Мультипликативные функции. Функции Мёбиуса и Эйлера

Лесников Юрий, ceagest

1 Мультипликативные функции

Определение 1.1. *Функция $\Theta(x)$ называется мультипликативной, если она удовлетворяет двум следующим условиям:*

1. *Функция Θ определена при всех целых положительных x и не равна 0 по меньшей мере при одном целом положительном x.*
2. *Для любых целых положительных взаимно простых x и y выполнено: $\Theta(xy) = \Theta(x) \cdot \Theta(y)$*

1.1 Свойства мультипликативных функций

- Для всякой мультипликативной функции Θ выполнено: $\Theta(1) = 1$.
- Для задания мультипликативной функции достаточно задать значения для положительных степеней простых чисел.
- Произведение двух мультипликативных функций есть мультипликативная функция.

2 Функция Мёбиуса

Определение 2.1. *Функция Мёбиуса — мультипликативная функция, определённая равенствами:*

$$\begin{cases} \mu(p) = -1, & p \text{ – простое} \\ \mu(p^\alpha) = 0, & p \text{ – простое}, \alpha > 1, \alpha \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2.1 Свойства функции Мёбиуса

- Если в каноническом разложении числа $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ по меньшей мере один из показателей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ превосходит 1 (то есть a делится на квадрат целого числа, отличный от 1), то $\mu(a) = 0$.
- Если в каноническом разложении числа $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ все показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ не превосходят 1 (то есть a не делится на квадрат целого числа, отличный от 1), то $\mu(a) = (-1)^k$.

3 Функция Эйлера

Определение 3.1. *Функция Эйлера φ определяется для всех целых положительных n, притом $\varphi(n)$ представляет собой количество таких целых положительных m, что $m < n$ и m взаимно просто с n.*

Теорема 3.1. $\varphi(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \dots \varphi(p_k^{\alpha_k})$

Доказательство. Очевидное следствие из мультипликативности функции Эйлера. □

Теорема 3.2. $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \dfrac{\mu(d)n}{d} = n \prod\limits_{p|n} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ *(суммирование по всем делителям n, произведение по всем простым p, делящим n)*