Примеры отношений частичного порядка, формальное определение. Линейный порядок. Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе).

Составлял Даня

Отношение на множестве

Пусть A – это произвольное множество. **Отношением** на множестве A называется произвольное подмножество его декартового произведения: $R \subset A \times A$.

Если пара элементов (x, y) содержатся в отношении R ($(x, y) \in R$), то говорят, что x относится к y по отношению R и записывают xRy. Запись xRy эквивалентна $(x, y) \in R$.

Рассмотрим свойства:

1. *рефлексивность*, $\forall x \in A\ xRx$;
2. *транзитивность*, xRy , $yRz \Rightarrow xRz$.
3. *симметричность:* $xRy \Rightarrow yRx$;
4. *антисимметричность:* xRy , $yRx \Rightarrow x = y$. Иначе, $x \neq y \Rightarrow (x, y) \notin R$ или $(y, x) \notin R$.

Отношение эквивалентности

Если для отношения R выполняются свойства 1, 2, 3, то оно называется **отношением эквивалентности** и обозначается $\sim$.

Нестрогое отношение частичного порядка

Если для отношения R выполняются свойства 1, 2, 4, то оно называется **частичным порядком** и обозначается $\preceq$.

В качестве примера можно взять обычное нестрогое неравество.

Линейный порядок

Пусть $\preceq$ – частичный порядок на множестве A. 2 произвольных элемента $x, y \in A$ называются *сравнимыми*, если $x \preceq y$ или $y \preceq x$. Если для частичного порядка $\preceq$ любые 2 элемента сравнимы между собой, то такой частичный порядок называется **линейным порядком**.

Строгое отношение частичного порядка

Пусть $\preceq$ — произвольное отношение частичного порядка на множестве A. Если $a, b \in A$ и $a \preceq b$, то говорят, что элемент *a предшествует или равен* элементу b, или элемент *b следует или равен* элементу a.

Пусть $(A; \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Если для элементов $a, b \in A$ верно $a \preceq b$ и $a \neq b$, то пишут $a \prec b$ и говорят, что элемент *a строго предшествует* элементу b, или что элемент *b строго следует* за элементом a.

Такое отношение можно ввести и на всем множестве. Следует заметить, что у этого **строгого отношения частичного порядка** отсутствует рефлексивность.

Непосредственное следование

Если для элементов $a, b \in A$ верно $a \prec b$ и не существует такого элемента $c \in A$, что $a \prec c \prec b$ (т.е. нет промежуточного элемента между a и b), то говорят, что элемент *a непосредственно предшествует* элементу b, или что элемент *b непосредственно следует* за элементом a.

Диаграмма Хассе

Диаграмма Хассе для ЧУМ $(A; \preceq)$ — это ориентированный граф, в котором вершинами выступают элементы A, а ребро от a к b проводится, если a непосредственно предшествует b.

Аналогично можно определить диаграмму с помощью транзитивной редукции — операции, при которой из графа отношения частичного порядка удаляются ребра, которые можно восстановить из транзитивности.

Замечание. В курсе не определяли простой путь для ориентированного графа.

Отношение двухсторонней достижимости

Между вершинами u и v ориентированного графа G существует отношение двухсторонней достижимости, если существует **путь** $u \to v$ и $v \to u$. Оно является отношением эквивалентности.

Классы эквивалентности в ориентированном графе

Классами эквивалентности в ориентированном графе называются компоненты сильной связности — набор вершин такой, что из любой другой можно прийти в любую другую.

Ациклический ориентированный граф

В ациклическом ориентированном графе нет замкнутых маршрутов положительной длины.

Теорема. Пусть дан ориентированный граф $G(V, E)$ без петель. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф G ациклический;

2. Компоненты сильной связности иметь размер 1;

3. Существует нумерация вершин т.ч. $(u_i, u_j) \in E \Rightarrow i < j$;

Доказательство.

- $1 \iff 2$ очевидно из определений.

- $3 \Rightarrow 1$ Если бы существовал замкнутый маршрут

$$v_{i_1} \to v_{i_2} ... \to v_{i_n} = v_{i_1},$$

где индексы вершин – натуральные числа, то имели бы

$$i_1 < i_2 <...< i_n = i_1,$$

Противоречие.

Лемма. Если ориентированный граф ациклический, то в нем есть вершина с нулевой исходящей степенью.
Доказательство. Так как вершин конечное число, то не существовало было был пути наибольшей длины. В таком пути все вершины буду различны, иначе образуется цикл

- $1 \Rightarrow 3$ Докажем утверждение по индукции по количеству вершин в графе.
База Очевидна. $|V| = 1$
Предположение. Пусть утверждение верно для $\forall |V| \leq n$. Докажем утверждение для $|V| = n + 1$;
Шаг. Используя результат леммы выше, вершине с нулевой исходящей степенью присваеваем номер $n + 1$. Остальной граф на n вершинах занумерован по предположению индукции.

Теорема доказана.

Дополнение до линейного порядка

Пусть есть граф частичного порядка. Он ациклический. Тогда есть нумерация вершин по теореме выше. Дополним заданное отношение до линейного в соответствии с нумерацией. Получим линейный порядок на исходном множестве.