Производная функции одного переменного. Односторонние производные.

Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал.

Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций.

Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций.

Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного.

(Функции, заданные параметрически, их дифференцирование)

1 Сравнение функций (смешнявые вещи, которые вводились до темы и пригодятся или нет (автор слишком поздно осознал бесполезность трёх страниц материала))

1.1 Эквивалентность функций

Определение 1.1. *Пусть* $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \delta_0 > 0; f, g\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$.
Будем говорить, что $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0$, *если* $\exists \Theta\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ *т.ч.*

$$\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 1$$

и

$$f(x) = \Theta(x) g(x)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0), \delta \in (0, \delta_0]$$

Замечание 1.1. *Важно писать, где именно функции эквивалентны* ($x \to x_0$). *То же самое касается и других сравнений функций.*

Замечание 1.2. *Некоторые требуют другое условие:* $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1,\ x \to x_0$, *но оно хочет, чтоб мы запаривались насчёт* $g(x)$, *а мы этого не хотим:)*

Пример 1.1. $\sin x \sim x,\ x \to 0$
$\tan x \sim x,\ x \to 0$
$e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$
$\ln(1 + x) \sim x,\ x \to 0$
$\arcsin x \sim x,\ x \to 0$

Лемма 1.1. *Это действительно отношение эквивалентности.*

Доказательство. **1) рефлексивность:** $f(x) \sim f(x),\ x \to x_0$ (очев, просто возьмём $\Theta \equiv 1$)

2) симметричность: $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0 \implies g(x) \sim f(x),\ x \to x_0$
Из условия получаем, что $\exists \Theta\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ т.ч.

$$f(x) = \Theta(x) g(x)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0), \delta_1 \in (0, \delta_0]$$

и

$$\Theta(x) \to 1,\ x \to x_0$$

Тогда $\exists \delta_2 \in (0, \delta_0]$ т.ч. $\Theta(x) > 0\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0)$
Следовательно,

$$g(x) = \frac{1}{\Theta(x)} f(x)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0),$$

а

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\Theta(x)} = 1$$

Тогда пусть $\widetilde{\Theta}(x) = \frac{1}{\Theta(x)}$ и из этого получим $g(x) \sim f(x),\ x \to x_0$

3) транзитивность: $(f(x) \sim g(x),\ x \to x_0) \wedge (g(x) \sim h(x),\ x \to x_0) \implies f(x) \sim h(x),\ x \to x_0$
Из условий получаем то, что я уже устал писать, но повторение - мать учения:

$$\exists \Theta_1\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : (\Theta_1(x) \to 1,\ x \to x_0) \wedge (f(x) = \Theta_1(x) g(x)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0), \delta_1 \in (0, \delta_0])$$

$$\exists \Theta_2\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R} : (\Theta_2(x) \to 1,\ x \to x_0) \wedge (g(x) = \Theta_2(x) h(x)\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0), \delta_2 \in (0, \delta_0])$$

Но тогда реализуем $f(x) = \Theta_1(x)\Theta_2(x)h(x)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, где $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$
Пусть $\Theta(x) = \Theta_1(x)\Theta_2(x)$. Заметим, что

$$\lim_{x\to x_0} \Theta(x) = \lim_{x\to x_0} \Theta_1(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \Theta_2(x) = 1$$

Поздравляю, мы победили: $f(x) \sim h(x),\ x \to x_0$ □

1.2 o-малое

Определение 1.2. *Пусть $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \delta_0 > 0; f, g\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$.*
Будем говорить, что $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$, если $\exists \varepsilon\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ т.ч.

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

и

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x)\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0), \delta \in (0, \delta_0]$$

*Перевод на русский: $f(x)$ стремится к нулю **по сравнению** с $g(x)$.*

Замечание 1.3. *Некоторые требуют другое условие: $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0,\ x \to x_0$, но оно хочет, чтоб мы запаривались насчёт $g(x)$, а мы этого не хотим:)*

Замечание 1.4. *$o(g(x))$ - это класс функций. Поэтому в нашем случае надо воспринимать знак равенства как знак принадлежности ($\in$). Следовательно, писать что-то наподобие $o(g(x)) = f(x)$ нехорошо (низя ни в коем случае).*

1.3 $\mathcal{O}$-большое

Определение 1.3. *Пусть $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}, \delta_0 > 0; f, g\colon \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$.*
Будем говорить, что $f(x) = \mathcal{O}(g(x)),\ x \to x_0$, если $\exists C > 0$ и $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ т.ч.

$$|f(x)| \leqslant C \cdot |g(x)|\ \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

Перевод на русский: $f(x)$ сопоставима с $g(x)$ и несильно её перепрыгивает.

Замечание 1.5. *$\mathcal{O}(g(x))$ - это тоже класс функций. Далее рассуждения аналогичны $o(g(x))$.*

1.4 Операции со всем, что выше(

Лемма 1.2. *Складывать и вычитать эквивалентности нельзя.*

Доказательство. Держите контрпример:
$x + x^3 \sim x + x^2,\ x \to 0$
$-x \sim -x,\ x \to 0$
Но ведь если сложим, то получим $x^2 \sim x^3,\ x \to 0$, а это уже лажа. □

Лемма 1.3. *Если (1) $f_1(x) \sim g_1(x),\ x \to x_0$ и (2) $f_2(x) \sim g_2(x),\ x \to x_0$, то*

$$f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x),\ x \to x_0$$

Доказательство. $(1), (2) \iff \exists \delta_i > 0$ и $\exists \Theta_i \colon \mathring{U}_{\delta_i}(x_0) \to \mathbb{R}$ т.ч.

$$\lim_{x \to x_0} \Theta_i(x) = 1$$

и

$$f_i(x) = \Theta_i(x) g_i(x) \; \forall x \in \mathring{U}_{\delta_i}(x_0)$$

Следовательно,

$$f_1(x) f_2(x) = \Theta_1(x)\Theta_2(x) g_1(x) g_2(x) \; \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0), \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

Обозначим $\Theta_1(x)\Theta_2(x)$ за $\Theta(x)$ и поймём, что

$$\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = \lim_{x \to x_0} \Theta_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \Theta_2(x) = 1$$

Поздравляю, мы победили: $f_1(x) f_2(x) \sim g_1(x) g_2(x), \; x \to x_0$ □

Лемма 1.4. *Пусть есть (1) и (2) из прошлой леммы и* $f_2(x) \neq 0$ *и* $g_2(x) \neq 0$ *в некоторой* $\mathring{U}_{\delta}(x_0)$. *Тогда*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \; x \to x_0$$

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему, но в качестве $\Theta(x)$ мы берём $\frac{\Theta_1(x)}{\Theta_2(x)}$ □

Лемма 1.5. $f(x) \sim g(x), \; x \to x_0 \iff f(x) - g(x) = o(g(x)), \; x \to x_0$

Доказательство. $f(x) \sim g(x), \; x \to x_0 \iff \exists \delta > 0$ т.ч.

$$f(x) = \Theta(x) g(x) \; \forall x \in U_{\delta}(x_0); \Theta(x) \to 1, \; x \to x_0$$

$$\iff f(x) - g(x) = (\Theta(x) - 1) \cdot g(x) \; \forall x \in U_{\delta}(x_0)$$

Тогда введём $\varepsilon(x) = \Theta(x) - 1$ и заметим, что

$$\varepsilon(x) \to 0, \; x \to x_0$$

Следовательно, по определению получаем

$$f(x) - g(x) = o(g(x)), \; x \to x_0$$

□

Лемма 1.6. *Пусть* $f(y) \sim g(y), \; y \to y_0$. *А ещё пусть* $y = y(x) \to y_0, \; x \to x_0$ *и* $y(x) \neq y_0 \; \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0), \delta > 0$.
Тогда

$$f(y(x)) \sim g(y(x)), \; x \to x_0$$

Доказательство. Из первой части условия получаем

$$f(y) = \Theta(y) g(y) \; \forall y \in \mathring{U}_{\sigma}(y_0); \; \Theta(y) \to 1, \; y \to y_0$$

Из второй можем утверждать по теореме о пределе суперпозиции, что

$$\widetilde{\Theta}(x) = \Theta(y(x)) \to 1, \; x \to x_0$$

В итоге получается, что

$$f(y(x)) = g(y(x)) \widetilde{\Theta}(x) \; \forall x \in \mathring{U}_{\gamma}(x_0),$$

где $\gamma > 0$ мы выбираем так, чтобы $y(x)$ попала в $\mathring{U}_{\sigma}(y_0)$ □

Лемма 1.7. *Начинаются смешные правила, которые доказываются проверкой определения. Поэтому ни автор, ни лектор доказательства писать не хотят. Воспринимайте далее f как $f(x)$ и в голове после каждой записи приписывайте $x \to x_0$, пжпжпж.*
1) $o(f) \pm o(f) = o(f)$
2) $o(f) = \mathcal{O}(f)$
3) $o(f)\mathcal{O}(g) = o(fg)$
4) $\mathcal{O}(f) \pm \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$
5) $\mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(fg)$
6) $o(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$
7) $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f)$
8) $o(\mathcal{O}(f)) = o(f)$
9) $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha)$*, если* f *неотрицательна и* $\alpha > 0$
10) $\mathcal{O}(o(f)) = o(f)$

2 Дифференцируемость функции в точке

Определение 2.1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ *и* $f\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$*. Будем говорить, что* f *дифференцируема в т.* x_0*, если* $\exists A \in \mathbb{R}$ *т.ч.*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0$$

По определению о-малого можно переписать это как $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ *т.ч.*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)\ \forall x \in U_\delta(x_0);\ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Для лучшего понимания надо воспринимать $f(x_0) + A(x - x_0)$ *как уравнение прямой, а* $o(x - x_0)$ *как погрешность или ошибку.*

3 Производная функции в точке

Определение 3.1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ *и* $f\colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$*. Производной* f *в т.* x_0 *называется*

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \widehat{\mathbb{R}}$$

Если предел не существует, то говорят, что не существует производной в т. x_0*.*

Замечание 3.1. *На практике с бесконечными производными мы не работаем, а вот существование конечной производной в точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке. Давайте докажем эту смешную штуку)*

Доказательство. Действительно, возьмём из определения дифференцируемости (2.1) последнее тождество, перенесём $f(x_0)$ влево и поделим обе части на $x - x_0$. Получим, что в некоторой $\mathring{U}_\delta(x_0)$ справедливо равенство:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varepsilon(x);\ \varepsilon(x) \to 0,\ x \to x_0$$

Но ведь тогда возьмём предел и $\varepsilon(x)$ перейдёт в 0. Получим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$$

□

4 Односторонние производные

Определение 4.1. *Пусть* $f\colon U_\delta^+(x_0) \to \mathbb{R}$*, где* $U_\delta^+(x_0) := [x_0, x_0+\delta)$*. Тогда правосторонней производной функции в т.* x_0 *называется*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Определение 4.2. *Пусть* $f\colon U_\delta^-(x_0) \to \mathbb{R}$*, где* $U_\delta^-(x_0) := (x_0-\delta, x_0]$*. Тогда левосторонней производной функции в т.* x_0 *называется*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $f\colon U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$*. Тогда*

$$\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \iff \exists f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} : f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Доказательство. Доказательство следует из утверждения для пределов. Т.е. предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда существуют левосторонний и правосторонний пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ и они равны. □

5 Непрерывность функции, имеющей производную

Теорема 5.1. *Если* f *дифференцируема в т.* x_0*, то она непрерывна в т.* x_0

Доказательство. Очев, заметим, что предел функции из определения дифференцируемости (2.1) равен пределу выражения $f(x_0) + A(x-x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)$, но что второе, что третье слагаемые стремятся к нулю при $x \to x_0$. Получаем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Замечание 5.1. *Из непрерывности не следует дифференцируемость. На экзамене приводите специально лёгкий пример, не усложняйте себе жизнь. Очев это* $f(x) = |x|$*. Она непрерывна, но посмотрим на производную в нуле:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} signx,$$

но предела сигнума в нуле не существует, следовательно, и производной модуля в нуле не существует. Тогда f *непрерывна в нуле, не не диффернцируема.*

6 Дифференциал

Определение 6.1. *Пусть функция* f *дифференцируема в т.* x_0*. Дифференциалом функции* f *в т.* x_0 *называется линейная функция*

$$df_{x_0}(dx) = f'(x_0)dx,\ dx = x - x_0$$

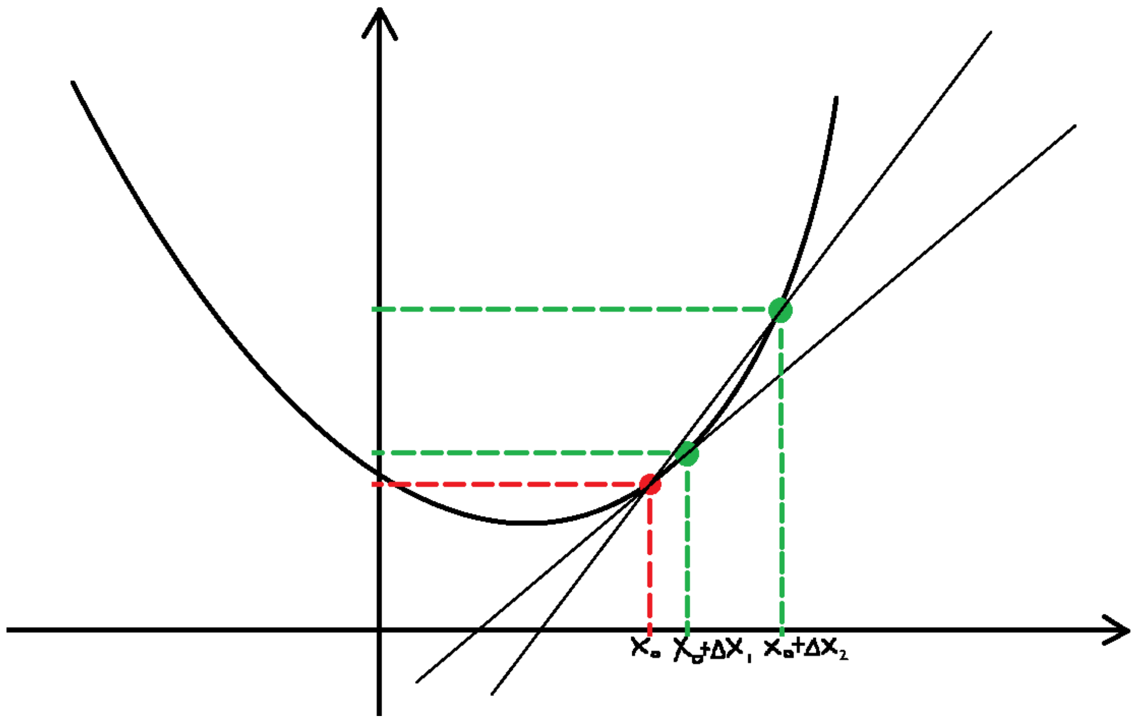
Замечание 6.1. *Для лучшего понимания можно заметить, что в определении дифференцируемости (2.1) можно заменить* $A(x-x_0)$ *на* $df_{x_0}(dx)$ *и тогда мы получим*

$$f(x) = f(x_0) + df_{x_0}(dx) + o(x-x_0),\ x \to x_0$$

7 Геометрический смысл производной и дифференциала

Определение 7.1. *Геометрический смысл дифференцируемости f в точке x_0 заключается в существовании невертикальной касательной к графику f в точке $(x_0, f(x_0))$.*

Что вообще тогда надо требовать от функции? Давайте рассмотрим график функции и его секущие, проходящие через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, где для нашего удобства $\Delta x > 0$.



Выходит, что каждая секущая задаётся как $y_{cek}[\Delta x](h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}h$, где h - просто параметр. Тогда если

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists \lim_{\Delta x \to 0} y_{cek}[\Delta x](h) = y_{kac}(h) \in \mathbb{R},$$

то говорим, что $\exists$ невертикальная касательная к графику в точке $(x_0, f(x_0))$.
Объяснение на русском языке: стабилизация секущих (при уменьшении Δx) к некоторой конкретной прямой (касательной) равносильна существованию конечной производной.
Геометрический смысл дифференциала в точке - касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, смещённая в начало координат. Если точку не фиксируем, то можем следить за эволюцией касательной.

8 Правила дифференцирования

Теорема 8.1. *Господин Тюленев уложил все операции в одну теорему, поэтому автор сделает то же самое)*
Пусть $f, g \colon U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ и f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда
1)$f \pm g$ *дифф. в т.* x_0

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2)$f \cdot g$ *дифф. в т.* x_0

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

3) Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ определено в некторой $U_\delta(x_0)$ и дифф. в т. x_0

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0)^2)}$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta f := f(x) - f(x_0),\ \Delta g := g(x) - g(x_0)$$

1) Заметим, что

$$\frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Так как функции дифференцируемы, перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$ и получим:

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2) Определим и преобразуем $\frac{\Delta(fg)}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x)}{\Delta x} - \frac{f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$$

Тогда первое слагаемое представимо в виде

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) g(x),$$

что стремится к $f'(x_0)g(x_0)$ при $\Delta x \to 0$ (здесь мы пользуемся определением производной и непрерывностью g(x))

Второе слагаемое представимо в виде

$$\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{\Delta x}\right) f(x_0),$$

что стремится к $f(x_0)g'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$ (здесь мы пользуемся только определением производной)

Победа, мы получили

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3) g непрерывна в т. x_0 (из дифференцируемости), следовательно, по лемме о сохранении знака (т.к. $g(x_0) \neq 0$) $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности т. x_0. Значит $\frac{f}{g}$ определена в этой окрестности. Рассмотрим следующее чудо:

$$\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)}$$

Всё ещё страшно, поэтому, как и в умножении, воспользуемся умным нулём:

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} - \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)}$$

Из непрерывности g, определения производной и лени автора получим подобно промежуточным итогам для произведения:

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x)g(x_0)} \to \frac{f'(x_0)g(x_0)}{(g(x_0)^2)},\ \Delta x \to 0$$

$$\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x\cdot g(x)g(x_0)}\to\frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0)^2)},\ \Delta x\to 0$$

О чудо, мы получили искомое:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0)^2)}$$

□

Теорема 8.2. *(Не упомянуто в пункте программы, но будто бы нужно). Господин Тюленев повторил свой подвиг, поэтому автор сделает то же самое)*
Пусть $f,g\colon U_{\delta_0}(x_0)\to\mathbb{R}$ и f,g дифференцируемы в точке x_0. Тогда

$$d(f\pm g)_{x_0}=df_{x_0}\pm dg_{x_0}$$

$$d(fg)_{x_0}=g(x_0)df_{x_0}+f(x_0)dg_{x_0}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0}=\frac{g(x_0)df_{x_0}-f(x_0)dg_{x_0}}{(g(x_0))^2},\ g(x_0)\neq 0$$

Доказательство. Доказательство - повторюшка предыдущего с производными) □

9 Производная сложной функции / композиции

Теорема 9.1. *Пусть f дифференцируема в т. $y_0\in\mathbb{R}$, g дифференцируема в т. $x_0\in\mathbb{R}$ и $y_0=g(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности т. x_0 определена композиция $(f\circ g)$ и эта композиция дифференцируема в т. x_0. Более того, справедливо равенство*

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в т. y_0, то она определена в $U_{\delta_0}(y_0)$. Функция g непрерывна в т. x_0 (т.к. дифференцируема), следовательно, $\exists\sigma_0>0$ т.ч.

$$\forall x\in U_{\sigma_0}(x_0)\hookrightarrow g(x)\in U_{\delta_0}(y_0)$$

Следовательно, в $U_{\sigma_0}(x_0)$ определена $f\circ g$.

g дифференцируема в т. $x_0\iff g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_g(x)(x-x_0)\ \forall x\in U_{\sigma_0}(x_0)$, где $\varepsilon_g(x)\to 0,\ x\to x_0$ (1)
Доопределим эпсилон в нуле, ведь от этого глобально ничего не изменится ($x-x_0$ всё равно занулит любую константу). $\varepsilon_g(x_0):=0$

f дифференцируема в т. $y_0\iff f(y)=f(y_0)+f'(y_0)(y-y_0)+\varepsilon_f(y)(y-y_0)\ \forall y\in U_{\delta_0}(y_0)$, где $\varepsilon_f(y)\to 0,\ y\to y_0$ (2)
Доопределим эпсилон в нуле по тем же рассуждениям. $\varepsilon_f(y_0):=0$. Получим, что ε_f непрерывна в т. y_0

Так как $\forall x\in U_{\sigma_0}(x_0)\hookrightarrow g(x)\in U_{\delta_0}(y_0)$, то подставим в (2) y = g(x) и воспользуемся (1):

$$f(g(x))=f(g(x_0))+f'(g(x_0))(g'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_g(x)(x-x_0))+\varepsilon_f(g(x))(g'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon_g(x)(x-x_0))$$

Причешем и получим:

$$f(g(x))=f(g(x_0))+f'(g(x_0))g'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\left[f'(g(x_0))\varepsilon_g(x)+\varepsilon_f(g(x))g'(x_0)+\varepsilon_f(g(x))\varepsilon_g(x)\right]$$

Теперь поймём, что $\varepsilon_f(g(x)) \to 0,\ x \to x_0$ по второй теореме о замене переменной при вычислении предела. $\varepsilon_g(x) \to 0,\ x \to x_0$ по определению. Производные - числа, т.к. функции дифференцируемы. Значит все слагаемые стремятся к нулю и мы можем квадратную скобку обозначить как $\varepsilon(x)$. Получим:

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)\ \forall x \in U_{\sigma_0}(x_0)$$

А это как раз значит, что $(f \circ g)$ дифференцируема в т. x_0 и производная равна $f'(g(x_0))g'(x_0)$ (по теореме об эквивалентности дифференцируемости в точке и существовании конечной производной).

□

Теорема 9.2. *Пусть $z = z(y)$ дифференцируема в т. y_0 и $y = y(x)$ дифференцируема в т. x_0. Тогда дифференциал z как функции независимой переменной y и дифференциал z как композиции $z(y(x))$ имеют одинаковую запись*

$$dz = z'(y_0)dy$$

В первом случае $dy = y - y_0$, а во втором dy - дифференциал y как функции от x.

Доказательство. В первом случае $z = z(y) \implies dz_{y_0} = z'(y_0)dy,\ dy = y - y_0$.
Во втором случае $dz_{x_0} = z'(y(x_0))y'(x_0)dx,\ dx = x - x_0$ (по теореме о производной композиции), а $y'(x_0)dx = dy_{x_0}$. □

10 Производная обратной функции

Теорема 10.1. *Пусть $f \in C(U_{\delta_0}(x_0))$ и строго монотонна на этой окрестности. Пусть f дифференцируема в т. x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists f^{-1} \in C(U_{\sigma_0}(f(x_0)))$, f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности, что и f, и дифференцируема в т. $y_0 = f(x_0)$. Причём*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Первая часть теоремы была доказана ранее. Докажем остальное))) (мама, спаси меня, когда уже закончится этот билет)

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Смотрится непонятно, поэтому заметим, что $\forall y \in \mathring{U}_{\sigma_0}(y_0)$ справедливо равенство

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$$

Почему всё норм? Потому что в силу строгой монотонности $f^{-1} \hookrightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$, но $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0),\ y \to y_0$ (т.к. f^{-1} непрерывна в т. y_0). Теперь спокойно по первой теореме о замене переменной при вычислении предела можем заменить $f^{-1}(y)$ на x, а $f^{-1}(y_0)$ на x_0 и получить:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

11 Производные элементарных функций

$$(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(const)' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{-1}{\operatorname{ch}^2 x},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Доказательство. Хохохо, давайте сами как-нибудь, а то автор сейчас расплачется. □