Бинарная куча. Основные операции. Построение бинарной кучи за $\mathcal{O}(n)$

Соль Михаил

1 Бинарная куча

Определение 1.1. *Бинарной кучей назовём структуру данных, представляющую собой подвешенное бинарное дерево, где для каждого нелистового узла верно, что его дети не меньше (не больше) его самого, а также, что на n-ом уровне, кроме листового, 2^n узлов. К тому же последний слой заполняется слева направо.*

Лемма 1.1. *Число ярусов (высота) бинарной кучи из n элементов можно оценить, как $\mathcal{O}(\log n)$.*

Доказательство. Рассмотрим все ярусы кучи, без последнего. Тогда у нас имеется полная бинарная куча в которой $k < n$ элементов и ее высота на 1 меньше. У такой кучи каждый следующий ярус содержит в два раза больше элементов. Пусть высота этой кучи равна h. Тогда:

$$k = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

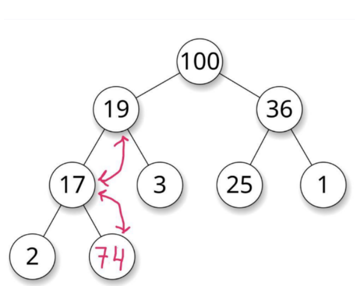
Из этого следует, что $h = \log_2(k+1) \leq \log_2 n = \mathcal{O}(\log n)$. Поскольку исходная куча содержит на 1 ярус больше, ее высоту можно оценить как $\mathcal{O}(\log n)$ $\square$

Хранение в памяти:

- Хранить кучу удобно в массиве (далее будем использовать 0-индексацию)
- Пусть мы рассматриваем элемент с индексом i
- Индекс левого ребенка: $2i + 1$
- Индекс правого ребенка: $2i + 2$
- Элементы, которые являются листами, имеют индексы $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor ... (n-1)$

2 Sift Up (Просеивание вверх)

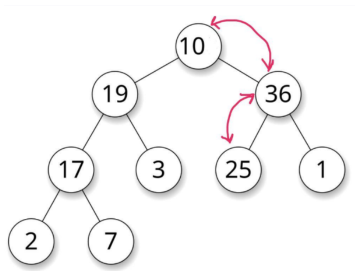
- Сравним элемент с родительским элементом, если он меньше — поменяем их местами
- Продолжим выполнение операции до тех пор, пока родитель не окажется больше или равным значению нашего элемента, либо пока элемент не станет корнем



См. реализацию в конце конспекта

3 Sift Down (Просеивание вниз)

- Сравним элемент с дочерними элементами, если один из них больше, чем этот элемент, поменяем местами с большим из дочерних элементов
- Продолжим выполнение операции до тех пор, пока элемент не окажется больше всех детей или не окажется листом



См. реализацию в конце конспекта

4 Вставка

Имеется куча (возможно, пустая), мы хотим добавить в неё элемент:

- Свойства кучи позволяют только добавить его на последний ярус
- Такое добавление может нарушить свойства кучи: добавленный элемент может оказаться больше родителя
- Исправить проблему возможно, если выполнить операцию SiftUp

Операция будет работать за $\mathcal{O}(\log n)$, поскольку в худшем случае число обменов равно высоте кучи.

5 ExtractMax (ExtractMin)

Имеется непустая куча, хотим извлечь максимальный (минимальный) элемент (после извлечения элемент больше не должен находится в куче):

- Исходя из свойств кучи максимум (минимум) всегда находится в корне
- Также согласно свойствам кучи (все ярусы кроме последнего должны быть заполнены), на место извлекаемого элемента необходимо что-то поставить
- Для этого подойдет последний элемент последнего яруса, но он может оказаться меньше (больше) какого-либо из детей корня
- Исправить проблему возможно, если выполнить операцию Sift Down

Операция будет работать за $\mathcal{O}(\log n)$, поскольку в худшем случае число обменов равно высоте кучи.

6 Increase Key и Decrease Key

Имеется непустая куча, хотим заменить элемент по ключу:

Increase Key:

- Имея ключ, увеличиваем его значение на $\Delta > 0$
- Для восстановления свойства кучи выполняем Sift Up (для max-кучи) или Sift Down (для min-кучи)

Decrease Key:

- Имея ключ, уменьшаем его значение на $\Delta > 0$
- Для восстановления свойства кучи выполняем Sift Up (для min-кучи) или Sift Down (для max-кучи)

Операции будут работать за $\mathcal{O}(\log n)$, поскольку они основаны на операциях Sift Down и Sift Up.

7 Удаление элемента

Имеется непустая куча, хотим удалить элемент по ключу:

- Имея ключ, делаем его значение условно $+\infty$ ($-\infty$)
- Выполняем операцию Sift Up (элемент окажется в корне)
- Выполняем операцию ExtractMax (ExtractMin)

Замечание 7.1. *Такая последовательность действий подходит для Increase/Decrease Key, но тогда после неё необходимо вставить новый элемент, равный значению удалённого $\pm\ \Delta$, и просеять его вверх (Sift Up).*

8 Построение

1. Можно построить за $\mathcal{O}(n \log n)$, просто сделав n операций вставки
2. Можно построить за $\mathcal{O}(n)$. Давайте поочередно от элемента с индексом $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ до начала массива вызывать операцию SiftDown

Замечание 8.1. *Это будет работать, так как кучи из 1 вершины корректны, а далее мы восстанавливаем кучи снизу вверх.*

Доказательство. Докажем, что построение 2 работает за $\mathcal{O}(n)$. Заметим, что:

- На высоте i (листья имеют высоту 1) число вершин не превосходит $\lceil \frac{n}{2^i} \rceil$
- Одна операция SiftDown делает $2i$ сравнений, а также высота кучи не превосходит $\lceil \log n \rceil$

Тогда:

$$T(n) \le \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{n}{2^i} \cdot 2i = 2n \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{i}{2^i}$$

Пусть

$$S = \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \left(\frac{1}{2} \frac{i-1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{i-1}{2^{i-1}} + \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{1}{2^i}$$

Оценим первое слагаемое:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{i-1}{2^{i-1}} < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} S$$

Оценим второе слагаемое как бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{1}{2^i} < 1$$

Следовательно $S < \frac{1}{2} S + 1 \iff S < 2$

Тогда:

$$T(n) \le 2n \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} \frac{i}{2^i} < 4n = \mathcal{O}(n)$$

$\square$

Замечание 8.2. *Для слияния двух куч сложим их элементы в один массив и построим кучу. Будет работать за $\mathcal{O}(n)$.*

```java
public class Heap {
    private Object[] elements;
    private int size;
    private final Comparator<Object> comparator;
    public Heap(Comparator<Object> cmp) {
        this.comparator = cmp;
        this.elements = new Object[10];
        this.size = 0;
    }
    protected void siftUp(int index) {
        assert elements != null;
        while (index != 0) {
            int parent = (index - 1) / 2;
            if (comparator.compare(elements[parent], elements[index]) < 0) {
                swap(parent, index);
                index = parent;
            } else {
                return;
            }
        }
    }
    protected void siftDown(int index) {
        if (index >= size) return;

        int leftChild = index * 2 + 1;
        int rightChild = index * 2 + 2;
        int iMin = index;
        if (leftChild < size &&
                comparator.compare(elements[iMin], elements[leftChild]) < 0) {
            iMin = leftChild;
        }
        if (rightChild < size &&
                comparator.compare(elements[iMin], elements[rightChild]) < 0) {
            iMin = rightChild;
        }
        if (iMin != index) {
            swap(index, iMin);
            siftDown(iMin);
        }
    }
    private void swap(int i, int j) {
        Object temp = elements[i];
        elements[i] = elements[j];
        elements[j] = temp;
    }
}
```