

Решето Эратосфена, время работы (б/д)

ceagest

1 Решето Эратосфена

Для составления таблицы простых чисел, не превосходящих данного целого N , существует способ, имеющий название «решето Эратосфена».

1. Выписываем числа $1, 2, \dots, N$.
2. Первое, большее 1, число этого ряда есть 2. Оно простое.
3. Вычёркиваем из ряда $1, 2, \dots, N$ все числа, кратные 2 и не равные 2.
4. Теперь первое не вычеркнутое число есть 3. Оно не делится на 2 и является простым.
5. Вычёркиваем из ряда $1, 2, \dots, N$ все числа, кратные 3 и не равные 3.
6. и т.д.

Algorithm Решето Эратосфена

```
1: function PRIMES( $n$ )
2:   bool[ $n$ ]  $primes = \{true, true, \dots true\}$ 
3:    $primes[0] \leftarrow false$ 
4:    $primes[1] \leftarrow false$ 
5:   for  $i \in 2 \dots n - 1$  do
6:     if  $prime[i]$  then
7:       for  $j = i^2, j \leq n, j \leftarrow j + i$  do
8:          $prime[j] \leftarrow false$ 
9:   return  $primes$ 
```

1.1 Корректность

Когда указанным способом будут вычеркнуты все числа, кратные простым, которые меньше простого p , то все не вычеркнутые, меньшие p^2 , будут простыми. Действительно, всякое составное a , меньшее p^2 , было вычеркнуто как кратное своему наименьшему простому делителю d такому, что: $d \leq \sqrt{a} < p$.

Замечание 1.1. При вычёркивании кратных простому p , это вычёркивание следует начинать с p^2 .

Замечание 1.2. Составление таблицы простых чисел, не превосходящих N , будет закончено, когда вычеркнуты все составные, кратные простым, не превосходящим \sqrt{N} .

1.2 Асимптотика

Теорема 1.1. Сложность алгоритма "решето Эратосфена" составляет $\mathcal{O}(n \log \log n)$