

(Будет только в задачах) Элементарная теория чисел: делимость, деление с остатком, вычеты.

Свойства арифметических действий с вычетами. Наибольший общий делитель.

Взаимно простые числа. Обратимость вычетов.

Малая теорема Ферма. Теорема Эйлера.

Расширенный алгоритм Евклида.

# 1 Основные понятия теории чисел

## 1. Делимость

### 2. Деление с остатком

**Определение 1.1.** Будем говорить, что целое число  $a$  делится на целое ненулевое число  $b$  с остатком  $r$ , если:

$$\exists q \in \mathbb{Z} : a = bq + r, 0 \leq r < |b|$$

### 3. Простые числа

**Определение 1.2.** Целое число  $p$  называется простым, если оно не имеет никаких натуральных делителей, кроме 1 и  $p$ .

### 4. Наибольший общий делитель

**Определение 1.3.** Наибольшим общим делителем двух целых чисел  $a$  и  $b$  будем называть такое целое число  $d$  (обозначается  $\text{НОД}(a, b)$ ), что выполнено следующее:

(a)  $a = da', a' \in \mathbb{Z}$  и  $b = db', b' \in \mathbb{Z}$

(b)  $d$  – наибольший такой натуральный (эквивалентно тому, что любой общий делитель  $a$  и  $b$  является также делителем  $d$ )

### 5. Взаимная простота

**Определение 1.4.** Целые числа  $a$  и  $b$  называют взаимно простыми, если  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

**Теорема 1.1.** Пусть  $a, b \in \mathbb{Z} : \text{НОД}(a, b) = 1$  и  $ac \vdots b$ . Тогда  $c \vdots b$ .

### 6. Наименьшее общее кратное

**Определение 1.5.** Наибольшим общим кратным двух целых чисел  $a$  и  $b$  будем называть такое наименьшее натуральное число  $m$ , что  $m \vdots a$  и  $m \vdots b$ .

**Теорема 1.2.**  $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab$ .

### 7. Основная теорема арифметики

**Теорема 1.3.** Любое натуральное число  $m$  единственным образом представимо в виде произведения его простых делителей, то есть:

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

где  $p_i$  – простые,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

# 2 Арифметика остатков

**Определение 2.1.** Будем говорить, что целое число  $a$  сравнимо с целым числом  $b$  по модулю  $m$ , и записывать это  $a \equiv b \pmod{m}$ , если  $(a - b) \vdots m$

**Определение 2.2.** Множество всех чисел, сравнимых с  $a$  по модулю  $m$ , называется классом вычетов по модулю  $m$ , и обозначается  $[a]_m$

**Определение 2.3.** Любое число класса вычетов по модулю  $m$  называется *вычетом по модулю  $m$* .

**Теорема 2.1.**

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \implies \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{cases}$$

**Теорема 2.2.**

$$\begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} \\ \text{НОД}(c, m) = 1 \end{cases} \implies a \equiv b \pmod{m}$$

*Доказательство.*

$$\begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} \\ \text{НОД}(c, m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} ac - bc \vdots m \\ \text{НОД}(c, m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c(a - b) \vdots m \\ \text{НОД}(c, m) = 1 \end{cases} \implies (a - b) \vdots m$$

□

### 3 Обратимость остатков

**Теорема 3.1.**

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \exists x, y \in \mathbb{Z} : \text{НОД}(a, b) = ax + by$$

*Доказательство.* Требуемое очевидно следует из алгоритма Евклида, так как в любой момент времени НОД берется от линейной комбинации чисел  $a$  и  $b$ . □

#### 3.1 Существование обратного по простому модулю

**Теорема 3.2.** Уравнение  $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ , где  $p$  – простое, разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда  $a \not\vdots p$ .

*Первое доказательство.* Есть лишь два случая:

1.  $a \vdots p$ . Тогда очевидно, что решений нет.
2.  $a \not\vdots p$ . Тогда  $\text{НОД}(a, p) = 1 \implies \exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + py = 1$ . Рассмотрим полученное равенство по модулю  $p$ :

$$ax + py \equiv 1 \pmod{p} \implies ax \equiv 1 \pmod{p}$$

Итого в этом случае получаем, что уравнение разрешимо в целых числах, что и требовалось. □

*Второе доказательство.* Если  $a \vdots p$ , то очевидно решений нет. Далее  $a \not\vdots p$ . Рассмотрим множество всевозможных ненулевых остатков по модулю  $p$ :

$$A = \{1, 2, \dots, p - 1\}$$

Умножим каждый из элементов множества  $A$  на  $a$ . Получим следующий ряд:

$$a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (p - 1)$$

Заметим, что все элементы этого ряда попарно несравнимы по модулю  $p$ . Действительно, если от противного существуют такие  $i$  и  $j$  из ряда, что  $a \cdot i \equiv a \cdot j \pmod{p}$ , то  $a(i - j) \vdots p \implies i = j$ , откуда получаем противоречие. Значит элементы этого ряда суть перестановка элементов множества  $A$  по модулю  $p$ . Но тогда среди них существует число, равное 1 по модулю  $p$ , что и требовалось. □

## 4 Малая теорема Ферма

**Теорема 4.1.** Пусть  $a \not\equiv 0 \pmod p$  и  $p$  – простое. Тогда  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

*Доказательство.* Перемножим все элементы из множества  $A$  и все элементы ряда из предыдущего доказательства. Так как в ряду все элементы попарно несравнимы по модулю  $p$ , и их ровно  $p$  штук, то выполнено:

$$1 \cdot 2 \dots (p-1) \equiv (a \cdot 1) \cdot (a \cdot 2) \dots (a \cdot (p-1)) \pmod p$$

Тогда:

$$a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p$$

Но  $(p-1)!$  взаимнопросто с  $p$ . Значит:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

что и требовалось. □

## 5 Теорема Эйлера

**Определение 5.1.** Пусть функция  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \varphi(n)$  есть количество таких натуральных чисел  $m$ , что  $m$  взаимнопросто с  $n$  и  $m \leq n$ . Такую функцию будем называть функцией Эйлера.

**Теорема 5.1** (Эйлера). Пусть  $\text{НОД}(a, m) = 1$ . Тогда:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

*Доказательство.* Рассмотрим множество всех остатков по модулю  $m$ , которые взаимнопросты с  $m$ :

$$A = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\}$$

Теперь также рассмотрим следующий ряд:

$$a \cdot r_1, a \cdot r_2, \dots, a \cdot r_{\varphi(m)}$$

По аналогии с доказательством малой теоремы Ферма получим, что все числа этого ряда попарно несравнимы по модулю  $m$ , а значит элементы ряда суть перестановка элементов множества  $A$  по модулю  $m$ . Тогда имеем:

$$(ar_1)(ar_2) \dots (ar_{\varphi(m)}) \equiv r_1 r_2 \dots r_{\varphi(m)} \pmod m$$

Так как  $r_1 r_2 \dots r_{\varphi(m)}$  взаимно просто с  $m$ , то окончательно:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

что и требовалось. □

## 6 Расширенный алгоритм Евклида

### 6.1 Немного воспоминаний

Обычный алгоритм Евклида основывается на следующем замечании:

**Лемма 6.1.**  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$  (полагаем  $a \geq b$ )

В соответствии с этим, обычный алгоритм Евклида делает некоторую последовательность делений, то есть, полагая  $a_0 = a, a_1 = b$ , выполнено (до тех пор, пока  $a_{i+1} \neq 0$ ):

$$a_{i-1} = a_i q_i + a_{i+1}, \quad 0 \leq a_{i+1} < |a_i|$$

Пусть  $a_{t+1}$  – последний ненулевой остаток. Тогда  $\text{НОД}(a_0, a_1) = a_{t+1}$ .

## 6.2 Расширяем возможности

Расширенный алгоритм Евклида позволяет представить  $d = \text{НОД}(a, b)$  в виде линейной комбинации  $a$  и  $b$ , то есть найти такие  $x, y \in \mathbb{Z}$ , что:

$$d = ax + by$$

**Алгоритм.** Положим

$$x_t = -1, \quad y_t = q_{t+1},$$

где  $q_{t+1}$  – последнее частное. Положим также

$$x_i = y_{i+1}, \quad y_i = x_{i+1} - q_{i+1}y_{i+1}$$

Легко показать по индукции, что на каждом шаге выполнено:

$$x_i a_i + y_i a_{i+1} = \text{НОД}(a_0, a_1)$$

Тогда ясно, что в тот момент времени, когда алгоритм дойдёт до  $x_0$  и  $y_0$ , будет выполнено:

$$x_0 a_0 + y_0 a_1 = \text{НОД}(a_0, a_1)$$

Легко видеть, что получили искомые коэффициенты разложения.