Гомоморфизм и изоморфизм в группах. Факторгруппы: теорема о гомоморфизме..

1 Гомоморфизм

Определение 1.1. *Гомоморфизм из группы* $G = (M, \cdot)$ *в группу* $G' = (M', *)$ *— это* $\varphi : G \to G'$ *такое, что* $\forall a, b, \in G \hookrightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$
Образ гомоморфизма $Im\varphi = \varphi(G) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subset G'$

Свойства гомоморфизма:

- $\varphi(e) = e'$

  Доказательство. $\varphi(a \cdot e) = \varphi(a) * \varphi(e) = \varphi(a) = \varphi(e \cdot a) = \varphi(e) * \varphi(a)$ □

- $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

  Доказательство. $\varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) = e' = \varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) * \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a^{-1})$ — обратный элемент к $\varphi(a)$ в G' □

Утверждение 1.1. $Im\varphi < G'$

Доказательство. $\forall c, d \in Im\varphi\ \exists a, b \in G : \varphi(a) = c,\ \varphi(b) = d$
Рассмотрим $c * d^{-1} = \varphi(a) * (\varphi(b))^{-1} = \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) = \varphi(a \cdot b^{-1}) \in Im\varphi \Rightarrow Im\varphi < G'$ (по критерию подгруппы) □

Определение 1.2. *Ядро гомоморфизма* $Ker\varphi = \{g \mid g \in G,\ \varphi(g) = e' \in G'\}$

Утверждение 1.2. $Ker\varphi \lhd G$

Доказательство.

1. $\forall a, b \in Ker\varphi \hookrightarrow \varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) = e' * (e')^{-1} = e' \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow Ker\varphi < G$ (по критерию подгруппы)

2. Рассмотрим произвольный $g \in G$:
   $\forall t \in g \cdot Ker\varphi\ \exists h \in Ker\varphi :\ t = g \cdot h$. Рассмотрим $\varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(h) * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(g^{-1}) = e' \Rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow g \cdot h \in (Ker\varphi) \cdot g \Rightarrow t \in (Ker\varphi) \cdot g \Rightarrow g \cdot Ker\varphi = Ker\varphi \cdot g$

□

Определение 1.3. *Сюръективный гомоморфизм из* G *на* G' : $\forall b \in G'\ \exists a \in G :\ \varphi(a) = b$
$(Im\varphi = \varphi(G) = G')$

Определение 1.4. *Изоморфизм — гомоморфизм, являющийся биекцией (обозначается* $\cong$*)*

2 Факторгруппы: теорема о гомоморфизме

Определение 2.1. *Пусть* $H \lhd G$*, рассмотрим смежные классы. Введем операцию* $(a \cdot H) \circ (b \cdot H) = (a \cdot b)H$*. Множество смежных классов относительно данной операции образуют группу, называемую факторгруппой группы* G *по нормальной подгруппе* H *и обозначаемую* G/H*.*

Доказательство.

1. $\forall a, b, c \in G \hookrightarrow ((a \cdot H) \circ (b \cdot H)) \circ (c \cdot H) = ((a \cdot b)H) \circ (c \cdot H) = (a \cdot b \cdot c)H$
   $(a \cdot H) \circ ((b \cdot H) \circ (c \cdot H)) = (a \cdot H) \circ ((b \cdot c) \cdot H) = (a \cdot b \cdot c)H$

2. $e \cdot H = H$ — нейтральный элемент: $(a \cdot H) \circ (e \cdot H) = (a \cdot e)H = a \cdot H$
   (Если $n \cdot H$ и $e \cdot H$ — нейтральные элементы, то $(n \cdot H) \circ (e \cdot H) = n \cdot H = e \cdot H$)

3. $\forall a \in G \hookrightarrow (a \cdot H) \circ (a^{-1} \cdot H) = (a \cdot a^{-1})H = e \cdot H = H$

$\square$

Замечание 2.1. *Зачем нормальность подгруппы? Для корректности, то есть независимости представителя.*
$a_1 \in a \cdot H = a_1 \cdot H$, $b_1 \in b \cdot H = b_1 \cdot H$
$(a_1 \cdot H) \circ (b_1 \cdot H) = (a_1 \cdot b_1)H = (a \cdot b)H \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 \in (a \cdot b)H$

Доказательство. $a_1 \in a \cdot H \Rightarrow \exists h_a \in H : a_1 = a \cdot h_a$, $b_1 \in b \cdot H \Rightarrow \exists h_b \in H : b_1 = b \cdot h_b$
$a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b$. Так как $H \lhd G$, то $\forall h_a \in H\ \exists \widetilde{h} \in H :\ h_a \cdot b = b \cdot \widetilde{h} \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b = a \cdot b \cdot \widetilde{h} \cdot h_b \in (a \cdot b)H$ $\square$

Утверждение 2.1. *Рассмотрим факторгруппу* $G/Ker\varphi$, $g \cdot Ker\varphi \in G/Ker\varphi$
$\forall a \in G \hookrightarrow a \in g \cdot Ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(g)$

Доказательство.

- $(\Rightarrow)$ $a \in g \cdot Ker\varphi \Rightarrow \exists h_a \in Ker\varphi :\ a = g \cdot h_a$
  $\varphi(a) = \varphi(g \cdot h_a) = \varphi(g) * \varphi(h_a) = \varphi(g)$

- $(\Leftarrow)$ $\varphi(a) = \varphi(g) \Rightarrow \varphi(a \cdot g^{-1}) = \varphi(a) * (\varphi(g))^{-1} = e' \Rightarrow a \cdot g^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow (a \cdot g^{-1}) \cdot g \in (Ker\varphi) \cdot g = g \cdot Ker\varphi$

$\square$

Теорема 2.1. ~~*Гомоморфный образ группы до победы коммунизма изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма*~~ $Im\varphi \cong G/Ker\varphi$

Доказательство. Биекция между $Im\varphi$ и $G/Ker\varphi :\ f : \varphi(g) \leftrightarrow g \cdot Ker\varphi$
$f(\varphi(g)) = g \cdot Ker\varphi$
$f(\varphi(a) \cdot \varphi(b)) = f(\varphi(a \cdot b)) = (ab) \cdot Ker\varphi$
$f(\varphi(a)) * f(\varphi(b)) = (a \cdot Ker\varphi) * (b \cdot Ker\varphi) = (ab) \cdot Ker\varphi$ $\square$