Префиксные суммы

Лесников Юрий, ceagest

1 Префиксные суммы

Определение 1.1. *Префиксная сумма (prefix sum) массива* $a[0..n-1]$ *— это массив* $p[0..n]$*, где:*

$$p[i] = \sum_{j=0}^{i-1} a[j]$$

Построение префиксных сумм на Java

```
public static int[] buildPrefixSum(int[] array) {
    int[] prefix = new int[array.length + 1];
    for (int i = 1; i < array.length; i++) {
        prefix[i] = prefix[i - 1] + array[i - 1];
    }
    return prefix;
}
```

1.1 Применение префиксных сумм

Быстрое вычисление суммы на отрезке. Сумма элементов на отрезке $[l, r]$:

$$sum(l, r) = p[r+1] - p[l]$$

1.2 Анализ сложности префиксных сумм

Временная сложность:

- Построение префиксного массива: $\Theta(n)$
- Запрос суммы на отрезке: $\Theta(1)$
- Память: $\Theta(n)$

Сравнение с наивным подходом:

- Без префиксных сумм: запрос суммы за $\Theta(n)$
- С префиксными суммами: предобработка $\Theta(n)$, запрос $\Theta(1)$
- Выигрыш при множественных запросах

2 Двумерные префиксные суммы

Определение 2.1. *Двумерная префиксная сумма матрицы* $a[m][n]$ *— это матрица* $p[m+1][n+1]$*, где:*

$$p[i][j] = \sum_{x=0}^{i-1} \sum_{y=0}^{j-1} a[x][y]$$

Сумма в прямоугольнике. Сумма в прямоугольнике от $[x_1, y_1]$ до $[x_2, y_2]$:

$$sum = p[x_2+1][y_2+1] - p[x_1][y_2+1] - p[x_2+1][y_1] + p[x_1][y_1]$$

Замечание 2.1. *Можно обобщить на* n*-мерный случай, используя формулу включений-исключений.*

3 Обобщение на произвольную обратимую операцию

Определение 3.1. *Обратной бинарной операцией к операции* $\oplus\colon \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *является такая операция* $\ominus\colon \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$*, что:*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \hookrightarrow \quad (x \oplus y) \ominus y = x$$

Определение 3.2 (Обобщение)**.** *Пусть дана обратимая операция* $\oplus\colon \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *с обратной операцией* $\ominus\colon \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$*. Тогда обобщённая префиксная сумма массива* $a[0..n-1]$ *– это массив* $p[0..n]$*, где:*

$$p[i] = \bigoplus_{j=0}^{i-1} a[j]$$

Замечание 3.1. *Теперь для подсчёта "суммы" на отрезке* $[l, r]$ *достаточно выполнить следующее:*

$$p[r+1] \ominus p[l]$$

Замечание 3.2. *Анализ сложности обобщённых префиксных сумм выполняется аналогично.*

3.1 Двумерные обобщённые префиксные суммы

Определение 3.3 (Обобщение)**.** *Пусть дана обратимая операция* $\oplus\colon \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *с обратной операцией* $\ominus\colon \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$*. Тогда двумерная обобщенная префиксная сумма матрицы* $a[m][n]$ *– это матрица* $p[m+1][n+1]$*, где:*

$$p[i][j] = \bigoplus_{x=0}^{i-1} \bigoplus_{y=0}^{j-1} a[x][y]$$

Замечание 3.3. *Теперь для подсчёта "суммы" в прямоугольнике* $[x_1, y_1]$ *до* $[x_2, y_2]$ *достаточно выполнить следующее:*

$$p[x_2+1][y_2+1] \ominus p[x_1][y_2+1] \ominus p[x_2+1][y_1] \oplus p[x_1][y_1]$$