Размещения, перестановки, сочетания с повторениями и без

1 Перестановки

Определение 1.1. *Перестановка — это биекция конечного множества на себя.*

Замечание 1.1. *Количество различных перестановок n-элементного* ***множества*** *обозначается P_n.*

Лемма 1.1.

$$P_n = n!$$

Доказательство. Тривиально по правилу произведения: первый элемент можно выбрать n способами, второй – $(n-1)$ способом, и так далее до 1. □

2 Размещения

Определение 2.1. *Выбор без возвращений — последовательный выбор элементов из множества, при котором каждый выбранный элемент исключается из дальнейшего выбора.*

Определение 2.2. *Размещение — упорядоченный выбор k элементов из n-элементного* ***множества*** *без возвращений.*

Замечание 2.1. *Количество различных размещений k элементов из n-элементного* ***множества*** *обозначается A_n^k.*

Лемма 2.1.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство. Очевидно по правилу произведения:

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

3 Сочетания

Определение 3.1. *Сочетание — выбор k-элементного набора из n-элементного* ***множества*** *без учёта порядка и без возвращений.*

Замечание 3.1. *Количество сочетаний из n по k обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$.*

Лемма 3.1.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство. Ясно, что число способов выбрать набор из k элементов из n-элементного множества без возвращений составляет

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Но в силу того, что порядок выбранных элементов в наборе не важен, результат нужно поделить на число всевозможных перестановок k-элементного множества, коих очевидно

$$P_k = k!$$

Значит итого получим:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Лемма 3.2 (Следствие предыдущей леммы)**.**

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Доказательство. Тривиально проверяется непосредственной подстановкой. □

4 Перестановки с повторениями

Определение 4.1. *Перестановка с повторениями — способ упорядочить набор из* n *элементов, в котором могут присутствовать* ***неразличимые*** *элементы.*

Замечание 4.1. *Количество различных перестановок с повторениями из* n *элементов таких, что среди них ровно* k *различных, и при этом* i*-ый* $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ *повторяется ровно* n_i *раз, обозначается*

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Лемма 4.1.

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Доказательство. Каждый различный подходящий набор из $n!$ подсчитан $n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!$, откуда легко получаем требуемое. □

5 Размещения с повторениями

Определение 5.1. *Размещение с повторениями — это упорядоченный выбор* k *элементов из* n*-элементного* ***множества*** *с возвращениями.*

Замечание 5.1. *Количество размещений с повторениями из* n *по* k *обозначается*

$$\overline{A_n^k}$$

Лемма 5.1.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Доказательство. Очевидно по правилу произведения:

$$\overline{A_n^k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$$

□

6 Сочетания с повторениями

Определение 6.1. *Сочетание с повторениями — выбор k-элементного неупорядоченного набора из n-элементного* ***множества****.*

Замечание 6.1. *Количество сочетаний с повторениями из n по k обозначается*

$$\overline{C_n^k}$$

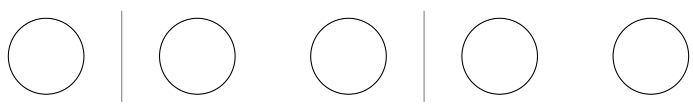
Теорема 6.1.

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$

Доказательство. Пусть взяли $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ровно k_i элементов i. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k, \quad k_i \in \mathbb{N}_0$$

Создадим $n + k - 1$ мест, на которые будем расставлять k шаров и $n - 1$ перегородку. Каждую такую расстановку будем взаимнооднозначно сопоставлять с требуемым выбором по следующему принципу: количество шаров до первой перегородки есть k_1, от первой до второй k_2, и так далее.



Несложно видеть, что это сопоставление действительно взаимнооднозначно. Тогда требуемое число способов есть число способов расставить k шаров на $n + k - 1$ мест без учёта порядка (перегородки затем расставляются однозначно), коих очевидно

$$C_{n+k-1}^k$$

□