| \leq 2C(a-1)\left|r''_n - r'_n\right|$$

Нетрудно видеть также, что:

$$\left|a^{r'_n} - a^{r''_n}\right| \geq 0, \quad 2C(a-1)\left|r''_n - r'_n\right| \to 0, n \to \infty$$

Тогда из вышеописанного по теореме о двух милиционерах немедленно получаем, что:

$$\left|a^{r'_n} - a^{r''_n}\right| \to 0,\ n \to \infty$$

Это и означает, что рассматриваемый предел не зависит от выбора последовательности $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$, что и требовалось.
Шаг 3. Случай $a \in (0,1)$ сводится к предыдущему, если положить:

$$a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

□

Замечание 2.1. *Новое определение переходит в старое при $x \in \mathbb{Q}$. В самом деле, рассмотрим стационарную последовательность $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ такую, что: $r_n = x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда очевидно, что:*

$$a^{r_n} \to a^x,\ n \to \infty$$

И при этом, по доказанному выше, этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{r_n\}$, что и требовалось.

Теорема 2.4 (Неравенство Бернулли 2 улучшенное)**.**

$$\forall a > 1, \forall x \in [-1,1] \hookrightarrow |a^x - 1| \le 2|x|(a-1)$$

Доказательство. При $x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ получаем неравенство Бернулли 2.2, доказанное ранее.
Пусть теперь $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1,1]$. Зафиксируем последовательность

$$\{r_n\} \subset \mathbb{Q} \cap [-1,1] : r_n \to x, n \to \infty$$

По неравенству Бернулли 2.2 получаем:

$$|a^{r_n} - 1| \le 2|r_n|(a-1)$$

Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве имеем:

$$\lim_{n\to\infty} |a^{r_n} - 1| \le \lim_{n\to\infty} 2|r_n|(a-1) = 2|x|(a-1)$$

Но по определению:

$$|a^x - 1| = \lim_{n\to\infty} |a^{r_n} - 1|$$

Легко видеть, что получили требуемое неравенство. □

Теорема 2.5 (Следствие)**.** *Пусть $a > 0$. Тогда функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Случай $a = 1$ очевиден, так как:

$$1^x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим случай $a > 1$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Так как $x \to x_0$, то будем рассматривать только такие x, что $|x - x_0| \le 1$. Тогда можем применить неравенство Бернулли 2.4:

$$0 \le |a^x - a^{x_0}| \le 2a^{x_0}(a-1)|x - x_0|$$

Отсюда в силу того, что выражение в правой части неравенства стремится к нулю при $x \to x_0$, по теореме о двух милиционерах получаем:

$$|a^x - a^{x_0}| \to 0,\ x \to x_0$$

Тогда $a^x \to a^{x_0},\ x \to x_0$, что и требовалось.
Рассмотрим случай $a < 1$. Легко получаем редукцию к случаю $a > 1$ следующим очевидным преобразованием:

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

□

Теорема 2.6 (Свойства показательной функции)**.** *Пусть* $a, b, c > 0,\ a, b, c \neq 1$. *Тогда:*

1. *Функция* a^x *строго возрастает при* $a > 1$ *и строго убывает при* $a \in (0, 1)$

2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

4. $(bc)^x = b^x \cdot c^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство. (1) : Рассмотрим случай $a > 1$, так как при $a \in (0, 1)$ производим стандартную редукцию вида

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$ такие, что $x < y$. Покажем, что $a^x < a^y$. Зафиксируем произвольные $p, q \in \mathbb{Q}$ так, что $x < p < q < y$. Фиксируем также последовательности $\{p_n\}$, $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ такие, что:

$$\begin{cases} p_n \to x,\ n \to \infty \ \text{ и } \ x < p_n \leq p \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ q_n \to y,\ n \to \infty \ \text{ и } \ q \leq q_n < y \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Из монотонности для рационального показателя получаем:

$$\underbrace{a^{p_n} \leq a^p}_{1} < \underbrace{a^q \leq a^{q_n}}_{2}$$

Теперь по теореме о предельном переходе в неравенстве перейдём к пределу при $n \to \infty$ сначала в неравенстве 1, а затем в неравенстве 2. Заметим, что в таком случае строгий знак между ними не испортится предельным переходом, а значит итого получим:

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{p_n} \leq a^p < a^q \leq \lim_{n \to \infty} a^{q_n} = a^y$$

Легко видеть, что требуемое доказано.
(2) : Зафиксируем произвольно $x, y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим две последовательности $\{r_n\}$, $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ такие, что:

$$\begin{cases} r_n \to x,\ n \to \infty \\ q_n \to y,\ n \to \infty \end{cases}$$

Тогда:

$$a^x \cdot a^y = \left(\lim_{n \to \infty} a^{r_n}\right) \cdot \left(\lim_{n \to \infty} a^{q_n}\right) = [\text{теорема об арифметических операциях с пределами}] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(a^{r_n} \cdot a^{q_n}\right) = [\text{свойство для рационального показателя}] = \lim_{n \to \infty} a^{r_n + q_n} =$$

$$= [\text{определение для вещественного показателя + предел суммы равен сумме пределов}] = a^{x+y}$$

Нетрудно видеть, что требуемое доказано.
(3) : Зафиксируем произвольно $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть запись $z_n \downarrow z, n \to \infty$ далее означает следующее: последовательность $\{z_n\}$ монотонно убывает, $z_n \to z,\ n \to \infty$, а также $z_n \geq z\ \forall n \in \mathbb{N}$. Аналогично вводится запись $z_n \uparrow z,\ n \to \infty$. Зафиксируем четыре последовательности $\{r'_n\}, \{r''_n\}, \{t'_n\}, \{t''_n\} \subset \mathbb{Q}$ такие, что:

$$\begin{cases} r'_n \downarrow x,\ n \to \infty \\ r''_n \uparrow x,\ n \to \infty \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} t'_n \downarrow y,\ n \to \infty \\ t''_n \uparrow y,\ n \to \infty \end{cases}$$

Очевидно, что такие последовательности всегда можно построить, вспомнив, например, что в любой окрестности любого действительного числа находится хотя бы одно рациональное число. Далее рассмотрим следующий случай, так как все остальные рассматриваются по аналогии просто заменой, например, убывающих последовательностей в степенях числа a на соответствующие им возрастающие таким образом, чтобы знаки неравенств, которые будут описаны ниже, остались неизменными (другими словами, нужно как-то миксануть четыре этих последовательности, чтобы ничего не изменилось):

$$a > 1, \quad a^{r''_n} > 1, \quad a^{r'_n} > 1$$

Тогда из доказанной выше монотонности для любого вещественного показателя очевидно, что:

$$\left(a^{r''_n}\right)^{t''_n} \leq \left(a^{r''_n}\right)^{y} \leq (a^x)^y \leq \left(a^{r'_n}\right)^{y} \leq \left(a^{r'_n}\right)^{t'_n}$$

При этом по соответствующему свойству для рационального показателя получаем:

$$\left(a^{r''_n}\right)^{t''_n} = a^{r''_n t''_n}, \quad \left(a^{r'_n}\right)^{t'_n} = a^{r'_n t'_n}$$

Тогда, объединяя результаты, имеем:

$$a^{r''_n t''_n} \leq (a^x)^y \leq a^{r'_n t'_n}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ сначала в левом неравенстве, а затем в правом, по определению показательной функции получаем:

$$a^{x \cdot y} \leq \lim_{n \to \infty} a^{r''_n t''_n} \leq (a^x)^y \leq \lim_{n \to \infty} a^{r'_n t'_n} = a^{x \cdot y}$$

Легко видеть, что требуемое доказано.
(4) : Доказательство состоит лишь в рассмотрении последовательности $\{r_n\} \subset \mathbb{Q} : r_n \to x, \ n \to \infty$, и предельном переходе для применения определения показательной функции:

$$(bc)^x = \lim_{n \to \infty} (bc)^{r_n} = \lim_{n \to \infty} b^{r_n} \cdot c^{r_n} = \left(\lim_{n \to \infty} b^{r_n}\right) \cdot \left(\lim_{n \to \infty} c^{r_n}\right) = b^x \cdot c^x$$

(5) : Зафиксируем произвольно $x \in \mathbb{R}$, а также $p \in \mathbb{Q} : p < x$. Тогда из доказанной выше строгой монотонности для произвольного вещественного показателя и того, что требуемое к доказательству свойство справедливо для рационального показателя, получим:

$$0 < a^p < a^x$$

Тривиально получаем требуемое. □

Лемма 2.1.

$$\operatorname{Im} a^x = (0, +\infty)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$, так как при $a \in (0, 1)$ производим стандартную редукцию вида

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

По обобщённой теореме Больцано-Коши о промежуточном значении:

$$\operatorname{Im} a^x = \left(\inf_{x \in \mathbb{R}} a^x, \ \sup_{x \in \mathbb{R}} a^x\right)$$

При этом заметим, что по неравенству Бернулли 2.4:

$$a^x \geq 1 + x(a-1) \to +\infty,\ x \to +\infty$$

Так как по доказанному показательная функция строго возрастает при $a > 1$, то по теореме о двух милиционерах, а затем и по теореме Вейерштрасса о существовании односторонних пределов у монотонных функций получаем:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

При этом также в силу строгой монотонности показательной функции опять же по теореме Вейерштрасса и по теореме о замене переменной при вычислении предела имеем:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} a^x = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} = 0$$

Нетрудно видеть, что требуемое доказано. □

2.2 Логарифмическая функция и её свойства

Определение 2.2. *Пусть $a > 0,\ a \neq 1$. Тогда обратная функция к a^x строго возрастает при $a > 1$, строго убывает при $a \in (0, 1)$, непрерывна на $(0, +\infty)$ и имеет областью значений $\mathbb{R}$. Такая функция называется $\log_a x$.*

Замечание 2.2. *Справедливость всех свойств, описанных в определении логарифмической функции, следует из теоремы об обратной функции для интервала, с доказательством которой предлагается ознакомиться в седьмом пункте программы.*

Теорема 2.7. *Пусть $a, b > 0,\ a, b \neq 1$. Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:*

1. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x, y > 0$
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \forall x > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство. Все эти свойства легко доказываются редукцией к соответствующим свойствам прямой функции. □

2.3 Степенная функция и её свойства

Лемма 2.2. *Функция $f(x) = x^n$ непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Требуемое очевидно следует из того, что f есть конечное произведение непрерывных на $\mathbb{R}$ функций:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}$$

□

Теорема 2.8. *Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$ на луче $[0, +\infty)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ функция f строго возрастает на $[0, +\infty)$, а также $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.*

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Строгое возрастание очевидно из определения. Покажем, что $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$. Заметим, что:

$$0 \leq \inf_{x>0} x^n \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^n}\right)^k$$

При этом, если $0 < q < 1$, то:

$$\lim_{k\to\infty} q^k = 0$$

Отсюда:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^n}\right)^k \leq 0 \implies \inf_{x>0} x^n = 0$$

Более того, если $Q > 1$, то:

$$\lim_{k\to\infty} Q^k = +\infty$$

Из этого сразу получаем, что:

$$\sup_{x>0} x^n = +\infty$$

Тогда ясно, что:

$$\operatorname{Im} f \subset [0, +\infty)$$

С другой стороны, по обобщённой теореме Больцано-Коши о промежуточном значении:

$$\forall C \in (0, +\infty)\ \exists x_C \in (0, +\infty) : (x_C)^n = C$$

Тогда, так как в нуле значение любой степени равно нулю, получаем:

$$[0, +\infty) \subset \operatorname{Im} f$$

Легко видеть, что показаны два противоположных включения. Значит окончательно:

$$\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$$

□

Определение 2.3. *Пусть $\alpha > 0$, $x \geq 0$. Тогда функция x^α, называемая степенной, по определению есть:*

$$x^\alpha := e^{\alpha\cdot\ln x}$$

Теорема 2.9. *Пусть $\alpha > 0,\ x \geq 0$. Степенная функция обладает следующими свойствами:*

1. *Функция x^α строго возрастает на $(0, +\infty)$.*

2. $\operatorname{Im} x^\alpha = [0, +\infty)$.

3. $0^\alpha := 0$

Доказательство. Вышеуказанные свойства легко следуют из свойств показательной и логарифмической функций в силу определения степенной функции. □

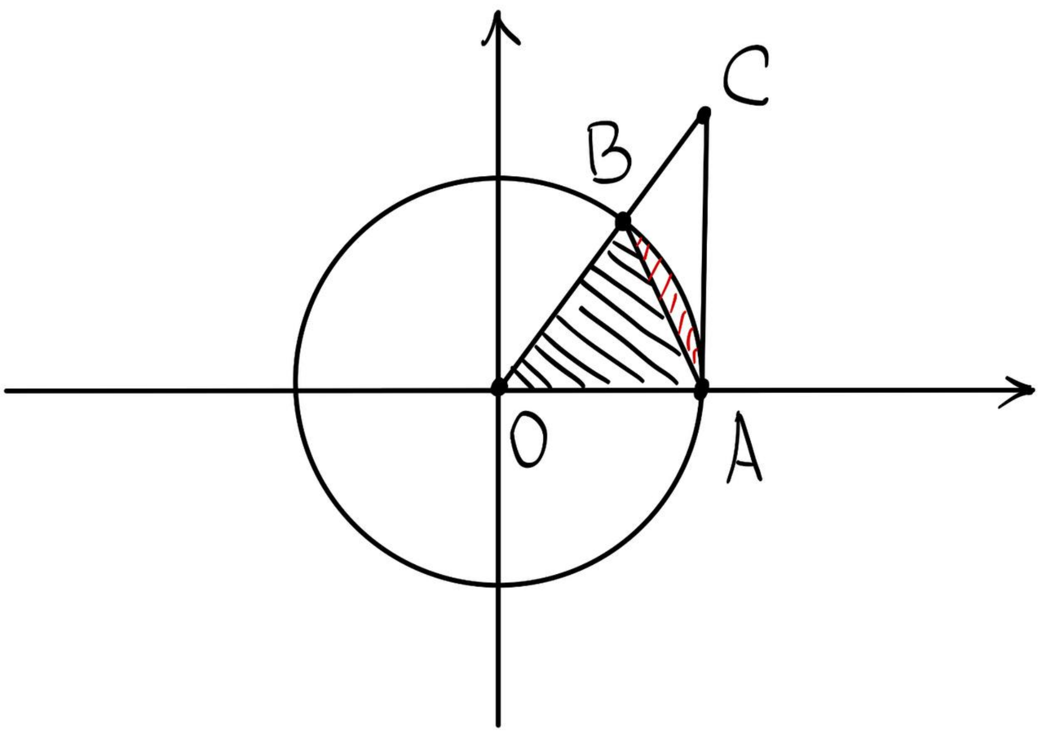
3 Замечательные пределы

3.1 Первый замечательный предел

Теорема 3.1 (Первый замечательный предел)**.**

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. В прямоугольной декартовой системе координат на плоскости построим окружность единичного радиуса с центром в начале координат O. Ясно, что достаточно рассматривать $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Точку $(1, 0)$ обозначим за A, а на дуге окружности в положительном направлении отмерим дугу длины x и полученную точку назовём B. Точку пересечения луча OB и перпендикуляра к оси абсцисс, восставленного в точке A, обозначим за C.



Следующие неравенства очевидны:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект}} < S_{\triangle OAC}$$

При этом ясно, что:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\sin x}{2}, \quad S_{\text{сект}} = \frac{x}{2}, \quad S_{\triangle OAC} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Из этого получаем:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Отсюда, посредством элементарных преобразований, сразу следует, что:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Заметив, что $\dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ является чётными функциями, получим:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Но из леммы 1.1 следует, что $\cos x$ непрерывен в нуле, а значит $\cos x \to 1,\ x \to 0$. Тогда по теореме о двух милиционерах немедленно получаем, что:

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□

3.2 Второй замечательный предел

Лемма 3.1. *Пусть* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность натуральных чисел такая, что:*

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$$

Тогда

$$\exists \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

Доказательство. Заметим, что последовательность $\{n_k\}$ не обязательно строго возрастает, а значит последовательность, утверждение про предел которой требуется доказать, не является подпоследовательностью последовательности, предел которой определяет число e, а значит пользоваться утверждением про предел подпоследовательности в данном случае нельзя.
По определению числа e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} =: e$$

Расписывая это по определению предела последовательности, получим:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \in U_\varepsilon(e)$$

С другой стороны, так как $n_k \to +\infty,\ k \to \infty$, то опять же по определению предела:

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists K(N) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(N) \hookrightarrow n_k \geq N$$

В частности, положив $N = N(\varepsilon)$ в утверждении выше, получим:

$$\exists \widetilde{K}(\varepsilon) = K(N(\varepsilon)) : \forall k \geq \widetilde{K}(\varepsilon) \hookrightarrow n_k \geq N(\varepsilon)$$

Суммируя полученные выше условия, окончательно получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \widetilde{K}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq \widetilde{K}(\varepsilon) \hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \in U_\varepsilon(e) \iff \exists \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

□

Теорема 3.2 (Второй замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько шагов.
Шаг 1. Покажем, что:

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Рассмотрим произвольную последовательность Гейне $\{x_k\}$ в нуле такую, что $x_k>0\ \forall k\in\mathbb{N}$. Из определения последовательности Гейне очевидно:

$$\exists K\in\mathbb{N}:\forall k\geq K\hookrightarrow x_k\in(0,1]$$

Так как $x_k\to 0,\ k\to\infty$, то:

$$\frac{1}{x_k}\to+\infty,\ k\to+\infty$$

При этом ясно, что:

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad\exists n_k\in\mathbb{N}:\ \frac{1}{x_k}\in[n_k,n_k+1)\implies x_k\in\left[\frac{1}{n_k+1},\frac{1}{n_k}\right)$$

Тогда справедливы следующие очевидные оценки:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\leq(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\leq\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

Далее заметим, что полученная последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $n_k\to+\infty,\ k\to\infty$. В самом деле, это легко следует из того, что:

$$\frac{1}{x_k}\to+\infty\quad\wedge\quad\frac{1}{x_k}<n_k+1\ \forall k\in\mathbb{N}$$

Тогда по доказанной выше лемме, применительно к последовательности $\{n_k\}$, а также по теореме об арифметических операциях с пределами сходящихся последовательностей, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\to e,\ k\to\infty\quad\wedge\quad\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\to 1,\ k\to\infty\implies$$

$$\implies\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\to e,\ k\to\infty$$

Теперь по соображениям, аналогичным соображениям выше, получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\to e,\ k\to\infty\quad\wedge\quad\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\to 1,\ k\to\infty\implies$$

$$\implies\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}\to e,\ k\to\infty$$

Тогда по теореме о двух милиционерах имеем:

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e$$

Но правая последовательность Гейне $\{x_k\}$ в нуле была выбрана произвольно, откуда по определению предела по Гейне тривиально получаем:

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Шаг 2. Покажем теперь, что:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Рассмотрим последовательность Гейне $\{x_k\}$ в нуле такую, что $x_k<0\ \forall k\in\mathbb{N}$. Из определения последовательности Гейне очевидно:

$$\exists N\in\mathbb{N}:\forall k\geq N\hookrightarrow x_k\in(-1,0)$$

Так как изъятие конечного числа членов последовательности с начала не влияет на предел последовательности, то далее без ограничения общности считаем, что $x_k\in(-1,0)$. Рассмотрим также следующую последовательность:

$$y_k:=\frac{-x_k}{1+x_k}\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

Из определения последовательности $\{y_k\}$ очевидно, что:

$$(1+y_k)(1+x_k)=1\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

Тогда, выразив из равенства выше x_k, получим:

$$x_k=\frac{-y_k}{1+y_k}$$

Используя полученное равенство, имеем:

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\left(\frac{1}{1+y_k}\right)^{-\frac{1+y_k}{y_k}}=(1+y_k)^{\frac{1+y_k}{y_k}}=(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}}(1+y_k)\tag{$\star$}$$

При этом нетрудно видеть из вышеописанных условий, что $y_k>0\ \forall k\geq N$, а значит из определения $\{y_k\}$ сразу получаем, что $y_k\to+0,\ k\to\infty$. Но тогда по доказанному в 1 шаге, применительно к последовательности $\{y_k\}$, а также по условию выше получаем:

$$(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}}\to e,k\to\infty\quad\wedge\quad(1+y_k)\to1,k\to\infty$$

Из этого, учитывая ($\star$), немедленно следует:

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\to e,\ k\to\infty$$

Но левая последовательность Гейне $\{x_k\}$ в нуле была выбрана произвольно, откуда по определению предела по Гейне тривиально получаем:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Шаг 3. Из проделанных выше шагов заключаем, что:

$$\begin{cases}\exists\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\\ \exists\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\end{cases}\iff\exists\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\square$

3.3 Следствия из второго замечательного предела

Теорема 3.3 (Следствие 1).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Доказательство. Сделаем редукцию ко второму замечательному пределу. Для этого заметим, что:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(y(x)),\quad y(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Из второго замечательного предела ясно, что:

$$y(x)\to e, x\to 0$$

При этом очевидно, что функция $\ln y$ непрерывна в точке e. Тогда по второй теореме о замене переменной при вычислении предела получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln(y(x))=\lim_{y\to e}\ln y=1$$

□

Теорема 3.4 (Следствие 2).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Доказательство. Сделаем редукцию уже к первому следствию. Для этого положим:

$$y(x)=e^x-1$$

Отсюда, выражая x, получаем:

$$x=\ln(1+y(x))$$

Из равенств выше имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{\ln(1+y(x))}$$

При этом очевидно, что $y(x)\to 0,\ x\to 0$, а также $y(x)\neq 0$ в некоторой проколотой окрестности нуля в силу монотонности экспоненты. Тогда по второй теореме о замене переменной при вычислении предела окончательно получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{\ln(1+y(x))}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$

□