Размещения, перестановки, сочетания с повторениями и без

1 Основные понятия комбинаторики

1.1 Выборки без повторений

Определение 1.1. *Пусть имеется множество из n различных элементов.*

1. ***Перестановкой*** *без повторений называется любой упорядоченный набор всех n элементов.*
2. ***Размещением*** *из n по k ($k \leq n$) называется любой упорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из n.*
3. ***Сочетанием*** *из n по k называется любой неупорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из n.*

Пример 1.1. *Пусть $n = 3$, элементы: $\{a, b, c\}$.*

- *Перестановки: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.*
- *Размещения из 3 по 2: ab, ac, ba, bc, ca, cb.*
- *Сочетания из 3 по 2: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.*

1.2 Формулы для выборок без повторений

Теорема 1.1 (Формулы для выборок без повторений)**.** *Для конечного множества из n различных элементов справедливы формулы:*

1. *Число перестановок:*
$$P_n = n!$$
2. *Число размещений:*
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k \leq n$$
3. *Число сочетаний:*
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \leq n$$

2 Выборки с повторениями

2.1 Основные определения

Определение 2.1. *Пусть имеется n типов элементов, каждый из которых может быть выбран неограниченное число раз.*

1. ***Размещением с повторениями*** *из n по k называется любой упорядоченный набор из k элементов, где каждый элемент может быть любого из n типов.*
2. ***Сочетанием с повторениями*** *из n по k называется любой неупорядоченный набор из k элементов, где каждый элемент может быть любого из n типов.*
3. ***Перестановкой с повторениями*** *называется перестановка, в которой некоторые элементы повторяются.*

Пример 2.1. *Пусть есть 2 типа элементов: $\{a, b\}$, $k = 3$.*

- *Размещения с повторениями: $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$.*
- *Сочетания с повторениями: $\{a, a, a\}, \{a, a, b\}, \{a, b, b\}, \{b, b, b\}$.*

2.2 Формулы для выборок с повторениями

Теорема 2.1 (Формулы для выборок с повторениями). *Справедливы следующие формулы:*

1. *Число размещений с повторениями:*
$$\overline{A}_n^k = n^k$$

2. *Число сочетаний с повторениями:*
$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

3. *Число перестановок с повторениями: если имеется n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 — второго, ..., k_m — m-го типа, причём $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, то число перестановок с повторениями равно:*
$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

3 Сравнение и примеры

Замечание 3.1. *Важно различать:*

- ***Упорядоченность****: размещения и перестановки учитывают порядок, сочетания — нет.*
- ***Повторения****: в выборках без повторений элементы уникальны, в выборках с повторениями могут повторяться.*

Пример 3.1 (Задача). *Сколько различных слов длины 4 можно составить из букв слова «МАТЕМАТИКА»?*

Решение 1. *В слове «МАТЕМАТИКА» есть повторяющиеся буквы: М(2), А(3), Т(2), Е(1), И(1), К(1), всего 10 букв. Это задача на перестановки с повторениями:*

$$P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3628800}{24} = 151200.$$

Пример 3.2 (Задача). *Сколькими способами можно выбрать 5 пирожных в кондитерской, где есть 4 вида пирожных?*

Решение 2. *Это задача на сочетания с повторениями:*

$$\overline{C}_4^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56.$$