

Префиксные суммы

Лесников Юрий, seagest

1 Префиксные суммы

Определение 1.1. Префиксная сумма (*prefix sum*) массива $a[0..n-1]$ — это массив $p[0..n]$, где:

$$p[i] = \sum_{j=0}^{i-1} a[j]$$

Построение префиксных сумм на Java

```
1 public static int[] buildPrefixSum(int[] array) {  
2     int[] prefix = new int[array.length + 1];  
3     for (int i = 1; i < array.length; i++) {  
4         prefix[i] = prefix[i - 1] + array[i - 1];  
5     }  
6     return prefix;  
7 }
```

1.1 Применение префиксных сумм

Быстрое вычисление суммы на отрезке. Сумма элементов на отрезке $[l, r]$:

$$sum(l, r) = p[r + 1] - p[l]$$

1.2 Анализ сложности префиксных сумм

Временная сложность:

- Построение префиксного массива: $\Theta(n)$
- Запрос суммы на отрезке: $\Theta(1)$
- Память: $\Theta(n)$

Сравнение с наивным подходом:

- Без префиксных сумм: запрос суммы за $\Theta(n)$
- С префиксными суммами: предобработка $\Theta(n)$, запрос $\Theta(1)$
- Выигрыш при множественных запросах

2 Двумерные префиксные суммы

Определение 2.1. Двумерная префиксная сумма матрицы $a[m][n]$ — это матрица $p[m+1][n+1]$, где:

$$p[i][j] = \sum_{x=0}^{i-1} \sum_{y=0}^{j-1} a[x][y]$$

Сумма в прямоугольнике. Сумма в прямоугольнике от $[x_1, y_1]$ до $[x_2, y_2]$:

$$sum = p[x_2 + 1][y_2 + 1] - p[x_1][y_2 + 1] - p[x_2 + 1][y_1] + p[x_1][y_1]$$

Замечание 2.1. Можно обобщить на n -мерный случай, используя формулу включений-исключений.