Мастер теорема о рекурсии

ceagest

Теорема 1 (Мастер теорема о рекурсии)**.** *Имеется соотношение:*

$$a \geq 1, b > 1, T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^c$$

Тогда:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & a > b^c \\ \Theta(n^c \log n), & a = b^c \\ \Theta(n^c), & a < b^c \end{cases}$$

Доказательство. Будем строить дерево рекурсии. Ясно, что его глубина $\log_b n$. Заметим, что на k-ом уровне будет a^k вершин, каждая из которых будет стоить $\left(\frac{a}{b^k}\right)^c$ операций. Просуммируем по всем уровням:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\log_b n} a^k \left(\frac{n}{b^k}\right)^c = n^c \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k \tag{1}$$

Рассмотрим случаи:

1. $\frac{a}{b^c} < 1 \iff a < b^c$. Тогда в (1) — убывающая геометрическая прогрессия $\implies \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k$ равна некоторой константе. Значит итоговая асимптотика $\Theta(n^c)$
2. $\frac{a}{b^c} > 1 \iff a > b^c$. Тогда в (1) — возрастающая геометрическая прогрессия. Так как сумма возрастающей геометрической прогрессии асимптотически эквивалентна своему старшему члену, то:

$$T(n) = \Theta\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right) = \Theta\left(n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{n^c}\right) = \Theta(a^{\log_b n}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

3. $\frac{a}{b^c} = 1 \iff a = b^c$. Тогда:

$$T(n) = n^c \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k = n^c \sum_{k=1}^{\log_b n} 1^k = \Theta(n^c \log_b n)$$

□