Неориентированные графы. Степень вершины. Сумма степеней вершин. Количество вершин с нечетной степенью. Определение подграфа. Определение маршрута, пути и простого пути. Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы. Связные графы и компоненты связности.

# 1 Неориентированные графы

**Определение 1.1.** *Граф G: V — множество объектов (вершины), E — множество пар объектов (рёбра)*
$u, v \in V$, $e = (u, v)$ *— ребро.*

**Определение 1.2.** *Если* $\forall u, v$ *считаем, что* $(u, v) = (v, u)$, *то есть порядок вершин в паре не имеет значения, то граф неориентированный.*

# 2 Степень вершины

**Определение 2.1.** *Степень вершины* $v$ *в графе* $G$ *— количество рёбер, исходящих из* $v$. *Обозначается* $\deg v$.

# 3 Сумма степеней вершин. Количество вершин с нечетной степенью

**Определение 3.1.** *Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер в графе:*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

**Теорема 3.1.** *В графе чётное количество вершин с нечётной степенью.*

# 4 Определение подграфа

**Определение 4.1.** *Подграф графа* $G(V, E)$ *— это граф* $G'(V', E')$: $V' \subseteq V, E' \subseteq E$.

**Замечание 4.1.** *Так как подграф прежде всего должен являться графом, то нельзя выбирать* $V', E'$ *совсем произвольно.*

# 5 Определение маршрута, пути и простого пути

**Определение 5.1.** *Маршрут* $(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_k, e_k, v_{k+1})$, *где* $v_i \in V, e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$.

**Определение 5.2.** *Путь — маршрут, у которого все рёбра различны.*

**Определение 5.3.** *Простой путь — маршрут, у которого все вершины различны (кроме, возможно, первой и последней).*

**Теорема 5.1.** *Если между двумя несовпадающими вершинами u и* $v$ *есть маршрут, то есть и простой путь.*

*Доказательство.* $(u = v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_j, v_{j+1} = v)$, $\varphi = (v_1, e_1, v_2)$
На каждом шаге добавляем следующую вершину из маршрута в рассматриваемый фрагмент. Если в $\varphi$ появились повторяющиеся вершины, удалим из фрагмента все, что между ними, и сам повтор. В конце получим простой путь, что и требовалось. □

## 6 Замкнутые маршруты, циклы и простые циклы

**Определение 6.1.** *Маршрут замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

**Определение 6.2.** *Путь замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

**Определение 6.3.** *Простой путь замкнут, если* $v_1 = v_{k+1}$.

**Теорема 6.1.** *Если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.*

*Доказательство.* $(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{k+1} = v_1)$
Возьмём кратчайший фрагмент этой последовательности, начальная и конечная вершины которого совпадают: $(v_i, e_i, ..., e_j, v_{j+1} = v_i)$
1) В фрагменте не менее 3 различных вершин (так как $vev$ — нет петель, $ve_1ue_2v$ — нет кратных рёбер)
2) Все вершины, кроме начала и конца, различны
Итого, этот фрагмент является простым циклом. □

## 7 Связные графы и компоненты связности

**Определение 7.1.** *Граф называется связным, если* $\forall u, v \in V$ *существует путь (маршрут, простой путь) из* $u$ *в* $v$.

Пусть есть множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и его подмножества: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 5\}$
Максимальное по включению подмножество — это то подмножество, которое не содержится в каком-то другом ($\{2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 5\}$ — максимальные по включению)

**Определение 7.2.** *Пусть граф не является связным. Максимальные по включению связные подграфы называются компонентами связности.*