Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства показательной функции, логарифмической и степенной функций. Замечательные пределы.

1 Непрерывность элементарных функций

Лемма 1.1. *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *непрерывны на* $\mathbb{R}$

Доказательство. Докажем непрерывность $\sin x$ в точке x_0

$$|\sin x - \sin x_0| = |2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)|$$

$$|\sin x| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq |\sin x - \sin x_0| = |2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)| \leq |x - x_0|$$

$$\Rightarrow \text{по теореме о двух милиционерах } \exists \lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\sin x \text{ непрерывен в точке } x_0 \text{ ,а } x_0 \text{ была выбрана произвольно}$$

Так как

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ непрерывен как композиция двух непрерывных}$$

Также

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

непрерывен на интервалах $(\frac{-\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$ как частное двух непрерывных функций

$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad x \neq \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

непрерывен на интервалах $(\pi l, \pi(l+1)), l \in \mathbb{Z}$

□

2 Определение и свойства показательной функции, логарифмической и степенной функций

Определение 2.1. $a > 0$ $, a \neq 1$

$$a^r, r = \frac{p}{q} \text{—\textit{несократимая дробь}} \Rightarrow a^r = (\sqrt[q]{a})^p$$

1)$a^r > 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}$
2)$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
3)$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2} \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$
4) *если* $b > 0, c > 0$ *, то* $(bc)^r = b^r \cdot c^r \ \forall r \in \mathbb{Q}$
5)a^r *— строго возрастает на* $\mathbb{Q}$ *при* $a > 1$*,при* $a \in (0,1)$ *строго убывает на* $\mathbb{Q}$
6)$a^0 = 1$

Теорема 2.1. *(Неравенство Бернулли 1)*

$$\forall x > -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Доказательство. База индукции: $n = 1$ тривиально
Пусть доказано при $n = k$.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+xk)(1+x) = 1 + kx^2 + (k+1)x \geq 1 + (k+1)x$$

$\Rightarrow$ по индукции доказали □

Теорема 2.2. *(Неравенство Бернулли 2) Если $a > 1$, то $\forall r \in [-1, 1]$*

$$|a^r - 1| \leq 2(a-1)|r|$$

Доказательство. Случай $r = 0$ очевиден
Рассмотрим случай $r \in (0, 1]$

$$r = \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a^{\frac{1}{n}} > 1$$

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$$

$$\alpha = a^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$1 + n\alpha \leq (1+\alpha)^n = a(\text{по неравенству Бернулли } 2.1)$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{(a-1)}{n}$$

Если $r \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$

$$\exists! n = n(r) \in \mathbb{N} \text{ такое что } r \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$$

$$2r \geq \frac{1}{n}$$

$$a^{\frac{1}{n+1}} < a^r \leq a^{\frac{1}{n}}$$

$$0 < a^r - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq 2r(a-1)$$

$$\Rightarrow \text{при } r > 0 \text{ доказано}$$

Если $r \in [-1, 0)$

$$a^r = \frac{1}{a^{|r|}}$$

$$|a^r - 1| = a^r|1 - \frac{1}{a^r}| = a^r|1 - a^{|r|}| = \frac{1}{a^{|r|}}|a^{|r|} - 1| \leq \frac{2|r|(a-1)}{a^{|r|}} < 2|r|(a-1)$$

□

Теорема 2.3. *(определение) Пусть $a > 0, a \neq 1$. Тогда*

$$\text{при } x \in \mathbb{R}\ \forall \text{последовательности } \{r_n\} \subset \mathbb{Q}, \text{такой что } r_n \to x, n \to \infty\ \exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} =: a^x$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности r_n

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$
Шаг 1. Пусть фиксирована произвольная последовательность $r_n \to x, n \to \infty \Rightarrow$ так как сходящаяся последовательность ограничена

$$\exists M > 0 : |r_n| \leq M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a^{-M} \leq a^{r_n} \leq a^M$$

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq a^{r_n}|a^{r_m - r_n} - 1|$$

В силу критерия Коши:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \hookrightarrow |r_n - r_m| < 1$$

Тогда в силу неравенства Бернулли 2.2 и ограниченности последовательности $\{a^{r_n}\}$

$$\forall n, m \geq N \hookrightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| \leq 2a^M(a-1)|r_n - r_m| \qquad (*)$$

В силу фундаментальности последовательности $\{r_n\}$ и (*) $\Rightarrow$ последовательность $\{a^{r_n}\}$ фундаментальна $\Rightarrow$ в силу критерия Коши

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} =: a^x$$

Шаг 2:Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ сходящиеся к x. Тогда

$$|a^{r'_n} - a^{r''_n}| = a^{r'_n}|1 - a^{r''_n - r'_n}|$$

$$\exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \widetilde{N} \hookrightarrow |r''_n - r'_n| < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \widetilde{N} \hookrightarrow |a^{r'_n} - a^{r''_n}| \leq 2C(a-1)|r''_n - r'_n|$$

$$|a^{r'_n} - a^{r''_n}| \geq 0,\ 2C(a-1)|r''_n - r'_n| \to 0, n \to \infty$$

$\Rightarrow$ по теореме о двух милиционерах получаем требуемое
Шаг 3: Случай $a \in (0,1)$ сводится к предыдущему

$$a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r} \left(\text{так как } \frac{1}{a} = b > 1\right) \forall r \in \mathbb{Q}$$

(то есть, если $r_n \to x \Rightarrow -r_n \to -x$) □

Замечание 2.1. *Новое определение переходит в старое при $x \in \mathbb{Q}$.Рассмотрим стационарную последовательность $r_n = x$ $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$a^{r_n} \to a^x, n \to \infty$$

Теорема 2.4. *(Неравенство Бернулли upgrade)*

$$\forall a > 1\ \forall x \in [-1,1] \quad |a^x - 1| \leq 2|x|(a-1)$$

Доказательство. При $x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ доказано.
Если $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [-1,1]$ зафиксируем последовательность

$$\{r_n\} \subset \mathbb{Q} \cap [-1,1] : r_n \to x, n \to \infty$$

$$|a^{r_n} - 1| \leq 2|r_n|(a-1)$$

$|a^x - 1| = \lim\limits_{n\to\infty} |a^r - 1| \leq \lim\limits_{n\to\infty} 2|r_n|(a-1) = 2|x|(a-1)$(по теореме о предельном переходе в неравенстве)

□

Теорема 2.5. *(Следствие) $a^x, a > 0$ — функция, непрерывная на $\mathbb{R}$*

Доказательство. Рассмотрим $a = 1$ очевидно

$$1^x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим $a > 1$. Зафиксируем точку $x_o \in \mathbb{R}$.Если $|x - x_0| \leq 1$, то по неравенству Бернулли 2.4

$$0 \leq |a^x - a^{x_0}| \leq 2a^{x_0}(a-1)|x - x_0|$$

$$2a^{x_0}(a-1)|x - x_0| \to 0, x \to x_0$$

$$\Rightarrow \text{по теореме о двух милиционерах } a^x \to a^{x_0}, x \to x_0$$

Рассмотрим $a < 1$, то

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} \text{ — редукция к предыдущему случаю}$$

□

Теорема 2.6. *(свойства показательной функции) Пусть* $a > 0, a \neq 1$
1)a^x *строго возрастает при* $a > 1$
a^x *строго убывает при* $a \in (0, 1)$
2)$a^x \cdot a^y = a^{x+y}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
3)$(a^x)^y = a^{x \cdot y}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
4)$(bc)^x = b^x \cdot c^x\ \forall b, c > 0, b, c = 1$
5)$a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1) рассмотрим $a > 1$, так как при $a \in (0, 1)$ нужно рассмотреть $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ Пусть $x < y$. Покажем, что $a^x < a^y$. Фиксируем $p, q \in \mathbb{Q} : x < p < q < y$. Фиксируем последовательность $\{q_n\}, \{p_n\} \subset \mathbb{Q}$,такую что

$$p_n \to x, n \to \infty$$

$$x < p_n \leq p\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$q_n \to y, n \to \infty$$

$$q \leq q_n < y$$

$$a^{p_n} \leq a^p < a^q \leq a^{q_n}$$

$$\text{предельный переход в неравенствах } a^{p_n} \to a^x \text{ и } a^{q_n} \to a^y$$

$$\Rightarrow a^x \leq a_p < a^q \leq a^y \Rightarrow a^x < a^y$$

2)$r_n \to x, n \to \infty, \quad q_n \to y, n \to \infty$

$$\{r_n\}, \{q_n\} \subset \mathbb{Q}$$

$$a^x \cdot a^y = (\lim_{n\to\infty} a^{r_n}) \cdot (\lim_{n\to\infty} a^{q_n}) = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n} \cdot a^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n + q_n} = a^{x+y}$$

3)

$$r'_n \downarrow x, n \to \infty (\downarrow \text{ монотонно убывает и стремится к x})$$

$$r''_n \uparrow x, n \to \infty$$

$$\{r'_n\}, \{r''_n\} \subset \mathbb{Q}$$

$$t''_n \uparrow y, n \to \infty$$

$$t'_n \downarrow y, n \to \infty$$

$$a^{r''_n t''_n} = (a^{r''_n})^{t''_n} \leq (a^{r''_n})^y \leq (a^x)^y \leq (a^{r'_n})^y \leq (a^{r'_n})^{t'_n} = a^{r'_n t'_n}$$

$$a^{r''_n t''_n} \to a^{xy}, n \to \infty$$

$$a^{r'_n t'_n} \to a^{xy}, n \to \infty$$

4) Доказывается предельным переходом

$$r_n \to x, n \to \infty$$

$$(bc)^x = \lim_{n\to\infty}(bc)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} b^{r_n} \cdot c^{r_n} = b^x \cdot c^x$$

5)$p < x, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow 0 < a^p < a^x$ □

Лемма 2.1.

$$Im a^x = (0, +\infty)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$. По обобщённой теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$Ima^x = (\inf_{x\in\mathbb{R}} a^x, \sup_{x\in\mathbb{R}} a^x)$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} a^x = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} = 0$$

По неравенству Бернулли:

$$a^x \geq 1 + x(a-1) \to +\infty, x \to +\infty \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} a^x = +\infty$$

$\square$

Определение 2.2. *Пусть $a > 0, a \neq 1$. Тогда обратная функция к a^x строго возрастает при $a > 1$, строго убывает при $a \in (0,1)$, непрерывна на $(0, +\infty)$ и имеет областью значений $\mathbb{R}$. Эта функция называется $\log_a x$*

Теорема 2.7. *Свойства логарифмов:*
1)$a, b > 0$ $a, b \neq 1$ $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
2) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, a > 0, a \neq 1, y > 0, x > 0$
3) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \forall\alpha \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0$

Определение 2.3. *Функция $x^n, n \in \mathbb{N}$ определена на $\mathbb{R}$ и непрерывна на $\mathbb{R}$ как конечное произведение непрерывных функций.*

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n\ раз}$$

Рассмотрим $f(x) = x^n$ на луче $[0, +\infty)$. $f(x)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$

$$\inf_{x>0} x^n = 0, \textit{так как } 0 < q < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} q^k = 0$$

$$0 \leq \inf_{x>0} x^n \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2^n})^k \leq 0$$

$$\sup_{x>0} x^n = +\infty, \textit{так как } \lim_{k\to\infty} Q^k = +\infty$$

$$\Rightarrow Imf \subset [0, +\infty)$$

С другой стороны, по обобщённой теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\forall c \in (0, +\infty)\ \exists x_c\ ,\textit{такая что}(x_c)^n = c$$

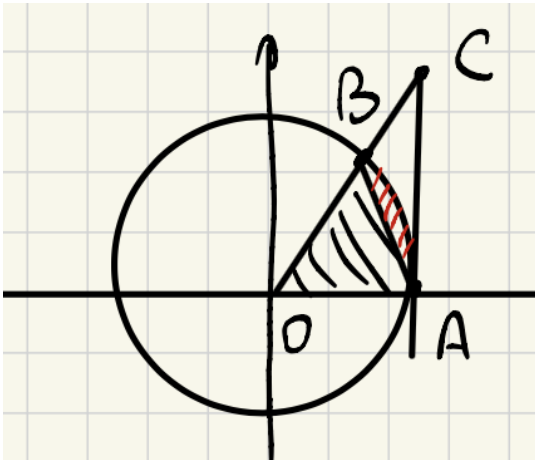
$$\Rightarrow [0, +\infty) \subset Imf \subset [0, +\infty) \Rightarrow Imf = [0, +\infty)$$

3 Замечательные пределы

Теорема 3.1. *(Первый замечательный предел)*

$$\exists \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$



$S_{OAB} < S_{\text{сект}} < S_{OAC}$

$$S_{OAB} = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\text{сект}} = \frac{x}{2}$$

$$S_{OAC} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \text{ в силу чётности } \cos x \text{ и } \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{так как } \cos x \text{ непрерывен в } 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□

Лемма 3.1. *Пусть* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность натуральных чисел, такая что*

$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$$

Тогда

$$\exists \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

Доказательство.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow (1 + \frac{1}{n})^n \in U_\varepsilon(e)$$

$$\lim_{k \to +\infty} n_k = +\infty \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \; \exists K(N) : \forall k \geq K(N) \hookrightarrow n_k \geq N$$

$$\text{В частности, при } N = N(\varepsilon) \text{ получим } \exists \widetilde{K}(\varepsilon) = K(N(\varepsilon))$$

$$\text{В итоге } \forall\varepsilon>0\ \exists\widetilde{K}(\varepsilon):\forall k\geq\widetilde{K}(\varepsilon)\hookrightarrow(1+\frac{1}{n_k})^{n_k}\in U_\varepsilon(e)$$

$$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k}=e$$

□

Теорема 3.2. *(Второй замечательный предел)*

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Доказательство. Шаг 1: Покажем, что

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Возьмём произвольную последовательность Гейне $\{x_k\}$ в нуле, такую что $x_k>0\ \forall k\in\mathbb{N}$

$$\exists K\in\mathbb{N}:\forall k\geq K\hookrightarrow x_k\in(0,1]$$

$$\frac{1}{x_k}\to+\infty,k\to+\infty$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad\exists n_k\in\mathbb{N}:\ \frac{1}{x_k}\in[n_k,n_k+1)$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\leq(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\leq\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

$$\text{так как }\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\to e,k\to\infty\ ,\text{а}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\to1,k\to\infty\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}\to e,k\to\infty$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\to e,k\to\infty\ ,\text{а}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\to1,k\to\infty\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\to e,k\to\infty$$

$$\text{По теореме о двух милиционерах }(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\to e,k\to\infty$$

Но последовательность Гейне $\{x_k\}$ была выбрана произвольно $\Rightarrow\forall$ последовательности Гейне в точке $x_0=0\ :x_k>0\ \forall k\in\mathbb{N}$

$$\hookrightarrow\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e\Rightarrow\exists\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Шаг 2: Рассмотрим последовательность Гейне $\{x_k\}$ такую что

$$x_k<0\ \forall k\in\mathbb{N}\text{ и }\lim_{k\to\infty}x_k=0\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}\text{ такой что }x_k\in(-1,0)\ \forall k\in\mathbb{N}$$

$$y_k:=\frac{-x_k}{1+x_k}\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

$$(1+y_k)(1+x_k)=1\ \forall k\in\mathbb{N}$$

$$x_k = \frac{-y_k}{1+y_k}$$

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \left(\frac{1}{1+y_k}\right)^{\frac{-(1+y_k)}{y_k}} = (1+y_k)^{\frac{1+y_k}{y_k}} = (1+y_k)^{\frac{1}{y_k}}(1+y_k)$$

$$y_k > 0\ \forall k \geq N$$

$$y_k \to +0, k \to \infty$$

$$(1+y_k)^{\frac{1}{y_k}} \to e, k \to \infty \text{ (по 1 шагу)}$$

$$(1+y_k) \to 1, k \to \infty$$

$$\Rightarrow (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} \to e, k \to \infty$$

$$\lim_{x \to -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

□

Теорема 3.3. *(Следствие 1 из второго замечательного предела)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 \quad (1+x > 0)$$

Доказательство. Сделаем редукцию ко второму замечательному пределу.

$$\frac{ln(1+x)}{x} = ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = ln(y(x))$$

$$y(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e, x \to 0$$

$$ln(y) \text{ непрерывна в точке } e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} ln(y(x)) = \lim_{y \to e} lny = 1$$

$$\Rightarrow \text{по второй теореме о пределе суперпозиции} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

□

Теорема 3.4. *(Следствие 2)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство.

$$y(x) = e^x - 1$$

$$x = ln(1 + y(x))$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{ln(1+y(x))}$$

$$y(x) \to 0, x \to 0$$

$$y(x) \neq 0 \text{ в проколотой окрестности } 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{ln(1+y(x))} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{ln(1+y)} = 1$$

□