Метрические пространства, нормированные пространства, евклидовы пространства. Критерий Йордана-Фон-Неймана евклидовости нормы. Компакты в метрических пространствах, лемма Гейне-Бореля.

1 Линейные пространства. Линейные нормированные пространства

Определение 1.1. *Множество E называется линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, а его элементы называются векторами, если введена операция сложения $"+": E \times E \to E$ и введена операция умножения на число $"\cdot": \mathbb{R} \times E \to E$, удовлетворяющие следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y \in E \hookrightarrow x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in E \hookrightarrow x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists \overline{0} \in E : \forall x \in E \hookrightarrow \overline{0} + x = x$
4. $\forall x \in E\ \exists (-x) \in E : x + (-x) = \overline{0}$
5. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
7. $\forall x \in E \hookrightarrow 1 \cdot x = x$
8. $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Лемма 1.1. $\forall x \in E \hookrightarrow 0 \cdot x = \overline{0}$

Доказательство. $0 \cdot x + x = (1 + 0)x = x \implies 0 \cdot x = \overline{0}$ □

Замечание 1.1. *Задать структуру линейного пространства означает задать множество и задать на нём линейные операции, которые удовлетворяют вышеописанным аксиомам.*

Пример 1.1. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ *— классический пример линейного пространства, представляющий собой строки из действительных чисел длины n. Сложение двух строк определяется следующим образом:*

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Умножение строки на число определяется так:

$$\alpha x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Несложно убедиться, что все аксиомы линейного пространства выполнены.

Определение 1.2. *Линейное пространство E называется бесконечномерным, если $\forall S \in \mathbb{N}$ в пространстве E существует S линейно независимых векторов.*

Пример 1.2. *Линейное пространство полиномов на $\mathbb{R}$. Сложение двух полиномов*

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} \cdot x^k, \quad P_2 = \sum_{k=0}^{l} a_{k,2} \cdot x^k, \quad l < n$$

определяется так:

$$P_1 + P_2 := \sum_{k=0}^{l} (a_{k,1} + a_{k,2}) x^k + \sum_{k=l+1}^{n} a_{k,1} x^k$$

Умножение полинома

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

на число определяется следующим образом:

$$\alpha P := \sum_{k=0}^{m} (\alpha a_k) x^k$$

Несложно убедиться, что все аксиомы линейного пространства выполнены. Более того, это пространство является бесконечномерным.

Определение 1.3. *Линейное нормированное пространство (л.н.п.) — это пара $(E, \|\cdot\|)$, где E — линейное пространство, $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ — норма, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $\forall x \in E \hookrightarrow \|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad \forall x \in E \hookrightarrow \|x\| = 0 \iff x = \overline{0}$

2. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3. $\forall x, y \in E \hookrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Пример 1.3. *Рассмотрим линейное нормированное пространство*

$$\mathbb{R}^n_p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p), \quad p \in [1, \infty]$$

Здесь:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty) \tag{$*$}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Первые две аксиомы нормы для $(*)$ очевидно выполнены. Справедливость последней следует из неравенства Минковского.

Определение 1.4 (Открытый шар)**.** *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Открытым шаром с центром в точке $x \in E$ радиуса $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ в этом л.н.п. будем называть следующее множество:*

$$B_r(x) := \{y \in E : \|y - x\| < r\}$$

Определение 1.5 (Замкнутый шар)**.** *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Замкнутым шаром с центром в точке $x \in E$ радиуса $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ в этом л.н.п. будем называть следующее множество:*

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in E : \|y - x\| \leq r\}$$

2 Евклидовы пространства

Определение 2.1. *Линейное пространство E наделяется структурой вещественного евклидова пространства, если в нем введено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y, z \in E \hookrightarrow \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2. $\forall x, y \in E \hookrightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle$

4. $\forall x \in E \hookrightarrow \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \forall x \in E \hookrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \overline{0}$

Пример 2.1. *Рассмотрим вновь линейное пространство $\mathbb{R}^n$. Введём на нём скалярное произведение следующим образом:*

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Проверим, что это действительно скалярное произведение. Для этого покажем, что все аксиомы для скалярного произведения выполнены:

1. $\langle x+y, z\rangle = (x_1+y_1)z_1 + \ldots + (x_n+y_n)z_n = (x_1z_1 + \ldots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \ldots + y_nz_n) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

2. $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + \ldots + y_nx_n = \langle y, x\rangle$

3. $\alpha\langle x, y\rangle = \alpha(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) = (\alpha x_1)y_1 + \ldots + (\alpha x_n)y_n = \langle \alpha x, y\rangle$

4. $\langle x, x\rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0 \quad \wedge \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = \ldots = x_n = 0 \iff x = \overline{0}$

Теорема 2.1 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Пусть $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Тогда:*

$$\forall x, y \in E \hookrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = \langle x+ty, x+ty\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. По свойствам скалярного произведения $\forall t \in \mathbb{R} \hookrightarrow g(t) \geq 0$. При этом всё также во свойствам скалярного произведения:

$$g(t) = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$$

Рассмотрим полученное выражение как квадратный трёхчлен относительно переменной t. По свойству выше он всегда неотрицателен, что возможно тогда и только тогда, когда его дискриминант не превосходит нуля, то есть:

$$4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$$

Легко видеть, что получили требуемое неравенство. □

Определение 2.2. *Пусть $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Следующая норма, порождённая скалярным произведением, называется евклидовой:*

$$\|x\|_e := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Теорема 2.2. *Пусть $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство. Тогда $\|x\|_e$ является нормой.*

Доказательство. Все аксиомы нормы, кроме неравенства треугольника, тривиально выполнены. Покажем, что справедливо и неравенство треугольника, то есть для $\forall x, y \in E$ выполнено:

$$\|x+y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e$$

В самом деле, рассмотрим следующее выражение:

$$\|x+y\|_e^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|_e^2 + \|y\|_e^2 + 2\langle x, y\rangle$$

Тогда по неравенству Коши-Буняковского-Шварца получим:

$$\|x+y\|_e^2 = \|x\|_e^2 + \|y\|_e^2 + 2\langle x, y\rangle \leq \|x\|_e^2 + \|y\|_e^2 + 2\|x\|_e\|y\|_e = (\|x\|_e + \|y\|_e)^2$$

Извлекая корень из обеих частей неравенства выше, получаем то, что и требовалось. □

Теорема 2.3 (Критерий Йордана-Фон-Неймана евклидовости нормы)**.** *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Норма $\|\cdot\|$ является евклидовой тогда и только тогда, когда выполнено тождество параллелограмма, то есть:*

$$\forall x, y \in E \hookrightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Доказательство. $(\Longrightarrow)$: Лёгкое упражнение на раскрытие скобочек и приведение подобных слагаемых.
$(\Longleftarrow)$: Для того, чтобы доказать требуемое, достаточно на основании данной нормы, удовлетворяющей тождеству параллелограмма, построить скалярное произведение, которым она будет порождаться. Покажем, что следующее скалярное произведение является таковым (нижеследующее тождество называется поляризационным):

$$\langle x, y\rangle := \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad \forall x, y \in E$$

Ясно, что:

$$\forall x \in E \hookrightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Значит достаточно убедиться, что это действительно скалярное произведение. Вторая и четвёртая аксиомы скалярного произведения тривиально выполнены. Далее рассмотрим произвольные $x, y, z \in E$ и выражение:

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \frac{\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2}{4} + \frac{\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2}{4} =$$

$$= \frac{\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right)}{4} = \frac{2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 - 2\left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right)}{8} =$$

$$= [\text{по тождеству параллелограмма}] = \frac{\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - \left(\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2\right)}{8} =$$

$$= \frac{\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2}{8} = \frac{\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2}{2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2}{4} = 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z\right\rangle$$

Из цепочки равенств выше заключаем, что:

$$\forall x, y, z \in E \hookrightarrow 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z\right\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \tag{1}$$

Тогда, подставляя в (1) значение $y = \overline{0}$, получим:

$$\forall x, z \in E \hookrightarrow \left\langle \frac{x}{2}, z\right\rangle = \frac{1}{2}\langle x, z\rangle \tag{2}$$

Коль скоро (2) справедливо $\forall x, z \in E$, используем это свойство в (1) и вынесем $\dfrac{1}{2}$ в левой части равенства. Получим:

$$\forall x, y, z \in E \hookrightarrow \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \tag{3}$$

Ясно, что получили свойство линейности скалярного произведения. Осталось лишь показать, что справедлива и третья аксиома скалярного произведения. Тривиально видеть, что из (2) и (3), посредством многократного их применения, следует, что:

$$\forall x, z \in E, \forall m, k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{k}{2^m}\langle x, z\rangle = \left\langle \frac{k}{2^m}x, z\right\rangle$$

Тогда для всякого двоично рационального $\alpha = \dfrac{k}{2^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ справедливость третьей аксиомы скалярного произведения показана. Рассмотрим теперь произвольное $\alpha \in \mathbb{R}$ и произвольную числовую последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\alpha_n \to \alpha$, $n \to \infty$. Рассмотрим также произвольные $x, y \in E$. Так как $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$, то из определения предела последовательности очевидно, что:

$$\alpha_n \langle x, y\rangle \to \alpha \langle x, y\rangle, \; n \to \infty$$

Покажем теперь, что выполнено также следующее:

$$\langle \alpha_n x, y\rangle \to \langle \alpha x, y\rangle, \; n \to \infty$$

Для этого в силу определения данного скалярного произведения достаточно показать, что:

$$\begin{cases} \|\alpha_n x + y\|^2 \to \|\alpha x + y\|^2, \; n \to \infty \\ \|\alpha_n x - y\|^2 \to \|\alpha x - y\|^2, \; n \to \infty \end{cases} \tag{$*$}$$

Ясно, что из неравенства треугольника следует:

$$\forall a, b \in E \hookrightarrow \|a - b\| + \|b\| \geq \|a\| \implies \|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$$

Из этого получаем, что:

$$\begin{cases} \Big| \|\alpha_n x + y\| - \|\alpha x + y\| \Big| \leq \|\alpha_n x + y - (\alpha x + y)\| = |\alpha_n - \alpha| \, \|x\| \to 0, \; n \to \infty \\ \\ \Big| \|\alpha_n x - y\| - \|\alpha x - y\| \Big| \leq \|\alpha_n x - y - (\alpha x - y)\| = |\alpha_n - \alpha| \, \|x\| \to 0, \; n \to \infty \end{cases}$$

Тривиально видеть, что из полученного выше по определению предела следует $(*)$, а значит требуемое доказано. Тогда положим в качестве $\{\alpha_n\}$ последовательность двоично рациональных чисел, сходящуюся к α (такая, очевидно, существует просто потому, что для всякого $\varepsilon > 0$ в ε окрестности α всегда лежит хотя бы одно двоично рациональное). По доказанному выше получаем, что:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \alpha_n \langle x, y\rangle = \langle \alpha_n x, y\rangle$$

Значит, переходя к пределу при $n \to \infty$, по доказанному получим:

$$\alpha \langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle$$

Но $\alpha \in \mathbb{R}$ было выбрано произвольно, а значит требуемое доказано. □

3 Метрические пространства

Определение 3.1. *Пара (X, d) называется метрическим пространством, если X — абстрактное множество, $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ — метрика, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y \in X \hookrightarrow d(x, y) \geq 0 \quad \wedge \quad \forall x, y \in X \hookrightarrow d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall x, y \in X \hookrightarrow d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X \hookrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Пример 3.1. *Положим $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Ясно, что все аксиомы метрики выполнены, а значит (X, d) — метрическое пространство.*

Теорема 3.1. *Линейное нормированное пространство* $(E, \|\cdot\|)$ *естественным образом становится метрическим, если положить:*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Доказательство. Первые две аксиомы метрики для d тривиально выполнены в силу аксиом нормы. Покажем, что справедливо также и неравенство треугольника. В самом деле:

$$\forall x, y, z \in E \hookrightarrow d(x, z) = \|x - z\| = \|x \pm y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

□

Пример 3.2. *Пусть* X *— абстрактное множество любой мощности.*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Несложно убедиться, что все аксиомы метрики для d *выполнены, а значит* (X, d) *— метрическое пространство. Такое пространство называется дискретным.*

Определение 3.2 (Открытый шар)**.** *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство. Открытым шаром с центром в точке* $x \in X$ *радиуса* $r \in \mathbb{R},\ r \geq 0$ *будем называть следующее множество:*

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Определение 3.3 (Замкнутый шар)**.** *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство. Замкнутым шаром с центром в точке* $x \in X$ *радиуса* $r \in \mathbb{R},\ r \geq 0$ *будем называть следующее множество:*

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Замечание 3.1. *Заметим, что в примере 3.2 всё пространство* X *есть шар любого радиуса* $r > 1$ *с центром в любой точке* $x \in X$*. Это означает, что в произвольном метрическом пространстве, вообще говоря, шар не обязательно однозначно задаётся своим центром и радиусом.*

Замечание 3.2. *В метрическом пространстве шар большего радиуса может строго содержаться в шаре меньшего радиуса. Действительно, рассмотрим метрическое пространство* (X, d) *такое, что* $X = [0, 1],\ d(x, y) = |x - y|$*. Тогда очевидно, что:*

$$B_{\frac{7}{8}}(1) = \left(\frac{1}{8}, 1\right]$$

$$B_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = [0, 1]$$

Из этого получаем, что:

$$B_{\frac{7}{8}}(1) \subset B_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Определение 3.4 (Предел последовательности)**.** *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$*. Будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел, равный* $x^* \in X$*, и записывать это*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^* \quad \vee \quad x_n \to x,\ n \to \infty$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in B_\varepsilon(x^*)$$

Определение 3.5 (Точка прикосновения). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$, $E \neq \varnothing$. Будем говорить, что x^* — точка прикосновения множества E, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x^*) \cap E \neq \varnothing$$

Определение 3.6 (Предельная точка). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$, $E \neq \varnothing$. Будем говорить, что x^* — предельная точка множества E, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(x^*) \cap E \neq \varnothing$$

Определение 3.7 (Изолированная точка). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$, $E \neq \varnothing$. Будем говорить, что x^* — изолированная точка множества E, если*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x^*) \cap E = \{x^*\}$$

Определение 3.8 (Последовательность Гейне). *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Будем говорить, что $\{x_n\} \subset X$ является последовательностью Гейне в точке x^*, если:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \neq x^*$$

Определение 3.9 (Предел по Коши). *Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — метрические пространства, $E \subset X_1$, $E \neq \varnothing$, $f\colon E \to X_2$. Пусть x_0 — предельная точка множества E. Будем говорить, что f имеет предел в точке x_0, равный $y_0 \in X_2$, и записывать это*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \vee \quad f(x) \to y_0,\ x \to x_0$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{B}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E \hookrightarrow f(x) \in B_\varepsilon(y_0)$$

Определение 3.10 (Предел по Гейне). *Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — метрические пространства, $E \subset X_1$, $E \neq \varnothing$, $f\colon E \to X_2$. Пусть x_0 — предельная точка множества E. Будем говорить, что f имеет предел в точке x_0, равный $y_0 \in X_2$, и записывать это*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \vee \quad f(x) \to y_0,\ x \to x_0$$

если для любой последовательности Гейне $\{x_n\} \subset E$ в точке x_0 выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Определение 3.11 (Непрерывность по множеству). *Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — метрические пространства, $E \subset X_1$, $E \neq \varnothing$, $f\colon E \to X_2$, $x_0 \in E$. Будем говорить, что отображение f непрерывно в точке x_0 по множеству E, если:*

1. *x_0 — изолированная точка множества E.*

2. *x_0 — предельная точка множества E и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

4 Топология метрического пространства

Определение 4.1 (Внутренняя точка). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Будем говорить, что $x_0 \in E$ — внутренняя точка множества E, если:*

$$\exists r > 0 : B_r(x_0) \subset E$$

Определение 4.2 (Внутренность)**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Внутренность множества E — это множество, состоящее из всех внутренних точек множества E. Обозначается $int(E)$.*

Определение 4.3 (Замыкание)**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Замыкание множества E — это множество всех точек прикосновения множества E. Обозначается $cl(E)$.*

Лемма 4.1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Тогда:*

$$int(E) \subset E \subset cl(E)$$

Доказательство. Каждая точка E является по определению его точкой прикосновения, а все точки внутренности E не только принадлежат E, но и входят в него с целой окрестностью. Из этого тривиально получаем требуемое. □

Определение 4.4 (Открытое множество)**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $E \subset X$ называется открытым, если каждая его точка есть его внутренняя точка, то есть $int(E) = E$.*

Определение 4.5 (Замкнутое множество)**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $E \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения, то есть $cl(E) = E$.*

Замечание 4.1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. По определению $\varnothing$ и X открыты и замкнуты одновременно.*

Замечание 4.2. *Бывают множества, которые не открыты и не замкнуты одновременно. Действительно, положим $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ и рассмотрим множество $\mathbb{Q}$. Ясно, что $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, и при этом любая окрестность точки из $\mathbb{Q}$ не может в него полностью вкладываться. Значит оно одновременно не открыто и не замкнуто.*

Замечание 4.3. *Бывают множества, которые открыты и замкнуты одновременно. В самом деле, положим $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $d(x, y) = |x - y|$ и рассмотрим два множества $E_1 = [0, 1]$ и $E_2 = [2, 3]$. Очевидно, что E_1 и E_2 — замкнуты. При этом E_1 и E_2 — открыты. Действительно, любая точка $(0, 1)$ внутренняя для E_1, и при этом*

$$\begin{cases} \exists \varepsilon = 1 > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(0) = [0, 1) \subset [0, 1] \\ \exists \varepsilon = 1 > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(1) = (0, 1] \subset [0, 1] \end{cases}$$

Аналогично открытость проверяется и для E_2, а значит E_1 и E_2 — открыты и замкнуты одновременно.

Определение 4.6. *Метрическое пространство (X, d) называется топологически связным, если его нельзя представить в виде дизъюнктного объединения двух открыто-замкнутых множеств.*

Лемма 4.2. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда $\forall x \in X, \forall r > 0$ открытый шар $B_r(x)$ является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть $y \in B_r(x)$, то есть $d(x, y) < r$. Рассмотрим

$$\delta = \frac{r - d(x, y)}{2}$$

Покажем, что $B_\delta(y) \subset B_r(x)$. В самом деле, пусть $z \in B_\delta(y)$. Увидим, что тогда $z \in B_r(x)$. По неравенству треугольника имеем:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = d(x, y) + \frac{r - d(x, y)}{2} = \frac{r + d(x, y)}{2} < r$$

Из цепочки неравенств выше тривиально видеть, что получили требуемое. □

Лемма 4.3. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $E_1, E_2 \subset X$*. Тогда:*

$$E_1 \subset E_2 \implies int(E_1) \subset int(E_2)$$

Доказательство. Так как $E_1 \subset E_2$, то любая внутренняя точка для E_1 является внутренней и для E_2, откуда тривиально следует требуемое. □

Теорема 4.1. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $E \subset X$*. Тогда:*

1. $int(E)$ *— открытое множество.*

2. $cl(E)$ *— замкнутое множество.*

Доказательство. Если $E = \varnothing$, то утверждение очевидно. Далее считаем, что $E \neq \varnothing$.
(1) : Пусть $x_0 \in int(E)$. Тогда по определению $\exists r > 0 : B_r(x) \subset E$. Отсюда по лемме 4.3 получаем, что:

$$int(B_r(x_0)) \subset int(E)$$

Но по лемме 4.2 открытый шар является открытым множеством. Следовательно:

$$B_r(x_0) \subset int(E)$$

Но $x_0 \in int(E)$ было выбрано произвольно. Значит $int(E)$ — открыто, что и требовалось.
(2) : Пусть x_0 — точка прикосновения множества $cl(E)$. Покажем, что $x_0 \in cl(E)$. Зафиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. По определению точки прикосновения:

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap cl(E) \neq \varnothing \implies \exists y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap cl(E)$$

Но y принадлежит замыканию E, а значит y является точкой прикосновения множества E. Тогда:

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap E \neq \varnothing \implies \exists z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap E$$

Отсюда по неравенству треугольника:

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит окончательно в силу произвольного выбора $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in B_\varepsilon(x_0) \cap E \implies \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing$$

Из полученного выше условия заключаем по определению, что x_0 — точка прикосновения множества E, а значит $x_0 \in cl(E)$, что и требовалось. □

Замечание 4.4. *Замкнутый шар в метрическом пространстве не всегда совпадает с замыканием открытого шара с тем же центром и радиусом. В самом деле, положим* $X = [0, 1] \cup \{2\}$, $d(x, y) = |x - y|$ *и рассмотрим* $B_1(1) = (0, 1]$*. Ясно, что* $cl(B_1(1)) = [0, 1]$*. Но при этом* $\overline{B}_1(1) = X$*.*

Лемма 4.4. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство. Пусть* $E \subset X$*. Тогда:*

1. $X \setminus cl(E) = int(X \setminus E)$

2. $X \setminus int(E) = cl(X \setminus E)$

Доказательство. Докажем (2), так как (1) доказывается аналогично. Пусть $x^* \in X \setminus int(E)$. Это равносильно:

$$\begin{cases} x^* \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x^*) \not\subset E \end{cases} \iff \begin{cases} x^* \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x^*) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing \end{cases}$$

Полученное, в свою очередь, равносильно тому, что x^* — точка прикосновения для множества $X \setminus E$, откуда немедленно $x^* \in cl(X \setminus E)$, что и требовалось. □

Теорема 4.2 (Следствие). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Множество E открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus E$ — замкнуто.*

Доказательство. $(\Longrightarrow)$: Так как E — открыто, то оно совпадает со своей внутренностью, то есть $E = int(E)$. Но тогда по лемме 4.4:

$$X \setminus int(E) = X \setminus E = cl(X \setminus E)$$

Тогда $X \setminus E$ совпадает со своим замыканием, а значит оно по определению замкнуто, что и требовалось.
$(\Longleftarrow)$: Так как $X \setminus E$ — замкнуто, то оно совпадает со своим замыканием, то есть $X \setminus E = cl(X \setminus E)$. Но тогда по лемме 4.4:

$$X \setminus cl(X \setminus E) = X \setminus (X \setminus E) = E = int(X \setminus (X \setminus E)) = int(E)$$

Тогда E совпадает со своей внутренностью, а значит оно по определению открыто, что и требовалось. □

Лемма 4.5 (Критерий точки прикосновения и критерий предельной точки). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$, $E \neq \varnothing$.*

1. x_0 является точкой прикосновения множества E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x_n\} \subset E : x_n \to x_0,\ n \to \infty$$

2. x_0 является предельной точкой множества E тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x_n\} \subset E : x_n \to x_0,\ n \to \infty \quad \wedge \quad x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству в случае $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. □

Определение 4.7 (Граница множества). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Границей множества E будем называть следующее множество:*

$$\partial E := cl(E) \setminus int(E)$$

Пример 4.1. *Положим $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $E = [0, 1]$. Тогда $\partial E = \{0\} \cup \{1\}$.*

Теорема 4.3 (Критерий граничной точки). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Тогда:*

$$x_0 \in \partial E \iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \begin{cases} B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing \\ B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing \end{cases}$$

Доказательство.

$$x_0 \in \partial E \iff \begin{cases} x_0 \in cl(E) \\ x_0 \notin int(E) \end{cases} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing \\ \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow B_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing \end{cases}$$

□

Определение 4.8. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $E \subset X$ называется ограниченным, если:*

$$\exists R > 0,\ \exists x^* \in X : E \subset B_R(x^*)$$

Определение 4.9. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $E \subset X$ называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть в E, то есть:*

$$\exists \{x_i\}_{i=1}^N \subset E : E \subset \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i)$$

Лемма 4.6. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Если $E \subset X$ вполне ограниченно, то оно ограниченно.*

Доказательство. Так как E вполне ограниченно, то по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. В частности, при $\varepsilon = 1$ получим:

$$\exists x_1, \dots, x_N \in E : E \subset \bigcup_{i=1}^N B_1(x_i)$$

Положим

$$M := \max_{1 \le i,j \le N} d(x_i, x_j) + 1$$

Тогда покажем, что $E \subset B_M(x_1)$. В самом деле, рассмотрим произвольное $z \in E$. Так как множество E покрыто шарами единичного радиуса, то:

$$\exists j \in \{1, \dots, N\} : z \in B_1(x_j)$$

Но тогда по неравенству треугольника получим:

$$d(x_1, z) \le d(x_1, x_j) + d(x_j, z) < (M - 1) + 1 < M$$

Но $z \in E$ было выбрано произвольно, а значит E целиком вкладывается в шар радиуса M с центром в точке x_1. Следовательно, E по определению ограниченно, что и требовалось. $\square$

Замечание 4.5. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Из того, что множество $E \subset X$ является ограниченным, не следует, что оно является вполне ограниченным. Действительно, в качестве примера положим*

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : x \text{ — ограниченная последовательность}\}, \quad d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$$

Первые две аксиомы метрики тривиально выполнены. Покажем, что справедливо и неравенство треугольника. В самом деле, пусть $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, $z = \{z_i\}$ — три произвольно выбранные ограниченные последовательности из X. Тогда:

$$\forall i \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_i - z_i| = |x_i \pm y_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

Так как неравенство выше выполнено для всех $i \in \mathbb{N}$, то зафиксируем некоторое произвольное i у выражений $|x_i - z_i|$ и $|x_i - y_i|$, а для $|y_i - z_i|$ возьмём $\sup$ по всем $i \in \mathbb{N}$. Тогда нестрогое неравенство, очевидно, не испортиться, и при этом получим следующее:

$$\forall i \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i - z_i|$$

Далее фиксируем i только у левой части неравенства, а для $|x_i - y_i|$ берём $\sup$ по всем $i \in \mathbb{N}$:

$$\forall i \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_i - z_i| \le \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i - z_i|$$

Наконец, берём sup *уже и в левой части неравенства, то есть окончательно:*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i - z_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i - y_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}}|y_i - z_i|$$

Легко видеть, что справедливость неравенства треугольника доказана. Далее определим следующие точки (нули на всех местах, кроме k*-ого):*

$$e^k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

Очевидно, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow d(e^k, 0) = 1$*. Рассмотрим тогда множество* $E = \{e^k\}_{k=1}^{\infty}$*. Легко видеть, что* E *— ограниченно, так как* $E \subset B_2(0)$ *из полученного выше. Но* E *не является вполне ограниченным. В самом деле, положим* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *и рассмотрим* $\{e^k\}_{k=1}^{N}$ *— некоторое произвольное конечное подмножество* E*. Заметим, что:*

$$e^{N+1} \notin \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{2}}(e^i)$$

Действительно:

$$d(e^{N+1}, e^i) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\left|e_j^{N+1} - e_j^i\right| = 1 > \frac{1}{2}$$

Из полученного легко видеть, что для E *не существует конечной* $\frac{1}{2}$*-сети, что и требовалось.*

Определение 4.10 (Компакт)**.** *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство. Множество* $K \subset X$ *называется компактом, если для любой последовательности в* K *существует её подпоследовательность такая, что она сходится в* K*, то есть:*

$$\forall\{x_n\} \subset K\ \exists\{x_{n_j}\} \subset K, \exists x^* \in K : x_{n_j} \to x^*, j \to \infty$$

Теорема 4.4. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $K \subset X$ *— компакт. Тогда* K *является вполне ограниченным множеством.*

Доказательство. Считаем, что $K \neq \varnothing$, так как иначе утверждение очевидно. Предположим от противного, что K не является вполне ограниченным множеством. Это равносильно тому, что существует $\underline{\varepsilon} > 0$ такой, что для любого конечного набора точек $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset K$ выполнено:

$$K \not\subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\underline{\varepsilon}}(x_i)$$

Будем индуктивно строить последовательность. Пусть $x_1 \in K$ — произвольная точка компакта. Из условия выше ясно, что $B_{\underline{\varepsilon}}(x_1)$ не покрывает K. Значит $\exists x_2 \in K \setminus B_{\underline{\varepsilon}}(x_1)$. Но вновь из условия выше получаем, что $B_{\underline{\varepsilon}}(x_1) \cup B_{\underline{\varepsilon}}(x_2)$ тоже не покрывает K. Тогда $\exists x_3 \in K \setminus (B_{\underline{\varepsilon}}(x_1) \cup B_{\underline{\varepsilon}}(x_2))$. Положим это **базой** индукции.
Рассуждая по индукции, предположим, что построено $N \in \mathbb{N}$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ таких, что:

$$K \not\subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\underline{\varepsilon}}(x_i)$$

Тогда:

$$\exists x_{N+1} \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_{\underline{\varepsilon}}(x_i)$$

Из предположения опять же получаем, что набор $x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}$ всё равно не является конечной $\underline{\varepsilon}$-сетью для K.
Итого, получили последовательность $\{x_i\} \subset K$ такую, что:

$$\forall l \in \mathbb{N} \hookrightarrow K \not\subset \bigcup_{i=1}^{l} B_{\underline{\varepsilon}}(x_i)$$

Покажем, что из такой последовательности нельзя выделить сходящуюся в K подпоследовательность. Действительно, по построению последовательности получаем, что:

$$\forall l \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{l+1} \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{l} B_{\underline{\varepsilon}}(x_i)$$

Из этого очевидно следует:

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : i \neq j \hookrightarrow d(x_i, x_j) \geq \underline{\varepsilon}$$

Но тогда тривиально видеть, что никакая подпоследовательность последовательности $\{x_j\} \subset K$ не может сходиться вовсе. Получаем противоречие с определением компакта, а значит требуемое доказано. $\square$

Определение 4.11 (Покрытие). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система подмножеств X. Будем говорить, что система множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ является покрытием множества E, если:*

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

Определение 4.12 (Подпокрытие). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — покрытие множества E. Система $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ называется подпокрытием покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, если:*

$$J \subset I \quad \wedge \quad E \subset \bigcup_{\beta \in J} U_\beta$$

Определение 4.13 (Открытое покрытие). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $E \subset X$. Покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ множества E называется открытым покрытием множества E, если $\forall \alpha \in I$ верно, что U_α — открытое множество.*

Теорема 4.5 (Лемма Гейне-Бореля 2.0). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $K \subset X$ — компакт. Тогда для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ множества K существует конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{N}$ множества K.*

Доказательство. Из теоремы 4.4 получаем, что K — вполне ограниченное множество. Значит $\forall n \in \mathbb{N}$ существует конечная $\frac{1}{n}$-сеть $\{z_n(1), \ldots, z_n(N)\}$. Предположим, что существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, из которого нельзя извлечь конечного подпокрытия. Тогда для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ существует шар $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i))$, где $i \in \{1, \ldots, N\}$, такой, что из покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ нельзя извлечь конечного подпокрытия для $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i)) \cap K$. В самом деле, если бы такой шар не нашёлся, то для всякого шара $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i))$ было бы выполнено, что из покрытия $B_{\frac{1}{n}}(z_n(i)) \cap K$ множествами $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ можно извлечь конечное подпокрытие. Но таких шаров лишь конечное число и объединение этих шаров покрывает K, а значит из покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ можно извлечь конечное подпокрытие для K, что противоречит предположению. Получается, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z_n \in K$ такая, что $B_{\frac{1}{n}}(z_n) \cap K$ не может быть покрыто никаким конечным набором множеств из системы $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Отсюда получаем последовательность $\{z_n\} \subset K$. По определению компакта существует подпоследовательность $\{z_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$

последовательности $\{z_n\}$ сходящаяся к некоторой точке $z^* \in K$. Но z^* лежит в компакте и $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покрывает K, а значит $\exists \alpha^* \in A$ такое, что $z^* \in U_{\alpha^*}$. Но U_{α^*} — открытое множество. Тогда

$$\exists \varepsilon^* > 0 : B_{\varepsilon^*}(z^*) \subset U_{\alpha^*}$$

Но $z_{n_m} \to z^*,\ m \to \infty$, а значит по определению предела последовательности:

$$\exists M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M \hookrightarrow \begin{cases} d(z^*, z_{n_m}) < \dfrac{\varepsilon^*}{4} \\ \dfrac{1}{n_m} < \dfrac{\varepsilon^*}{4} \end{cases}$$

Заметим, что тогда при $m \geq M$:

$$B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset B_{\varepsilon^*}(z^*)$$

Действительно, по неравенству треугольника:

$$\forall z \in B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \hookrightarrow d(z, z^*) \leq d(z, z_{n_m}) + d(z_{n_m}, z^*) < \frac{1}{n_m} + \frac{\varepsilon^*}{4} < \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{\varepsilon^*}{4} = \frac{\varepsilon^*}{2} \implies z \in B_{\varepsilon^*}(z^*)$$

Но тогда:

$$B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m}) \subset B_{\varepsilon^*}(z^*) \subset U_{\alpha^*}$$

Получили, что $B_{\frac{1}{n_m}}(z_{n_m})$ покрыт лишь одним множеством U_{α^*} из системы $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что, очевидно, противоречит процедуре выбора шаров. Значит исходное предположение неверно и требуемое доказано. □

Теорема 4.6. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $K \subset X$ — компакт. Тогда K ограничен и замкнут.*

Доказательство. Так как K — компакт, то по теореме 4.4 он вполне ограничен, а значит по лемме 4.6 он ограничен. Покажем, что K — замкнуто. От противного предположим, что $\exists x^* \notin K$ такая, что x^* — точка прикосновения для множества K. Тогда по критерию точки прикосновения существует последовательность $\{x_n\} \subset K$ такая, что $x_n \to x^*,\ n \to \infty$. Следовательно, любая подпоследовательность $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}$ сходится к x^*. Но это противоречит определению компакта в силу того, что $x^* \notin K$ и не существует подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$, которая сходилась бы в K. Из полученного заключаем, что требуемое доказано. □