(Будет только в задачах) Комбинаторный и алгебраический подходы к получению тождеств с биномиальными коэффициентами: пути по узлам сетки, рекуррентные соотношения, производящие функции.

1 Производящие функции

Определение 1.1. *Пусть дана последовательность* $\{a_n\}$*. Пусть также*

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

Тогда $A(t)$ *называется производящей функцией последовательности* $\{a_n\}$*.*

Определение 1.2. *Будем называть последовательность* $\{a_n\}$ *финитной, если*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a_n = 0$$

Замечание 1.1. *Далее будем рассматривать только финитные последовательности.*

Пример 1.1. *Рассмотрим последовательность:*

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots \tag{1}$$

Запишем для неё производящую функцию (она легко следует из бинома Ньютона):

$$C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \ldots + C_n^n x^n + 0 + \ldots = (1+x)^n$$

Заметим, что $(1+x)^n$ *есть многочлен. Более того, для любой финитной последовательности производящая функция будет являтся многочленом.*

1.1 Получение тождеств при помощи производящих функций

Теорема 1.1.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Доказательство. Подставим $x = 1$ в производящую функцию последовательности (1). Легко видеть, что получим требуемое. □

Теорема 1.2.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

Доказательство. Подставим $x = -1$ в производящую функцию последовательности (1). Легко видеть, что получим требуемое. □

Теорема 1.3.

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

Доказательство. Запишем производящую функцию последовательности (1) в следующем представлениии:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Легко видеть, что это многочлен, а значит мы можем без труда взять от него производную. С одной стороны, это есть:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot x^{k-1}$$

С другой стороны, свернув это выражение в $(1+x)^n$ и взяв уже от него производную, получим:

$$((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$$

Так как обе полученные производные равны в силу равенства исходных функций, итого имеем:

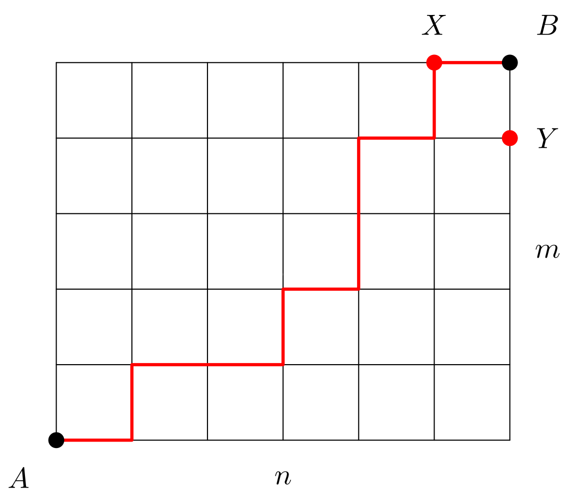
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

Тогда, подставив в полученное равенство $x = 1$, тривиально получим то, что и требовалось. □

2 Блуждание по сетке

Пример 2.1. *Рассмотрим робота, который может ходить только вверх и вправо. Сколькими способами, шагая по линиям сетки, робот может попасть из левого нижнего узла в правый верхний?*

Решение. Пусть $A(0,0)$ и $B(n,m)$ – левый нижний и правый верхний узлы соответственно.



Заметим, что любой путь из A в B всегда имеет одну и ту же длину, равную $n+m$. При этом в нем всегда m шагов вверх и n шагов вправо. Значит путь из A в B однозначно задается выбором мест, где мы пойдём вправо. Тогда всего путей и A в B ровно

$$C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}$$

□

Теорема 2.1.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Доказательство. Рассмотрим все того же робота из предыдущей задачи. Заметим, что любой путь из A в B проходит либо через X, либо через Y. При этом по предыдущему решению, количество путей из A в X равно C_{m+n-1}^{m-1}, а из A в Y – C_{m+n-1}^{m}. Значит итого, используя то, что всего путей из A в B ровно C_{m+n}^{m}, получим:

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n-1}^{m} + C_{m+n-1}^{m-1}$$

Легко видеть, что получили требуемое тождество. □