Определения предела функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Предел по множеству. Свойства пределов функций. Критерий Коши существования конечного предела функций. Теорема о замене переменного под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

# 1 Предел числовой функции одного переменного

**Определение 1.1.** *пусть $X$ — абстрактное множество, тогда отображение $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ будем называть функцией.*

**Замечание 1.1.**
$$\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) = U_{\delta_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$$
*Если $x_0 = \pm\infty$ или $x_0 = \infty$, то проколотая окрестность совпадает с непроколотой.*

**Определение 1.2.** *(предел по Коши) Пусть $f: \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0$. Пусть $A \in \widehat{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что $A$ — предел функции $f$ в точке $x_0$ и записывать это $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A,\ x \to x_0$, если:*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Определение 1.3.** *Пусть $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Гейне, если:*

1. $x_n \to x_0,\ n \to \infty$
2. $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$

**Определение 1.4.** *(предел по Гейне) Пусть $f: \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0$. Пусть $A \in \widehat{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что $A$ — предел функции $f$ в точке $x_0$ и записывать это $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A,\ x \to x_0$, если $\forall$ последовательности Гейне $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$*

**Теорема 1.1.** *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

*Доказательство.* ($\Longrightarrow$ ) пусть выполнено определение предела по Коши, покажем, что выполняется опредление предела по Гейне:
Пусть $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$.
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0; d_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \tag{*}$$
Так как $x_n \to x_0, n \to \infty$, то
$$\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$$
Применим теперь это к $\delta(\varepsilon)$ и учтем (*). Получаем
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$$
а значит $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$
Но $\{x_n\}$ была выбрана произвольно $\Longrightarrow$ получили требуемое.

($\Longleftarrow$ ) пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено опредление предела по Коши:
Запишем отрицание к определению предела по Коши:
$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$
Будем использовать это условие при $\delta_n = \frac{\delta_0}{n}$
$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0):\ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$$
Получили последовательность Гейне $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке $x_0$ и при этом $f(x_n) \nrightarrow A,\ n \to \infty$
Противоречие с определением предела по Гейне. □

## 2 Предел по множеству

**Определение 2.1.** *Точка $x_0$ называется предельной точкой множества $X$, если*

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \varnothing$$

**Определение 2.2.** *(предел по Коши) Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ f : X \to \mathbb{R},\ x_0$ — предельная точка для $X$.*
*Будем говорить, что $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ —предел функции $f$ в точке $x_0$ по множеству $X$ и записывать это $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

**Определение 2.3.** *(предел по Гейне) Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing, f : X \to \mathbb{R},\ x_0$ — предельная точка для $X$.*
*Будем говорить, что $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ —предел функции $f$ в точке $x_0$ по множеству $X$ и записывать это $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$, если $\forall$ последовательности Гейне $\{x_n\} \subset X \hookrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$*

**Теорема 2.1.** *Пределы по Коши и по Гейне эквивалентны для пределов по множеству.*

*Доказательство.* ~~Аналогично доказательству выше, только надо попересекать все с $X$~~
($\Longrightarrow$ ) пусть выполнено определение предела по Коши, покажем, что выполняется опредление предела по Гейне:
Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \tag{*}$$

Так как $x_n \to x_0, n \to \infty$, то

$$\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$$

Применим теперь это к $\delta(\varepsilon)$ и учтем (*). Получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X$$

а значит $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$
Но $\{x_n\}$ была выбрана произвольно $\Longrightarrow$ получили требуемое.

($\Longleftarrow$ ) пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено опредление предела по Коши:
Запишем отрицание к определению предела по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X :\ f(x) \notin U_\varepsilon(A)$$

Будем использовать это условие при $\delta_n = \frac{\delta_0}{n}$

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0) \cap X :\ f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$$

Получили последовательность Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке $x_0$ и при этом $f(x_n) \nrightarrow A,\ n \to \infty$
Противоречие с определением предела по Гейне. $\square$

**Лемма 2.1.** *пусть* $E_1 \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, $E_2 \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, $x_0$ *— предельная точка и для* $E_1$*, и для* $E_2$*:*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases}$$

*Доказательство.* ($\Longrightarrow$): пусть

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

так как $x_0$ — предельная точка и для $E_1$, и для $E_2$ (по условию), то

$$\forall \delta > 0 \hookrightarrow \begin{cases} E_1 \cap \mathring{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing \\ E_2 \cap \mathring{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing \end{cases}$$

Заметим, что $\mathring{U}_\delta(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) = (\mathring{U}_\delta(x_0) \cap E_1) \cup (\mathring{U}_\delta(x_0) \cap E_2) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases}$$

($\Longleftarrow$):

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A \\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

определим $\delta(\varepsilon) := min\{\delta_1(\varepsilon), \ \delta_2(\varepsilon)\}$, тогда, используя $\mathring{U}_\delta(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) = (\mathring{U}_\delta(x_0) \cap E_1) \cup (\mathring{U}_\delta(x_0) \cap E_2)$, получаем, что

$$\forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \Longrightarrow \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A$$

□

## 3 Свойства пределов функции

**Теорема 3.1.** *(Арифметические операции с пределами функции) Пусть* $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0$ *— предельная точка для* $X$*.*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \mathbb{R}, \ \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \mathbb{R}$$

*тогда*

*1.* $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

*2.* $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$

*Доказательство.* Для доказательства достаточно применить определение предела функции по Гейне: пусть $\{x_n\}\subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} (f(x_n)\pm g(x_n)) = A\pm B$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} (f(x_n)\cdot g(x_n)) = A\cdot B$$

Так как последовательность Гейне была выбрана произвольно, то в силу эквивалентности определений по Коши и Гейне получаем требуемое. □

**Теорема 3.2.** *Пусть $X\subset\mathbb{R},\ X\neq\varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$.*

$$\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = A\in\mathbb{R},\ \exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = B\in\mathbb{R}$$

*пусть $B\neq 0,\quad \exists\delta_0>0:\ \forall x\in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)\cap X \hookrightarrow g(x)\neq 0$, тогда*

$$\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X\cap \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

*Доказательство.* Для доказательства достаточно применить определение предела функции по Гейне: пусть $\{x_n\}\subset X\cap \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$$

Так как последовательность Гейне была выбрана произвольно, то в силу эквивалентности определений по Коши и Гейне получаем требуемое. □

**Теорема 3.3.** *(Принцип локализации) Пусть $X\subset\mathbb{R},\ X\neq\varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$. $f,g: X\to\mathbb{R}$. Пусть $\exists\bar{\delta}>0:\ \forall x\in \mathring{U}_{\bar{\delta}}(x_0)\cap X\hookrightarrow f(x)=g(x)$. Тогда*

$$\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \Longleftrightarrow \exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x)$$

*и если пределы существуют, то они равны.*

*Доказательство.*

$$\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = A\in\overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \mathring{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0)\cap X\hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)$$

$$\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} g(x) = B\in\overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \mathring{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0)\cap X\hookrightarrow g(x)\in U_\varepsilon(B)$$

положим $\delta(\varepsilon) := min\{\bar{\delta},\ \delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon)\}$, тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)\cap X\hookrightarrow f(x)=g(x)\Longrightarrow$$

если оба предела существуют, то $A=B$. Если один не существует, то не существует и другой. □

**Теорема 3.4.** *(о двух милиционерах) Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$, $f,\ g,\ h : X \to \mathbb{R}$ Пусть $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$,*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

*тогда* $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела функции по Гейне:
Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$.

$$f(\{x_n\}),\ g(\{x_n\}),\ h(\{x_n\}) \text{ — числовые последовательности}$$

Применим к ним теорему о двух милиционерах для последовательностей, тогда:

$$\exists \lim_{n \to \infty} h(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = A$$

Но последовательность была выбрана произвольно, тогда в силу эквивалентности определений по Коши и по Гейне полчуаем: $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} h(x) = A$ □

**Теорема 3.5.** *(предлельный переход в неравенстве)*
*Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$, $f,\ g : X \to \mathbb{R}$*

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},\ \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$$

*тогда, если $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$, то $A \leq B$*

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела функции по Гейне:
Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$. Применим теорему о предельном переходе в неравенстве для последовательностей $f(x_n)$ и $g(x_n)$. Так как последовательность была выбрана произвольно, то в силу эквивалентности определений по Коши и по Гейне полчуаем, что $A \leq B$. □

# 4 Критерий Коши существования конечного предела функции

**Лемма 4.1.** *Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$*
*Пусть $\forall$ последовательности Гейне $\{x_n\} \subset X$ в точке $x_0$ $\exists A(\{x_n\}) \in \widehat{\mathbb{R}} :\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A(\{x_n\})$*
*Тогда $\exists A \in \widehat{\mathbb{R}} :\ A = A(\{x_n\})\ \forall$ последовательности Гейне.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ — последовательности Гейне в точке $x_0$.
Покажем, что $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$: пусть

$$z_n = \begin{cases} x_k, \text{ если } n = 2k \\ y_k, \text{ если } n = 2k - 1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Следовательно, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Гейне в точке $x_0$, тогда

$$\exists A(\{z_n\}) \in \widehat{\mathbb{R}} :\ \lim_{n \to \infty} f(z_n) = A(\{z_n\})$$

Следовательно,

$$f(x_k) \text{ — подпоследовательность последовательности } f(z_n)$$

$$f(y_k) \text{ — подпоследовательность последовательности } f(z_n)$$

тогда $A(\{x_k\}) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = A(\{z_n\}) = \lim\limits_{k \to \infty} f(y_k) = A(\{y_k\}) \implies$ предел не зависит от выбора последовательности Гейне. □

**Теорема 4.1.** *(критерий Коши) Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$ Функция $f$ имеет конечный предел в точке $x_0 \iff$ выполнено условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x',\ x'' \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

*Доказательство.* ($\Longrightarrow$): пусть

$$\exists A \in \mathbb{R}:\ \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Запишем определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x',\ x'' \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) пусть выполнено условие Коши.
Пусть $\{x_n\} \subset X$ — произвольная последовательность Гейне в точке $x_0$.

$$\forall \delta > 0:\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \cap X$$

Взяв $\delta = \delta(\varepsilon)$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условию Коши для последовательности $\Longrightarrow$ в силу критерия Коши для последовательности $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$
Но по лемме 4.1 это число $A$ не зависит от выбора последовательности Гейне, значит:

$$\exists A \in \mathbb{R}:\ \forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Следовательно, выполнено определение предела по Гейне $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ $\square$

## 5 Теорема о замене переменного под знаком предела

**Теорема 5.1.** *Пусть*

$$f:\ \mathring{U}_{\delta_0}(y_0) \to \mathbb{R},\ y_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0$$

$$y:\ \mathring{U}_{\sigma_0}(x_0) \to \mathring{U}_{\delta_0}(y_0),\ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}},\ \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{y \to y_0} f(y) = A \in \widehat{\mathbb{R}}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} y(x) = y_o \in \mathbb{R}$$

*тогда* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(y(x)) = A$

*Доказательство.*

$$\exists \lim_{y \to y_0} f(y) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0]:\ \forall y \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_{\varepsilon}(A)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} y(x) = y_0 \iff \forall \delta > 0\ \exists \sigma(\delta) \in (0; \sigma_0]:\ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \mathring{U}_{\delta}(y_0)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \delta(\varepsilon)$, тогда

$$\exists \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma_0] : \ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \Longrightarrow f(y(x)) \in U_\varepsilon(A)$$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma = \sigma(\delta(\varepsilon)) \in (0; \sigma_0] : \ \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \hookrightarrow f(y(x)) \in U_\sigma(A) \Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(y(x)) = A$$

□

**Теорема 5.2.** *Пусть*

$$f : \ \mathring{U}_{\delta_0}(y_0) \to \mathbb{R}, \ y_0 \in \mathbb{R}, \ \delta_0 > 0 \ \textit{и} \ f \ \textit{непрерывна в точке} \ y_0$$

$$y : \ \mathring{U}_{\sigma_0}(x_0) \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \ \sigma_0 > 0$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} y(x) = y_o \in \mathbb{R}$$

*тогда* $\exists \sigma^* \in (0; \sigma_0] :$ *в окрестности* $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0)$ *определена композиция* $f \circ y$ *и* $\exists \lim_{x \to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$

*Доказательство.*

$$\exists \lim_{x \to x_0} y(x) = y_0 \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists \sigma(\delta) \in (0; \sigma_0] : \ \forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta)}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in \mathring{U}_\delta(y_0) \qquad (*)$$

в частности, взяв $\delta = \delta_0, \ \sigma^* := \sigma(\delta_0)$, получим

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta_0}(y_0)$$

тогда $\forall x \in \mathring{U}_{\sigma^*}$ определена $f(y(x)) \Longrightarrow f \circ y$ определена в $\mathring{U}_{\sigma^*}(x_0), \ f \circ y : \ \mathring{U}_{\sigma^*}(x_0) \to \mathbb{R}$

$$f \text{ непрерывна в } y_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \in (0; \delta_0) : \ \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)} \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$$

применим (*) при $\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\forall x \in \mathring{U}_{\sigma(\delta(\varepsilon))}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \Longrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \widetilde{\sigma}(\varepsilon) := \sigma(\delta(\varepsilon)), \ \widetilde{\sigma}(\varepsilon) \in (0; \sigma^*] : \ \forall x \in \mathring{U}_{\widetilde{\sigma}(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(y(x)) - f(y_0)| < \varepsilon \Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$$

□

## 6 Существование односторонних пределов у монотонных функций

**Определение 6.1.**

$$\mathring{U}_\delta^+(x_0) := (x_0; x_0 + \delta) \ — \ \textit{проколотая правая полуокрестность}$$

$$\mathring{U}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta; x_0) \ — \ \textit{проколотая левая полуокрестность}$$

**Определение 6.2.** $X \subset \mathbb{R}, \ X \neq \varnothing, \ x_0$ — *предельная точка для* $X$. $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\delta^+(x_0) \cap X \neq \varnothing$, *тогда*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}_1^+(x_0) \cap X}} f(x) \ — \ \textit{правосторонний предел в точке} \ x_0$$

**Определение 6.3.** *$X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — предельная точка для $X$. $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}{}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \varnothing$, тогда*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}{}_1^-(x_0) \cap X}} f(x) \text{ — левосторонний предел в точке } x_0$$

**Теорема 6.1.** *(Вейеритрасса)*

- *Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — левая предельная точка (то есть $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}{}_\delta^-(x_0) \cap X \neq \varnothing$), $\forall x \in X \hookrightarrow x < x_0$*
  - *Пусть $f$ нестрого возрастает на $X$, тогда*

    $$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} = \sup_X f(x)$$

  - *Пусть $f$ нестрого убывает на $X$, тогда*

    $$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} = \inf_X f(x)$$

- *Пусть $X \subset \mathbb{R},\ X \neq \varnothing,\ x_0$ — правая предельная точка (то есть $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}{}_\delta^+(x_0) \cap X \neq \varnothing$), $\forall x \in X \hookrightarrow x > x_0$*
  - *Пусть $f$ нестрого возрастает на $X$, тогда*

    $$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in X}} = \inf_X f(x)$$

  - *Пусть $f$ нестрого убывает на $X$, тогда*

    $$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in X}} = \sup_X f(x)$$

*Доказательство.* Докажем для нестрогого возрастания и левостороннего предела, так как остальные случаи аналогичны.
Обозначим $M = \sup\limits_X f(x) \in \overline{R}$. По определению супремума:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X :\ f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M)$$

Но $f$ нестрого возрастает, значит

$$\forall x > x_\varepsilon,\ x \in X, x < x_0 \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \quad \begin{pmatrix} \text{если } M \in \mathbb{R}, \text{ то } f(x) \geq f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon \\ \text{если } M = +\infty, \text{ то } f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то $\delta(\varepsilon) := x_0 - x_\varepsilon$,
Если $x_0 = +\infty$, то $\delta(\varepsilon) := \frac{1}{|x_\varepsilon| + 1}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \Longrightarrow \exists \lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} = M = \sup_X f(x)$$

$\square$