

# Мастер теорема о рекурсии

Лесников Юрий, seagest

**Теорема 1** (Мастер теорема о рекурсии). *Имеется соотношение:*

$$a \geq 1, b > 1, T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c)$$

Тогда:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & a > b^c \\ \Theta(n^c \log n), & a = b^c \\ \Theta(n^c), & a < b^c \end{cases}$$

*Доказательство.* Будем строить дерево рекурсии. Ясно, что его глубина  $\log_b n$ . Заметим, что на  $k$ -ом уровне будет  $a^k$  вершин, каждая из которых будет стоить  $\left(\frac{a}{b^k}\right)^c$  операций. Просуммируем по всем уровням:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\log_b n} a^k \left(\frac{n}{b^k}\right)^c = n^c \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k \quad (1)$$

Рассмотрим случаи:

1.  $\frac{a}{b^c} < 1 \iff a < b^c$ . Тогда в (1) — убывающая геометрическая прогрессия  $\implies \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k$  оценивается сверху и снизу некоторыми константами. Значит итоговая асимптотика  $\Theta(n^c)$
2.  $\frac{a}{b^c} > 1 \iff a > b^c$ . Тогда в (1) — возрастающая геометрическая прогрессия. Так как сумма возрастающей геометрической прогрессии асимптотически эквивалентна своему старшему члену, то:

$$T(n) = \Theta\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right) = \Theta\left(n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{n^c}\right) = \Theta(a^{\log_b n}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

3.  $\frac{a}{b^c} = 1 \iff a = b^c$ . Тогда:

$$T(n) = n^c \sum_{k=1}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k = n^c \sum_{k=1}^{\log_b n} 1^k = \Theta(n^c \log_b n)$$

□