Теорема Кантора о вложенных отрезках. Три эквивалентных принципа непрерывности числовой прямой.

1 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Определение 1.1. *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}$ *зафиксирован отрезок* $[a_n, b_n] : a_n \leq b_n$. *Тогда говорим, что задана последовательность отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

Определение 1.2. *Будем говорить, что последовательность* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *является последовательностью вложенных отрезков, если*

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

Теорема 1.1 (принцип Кантора вложенных отрезков)**.** *Любая последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет хотя бы одну общую точку, то есть*

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in [a_n, b_n] \iff \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

Доказательство. Пусть множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — множество левых концов отрезков, множество $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ — множество правых концов отрезков. Ясно, что $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$. Покажем, что множество A расположено левее множества B. Достаточно показать, что

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq b_m$$

Без ограничения общности $n \leq m$. Но отрезки вложены. Значит

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

Тогда по индукции получим:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq a_m$$

Но $[a_m, b_m]$ — отрезок. Значит:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq a_m \leq b_m$$

Легко видеть, что получили требуемое.
В силу аксиомы непрерывности:

$$\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Отсюда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq c \leq b_m$$

Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in [a_n, b_n] \implies c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

□

Определение 1.3. *Последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *называется стягивающейся, если*

$$\forall l \in \mathbb{N}\ \exists n(l) \in \mathbb{N} : \left|a_{n(l)} - b_{n(l)}\right| < \frac{1}{l}$$

Теорема 1.2 (Кантор 2)**.** *Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет единственную общую точку.*

Доказательство. Так как $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных отрезков, то по теореме Кантора

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$$

Предположим, что пересечение состоит более, чем из одной общей точки. Тогда пусть:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n], \quad c' \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

Без ограничения общности $c < c'$. Тогда весь отрезок

$$[c, c'] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

По лемме Архимеда множество натуральных чисел не ограничено сверху. Значит:

$$\exists l \in \mathbb{N} : l > \frac{1}{|c - c'|}$$

Тогда:

$$\exists n(l) \in \mathbb{N} : \left|a_{n(l)} - b_{n(l)}\right| < \frac{1}{l} < \left|c - c'\right|$$

Но

$$[c, c'] \subset [a_{n(l)}, b_{n(l)}] \implies \left|a_{n(l)} - b_{n(l)}\right| \geq \left|c - c'\right|$$

Получаем противоречие. Значит $c = c'$, что и требовалось. □

2 Три эквивалентных принципа непрерывности числовой прямой

Теорема 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Аксиома непрерывности.*
2. *Существование и единственность супремума и инфимума у любого непустого числового множества.*
3. *Принцип Кантора вложенных отрезков и лемма Архимеда.*

Доказательство. $(1 \implies 2)$: Пусть выполнена аксиома непрерывности. Покажем существование и единственность супремума у любого непустого числового множества, так как для инфимума доказательство аналогично.
Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$. Если множество E неограниченно сверху, то $\sup E := +\infty$, а значит требуемое следует по определению. Пусть E ограничено сверху. Тогда у него существует хотя бы одна верхняя грань. Пусть B — множество всех верхних граней множества E. Тогда $B \neq \varnothing$ и E расположено левее B по определению. Значит по аксиоме непрерывности

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in E, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$$

Существование. Покажем, что $c = \sup E$. Действительно, в силу

$$\forall a \in E, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c$$

выполнен первый пункт определения супремума (c — верхняя грань множества E). При этом

$$\forall a \in E, \forall b \in B \hookrightarrow c \leq b$$

Значит выполнен второй пункт определения супремума (c — наименьшая из всех верхних граней множества E).
Единственность. Пусть M_1 и M_2 — различные супремумы множества E. Так как $M_1 = \sup E$, то в силу пункта 2 определения супремума получим, что для любого M', являющегося верхней гранью множества E, выполнено $M' \geq M_1$. Но M_2 также супремум E. Значит в силу пункта 1 определения супремума M_2 — верхняя грань $E \implies M_2 \geq M_1$. Аналогично доказывается, что $M_1 \geq M_2$. Значит $M_1 = M_2$. Получаем противоречие, а значит требуемое доказано.

$(2 \implies 3)$: Пусть у любого непустого числового множества существует и единственен супремум и инфимум. Покажем, что выполнен принцип Кантора вложенных отрезков.
Пусть множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ — множество левых концов отрезков, множество $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ — множество правых концов отрезков. Ясно, что $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$. Покажем, что множество A расположено левее множества B. Достаточно показать, что

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq b_m \tag{1}$$

Без ограничения общности $n \leq m$. Но отрезки вложены. Значит

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

Тогда по индукции получим:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq a_m$$

Но $[a_m, b_m]$ — отрезок. Значит:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq a_m \leq b_m$$

Легко видеть, что получили требуемое.
Так как выполнено (1), то в частности

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}$$

При этом $A \neq \varnothing$. Тогда A ограничено сверху, а значит у множества A существует и единственен супремум $c \in \mathbb{R}$. Далее заметим, что в силу того же условия (1) множество B является некоторым подмножеством множества всех верхних граней множества A. Но $c = \sup A$, а значит в силу второго пункта определения супремума:

$$\forall b \in B \hookrightarrow c \leq b$$

Объединяя полученные условия, имеем:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$$

Отсюда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq c \leq b_m$$

Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in [a_n, b_n] \implies c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Легко видеть, что получили требуемое.
Теперь покажем, что справедлива также и лемма Архимеда.

Лемма 2.1 (лемма Архимеда). *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Значит

$$\exists! \sup \mathbb{N} = M \in \mathbb{R}$$

Тогда в силу пункта 2 определения супремума:

$$\forall M' < M \ \exists n' \in \mathbb{N} : n' > M'$$

Положим $M' = M - 1$. Тогда:

$$\exists n' \in \mathbb{N} : n' > M - 1$$

Пусть $n = n' + 1 \in \mathbb{N}$. Значит

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > M$$

Но тогда M не является супремумом множества $\mathbb{N}$. Получаем противоречие. Значит множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, что и требовалось. $\square$

$(3 \implies 1)$: Пусть выполнены принцип Кантора вложенных отрезков и лемма Архимеда. Покажем, что тогда справедлива аксиома непрерывности.

Шаг 1. Зафиксируем $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \varnothing$ и A расположено левее B. Зафиксируем также точки $a_0 \in A, b_0 \in B$.

Шаг 2. Если $a_0 = b_0$, то $c = a_0 = b_0$ — разделяющее число для A и B. Действительно, так как $c = a_0$ и A левее B, то

$$\forall b \in B \hookrightarrow c \leq b$$

С другой стороны, так как $c = b_0$ и A левее B, то

$$\forall a \in A \hookrightarrow a \leq c$$

Тогда итого:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$$

Шаг 3. $a_0 < b_0$. Пусть $I_0 = [a_0, b_0]$. Ясно, что

$$I_0 \cap A \neq \varnothing, \ I_0 \cap B \neq \varnothing$$

Разделим отрезок I_0 пополам. Пусть $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Положим

$$I_0^1 = [a_0, c_0], \ I_0^2 = [c_0, b_0]$$

Может быть 2 случая:

1. $I_0^1 \cap A \neq \varnothing$ и $I_0^1 \cap B = \varnothing$, а также $I_0^2 \cap B \neq \varnothing$ и $I_0^2 \cap A = \varnothing$. Тогда c_0 — разделяющее число и

   $$\forall a \in A, \forall b \in B \hookrightarrow a < c_0 < b$$

   Действительно, $I_0^1 \cap A \neq \varnothing$ и A левее $B \implies B \subset (a_0, +\infty)$. Но $I_0^1 \cap B = \varnothing \implies B \subset (c_0, +\infty)$. Аналогично $A \subset (-\infty, c_0)$. Получили требуемое. Положим это **базой индукции**.

2. $\exists k^* \in \{1, 2\} : I_0^{k^*} \cap A \neq \varnothing$ и $I_0^{k^*} \cap B \neq \varnothing$. Положим тогда $I_1 = I_0^{k^*}$.

Рассуждая по индукции, предположим, что построены отрезки

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

При этом

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \hookrightarrow I_j \cap A \neq \varnothing, \ I_j \cap B \neq \varnothing$$

Рассмотрим точку $c_n := \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Пусть $I_n^1 = [a_n, c_n]$ и $I_n^2 = [c_n, b_n]$. Возможны 2 случая:

1. $I_n^1 \cap A \neq \varnothing$ и $I_n^1 \cap B = \varnothing$, а также $I_n^2 \cap B \neq \varnothing$ и $I_n^2 \cap A = \varnothing$. Тогда по аналогии с базой индукции c_n — разделяющее число.

2. $\exists k^* \in \{1, 2\} : I_n^{k^*} \cap A \neq \varnothing$ и $I_n^{k^*} \cap B \neq \varnothing$. Тогда, положив $I_{n+1} := I_n^{k^*}$, продолжаем деление пополам.

Шаг 4. Либо за конечное число шагов находим $n^* \in \mathbb{N} : c_{n^*}$ — разделяющее число, либо получаем бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

При этом

$$\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow l(I_j) = \frac{l(I_0)}{2^j}$$

Шаг 5. Так как

$$\frac{l(I_0)}{2^j} \leq \frac{l(I_0)}{j}$$

то во втором случае получим стягивающуюся последовательность вложенных отрезков. Тогда

$$\exists c^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Покажем, что c^* — разделяющее число. Для этого увидим, что

$$\forall a \in A \hookrightarrow a \leq c^*$$

Предположим противное. Тогда

$$\exists a^* \in A : a^* > c^*$$

Но по лемме Архимеда

$$\exists j^* \in \mathbb{N} : \frac{l(I_0)}{j^*} < |a^* - c^*|$$

Значит

$$l(I_{j^*}) = \frac{l(I_0)}{2^{j^*}} \leq \frac{l(I_0)}{j^*} < |a^* - c^*|$$

Но $I_{j^*} \cap B \neq \varnothing$. Тогда

$$\forall b^* \in I_{j^*} \cap B \hookrightarrow b^* < a^*$$

Получаем противоречие с тем, что A левее B. Действительно, если бы от противного

$$\exists \widetilde{b} \in I_{j^*} \cap B : \widetilde{b} \geq a^*$$

то в силу $c^* \in I_{j^*}$ получим, что

$$\left[c^*, \widetilde{b}\right] \subset I_{j^*}$$

Значит

$$l(I_{j^*}) \geq |a^* - c^*|$$

Получаем противоречие.
Аналогично доказывается, что

$$\forall b \in B \hookrightarrow b \geq c^*$$

Легко видеть, что получили требуемое. $\square$