

Подпоследовательности, частичные пределы.
Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теоремы о
верхнем и нижнем частичных пределах.
Критерий Коши существования конечного
предела последовательности.

1 Подпоследовательности, частичные пределы

Определение 1.1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность. Будем говорить, что $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, такая что

$$\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} = y_k$$

Определение 1.2. Будем говорить, что $A \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такая что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$$

Определение 1.3. $PL(\{x_n\}) = \{L \in \mathbb{R} : L\text{—частичный предел } \{x_n\}\}$ — множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 1.1. (критерий частичного предела)

Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $A \in \overline{\mathbb{R}}$ — частичный предел $\{x_n\}$
- 2) $\forall \varepsilon > 0$ в $U_{\varepsilon}(A)$ содержится значение бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n = n(\varepsilon, N) \geq N : x_n \in U_{\varepsilon}(A)$

Доказательство. 1) \Rightarrow 2)

Пусть A — частичный предел $\Rightarrow \exists$ строго возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, такая что

$$x_{n_k} \rightarrow A, k \rightarrow \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\varepsilon}(A)$$

но \exists бесконечно много натуральных чисел $\geq K(\varepsilon) \Rightarrow \{n_k : k \geq K(\varepsilon)\}$ — бесконечно $\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\varepsilon}(A)\}$ — бесконечное множество

2) \Rightarrow 3)

$\forall \varepsilon > 0$ пусть I_{ε} — все такие $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \in U_{\varepsilon}(A) \quad \forall n \in I_{\varepsilon}$

2) $\Leftrightarrow I_{\varepsilon}$ — бесконечное множество $\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in I_{\varepsilon}$ такой что $n \geq N$

(Действительно, если предположить противное, то получим, что I_{ε} — конечное множество, что неверно)

Итого $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in I_{\varepsilon}$ такой что $n \geq N \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} : \exists n(\varepsilon, N) \geq N : x_n \in U_{\varepsilon}(A)$

3) \Rightarrow 1)

Построим строго возрастающую последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N} : \{x_{n_k}\} \rightarrow A, k \rightarrow \infty$

$n_1 = n(1, 1)$ такой что $n_1 \geq 1$ и $x_{n_1} \in U_1(A)$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad N = n_1 + 1 \Rightarrow$ в силу п.3) найдётся $n_2 \geq n_1 + 1$ и при этом $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(A)$

пусть определены индексы $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ и $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A)$

$n_{k+1} = n(\frac{1}{k+1}, n_k + 1) \Rightarrow n_{k+1} \geq n_k + 1 \quad x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k+1}}(A)$

Итого $\forall k \in \mathbb{N}$ определены натуральные индексы n_k , такие что

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$U_{\frac{1}{k+1}} \subset U_{\frac{1}{k}}(A) \Rightarrow \forall j \geq k \quad x_{n_j} \in U_{\frac{1}{k}}(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A) \subset U_{\frac{1}{K(\varepsilon)}}(A) \subset U_{\varepsilon}(A) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\varepsilon}(A) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A \hookrightarrow A\text{—частичный предел}$$

□

Теорема 1.2. Пусть $A \in \bar{\mathbb{R}}$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. Тогда \forall подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A)$

Ключевое наблюдение: так как $\{n_k\}$ — строго возрастающая, то $n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) = N(\varepsilon) : \forall k \geq K(\varepsilon) \rightarrow n_k \geq k \geq K(\varepsilon) = N(\varepsilon) \Rightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$ \square

Теорема 1.3. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\{+\infty\}$ является её частичным пределом. Если $\{x_n\}$ неограничена снизу, то $\{-\infty\}$ является её частичным пределом.

Доказательство. Докажем для случая неограниченности сверху, так как для неограниченности снизу аналогично.

Последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_{(N_\varepsilon)} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ключевой момент: Пусть N — произвольное натуральное число, а также $\{y_n\} = \{x_{n+N}\}$.

Тогда $\{y_n\}$ неограничена сверху $\Leftrightarrow \{x_n\}$ неограничена сверху. Значит $\forall N \in \mathbb{N} \rightarrow \{x_{n+N}\}$ неограничена сверху. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_{N(\varepsilon)+N} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n(\varepsilon, N) \geq N : x_{n(\varepsilon, N)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Тогда по критерию частичного предела $+\{\infty\}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. \square

2 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2.1. (Больцано-Вейерштрасса) \forall ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы 1 конечный частичный предел.

Доказательство.

$$\{x_n\} \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists M > 0 : |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Положим $I_0 = [-M, M]$. Поделим отрезок I_0 пополам и выберем ту половину, в которой содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$. Такая половина обязательно найдется, так как если предположить противное, то получим, что в каждой половине содержатся значения лишь конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$. Тогда и в I_0 содержатся значения лишь конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$, а это противоречит (*). Если такая половина не единственна, то выберем любую. Выбранную половину отрезка I_0 обозначим I_1 . Получим базу индукции.

Шаг: предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ построены вложенные отрезки $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_k$, и притом $l(I_j) = l(I_0) \cdot 2^{-j} \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}$

При этом в каждом из отрезков содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$. Поделим отрезок I_k пополам и выберем такую половину, в которой содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$. Такую половину обозначим I_{k+1} .

Итого, построена последовательность вложенных отрезков, которая является стягивающейся, так как

$$\frac{l(I_0)}{2^k} \leq \frac{l(I_0)}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$$

При этом $\forall k \in \mathbb{N}$ на отрезке I_k содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$.

По теореме Кантора $\exists c \in \mathbb{R} : \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{c\}$. Покажем, что c — частичный предел последовательности $\{x_n\}$.

Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. Так как $\frac{l(I_0)}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, то $\exists k^* \in \mathbb{N}$ такой, что

$$l(I_{k^*}) = \frac{l(I_0)}{2^{k^*}} \leq \frac{l(I_0)}{k^*} < \varepsilon$$

Но тогда, так как $c \in I_{k^*} \subset U_\varepsilon(c)$ и в I_{k^*} содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$, то и в $U_\varepsilon(c)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}$. Но $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно. Тогда по критерию частичного предела c — частичный предел.

□

3 Теоремы о верхнем и нижнем частичных пределах

Определение 3.1. (*Обобщённый sup и обобщённый inf*) Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, E \neq \emptyset$. Тогда

$$M \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{если } \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \hookrightarrow x \leq M \\ \forall M' < M \quad \exists x(M') \in E : x(M') > M' \end{cases}$$

$$m \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{если } \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \hookrightarrow x \geq m \\ \forall m' > m \quad \exists x(m') \in E : x(m') < m' \end{cases}$$

Определение 3.2.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup \text{PL}(\{x_n\}) — \text{верхний предел } \{x_n\}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf \text{PL}(\{x_n\}) — \text{нижний предел } \{x_n\}$$

Теорема 3.1. (*о принадлежности верхнего и нижнего пределов множеству PL*) Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Тогда

$$M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{PL}(\{x_n\})$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{PL}(\{x_n\})$$

Доказательство. Докажем для верхнего, так как для нижнего аналогично.

По определению обобщённого sup :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M) : c \in \text{PL}(\{x_n\})$$

По критерию частичного предела в $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(c)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$, притом

$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(c) \subset U_\varepsilon(M), \text{ так как } c \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M).$$

Тогда в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$.

Но $\varepsilon > 0$ был выбран произвольно $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$.

Тогда по критерию частичного предела M — частичный предел $\{x_n\} \Leftrightarrow M \in \text{PL}(\{x_n\})$

□

Замечание 3.1. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность.

$$\sup_{k \geq n} x_k := \sup\{x_k : k \geq n\}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k := \inf\{\sup\{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

Теорема 3.2. (Эквивалентное определение верхнего и нижнего пределов) Пусть $\{x_n\}$ — произвольная числовая последовательность. Тогда:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k \quad u \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$$

Доказательство. (докажем для верхнего, так как для нижнего аналогично)

Пусть $y_n = \sup_{k \geq n} x_k \forall n \in \mathbb{N}$.

Шаг 0: Пусть $y_n = \sup_{k \geq n} x_k = +\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Заметим, что утверждение выше равносильно:

$$\exists n^* \in \mathbb{N} : y_{n^*} = +\infty$$

Докажем это: \Rightarrow очевидно

\Leftarrow заметим, что $\{x_k : k \geq n\}$ и $\{x_k : k \geq n^*\}$ отличаются лишь на конечное число элементов. Тогда $\inf_{n \in \mathbb{N}} y_n = +\infty$. Покажем, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq +\infty$$

Установим противоположное неравенство. По определению *sup*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \geq n : x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{но } y_n = +\infty \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_\varepsilon \geq n : x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит $+\infty$ — частичный предел $\{x_n\} \Rightarrow \sup PL(\{x_n\}) \geq +\infty$. Тогда $\sup PL(\{x_n\}) = +\infty = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Шаг 1: $y_n < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$.

$$-\infty < y_n = \sup_{k \geq n} x_k < +\infty \forall n \in \mathbb{N}.$$

Числовая последовательность $\{y_n\}$ монотонна: $y_{n+1} \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n$$

Шаг 2: Установим неравенство: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n$. Так как верхний предел является частичным пределом, то

$$\exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} : \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

При этом заметим, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad x_{n_j} \leq y_{n_j} = \sup_{k \geq n_j} x_k \tag{1}$$

Но

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n.$$

Тогда перейдём к пределу в (1) и получим:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n.$$

Шаг 3: Установим противоположное неравенство:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k \quad (2)$$

Достаточно показать, что $M = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$ — частичный предел $\{x_n\}$.

По определению \inf и того, что $\{y_n\}$ — монотонна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M)$$

По определению $\{y_n\} : y_n = \sup_{k \geq n} x_k$. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n x_k \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_n)$$

Но

$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_n) \subset U_\varepsilon(M) \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists k = \max\{n, N(\varepsilon)\} : x_k \in U_\varepsilon(M)$$

Тогда по критерию частичного предела M — частичный предел $\{x_n\} \Rightarrow (2)$ доказано. Итого:

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$$

□

Теорема 3.3. (о единственном частичном пределе) Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, $A \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$
- 2) $\text{PL}(\{x_n\}) = \{A\}$
- 3) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

Доказательство. 1) \Rightarrow 2)

Пусть $\{x_{n_k}\}$ — произвольная подпоследовательность $\{x_n\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A)$$

так как $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то

$$\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow n_k \geq k \Rightarrow \text{при } k \geq N(\varepsilon) n_k \geq k \geq N(\varepsilon)$$

Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$$

Так как последовательность $\{x_{n_k}\}$ произвольная, то $\forall \{x_{n_k}\} \hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A \Rightarrow A$ единственный частичный предел $\Rightarrow \text{PL}(\{x_n\}) = \{A\}$

2) \Rightarrow 3)

Очевидно по определению верхнего и нижнего пределов

3) \Rightarrow 1)

Рассмотрим несколько случаев: 1) $A \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме об эквивалентном определении верхнего и нижнего пределов получим:

$$\begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k \end{cases}$$

Пусть:

$$\begin{aligned} y_n &= \sup_{k \geq n} x_k \in \mathbb{R}, \\ z_n &= \inf_{k \geq n} x_k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — числовые последовательности и $\{y_n\}$ нестрого убывает, а $\{z_n\}$ нестрого возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$$

К тому же

$$z_n \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда по теореме о двух милиционерах

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

2) Рассмотрим случай $A = +\infty$, так как для $A = -\infty$ аналогично. По условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

Тогда

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k = +\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} z_n$$

Но $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность \Rightarrow по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} z_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \rightarrow z_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Тогда по определению $\{z_n\}$ выполнено:

$$x_k > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall k \geq n$$

Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq N(\varepsilon) \rightarrow x_k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

□

4 Критерий Коши существования конечного предела последовательности

Определение 4.1. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши.

Условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Лемма 4.1. Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство. По условию Коши:

$$\text{при } \varepsilon = 1 : \exists N(1) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(1) \hookrightarrow |x_n - x_m| < 1$$

В частности, при $m = N(1)$ получим:

$$\forall n \geq N(1) \hookrightarrow |x_n - x_{N(1)}| < 1$$

Тогда при $n \geq N(1)$ по неравенству треугольника:

$$|x_n| - |x_{N(1)}| \leq |x_n - x_{N(1)}| < 1 \Rightarrow \forall n \geq N(1) \hookrightarrow |x_n| < |x_{N(1)}| + 1$$

Положим

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(1)}|, |x_{N(1)}| + 1\}$$

Итого:

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} \text{—ограничена}$$

□

Теорема 4.1. (критерий Коши) Числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \{x_n\}$ — фундаментальна.

Доказательство. Необходимость: пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Покажем, что $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши.

Так как $\{x_n\}$ сходится, то

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \wedge \forall m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Но тогда по неравенству треугольника

$$\hookrightarrow |x_n - x| + |x - x_m| \geq |(x_n - x) + (x - x_m)| = |x_n - x_m|$$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Достаточность: пусть выполнено условие Коши для последовательности $\{x_n\}$. По доказанной выше лемме $\{x_n\}$ ограничена. Но тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса у последовательности $\{x_n\}$ \exists конечный частичный предел.

То есть $\exists x \in \mathbb{R}$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_{n_k}| < \varepsilon$$

Так как для последовательности $\{x_n\}$ выполнено условие Коши, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Положим $L(\varepsilon) := \max\{N(\varepsilon), K(\varepsilon)\}$.

$$\text{Для } k \geq L(\varepsilon) \hookrightarrow n_k \geq k \geq L(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$$

$$\text{и } \begin{cases} |x - x_{n_k}| < \varepsilon \\ |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{cases}$$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \wedge \forall k \geq L(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Но тогда по неравенству треугольника

$$|x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| \geq |(x - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x_n)| = |x - x_n|$$

Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x - x_n| < 2\varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ сходится}$$

□