Асимптотический анализ. Нотации $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o, ω и связи между ними

Лесников Юрий, ceagest

1 $\mathcal{O}$-большое

Определение 1.1. *Рассмотрим множество функций, которое задается так:*

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \iff \exists N_0 > 0, \exists C > 0 : \forall n \geq N_0 \quad \hookrightarrow \quad 0 \leq f(n) \leq Cg(n)$$

Говорят, что:

- f асимптотически не больше, чем g
- f не больше g с точностью до константы
- f это $\mathcal{O}$-большое от g

2 Ω

Определение 2.1. *Рассмотрим множество функций, которое задается так:*

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists N_0 > 0, \exists C > 0 : \forall n \geq N_0 \quad \hookrightarrow \quad 0 \leq Cg(n) \leq f(n)$$

Говорят, что:

- f не меньше, чем g
- g – нижняя оценка для f
- f это Ω от g

3 Θ

Определение 3.1. *Рассмотрим множество функций, которое задается так:*

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \exists N_0 > 0, \exists C_1 > 0, \exists C_2 > 0 : \forall n \geq N_0 \quad \hookrightarrow \quad C_1g(n) \leq f(n) \leq C_2g(n)$$

Говорят, что:

- g – асимптотически точная оценка f
- f это Θ от g

4 o-малое

Определение 4.1. *Рассмотрим множество функций, которое задается так:*

$$f(n) \in o(g(n)) \iff \forall C > 0 \quad \exists N_0 > 0 : \forall n \geq N_0 \quad \hookrightarrow \quad 0 \leq f(n) \leq Cg(n)$$

Говорят, что:

- f асимптотически меньше, чем g
- f для сколь угодно малой константы не больше g
- f это o-малое от g

Определение 4.2 (альтернативное определение o-малого)**.**

$$f(n) \in o(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

5 ω-малое

Определение 5.1. *Рассмотрим множество функций, которое задается так:*

$$f(n) \in \omega(g(n)) \iff \forall C > 0 \quad \exists N_0 > 0 : \forall n \geq N_0 \quad \hookrightarrow \quad 0 \leq Cg(n) \leq f(n)$$

Говорят, что:

- f асимптотически больше, чем g
- f для сколь угодно большой константы больше g
- f это ω-малое от g

Определение 5.2 (альтернативное определение ω-малого)**.**

$$f(n) \in \omega(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

6 Эквивалентность

Определение 6.1. *Эквивалентность:*

$$f(n) \sim g(n) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Отношение эквивалентности
Нетрудно убедиться, что это действительно отношение эквивалентности.

- Рефлексивность: $\forall f(n) \quad \hookrightarrow \quad f(n) \sim f(n)$
- Симметричность: $\forall f(n), g(n) \quad \hookrightarrow \quad f(n) \sim g(n) \implies g(n) \sim f(n)$
- Транзитивность: $\forall f(n), g(n), h(n) \quad \hookrightarrow \quad f(n) \sim g(n) \wedge g(n) \sim h(n) \implies f(n) \sim h(n)$

7 Обозначения

Следует помнить, что $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \omega$ и o – множества. Но для удобства далее будем заменять знак принадлежности на знак равенства (естественно, что равенство в прямом смысле не подразумевается).

8 Свойства

- Транзитивность: $\forall \beta \in \{\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \omega, o\} \quad \forall f, g, h \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \beta(g(n)) \quad \wedge \quad g(n) = \beta(h(n)) \implies f(n) = \beta(h(n))$
- Рефлексивность: $\forall \beta \in \{\mathcal{O}, \Omega, \Theta\} \quad \forall f \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \beta(f(n))$
- Симметрия: $\forall f, g \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$
- Асимметрия:

$$\forall f, g \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$$
$$\forall f, g \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \Omega(g(n)) \iff g(n) = \mathcal{O}(f(n))$$
$$\forall f, g \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \omega(g(n)) \iff g(n) = o(f(n))$$

Теорема 8.1. $\forall f, g \quad \hookrightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad \wedge \quad f(n) = \Omega(g(n))$

Доказательство. Очевидно из определения. □

Теорема 8.2. $g(n) = o(f(n)) \implies f(n) \pm g(n) = \Theta(f(n))$

Доказательство. $g(n) = o(f(n)) \iff \exists N : \forall n \geq N \quad \hookrightarrow \quad g(n) \leq \frac{1}{2} f(n)$. Тогда $\frac{1}{2} f(n) \leq f(n) \pm g(n) \leq \frac{3}{2} f(n)$ □

Теорема 8.3. $n^k = o(n^{k+1}), k \in \mathbb{N}$

Доказательство. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^k}{n^{k+1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$ □