

# Префиксные суммы

ceagest

## 1 Префиксные суммы

**Определение 1.1.** Префиксная сумма (prefix sum) массива  $a[0..n-1]$  — это массив  $p[0..n]$ , где:

$$p[i] = \sum_{j=0}^{i-1} a[j]$$

Построение префиксных сумм на Java

```
1 public static int[] buildPrefixSum(int[] array) {  
2     int[] prefix = new int[array.length + 1];  
3     for (int i = 1; i < array.length; i++) {  
4         prefix[i] = prefix[i - 1] + array[i - 1];  
5     }  
6     return prefix;  
7 }
```

### 1.1 Применение префиксных сумм

**Быстрое вычисление суммы на отрезке.** Сумма элементов на отрезке  $[l, r]$ :

$$sum(l, r) = p[r + 1] - p[l]$$

### 1.2 Анализ сложности префиксных сумм

**Временная сложность:**

- Построение префиксного массива:  $\Theta(n)$
- Запрос суммы на отрезке:  $\Theta(1)$
- Память:  $\Theta(n)$

**Сравнение с наивным подходом:**

- Без префиксных сумм: запрос суммы за  $\Theta(n)$
- С префиксными суммами: предобработка  $\Theta(n)$ , запрос  $\Theta(1)$
- Выигрыш при множественных запросах

## 2 Двумерные префиксные суммы

**Определение 2.1.** Двумерная префиксная сумма матрицы  $a[m][n]$  — это матрица  $p[m+1][n+1]$ , где:

$$p[i][j] = \sum_{x=0}^{i-1} \sum_{y=0}^{j-1} a[x][y]$$

**Сумма в прямоугольнике.** Сумма в прямоугольнике от  $[x_1, y_1]$  до  $[x_2, y_2]$ :

$$sum = p[x_2 + 1][y_2 + 1] - p[x_1][y_2 + 1] - p[x_2 + 1][y_1] + p[x_1][y_1]$$

**Замечание 2.1.** Можно обобщить на  $n$ -мерный случай, используя формулу включений-исключений.