

Группы. Примеры числовых и нечисловых групп. Порядок элементов. Порядок группы. Циклическая группа. Порождающие элементы. Понятие изоморфизма групп. Таблицы и диаграммы Кэли

1 Группы

Определение 1.1. Пусть есть множество M и операция \circ , а также выполняется:

0. замкнутость относительно операции $\forall a, b \in M \hookrightarrow (a \circ b) \in M$
1. ассоциативность $\forall a, b, c \in M \hookrightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
2. существование нейтрального $\exists! e : \forall a \in M \hookrightarrow a \circ e = e \circ a = a$
3. существование обратного $\forall a \in M \exists! a^{-1} \in M : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Тогда будем говорить, что (M, \circ) - группа.

Замечание 1.1. При выполнении замкнутости:

Выполнение первого пункта \iff полугруппа.

Выполнение первого и второго пунктов \iff моноид.

Выполнение трёх пунктов + коммутативность $\forall a, b \in M \hookrightarrow a \circ b = b \circ a \iff$ абелева группа.

Замечание 1.2. Существует два варианта записи: мультипликативная и аддитивная. Их использовать одновременно НЕЛЬЗЯ

Мультипликативная	Аддитивная
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$
$\exists! e \text{ (обознач. "1") : } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$\exists! e \text{ (обознач. "0") : } a + 0 = 0 + a = a$
Обр. : $\exists! x^{-1} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$	Обр. : $\exists! -x : x + (-x) = (-x) + x = 0$

2 Примеры числовых и нечисловых групп

2.1 Числовые группы

- $(\mathbb{Z}_m, +)$: нейтральный - 0, обратный - $(m - a)$
- $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$: нейтральный - 1, обратный - a^{p-2}

2.2 Нечисловые группы

- Группа перестановок (об этом в третьем билете темы)
- Группа симметрий правильного n-угольника (группа Дигдра): повороты и осевые симметрии, переводящие многоугольник в себя. Нейтральный - поворот на 0, обратный - поворот на $2\pi - \alpha$ или такая же симметрия

3 Порядки групп и элементов в группе

Определение 3.1. Группу G будем называть конечной, если $|G| \in \mathbb{N}$.

Определение 3.2. Порядок конечной группы - количество элементов $|G|$.

Определение 3.3. Порядок элемента $a \in G$ - наименьшее $m \in \mathbb{N} : a^m = e$.

Замечание 3.1. В конечной группе порядки элементов конечны. Порядок элемента не больше порядка группы.

Доказательство. Возьмём какой-то $a \in G$. Рассмотрим его степени от 1 до $|G| + 1$. По принципу Дирихле найдутся хотя бы две степени, значения которых совпадут, так как в группе всего $|G|$ элементов, а степень не выводит за пределы группы. Получаем ситуацию $a^i = a^j \implies a^{|i-j|} = e$. Тогда $\text{ord}(a) \mid |i-j|$, а $|i-j| \leq |G|$. \square

Лемма 3.1. Если $a^m = e$, то $\text{ord}(a) \mid m$.

Доказательство. Пусть $m = \text{ord}(a) * q + r$, где $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < \text{ord}(a)$. Тогда $a^m = a^{\text{ord}(a)*q+r} = (a^{\text{ord}(a)})^q * a^r$. Но $a^m = e = e^q = (a^{\text{ord}(a)})^q$. Получаем $a^r = e$. Так как $\text{ord}(a)$ - наименьшая подходящая натуральная степень, а $r < \text{ord}(a)$, то $r = 0$. \square

4 Циклическая группа. Порождающие элементы

Определение 4.1. Группа G называется циклической, если $\exists a \in G : \forall b \in G \exists m \in \mathbb{Z} : a^m = b$. При этом a называется порождающим элементом.

Замечание 4.1. Группа не обязана быть конечной. Порождающий элемент a может быть не единственным. Например $(\mathbb{Z}, +)$ - элементов бесконечно, порождающим может быть как 1, так и -1.

Замечание 4.2. Конечные циклические группы ($|G| = m$) будем обозначать C_m .

Замечание 4.3. Порядок порождающего равен порядку группы $\text{ord}(a) = |G|$.

5 Таблица и диаграмма Кэли

Определение 5.1. Таблица Кэли (нет в программе, но может пригодиться) - это квадратная таблица, которая описывает операцию в конечной группе.

Замечание 5.1. В каждой строке и каждом столбце элементы не повторяются.

Доказательство. Пусть в строке встретилось 2 одинаковых элемента. Тогда выполнено равенство $c \circ d = c \circ k$. Домножим на c^{-1} слева и получим $d = k \implies$ это один и тот же столбец. \square

Примеры таблиц Кэли:

\cdot	e	a	\cdot	e	a	b	c	\cdot	e	a	b	c
e	e	a	e	e	a	b	c	e	e	a	b	c
a	a	e	a	a	b	e	c	a	a	e	c	b
			b	b	e	a	c	b	b	c	e	a
			c	c	e	a	b	c	c	b	a	e

6 Гомоморфизм и изоморфизм групп

Определение 6.1. Гомоморфизм из группы G в группу G' ($G = (M, \bullet), G' = (M', \times)$) - это $\varphi : G \mapsto G'$ такое, что $\forall a, b \in G \mapsto \varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$ ($\text{Im } \varphi \subset G'$).

Свойства:

1. $\varphi(e) = e'$

Доказательство. $\varphi(a \bullet e) = \varphi(a) \times \varphi(e) = \varphi(a) = \varphi(e) \times \varphi(a) = \varphi(e \bullet a) \implies \varphi(e)$ - нейтральный в G' . \square

$$2. \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$$

Доказательство. $\varphi(a \bullet a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \bullet a) = \varphi(e) = e' = \varphi(a) \times \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) \times \varphi(a) \implies \varphi(a^{-1})$ - обратный элемент к $\varphi(a)$ в G' . \square

Определение 6.2. Сюръективный гомоморфизм из G на G' : $\forall b \in G' \exists a \in G : \varphi(a) = b$ ($\text{Im} \varphi = \varphi(G) = G'$).

Определение 6.3. Изоморфизм - гомоморфизм, являющийся биекцией (обозначается \cong).

Замечание 6.1. У изоморфных групп совпадают таблицы Кэли с точностью до перестановки столбцов.

Замечание 6.2. Все группы порядка 2 изоморфны между собой. То же самое с группами порядка 3 (видно из единственности таблиц Кэли для этих порядков).

Замечание 6.3. Циклические группы одного порядка изоморфны между собой (достаточно перевести нейтральный в нейтральный и порождающий в порождающий).

Замечание 6.4. Порядок $\varphi(a)$ является делителем порядка a : $\text{ord}(\varphi(a)) \mid \text{ord}(a)$

Доказательство. Пусть $m = \text{ord}(a)$. Тогда $\varphi(a^m) = \varphi(e) = e'$, но $\varphi(a^m) = (\varphi(a))^m$. Получаем $(\varphi(a))^m = e' \implies \text{ord}(\varphi(a)) \mid m$. \square

7 На посмеяться после тяжёлого бота

Сидишь теаешь билет, хочешь вставить таблицу со сравнением мультипликативной и аддитивной записей, просишь помочь квен, а он такой:

Сравните мультипликативную и аддитивную узлы проги —

Мультипликативная звёзда		Аддитивная звёзда	
Identity	Z	$\frac{Q}{Q}$	$= \frac{Q}{Q} =$
Inverse	$\frac{Q}{Q} + Q^*$	$\frac{Q}{Q} - Q^*$	$Q - Q^*$
Closure property	$+ 7 =$	$\frac{2}{7}$	$Q = Q^*$
Associative	$Z5$	$Q -$	$= Q^*$
Example	$Z5$	$Q =$	$= Q^*$