

Эйлеровы маршруты. Критерий эйлеровости графа. Гамильтоновы маршруты.

Двудольный граф, связь с двураскрашиваемостью и циклами нечётной длины.

Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

## 1 Эйлеровы маршруты

**Определение 1.1.** *Связный граф называется эйлеровым, если существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз. Соответствующий цикл называется эйлеровым.*

**Замечание 1.1.** *Вместо связности также можно потребовать отсутствие изолированных вершин или посещение всех вершин циклом.*

**Определение 1.2.** *Эйлеров путь - путь, который проходит по каждому ребру графа ровно 1 раз (определение аналогично эйлерову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).*

## 2 Критерий эйлеровости графа

**Теорема 2.1.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Граф эйлеров*
2. *Все степени вершин чётны*
3. *Рёбра графа можно разбить на непересекающиеся (по ребрам) циклы*

*Доказательство.*  $(1 \implies 2)$ : Эйлеров цикл проходит по всем вершинам. В каждую вершину он заходит и выходит из неё (по разным рёбрам). Получаем при каждом посещении увеличение степени на  $+2$ . Поэтому степени всех вершин чётны.

$(2 \implies 3)$ : Стартуем из произвольной вершины. Строим цикл, пока он не замкнётся. Следующий шаг всегда можно сделать из условия чётности степеней. Далее удалим все рёбра полученного цикла и повторим процедуру. Делаем это до тех пор, пока не исчерпаем все рёбра.

$(3 \implies 1)$ : Докажем индукцией по количеству непересекающихся (по ребрам) циклов.

*База:* если цикл один, то это и есть эйлеров цикл.

*Шаг:* Пусть для графов, распадающихся на не более, чем  $n$  циклов, утверждение верно. Рассмотрим граф с  $n + 1$  циклом. Рассмотрим (и запишем)  $(n + 1)$ -й цикл

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k v_1$$

Удалим его рёбра из графа  $G$ . Новый граф  $G'$  распадается на  $m$  компонент связности, для каждой из которых выполнено предположение индукции (т.к. все компоненты распадаются на  $\leq n$  циклов). Тогда для каждой компоненты связности есть эйлеров цикл (рёбра всех циклов для разных компонент связности попарно различны). При этом в каждом из этих циклов есть вершина из

$$v_1, v_2, \dots, v_k$$

Покажем это. В самом деле, если в графе  $G'$  больше одной компоненты связности, то вершины из разных компонент до удаления были связаны путём из рёбер удалённого цикла. Тогда будем идти по удалённому циклу и, заходя в очередную вершину, обходить эйлеровым циклом её компоненту. Если компонента одна, то случай тривиален (после удаления получаем эйлеров граф  $G'$ , у которого есть общая с удалённым циклом вершина; проходимся от неё эйлеровым циклом по  $G'$ , а потом и по удалённому циклу).  $\square$

### 3 Гамильтоновы маршруты

Аналогично эйлеровым маршрутам :-)

**Определение 3.1.** Граф называется гамильтоновым, если существует цикл, проходящий по каждой вершине ровно 1 раз. Очев он связный. Соответствующий цикл называется гамильтоновым.

**Определение 3.2.** Гамильтонов путь - путь, который проходит по каждой вершине графа ровно 1 раз (определение аналогично гамильтонову циклу, но начало и конец пути не обязаны совпадать).

### 4 Двудольный граф. Двураскрашиваемость

**Определение 4.1.** Граф  $G(V, E)$  - двудольный, если он разбивается на два графа (две доли)  $L$  и  $R$  так, что:

1.  $L \cup R = V$
2.  $L \cap R = \emptyset$
3.  $\forall e \in E \ e = (v_L, v_R) \ (v_L \in L \wedge v_R \in R)$

**Определение 4.2.** Граф называется  $k$ -раскрашиваемым, если существует раскраска вершин в  $k$  цветов такая, что никакие 2 смежные вершины не имеют одного цвета. Соответствующая раскраска называется правильной.

**Определение 4.3.** Остовное дерево графа  $G$  - подграф, включающий в себя все вершины графа  $G$  и являющийся деревом. У связного графа всегда можно взять остовное дерево. (Поможет нам далее при доказательстве).

**Теорема 4.1.** Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф двудольный
2. Граф двураскрашиваемый
3. В графе нет циклов нечётной длины

*Доказательство.* ( $1 \iff 2$ ): очев (покрасьте одну долю в один цвет, а другую — в другой // киньте вершины одного цвета в первую долю, а другого — во вторую).

( $1 \implies 3$ ): Рассмотрим произвольный цикл

$$v_{L_1}, v_{R_1}, v_{L_2}, v_{R_2}, \dots, v_{R_k}, v_{L_1}$$

Так как вершины из разных долей чередуются, то цикл имеет чётную длину.

( $3 \implies 2$ ): В  $G$  возьмём остовное дерево и раскрасим его в 2 цвета.

**Лемма 4.1.** Полученная раскраска правильная.

*Доказательство.* От противного предположим, что это не так. Пусть есть ребро из  $G$ , но не из дерева, соединяющее вершины  $v_1$  и  $v_2$ , имеющие один цвет. В дереве существует единственный простой путь от  $v_1$  до  $v_2$ . Его длина чётна. Добавив к этому пути ребро  $(v_1 v_2)$ , получим цикл нечётной длины в исходном графе. Получили противоречие, что и требовалось. □

□

## 5 Двудольные графы и паросочетание: теорема Холла

**Определение 5.1.** Паросочетание - набор несмежных рёбер.

**Определение 5.2.** Вершинное покрытие - подмножество вершин  $S \subset V$  графа  $G(V, E)$  такое, что каждое ребро инцидентно по крайней мере одной вершине из  $S$ . (В программе нет).

**Замечание 5.1.** Далее полагаем, что в двудольном графе  $G \hookrightarrow |L| \leq |R|$

**Определение 5.3.** Паросочетание  $P$  называют совершенным, если каждая вершина из  $L$  инцидентна какому-то ребру из паросочетания  $P$ .

**Теорема 5.1** (Теорема Холла о существовании совершенного паросочетания). В двудольном графе  $G(|L| \leq |R|)$  существует совершенное паросочетание  $\iff \forall X \subset L$  смежно не менее чем с  $|X|$  вершинами из правой доли.

**Замечание 5.2.** Вершины считаем смежными с множеством  $X$ , если она смежна хотя бы с одной вершиной из  $X$ .

*Доказательство.* ( $\implies$ ): очев (берём в совершенном паросочетании нужные рёбра и получаем ровно  $|X|$  вершин из правой доли).

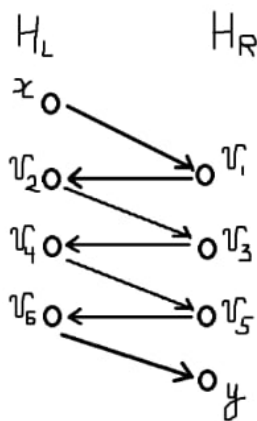
( $\impliedby$ ): Пусть выполнено условие о количестве смежных. Покажем, что существует совершенное паросочетание.

**Лемма 5.1.** Если в графе построено паросочетание размера  $k < |L|$ , то есть паросочетание размера  $k + 1$  (при выполнении условия о количестве смежных).

*Доказательство.* Покажем это индукцией по  $k$ .

*База.* При  $k = 0$  из существования рёбер следует возможность построить паросочетание размера  $k + 1 = 1$ .

*Шаг.* Пусть построено паросочетание размера  $k < |L|$ . Ориентируем рёбра из паросочетания из  $R$  в  $L$ , а остальные — из  $L$  в  $R$ .



Рассмотрим  $x \in L$ , не участвующую в паросочетании. Пусть  $H$  — множество вершин, достижимых из  $x$  (с учётом ориентации).

**Лемма 5.2.**  $\exists y \in H \cap R$ :  $y$  не участвует в паросочетании.

*Доказательство.*  $H_L$  содержит все пары  $H_R$  и ещё вершину  $x$ . Если бы все  $H_R$  участвовали в паросочетании, то  $|H_L| > |H_R|$ . Но с  $H_L$  смежны только вершины из  $H_R$ . Действительно, если найдется

вершина  $z$  из правой доли, смежная с  $H_L$ , то из нее не может выходить рёбер в  $H_L$ , так как иначе получим противоречие с определением паросочетания (два ребра паросочетания будут смежны в силу того, что любая вершина  $H_L$  достижима из  $x$  по определению). Значит рёбра из  $H_L$  могут лишь входить в  $z$ . Но тогда  $z$  достижима из  $x$ . Следовательно,  $z \in H_R$ , что и требовалось. Но тогда получаем противоречие с тем, что смежных с  $H_L$  должно быть не менее  $|H_L|$ , а значит лемма доказана.  $\square$

Рассмотрим путь из  $x$  в  $y$  (смотрим на картинку выше). Исключим из паросочетания рёбра

$$(v_1v_2), (v_3v_4), \dots, (v_{2k-1}v_{2k})$$

Затем добавим рёбра

$$(xv_1), (v_{2k}y), \dots, (v_{2k-1}v_{2k})$$

Легко видеть, что теперь размер паросочетания  $k + 1$ , что и требовалось.  $\square$

Итого, по индукции получили паросочетание размера  $|L|$ , что и требовалось.  $\square$