# Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Бесконечно большие последовательности и их свойства

# 1 Предел числовой последовательности

## 1.1 Определение предела последовательности

**Определение 1.1.** *Последовательностью будем называть отображение* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

**Замечание 1.1.** *При этом* $x(t) = z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Элементы последовательности называются пара $(n, z_n)$. При этом числа $z_n$ называются значениями элементов последовательности.

Вся последовательность обозначается $\{z_n\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Определение 1.2.** $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{\infty\}$ — *расширенная числовая прямая.*

**Замечание 1.2.** *Притом* $\infty \neq \{-\infty\}$, $\infty \neq \{+\infty\}$.

**Определение 1.3** (Трехэтажные определения по $\hat{\mathbb{R}}$)**.** *Пусть* $\epsilon > 0$, *тогда*

1. *если* $a \in \mathbb{R}$, *то* $U_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$;
2. *если* $a = +\infty$, *то* $U_\epsilon(a) = \left(\frac{1}{\epsilon}, +\infty\right)$;
3. *если* $a = -\infty$, *то* $U_\epsilon(a) = \left(-\infty, -\frac{1}{\epsilon}\right)$;
4. *если* $a = \infty$, *то* $U_\epsilon(a) = U_\epsilon(-\infty) \cup U_\epsilon(+\infty)$.

**Определение 1.4.** *Пусть* $\{z_n\}$ — *числовая последовательность. Будем говорить, что элемент* $a \in \hat{\mathbb{R}}$ *является пределом последовательности* $\{z_n\}$ *и писать*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow z_n \to a,\ n \to \infty,$$

*если выполнено следующее:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow z_n \in U_\epsilon(a).$$

**Замечание 1.3.** *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow |z_n| \in U_\epsilon(a)$;
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow |z_n| \in U_\epsilon(a)$.

*Доказательство.* Так как $a \in \mathbb{R}$, то $U_\epsilon(a) \subset U_\epsilon(a)$, откуда получаем немедленно $(1) \to (2)$ (при $N(\epsilon) = N(\epsilon)$).

Теперь покажем $(2) \to (1)$. Так как для любого $\epsilon$, то возьмём $\epsilon' = \epsilon$, тогда $\forall \epsilon > 0\ N(\epsilon) := N(\epsilon')$ : $\forall n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow z_n \in U_{\epsilon'}(a) = U_\epsilon(a)$. □

**Определение 1.5.** *Последовательность* $\{z_n\}$ *называется сходящейся, если она имеет конечный предел. В противном случае она называется расходящейся.*

**Определение 1.6.** *Последовательность* $\{z_n\}$ *называется ограниченной, если множество значений её элементов ограничено. То есть*

$$\exists M \in [0; +\infty) : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| \leqslant M.$$

**Определение 1.7.** *Последовательность* $\{z_n\}$ *называется бесконечно большой, если* $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

**Замечание 1.4.** *Притом*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} z_n = -\infty \\ \lim_{n\to\infty} z_n = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \{z_n\} \text{ — бесконечно большая.}$$

*Обратное не верно. Контрпример:* $\{z_n\} = \{(1,-1)^n \cdot n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Она бесконечно большая, но при этом* $\lim_{n\to\infty} z_n \neq -\infty$, $\lim_{n\to\infty} z_n \neq +\infty$.

**Замечание 1.5.** *Как сказать иначе:*

1. *Последовательность* $\{z_n\}$ *— неограниченная;*

2. *Последовательность* $\{z_n\}$ *— бесконечно большая?*

**Замечание 1.6.** $(2) \to (1)$, *но* $(1) \to (2)$. *Контрпример:* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+(-1)^n)\cdot n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неограниченная, но и не бесконечно большая.*

**Лемма 1.1** (Лемма о непересекающихся окрестностях)**.**

$$\forall a, b \in \hat{\mathbb{R}},\ a \neq b\ \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \varnothing.$$

*Доказательство.* Возможны 4 случая:

1. $a, b \in \mathbb{R},\ -\infty < a < b < +\infty$. Тогда возьмём $\epsilon = \frac{b-a}{2}$:

$$U_\epsilon(a) = \left(a - \frac{b-a}{2}, a + \frac{b-a}{2}\right) \cap U_\epsilon(b) = \left(a + \frac{b-a}{2}, b + \frac{b-a}{2}\right) = \varnothing.$$

2. $-\infty < a < b = +\infty$. Рассмотрим $\epsilon = \frac{1}{|a|+1}$ и заметим, что тогда $\epsilon \leqslant 1$.

$$U_\epsilon(b) = (|a|+1, +\infty) \cap U_\epsilon(a) = \left(a - \frac{1}{|a|+1}, a + \frac{1}{|a|+1}\right) = \varnothing,$$

так как $U_\epsilon(a) \subset (a-1, a+1)$, который не пересекается с $U_\epsilon(b)$.

3. $-\infty = a < b < +\infty$. Тогда действуем по аналогии с пунктом выше и рассматриваем

$$\varepsilon = \frac{1}{|b|+1}.$$

4. $-\infty = a < b = +\infty$. Рассмотрим $\varepsilon = 1$.

$$U_\varepsilon(a) = (-\infty, -1) \cap U_\varepsilon(b) = (1, +\infty) = \emptyset.$$

□

**Теорема 1.1** (Единственность предела)**.** *Если у последовательности* $\{x_n\}$ *существует предел в* $\mathbb{R}$*, то он единственен в* $\mathbb{R}$*.*

*Доказательство.* Предположим, что $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, такие что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Тогда по лемме о непересекающихся окрестностях $\exists \varepsilon^* > 0$:

$$U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b) = \emptyset.$$

Запишем определение предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)$$

Подставим $\varepsilon = \varepsilon^*$. Следовательно, если мы возьмём

$$n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\},$$

то $x_n \in (U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b)) = \emptyset$ — противоречие.

Следовательно, $a = b$. □

**Замечание 1.7.** *В $\hat{\mathbb{R}}$ предел может быть не единственен. (Так как если $+\infty$ — предел, то и $\infty$ — предел).*

*Например, если $\{x_n = n\}_{n=1}^{\infty}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad и \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

**Теорема 1.2.** *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена. Обратное неверно.*

*Доказательство.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, значит у неё есть предел, назовём его $a$, и этот предел — число. Тогда по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

В частности, при $\varepsilon = 1$ существует $N = N(1)$ такой, что

$$\forall n \geq N(1) \Rightarrow |x_n| \leq |a| + 1.$$

Поскольку вне этого «хвоста» остаётся конечное число элементов, возьмём

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |a| + 1\}.$$

Отсюда следует, что $|x_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$. □

## 1.2 Свойства пределов сходящихся последовательностей, связанные с арифметическими операциями

**Определение 1.8.** *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если её предел равен 0.*

**Лемма 1.2.** *Произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей есть бесконечно малая последовательность. То есть, если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ — бесконечно малая, то $\{z_n\} := \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность.*

*Доказательство.*

$$\{x_n\} \text{ — ограниченная последовательность } \Leftrightarrow \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leq M.$$

$$\{y_n\} \text{ — бесконечно малая последовательность } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - 0| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < M \cdot \varepsilon$, а тогда по утверждению 2.1 $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = N(\varepsilon)$, если $M < 1$, или $N(\varepsilon) = N(\varepsilon/M)$, если $M \geq 1$. Итого $\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$. □

**Лемма 1.3.** *Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то есть, если*

$$\begin{cases} \{x_n\} - \textit{бесконечно малая} \\ \{y_n\} - \textit{бесконечно малая} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x_n + y_n\} - \textit{бесконечно малая} \\ \{x_n \cdot y_n\} - \textit{бесконечно малая} \end{cases}$$

*Доказательство.* Докажем для суммы и разности. С учётом утверждения 2.1:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| \in U_{\varepsilon/2}(0)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_n| \in U_{\varepsilon/2}(0)$$

Возьмём $N(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow x_n + y_n \in U_\varepsilon(0).$$

Тот факт, что $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно малая следует из того, что $\{x_n\}$ ограничена (так как она сходящаяся, поскольку бесконечно малая) и $\{y_n\}$ — бесконечно малая, а по лемме 2.2 их произведение будет бесконечно малой последовательностью. □

**Лемма 1.4.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \textit{последовательность } \{a - x_n\} - \textit{бесконечно малая.}$$

**Лемма 1.5.** *Пусть* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, *при этом* $a, b \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

*Доказательство.* Для суммы и разности нужно лишь заметить, что последовательность $\{(a_n + b_n) - (a+b)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая (можно убедиться, раскрыв скобки и воспользовавшись леммой 2.4).

Покажем для произведения. Для этого достаточно доказать, что $\{(a_n \cdot b_n) - (ab)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность. Заметим, что

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n \cdot (b_n - b) + b \cdot (a_n - a).$$

Рассмотрим последовательность $\{a_n \cdot (b_n - b)\}_{n=1}^{\infty}$. Она бесконечно малая, как произведение ограниченной на бесконечно малую (так как $\{a_n\}$ — сходящаяся, а значит ограниченная, а $\{b_n - b\}$ — бесконечно малая).

Теперь рассмотрим последовательность $\{b \cdot (a_n - a)\}_{n=1}^{\infty}$. Это произведение константной (ограниченной) последовательности $\{b\}$ на бесконечно малую $\{a_n - a\}$, что также является бесконечно малой последовательностью.

Итого получаем сумму двух бесконечно малых последовательностей, которая есть бесконечно малая последовательность, что и требовалось доказать. □

**Лемма 1.6.** *Пусть* $x_n \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и существует* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *где* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Тогда существует* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.

*Доказательство.* Покажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ограничена.

По определению предела получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(x).$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. Тогда существует $N^* \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geqslant N^*$ выполняется

$$x_n \in U_{\frac{|x|}{2}}(x) \Leftrightarrow x - \frac{|x|}{2} < x_n < x + \frac{|x|}{2}.$$

Отсюда

$$\forall n \geqslant N^* \Rightarrow |x_n| \geqslant \frac{|x|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leqslant \frac{2}{|x|}.$$

Возьмём

$$M := \max\left\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \dots, \frac{1}{|x_{N^*}|}, \frac{2}{|x|}\right\}.$$

Тогда $\frac{1}{|x_n|} \leqslant M \; \forall n \in \mathbb{N}$, значит последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ограничена.

Теперь рассмотрим

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_n}{x \cdot x_n} = \frac{1}{x \cdot x_n} \cdot (x - x_n).$$

Заметим, что $\{x - x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\frac{1}{x \cdot x_n}$ ограничена (так как $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ограничена).

Итого произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность:

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

□

**Следствие 1.** *Пусть существуют* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $y \in \mathbb{R}$; $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, *причём* $x_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}.$$

*Доказательство.* Достаточно воспользоваться предыдущей леммой и леммой о пределе произведения последовательностей, рассматривая $\frac{y_n}{x_n}$ как $y_n \cdot \frac{1}{x_n}$. □

## 1.3 Предельный переход в неравенствах

**Лемма 1.7.** *Пусть есть два элемента* $A, B \in \mathbb{R}$ *и две числовые последовательности* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *такие, что:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = B, \quad A < B.$$

*Тогда* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < y_n$.

*Доказательство.* По лемме о непересекающихся окрестностях

$$\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(A) \cap U_{\varepsilon^*}(B) = \emptyset.$$

А так как $A < B$, то $\forall x \in U_{\varepsilon^*}(A)$ и $\forall y \in U_{\varepsilon^*}(B) \Rightarrow x < y$.

Запишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A);$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow y_n \in U_\varepsilon(B).$$

Возьмём $N := \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\}$. Тогда $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \in U_{\varepsilon^*}(A)$ и $y_n \in U_{\varepsilon^*}(B) \Rightarrow x_n < y_n$, что и требовалось доказать. □

**Теорема 1.3** (Теорема о предельном переходе в неравенстве). *Пусть* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A$, $A \in \mathbb{R}$ *и* $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = B$, $B \in \mathbb{R}$. *Пусть* $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \; \forall n \geq N$. *Тогда* $A \leq B$.

*Доказательство.* Предположим $A > B$. Тогда по только что доказанной лемме $\exists N^* : \forall n \geq N^* \Rightarrow x_n > y_n$.

Положим $\widetilde{N} := \max\{N, N^*\}$. Тогда $\forall n \geq \widetilde{N} \Rightarrow x_n \leq y_n$ (по условию) и $x_n > y_n$ (по предположению), что невозможно. Следовательно, предположение неверно. □

**Замечание 1.8.** *Предельный переход может портить строгие неравенства и превращать их в нестрогие.*

**Следствие 2.** *Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geq a$, $a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A$, $A \in \mathbb{R}$, то $A \geq a$.*

*Доказательство.* Положим $y_n := a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и применим предыдущую теорему. □

**Теорема 1.4** (Теорема о трёх последовательностях или о двух милиционерах)**.** *Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ — числовые последовательности. Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, $c \in \mathbb{R}$. Пусть $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n$. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = c$.*

*Доказательство.* Запишем определение предела:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon);$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow b_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon);$$

Возьмём $\widetilde{N}(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N\}$. Тогда $\forall n \geq \widetilde{N}(\varepsilon)$ выполняется:

$$a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon),$$
$$b_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon),$$
$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Следовательно, $c_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, что равносильно $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. □

**Теорема 1.5.** *Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow y_n \geq x_n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Аналогично для $-\infty$.*

*Доказательство.* Распишем определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Положим $\widetilde{N}(\varepsilon) := \max\{N_1(\varepsilon), N\}$. Тогда $\forall n \geq \widetilde{N}(\varepsilon)$:

$$y_n \geq x_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

□

## 1.4 Пределы монотонных последовательностей

**Определение 1.9.** *Последовательность $\{x_n\}$ называется* ***нестрого возрастающей (нестрого убывающей)****, если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$). Если неравенство строгое, то последовательность называется* ***строго возрастающей (строго убывающей)****.*

**Определение 1.10.** *Последовательность $\{x_n\}$ называется* ***монотонной****, если она нестрого возрастает или нестрого убывает. Если она строго возрастает или строго убывает, то называется* ***строго монотонной****.*

**Теорема 1.6** (Теорема Вейерштрасса)**.** *Любая монотонная последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел в* $\hat{\mathbb{R}}$*. При этом если* $\{x_n\}$ *нестрого возрастает, то* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$*. Если* $\{x_n\}$ *нестрого убывает, то* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$*.*

*Доказательство.* Докажем для нестрого возрастающей последовательности. Для нестрого убывающей доказательство аналогично.

**Случай 1:** Последовательность ограничена сверху. По теореме о существовании супремума существует $M = \sup\{x_n\}$. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

По определению супремума:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leq M$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : x_N > M - \varepsilon$.

В силу возрастания последовательности $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \geq x_N > M - \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(M)$, то есть $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

**Случай 2:** Последовательность неограничена сверху. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : x_N > \frac{1}{\varepsilon}$. В силу возрастания $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \geq x_N > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$, а значит $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. □

**Замечание 1.9.** *Здесь мы переписали второй пункт определения супремума в виде* $\forall \varepsilon > 0\ \exists a(\varepsilon) : a \in (U_\varepsilon(M) \cap A)$*, что равносильно «оригинальному» определению.*