Эйлеровы маршруты. Критерий эйлеровости графа. Гамильтоновы маршруты. Двудольный граф, связь с двураскрашиваемостью и циклами нечётной длины. Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

1 Эйлеровы маршруты

Определение 1.1. *Связный граф называется эйлеровым, если существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз. Соответствующий цикл называется эйлеровым.*

Замечание 1.1. *Вместо связности также можно потребовать отсутствие изолированных вершин или посещение всех вершин циклом.*

Определение 1.2. *Эйлеров путь - путь, который проходит по каждому ребру графа ровно 1 раз (определение аналогично эйлерову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).*

2 Критерий эйлеровости графа

Следующие условия эквивалентны:

1. Граф эйлеров
2. Все степени вершин чётны
3. Рёбра графа можно разбить на непересекающиеся циклы

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: эйлеров цикл проходит по всем вершинам. В каждую вершину он заходит и выходит из неё (по разным рёбрам). Получаем при каждом посещении увеличение степени на $+2$. Поэтому степени всех вершин чётны.

$2 \Rightarrow 3$: стартуя из произвольной вершины, строим цикл, пока он не замкнётся. Пока не замкнулся, следующий шаг всегда можно сделать из условия чётности степеней. Удалим все рёбра полученного цикла и повторим.

$3 \Rightarrow 1$: докажем по индукции на количество циклов.
База: 1 цикл - эйлеров цикл (ауф).
Шаг: Пусть для графов, распадающихся на $\leqslant n$ циклов утверждение верно. Рассмотрим граф с $n+1$ циклом: рассмотрим (и запишем) $(n+1)$-й цикл $v_1e_1v_2e_2...v_ke_kv_1$. Удалим его рёбра из графа. Новый граф G' расположен на m компонентах связности, для каждой из которых выполнено предположение индукции (т.к. все компоненты распадаются на $\leqslant n$ циклов) $\Longrightarrow$ для каждой компоненты связности есть эйлеров цикл (рёбра всех циклов для разных компонент связности различны), в который входит вершина из $v_1, v_2, ..., v_k$. Если в графе G' больше одной компоненты связности, то вершины из разных компонент до удаления были связаны путём из рёбер удалённого цикла. Тогда будем идти по удалённому циклу и, заходя в очередную вершину, обходить эйлеровым циклом её компоненту. Если компонента одна, то случай тривиален (после удаления получаем эйлеров граф G', у которого есть общая с удалённым циклом вершина; проходимся от неё эйлеровым циклом по G', а потом и по удалённому циклу). $\square$

3 Гамильтоновы маршруты

~~Аналогично эйлеровым маршрутам :)~~

Определение 3.1. *Граф называется гамильтоновым, если существует цикл, проходящий по каждой вершине ровно 1 раз. Очев он связный. Соответствующий цикл называется гамильтоновым.*

Определение 3.2. *Гамильтонов путь - путь, который проходит по каждой вершине графа ровно 1 раз (определение аналогично гамильтонову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).*

4 Двудольный граф, связь с двураскрашиваемостью и циклами нечётной длины

Определение 4.1. *Граф $G(V, E)$ - двудольный, если он разбивается на два графа (две доли) L и R так, что:*

1. $L \cup R = V$

2. $L \cap R = \varnothing$

3. $\forall e \in E \; e = (v_L, v_R) \; (v_L \in L \wedge v_R \in R)$

Определение 4.2. *Граф называется k-раскрашиваемым, если сущесвует раскраска вершин в k цветов такая, что никакие 2 смежные вершины не имеют одного цвета. Соответствующая раскраска называется правильной.*

Определение 4.3. *Остовное дерево графа G - подграф, включающий в себя все вершины графа G и являющийся деревом. У связного графа всегда можно взять остовное дерево. (Поможет нам далее при доказательстве).*

Теорема 4.1. *Следующие утверждения эквиваленты:*

1. *Граф двудольный*

2. *Граф двураскрашиваемый*

3. *В графе нет циклов нечётной длины*

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ - очев (покрасьте одну долю в один цвет, а другую - в другой / киньте вершины одного цвета в первую долю, а дугого - во вторую).

$1 \Rightarrow 3$: чтобы получить цикл, необходимо вернуться в ту же долю, а это произойдёт только за чётное число рёбер.

$3 \Rightarrow 2$: в G возьмём остовное дерево и раскрасим его в 2 цвета. Эта раскраска правильная. Пойдём от противного:
пусть есть ребро из G, но не из дерева. Соединим вершины одного цвета. В дереве был единственный простой путь от v_1 до v_2. Его длина чётна. Добавив ребро между ними, получим цикл нечётной длины - противоречие. □

5 Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

Определение 5.1. *Паросочетание - набор несмежных рёбер.*

Определение 5.2. *Вершинное покрытие - подмножество вершин вершин $S \subset V$ графа $G(V, E)$ такое, что каждое ребро инцидентно по крайней мере одной вершине из S. (В программе нет).*

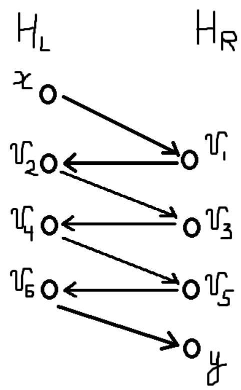
Определение 5.3. $G : |L| \leqslant |R|$. *Паросочетание P называют совершенным, если каждая вершина из L инцидентна какому-то ребру из паросочетания P.*

Теорема 5.1. *Теорема Холла (лемма Холла) о существовании совершенного паросочетания.*
В двудольном графе $G(|L| \leqslant |R|)$ существует совершенное паросочетание $\iff \forall X \subset L$ смежно не менее чем с $|X|$ вершинами из правой доли.

Замечание 5.1. *Вершины считаем смежными с множеством X, если она смежна хотя б с одной вершиной из X.*

Доказательство. $\Longrightarrow$: очев (берём в совершенном паросочетании нужные рёбра и получаем ровно $|X|$ вершин из правой доли).

$\Longleftarrow$: не очев(
Хотим строить паросочетание размера $K+1$, если в графе уже построено паросочетание размера $K < |L|$.
Докажем по индукции, что это возможно.
База: $K = 0$. Из существования рёбер следует возможность построить паросочетание размера $K+1 = 1$.
Шаг: Пусть построено паросочетание размера $K < |L|$. Ориентируем рёбра из паросочетания из R в L, а остальные - из L в R.



Рассмотрим $x \in L$, не участвующую в паросочетании. H - множество вершин, достижимых из x.
Смелое заявление: в H есть $y \in R$, не участвующая в паросочетании.
Докажем: H_L содержит все пары H_R и x. Если бы все H_R участвовали в паросочетании, то $|H_L| > |H_R|$ - противоречие с условием о количестве смежных.
Рассмотрим путь их x в y (смотрим на картинку выше). Исключим из паросочетания рёбра $(v_1v_2), (v_3v_4), ...$ и добавим рёбра $(xv_1), (v_2v_3), ..., (v_{2n}y)$. Победа!

□