

Решето Эратосфена, время работы (б/д)

ceagest

1 Решето Эратосфена

Для составления таблицы простых чисел, не превосходящих данного целого N , существует способ, имеющий название «решето Эратосфена».

1. Выписываем числа $1, 2, \dots, N$.
2. Первое, большее 1, число этого ряда есть 2. Оно простое.
3. Вычёркиваем из ряда $1, 2, \dots, N$ все числа, кратные 2 и не равные 2.
4. Теперь первое не вычеркнутое число есть 3. Оно не делится на 2 и является простым.
5. Вычёркиваем из ряда $1, 2, \dots, N$ все числа, кратные 3 и не равные 3.
6. и т.д.

Algorithm 1 Решето Эратосфена

```
1: function Primes( $n$ )
2: bool[ $n$ ]  $primes \leftarrow \{\text{true}, \text{true}, \dots, \text{true}\}$ 
3:  $primes[0] \leftarrow \text{false}$ 
4:  $primes[1] \leftarrow \text{false}$ 
5: for  $i \in \{2 \dots n - 1\}$  do
6:   if  $primes[i]$  then
7:     for  $j \leftarrow i^2; j \leq n; j \leftarrow j + i$  do
8:        $primes[j] \leftarrow \text{false}$ 
9:     end for
10:  end if
11: end for
12: return  $primes$ 
```

1.1 Корректность

Когда указанным способом будут вычеркнуты все числа, кратные простым, которые меньше простого p , то все не вычеркнутые, меньшие p^2 , будут простыми. Действительно, всякое составное a , меньшее p^2 , было вычеркнуто как кратное своему наименьшему простому делителю d такому, что: $d \leq \sqrt{a} < p$.

Замечание 1.1. При вычёркивании кратных простому p , это вычёркивание следует начинать с p^2 .

Замечание 1.2. Составление таблицы простых чисел, не превосходящих N , будет закончено, когда вычеркнуты все составные, кратные простым, не превосходящим \sqrt{N} .

1.2 Асимптотика

Теорема 1.1. Сложность алгоритма "решето Эратосфена" составляет $\mathcal{O}(n \log \log n)$