

Подгруппы. Смежные классы. Факторгруппы.

1 Подгруппы

Определение 1.1. H называется подгруппой группы $G = (M, \circ)$ (обозначается $H < G$), если $H \subseteq G$ и H является группой относительно той же групповой операции.

Определение 1.2. (эквивалентное определение подгруппы) H — подгруппа $G = (M, \circ)$, если:

1. $H \subseteq G$
2. $\forall a, b \in H \hookrightarrow a \circ b \in H$
3. $\forall a \in H \hookrightarrow a^{-1} \in H$

Теорема 1.1. (Критерий подгруппы)

$$H < G \iff \forall a, b \in H \hookrightarrow a \circ b^{-1} \in H$$

Доказательство. Докажем (\Leftarrow), так как в обратную сторону тривиально проверятся непосредственной подстановкой. Достаточно проверить справедливость определения выше:

1. $a = a, b = a \implies a \circ a^{-1} = e \in H$
2. $a = e \implies b^{-1} \in H$
3. $a, b \in H \implies a \circ b^{-1} \in H$. Тогда $a \circ (b^{-1})^{-1} = a \circ b \in H$

□

2 Смежные классы

Определение 2.1. Пусть $H < G, g \in G$. Тогда $g \circ H = \{g \circ h \mid h \in H\}$ — левый смежный класс по подгруппе H с представителем g ($H \circ g = \{h \circ g \mid h \in H\}$ — правый смежный класс по подгруппе H с представителем g)

Теорема 2.1. Левые смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают (для правых аналогично).

Доказательство. Предположим, что

$$\exists z \in G : z \in a \circ H \cap b \circ H$$

Тогда

$$\exists h_1, h_2 \in H : z = a \circ h_1 = b \circ h_2$$

Умножив на h_1^{-1} справа и h_2^{-1} справа, получим:

$$\begin{cases} a = b \circ h_2 \circ h_1^{-1} \\ b = a \circ h_1 \circ h_2^{-1} \end{cases}$$

Значит:

$$\forall t \in a \circ H \hookrightarrow t = a \circ \tilde{h} = b \circ h_2 \circ h_1^{-1} \circ \tilde{h}$$

Но

$$h_2 \circ h_1^{-1} \circ \tilde{h} \in H$$

Тогда

$$t \in b \circ H$$

□

Теорема 2.2. (Теорема Лагранжа)

$$|G| = (G : H) \cdot |H|$$

Здесь $(G : H)$ — индекс подгруппы (количество различных смежных классов по подгруппе)

Доказательство.

$$1. |g \circ H| = |H|, \text{ так как } \forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow h_1 \neq h_2 \iff g \circ h_1 \neq g \circ h_2$$

$$2. \forall g \in G \hookrightarrow g \in g \circ H, \text{ поскольку } e \in H \implies g \circ e = g \in g \circ H$$

3. Смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают

Из этого получаем, что G разбита на непересекающиеся подмножества с одинаковым количеством элементов и $\forall g \in G \hookrightarrow g$ принадлежит какому-то подмножеству G . Значит:

$$|G| = (G : H) \cdot |H|$$

Притом $(G : H)$ — количество несовпадающих левых смежных классов по H , что и требовалось. \square

Определение 2.2. Подгруппа $H < G$ называется нормальной и обозначается $H \triangleleft G$, если:

$$\forall g \in G \hookrightarrow g \circ H = H \circ g$$

Теорема 2.3.

$$H \triangleleft G \iff \forall g \in G, \forall h \in H \hookrightarrow g \circ h \circ g^{-1} \in H$$

Доказательство. (\implies): По определению

$$H \triangleleft G \iff g \circ H = H \circ g$$

Тогда

$$\forall h_1 \in H \exists h_2 \in H : g \circ h_1 = h_2 \circ g$$

Домножив на g^{-1} справа, получим:

$$g \circ h_1 \circ g^{-1} = h_2 \in H$$

(\impliedby):

$$\forall g \in G, \forall h \in H \hookrightarrow g \circ h \circ g^{-1} \in H$$

Рассмотрим

$$g \circ H \circ g^{-1} = \{g \circ h \circ g^{-1} \mid h \in H\} \subseteq H$$

Легко видеть, что:

$$\forall h_1, h_2 \in H \hookrightarrow h_1 \neq h_2 \iff g \circ h_1 \circ g^{-1} \neq g \circ h_2 \circ g^{-1}$$

Тогда получаем:

$$g \circ H \circ g^{-1} = H$$

Отсюда очевидно:

$$g \circ H = H \circ g \implies H \triangleleft G$$

\square

3 Факторгруппы

Определение 3.1. Пусть $H \triangleleft G$. Рассмотрим смежные классы (для определённости левые, естественным образом по H). Введём операцию

$$(a \circ H) * (b \circ H) = (a \circ b) \circ H$$

Лемма 3.1. Множество смежных классов относительно данной операции образуют группу, называемую факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H и обозначаемую G/H .

Доказательство. Действительно, выполнены все аксиомы группы:

1. Ассоциативность:

$$\forall a, b, c \in G \hookrightarrow \begin{cases} ((a \circ H) * (b \circ H)) * (c \circ H) = ((a \circ b) \circ H) * (c \circ H) = (a \circ b \circ c) \circ H \\ (a \circ H) * ((b \circ H) * (c \circ H)) = (a \circ H) * ((b \circ c) \circ H) = (a \circ b \circ c) \circ H \end{cases}$$

2. $e \circ H = H$ — нейтральный элемент:

$$\forall a \in G \hookrightarrow (a \circ H) * (e \circ H) = (a \circ e) \circ H = a \circ H$$

Если $n \circ H$ и $e \circ H$ — нейтральные элементы, то

$$(n \circ H) * (e \circ H) = n \circ H = e \circ H$$

3. Существование обратного:

$$\forall a \in G \hookrightarrow (a \circ H) * (a^{-1} \circ H) = (a \circ a^{-1}) \circ H = e \circ H = H$$

□

Замечание 3.1. Нормальность подгруппы H нужна для корректности, то есть для независимости представителя.

Действительно, если рассмотреть представителя $a \in G$ и смежный класс $a \circ H$, а затем взять $a_1 \in a \circ H$, то

$$a_1 \circ H = a \circ H$$

По аналогии рассматривая смежный класс $b \circ H$ с представителем $b \in G$, получим, что для элемента $b_1 \in b \circ H$ выполнено:

$$b_1 \circ H = b \circ H$$

Это следует из того, что смежные классы не пересекаются или совпадают.

Было бы неловко, если бы

$$(a \circ H) * (b \circ H) = (a \circ b) \circ H \neq (a_1 \circ b_1) \circ H = (a_1 \circ H) * (b_1 \circ H)$$

Для того, чтобы таких печальных ситуаций не происходило, требуется нормальность подгруппы H . Проверим, что при соблюдении нормальности все будет хорошо, доказав нижеследующую лемму.

Лемма 3.2. Если

$$H \triangleleft G, \quad a, b \in G, \quad a_1 \in a \circ H, \quad b_1 \in b \circ H$$

то

$$a_1 \circ b_1 \in (a \circ b) \circ H$$

Доказательство.

$$\begin{cases} a_1 \in a \circ H & \Longleftrightarrow \exists h_a \in H : a_1 = a \circ h_a \\ b_1 \in b \circ H & \Longleftrightarrow \exists h_b \in H : b_1 = b \circ h_b \end{cases} \quad (1)$$

Отсюда

$$a_1 \circ b_1 = a \circ h_a \circ b \circ h_b$$

Так как $H \triangleleft G$, то

$$\forall h_a \in H \exists \tilde{h} \in H : h_a \circ b = b \circ \tilde{h}$$

Заменяя в (1) $h_a \circ b$ на $b \circ \tilde{h}$, окончательно получим:

$$a_1 \circ b_1 = a \circ h_a \circ b \circ h_b = a \circ b \circ \tilde{h} \circ h_b \in (a \circ b) \circ H$$

□