

基于模拟优化的多波束测线规划问题

摘要

多波束测深系统在一次测量航行中向与测量航线（简称测线）垂直的平面发射出多个声波束，通过判断声波反射之后的信号与反射所用时间计算出海水深度。测深时可利用单波束测深系统先测出海域大致深度，再通过深度设计优化测线的排布。测线优化时需要兼顾测量的效率（即减少重复的测量）与测量质量（即最大化检测的覆盖率）。

在关于问题一的解答中，我们探讨了在测线与海底坡面平行且海底坡面坡度固定的情况下，测线距海域中心距离与测线处深度、测线覆盖宽度以及与上一条测线的重叠率之间的关系。通过建立简单的几何模型以及对于几何模型的求解，得到了海水深度以及覆盖宽度的表达式，并利用公式对一处特定坡度的海域进行了计算，得到表 1 中的结果。

问题二中，测线的排布与坡面法线呈一定的角度。通过建立几何模型，我们发现了类似问题一中的三角关系。于是我们根据问题二中的情形与问题一得到的公式，计算了在固定坡度得海域中，测量船只航行距离、测线与坡面法线所成角度与测量宽度之间的关系，得到了表 2 中的结果。

对于问题三，我们从问题二中得到灵感，猜想测线与坡面平行时测量特定面积所需长度最短。我们利用数学方法证明对于同样的海域，平行坡面行驶时测量面积最大。再通过计算机辅助计算出了测线平行于坡面时所需测线长度为 66 海里。在研究问题三的过程中，我们发现可以利用模拟优化的方法计算得到最优测线。我们编写了一个基于二分查找算法计算测量宽度的计算机模拟测线数据的程序。并利用该程序分别对一、二、三问进行了求解，得到与几何模型相同的答案，证明了我们模拟算法的正确性。

问题四涉及对已知离散深度的海域进行测线设计。通过对于海底数据的处理，我们可以将海域划分为若干坡面。通过几何模型的推导，我们可以利用离散的深度数据，计算出在海域内每一个位置的近似水深，将离散数据连续化。之后利用模拟优化程序，我们能找到了每个区域中的最优测线，并得到一组能覆盖整个海域且保证重叠率小于 20% 的长度为 238.97NM 的测线。

综上所述，本文利用数学方法求出理想斜面中测线排布的最优解，得到了既能覆盖整个带测海域又能保证重叠率低于要求值的一组测线。并且我们开发了一套计算机模拟优化程序，可对于较为复杂的海底进行测线的设计，具有良好的普适性。

关键字： 多波束测深 模拟优化 二分算法

一、问题重述

1.1 问题背景

多波束测深仪通过同时发射多个声波，检测声波从海床或障碍物反射的信号，记录声波信号传输时间并利用声波在海水中的传播速度测量出海的深度。多个波束一齐发出，成一面扇形状。在测量过程中，如何规划测线以确保能够以最高的效率进行精准的测量是本文想要讨论的主要问题。

1.2 针对问题一

问题一中，需要从固定倾斜角度的斜面出发，探讨船只测线平行于斜面时测量条带宽度与船只位置、海水深度之间的关系。并用得到的数学模型计算一片海域内不同测线对应的测量宽度以及重叠率。

1.3 针对问题二

在固定倾斜角度的矩形海域中，船只测线并不一定会与斜面平行，即坡面法向在水平面的投影与船只测线之间的角度不一定为 90° 。本题中我们探讨了当坡面法向向量在水平面的投影与船只测线之间具有一定角度时，测量条带宽度与船只位置、海水深度之间的关系。并计算给定角度与船只位置时的测量宽度。

1.4 针对问题三

给定一个南北长 2 海里，东西长 4 海里的矩形海域，海域中心点的深度是 110m，海域西深东浅，坡度为 1.5° 。我们需要找到这个海域中最经济且最准确的测线。对于这个优化问题，我们需要在保证对海域的全部测量的同时，降低重复测量的频率。

1.5 针对问题四

在实际生活中，对于海水深的的测量可以从简单的等间距单波束深度测量开始，再基于单波束测量的深度数据设计多波束测深的测线，以确保多波束测深的准确性与效率。在本问中，我们将基于若干年前对于某海域的单波束测量的测深数据，设计多波束测深的测线，在这个过程中保证测量的效率以及测量的准确性。

二、模型假设

1. 假设船只在航行过程中可以精确沿测线行驶。
2. 不考虑海底复杂地形以及海水状况对于多波束测量精度的影响。
3. 海水深度为探测器在垂直于水平面方向上与海床间的距离，与船体吃水深度无关。
4. 假设船只沿测线进行测量时受海浪影响所导致的横摇与纵倾即位置的移动对于测量结果的影响可以忽略不计。
5. 假设船只进行测量时没有障碍物阻挡声波。
6. 假设问题四中海底地形经过若干年后并未发生巨大的变化，并且单波束测量数据准确可信。
7. 假设问题四中离散点之间的海底深度平滑变化，即不存在急剧的凸起或凹陷。
8. 在待测区域内的测线之间应当平行且一条测线在区域内应当连续。

三、符号说明

符号	意义
α	海底坡面与水平面夹角
x	测量船距海域中心点距离
d	测线之间的距离
D	测量船所在位置海水深度
δ	假想坡面与水平面夹角
θ	多波束换能器开角
H	海域中心点海水深度
W	测量覆盖宽度
η	重叠率
S	一次测量中测量覆盖宽度所扫过的面积

四、测线规划问题分析

测量船的测量过程如图 1 所示。其中测量过程中扇形声波信号所扫过的面积可以近似于线段 AB 所扫过的面积。在测线规划的问题中，我们需要考虑到测量的准确率以及测量的效率，而这两个量都与实际测量宽度 L_{AB} 在水平面上的投影，即测量覆盖宽度 W_{CD} 有关。

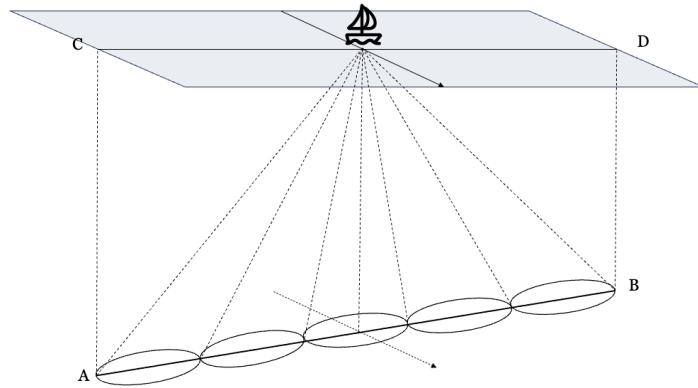


图 1 多波束示意图

覆盖宽度 W 的定义为声波束海底投影形成的带状区域在龙骨垂直方向上的长度 [1]。所以在对于坡度恒定为 α 的海底进行深度测量时，测量覆盖宽度 W_{CD} 与实际测量宽度 L_{AB} 关系为 $W_{CD} = L_{AB} \cos \alpha$ 。我们根据测量覆盖宽度定义测线 i 关于测线 j 的重叠率 η_{ij} 如公式 (1) 所示。

$$\eta_{ij} = 1 - \frac{d_{ij}}{W_i} \quad (1)$$

其中 d_{ij} 为测线 i 与测线 j 之间的间距， W_i 为测线 i 的测量覆盖宽度。

根据定义可以看出，测线之间应当平行排布。中国地质调查局撰写的海洋多波束测量规程中也描述了测线排布应当平行^[1]，并且测线在海域内连续，不会出现中断的情况。这样安排测线应当是考虑了船只在海面上航行时导航系统的准确性与船只实际操控难度之后确定的。本文中对于测线的排布，若非特殊情况，也将按照测线之间平行处理。

由于对于测线 i 与 j 来说，可能出现 $\eta_{ij} \neq \eta_{ji}$ 的情况，于是在本文中出现的重叠率都假设为先进行检测的航线关于后进行检测的航线的重叠率。即当出现 η_{ij} 时，测线 i 的测量应发生在测线 j 的测量之前。

关于一次测量的质量，我们可以从图 2 中看出，如果两次测量之间的间距为 d_{ij} ，测量质量会因为深度的改变而变化。当深度过浅时，两条测线之间会存在漏测区域。如图中 A 线所示，此时 $W_{Ai} < d_{ij}$, $\eta < 0$ 。当深度过深时，重复检测的部分增多又导致了资源的浪费。为了保证测量的效率以及数据的质量，应当将相邻条带的重叠率控制在 $10\% \sim 20\%$ ，也就是说 $0.8W_i < d_{ij} < 0.9W_i$ 。

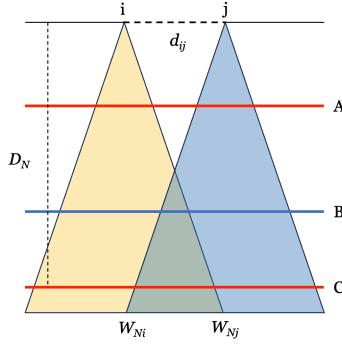


图 2 测量质量示意图

对于多次测量的覆盖率，我们定义当每一条测线的重叠率 $\eta_{ij} \geq 0$ 时，本次测量的覆盖率为 100%。

五、问题一模型建立与求解

题目要求我们建立在给定坡度 α 与中心点深度 H 的海域中，当船只平行于坡面航行时，测线 i 距中心点处的距离，即测线之间的距离 d_i 与海水深度 D_i 、覆盖宽度 W_i 及与前一条测线重叠率 η_i 之间的关系。

5.1 问题一几何模型建立

通过对题目的分析，可画出如图 3 的示意图。测量船位置为 O，测量船处水平面法线与海底交点为 B，扇形信号距中心点较近一侧与海底交点为 A，与较远侧交点为 C。

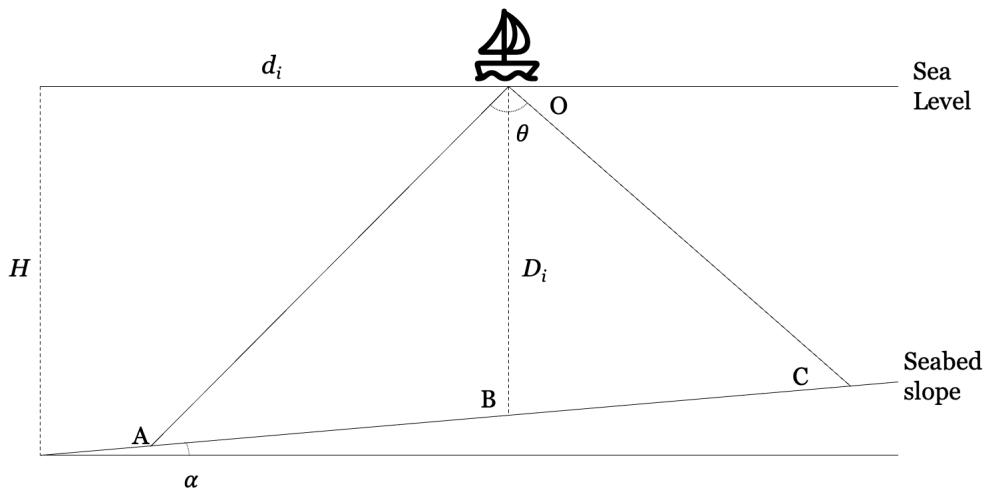


图 3 问题一示意图

5.2 对于几何模型的求解

由构建出的几何模型，可以计算出测量船处海水深度 D_i 与测量船距海域中心距离 x_i 的关系式为

$$D_i = H - d_i \tan \alpha \quad (2)$$

图中 $\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha$ ，而 $\angle OCB = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha$ 。由正弦定理可计算 AB 与 BC 的长度。最终测量覆盖宽度的表达式为

$$W_i(D_i, \alpha, \theta) = D_i \left[\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \right] \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \alpha \quad (3)$$

之后可以利用 (1) 计算出第 i 与 j 次测量之间的重叠率。

5.3 问题一的计算结果

利用 (1), (2) 与 (3)，当我们已知多波束换能器开角为 $\theta = 120^\circ$ ，坡面倾斜角度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，初始位置海水深度为 70m 时，可以得到问题一的计算结果，见表 1。

表 1 问题一的计算结果

测线距中心点处的距离/m	海水深度/m	覆盖宽度/m	与前一条测线的重叠率/%
-800	90.95	315.71	—
-600	85.71	297.53	36.65
-400	80.47	279.35	32.78
-200	75.24	261.17	28.40
0	70.00	242.99	23.42
200	64.76	224.81	17.69
400	59.53	206.63	11.03
600	54.29	188.45	3.21
800	49.05	170.27	-6.13

六、问题二模型建立与求解

问题二在问题一的基础上增加了测线与坡面不平行的条件。我们需要考虑当测线 i 方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β_j 时，测量船距海域中心距离 x_i 与覆

盖宽度 W_i 的关系。

6.1 问题二几何模型的建立

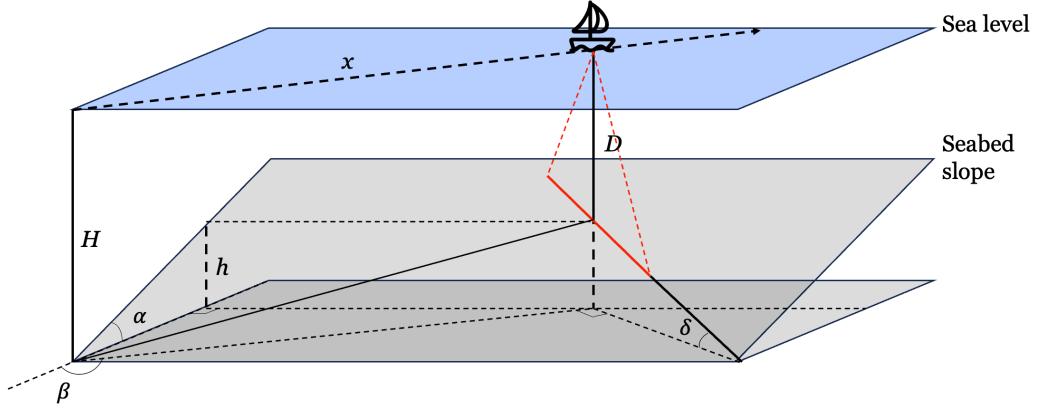


图 4 问题二示意图

由第二题的几何模型（图 4）可以看出，实际测量位置的直线（红线）与海域中心点所在水平面形成的角度 δ 实际上就可以看作问题一中的斜面倾斜角度。我们需要重新计算海水的深度 D_{ij} 。之后问题二便可以转化为寻找角度 β_j , α 与角度 δ , 深度 D_{ij} 之间的关系。再将 δ 带入公式 (2) 与 (3) 中计算测量覆盖宽度 $W(D_{ij}, \delta, \theta)$ 。

6.2 问题二几何模型的求解

首先，我们需要找到测量船与坡面之间的距离 D_i ，由图像，对于一个特定的 β_j ，我们可以利用简单的立体几何知识得到 $D_{ij}(\alpha, \beta_j, d_i)$ 的关系式为

$$\frac{H - D_{ij}}{x_i \cos(\pi - \beta_j)} = \tan \alpha \quad (4)$$

然后利用三角函数相关知识得到有关于 δ 的表达式

$$\tan \delta_j = \frac{H - D_{ij}}{x_i / \tan(\alpha - \beta_j)} \quad (5)$$

经过化简后可以得到

$$D_{ij} = H + x_i \cos \beta_j \tan \alpha \quad (6)$$

$$\delta_j = \tan^{-1}(\sin \beta_j \tan \alpha) \quad (7)$$

可以注意到，正如我们想象，海水的深度与测线的角度和船只距离都有关。不过 δ 角却只与一开始时测线所成的 β 角有关，在测量过程中并不发生变化。

于是我们可以通过 $W_{ij}(D_{ij}, \delta_j, \theta)$ 计算出覆盖宽度。

6.3 问题二的求解

对于问题中的坡度角 $\alpha = 1.5^\circ$, 初始深度 $H = 120\text{m}$, 以及多波束换能器开角 $\theta = 120^\circ$, 我们可以根据表中的每一组 (x_i, β_j) 求出测量覆盖宽度。需要注意的是表中所给距离单位为海里 (NM), 而 $1\text{NM} = 1852\text{m}$ 。所计算出来的覆盖宽度结果见表 2。

表 2 覆盖宽度 (m) 计算结果

		测量船距海域中心点处的距离 /海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线 方向 夹角 / °	0	415.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09	768.48
	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84
	90	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	135	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	180	415.69	365.29	314.89	264.50	214.10	163.70	113.30	62.90
	225	416.12	380.38	344.71	309.05	273.38	237.71	202.04	166.37
	270	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84

七、问题三模型建立与求解

问题三中提供了一个特定的海域，并要求我们在这个海域中设计长度最短且能完整覆盖待测海域的测线，且相邻条带之间重叠率需要满足 $10\% \sim 20\%$ 的要求。提供的特定海域南北长 2 海里，东西宽 4 海里。如图 5 所示，这片海域的最大特征就是，它的海底由西向东逐渐线性变浅（坡度为 1.5° ），且在南北方向上深度相同。

本题海底的基本模型与题目二相同，区别在于我们需要通过改变角度 β 以及测线的排布来找到一个长度最小，并且能够覆盖整个海域的测量方法。

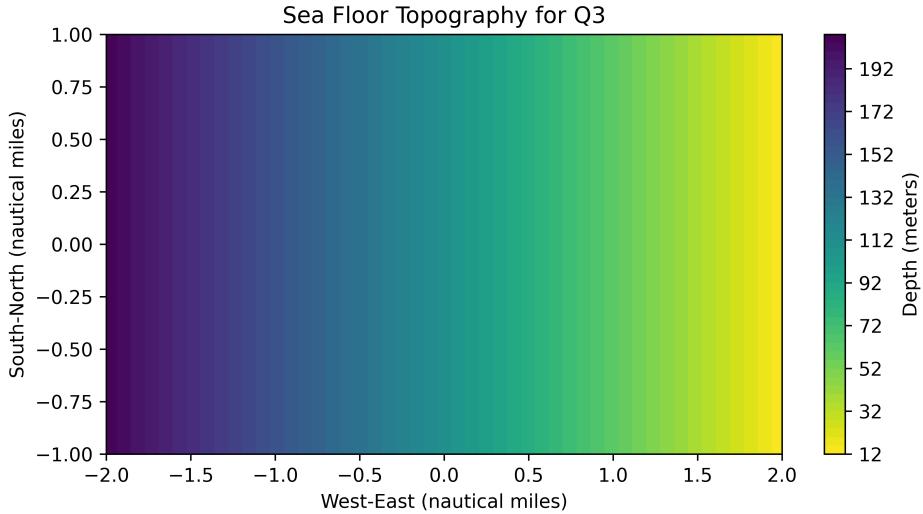


图 5 问题三海底地形示意图

7.1 关于平行于坡面的测量是否最优的讨论

7.1.1 对于问题二的再次分析

对于问题二中的表 2，我们可以换一种方式理解它。当 β 角差值为 180° 时，两条测线落在同一条直线上，只不过是行进的方向不同。如果将落在同一条直线上的测线看作是一条长度为 4.2 海里的测线，那么当我们选取不同的 β 角度时，测线对应的平均覆盖宽度与覆盖宽度扫过的面积，也就是测量面积，都有所不同。其中测量面积是一个梯形。

表 3 问题二数据分析

β 角度 / $^\circ$	0	45	90	135
测量宽度平均值 /m	415.69	416.12	416.55	416.12
测量面积 / km^2	3.233	3.237	3.240	3.237

从表 3 中可以看出，对于这四组中心点深度均为 120m 的 4.2 海里测线来说，当 β 取 90° 时，无论是测量宽度平均值还是面积都取到了四组中的最大值。基于这个结论，我们猜测如果在同一片海域进行相同长度的航行，且所有测线中点与海域中心重合，则当 β 角为 90° 时，测量的面积可以取最大值。也就是说测量相同面积的海域，当 β 角为 90° （即测线与坡面平行）时，测线长度最短。

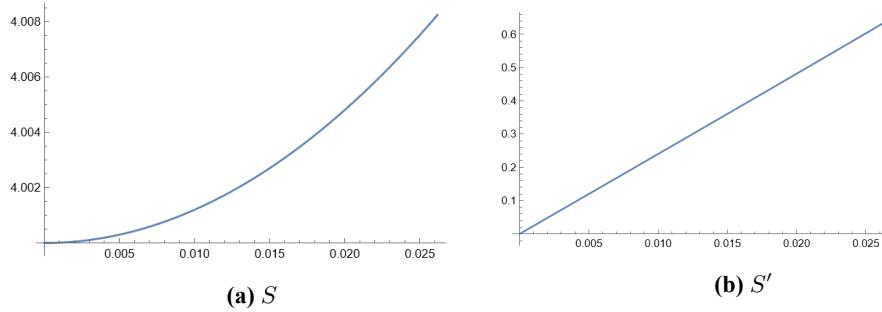


图 6 S 与 S' 在 $\delta \in (0, \alpha]$ 上的图像

7.1.2 β 为 90° 时面积最大的数学证明

当测量船只沿着测线行进时，船只在区间 $[-a, a]$ 中的测量面积可结合问题二由公式(3)推出。面积的计算公式为

$$S = \int_{-a}^a W(D, \delta, \theta) dx \quad (8)$$

将 S 表示为关于 δ 的函数，令 $\theta = 120^\circ$ ，化简后得到

$$S = \sqrt{3}aH \cos(\delta) \left[\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} + \delta)} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} - \delta)} \right] \quad (9)$$

公式(9)中的 a 与 H 都为常数，不影响对于 S 最大值的讨论，于是我们将 a 与 H 设为 1，然后画出当 $\delta \in (0, \alpha]$ 时 S 与 S' 的图像。

由图 6，我们可以看出 S' 在 $\delta \in (0, \alpha]$ 上恒大于 0，也可以看出 S 在 $\delta = \alpha$ 的时候 S 取到最大值。当 $\delta = \alpha$ 时，由(7)可以得出此时 $\beta = 90^\circ$ 。

于是我们证明了当 $\beta = 90^\circ$ 时，也就是测线与海床坡面平行时，在同一海域内航行相同距离得到的测量面积最大。

7.2 计算机辅助航线长度计算

由上述讨论以及题目信息，我们可以推测，在满足覆盖率要求的前提下，总测量长度最短的测线需满足以下两个条件：

1. 所有测线与坡面平行
2. 相邻条带之间的重叠率恰好为 10%（按照“测线规划问题分析”中的假设）

根据题目描述，已知矩形海域西深东浅，南北方向上没有深度变化，因此选择标准南北方向作为测线方向。我们将对“自西向东规划测线”和“自东向西规划测线”这两种情况分别进行讨论。

首先讨论自西向东规划测线的情况。

根据问题一结论(3)，我们可以计算出最西侧的多波束测深条带恰好覆盖西侧边界时测线距离海域中心点的距离，得到如下方程：

$$\begin{cases} D_1 = 110 - x_1 \tan \alpha, \\ D_1 \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \sin(\frac{\theta}{2}) \cos \alpha = 3704 + x_1. \end{cases} \quad (10)$$

其中 D_1 是测线（测量船）处海底深度， x_1 是测线距离海域中心的距离（以向右为正方向），多波束换能器开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡面倾斜角度 $\alpha = 1.5^\circ$ 。

求解得到第一条测线距离海域中心的距离 $x_1 = -3345.48\text{m}$ ，进一步计算得到第一条测线覆盖范围 $W_1 = 685.93\text{m}$ 。根据重叠率定义进行计算，我们可以得到重叠率为 10% 时相邻条带间距为 $d_i = 0.9W_i$ ，由此确定下一条测线的位置。接下来我们通过不断重复这个过程，直到条带完全覆盖待测海域。

详细的 Python 代码见附录 R。最终结果见图 9 白色实线部分，共需要 33 条测线，总测线长度为 66 海里。由图可知海水较深处测线较稀疏，海水较浅处测线较密集。

自东向西规划测线的过程与自西向东规划测线极为相似，共需要 36 条测线，总测线长度为 72 海里。

通过对比分析可见自西向东（即自深向浅）规划测线能得到更优解，最短测线长度为 66 海里。

7.3 基于二分法的模拟优化

我们同时开发了一个计算机程序用以模拟测线的安排，以应对海床不是坡度固定斜面的情况。对于任意已知大致深度且海床较为平坦的海域，都可以运用我们的程序找到最优的测线。

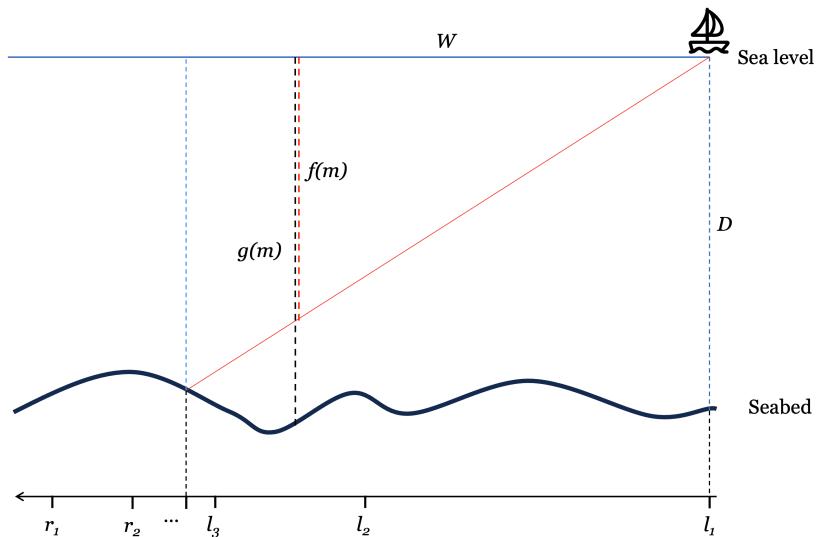


图 7 二分法示意图

7.3.1 基于二分法计算测量宽度的方法分析

对于某一个海床形状未知的海域而言，某次测量可简化为如图 7所示。在进行某一次多波束测深时，如果一边测量信号扫过的边界函数为 $f(W)$ ，海底形状函数为 $g(W)$ ，我们只要找到某一个 W_0 使得 $f(W_0) = g(W_0)$ ，则 W_0 就是这次多波束测深所检测到的深度。而我们发现可以通过二分查找法以 $O(\log N)$ 的时间复杂度找到 W_0 。详细的二分过程见位于附录K的代码。

二分方法用于测量宽度的计算有几何上的局限性，即 f 与 g 有且仅有一个交点，也就是说海水深度变化不能过大。通过建立几何模型，我们可以很快的发现，只要坡面与水平面夹角小于 $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ ， f 与 g 便有且仅有一个交点。对于问题一、二与三，当斜面坡度均为 $\alpha = 1.5^\circ$ 时， f 与 g 有且仅有一个交点，所以我们的算法可以应用于对问题一、二与三的求解。

7.3.2 对于问题一、二的求解验证

我们利用之前描述的计算机模拟方法再次求解了问题一与问题二。从图 8与计算结果可以看出(附录A, 附录B)，计算机模拟方法与数学上求解所得出的结论在小数点后四位之前都完全相同。出现差别的原因是二分法阈值为 10^{-4} ，这表示计算机的计算结果精确到了 $10\mu\text{m}$ 的级别，对于测线规划问题来说已经足够精确，在实际的测线过程中完全可以忽略。

7.4 基于模拟优化计算问题三最优测线的方法分析

7.4.1 模拟优化的具体算法分析

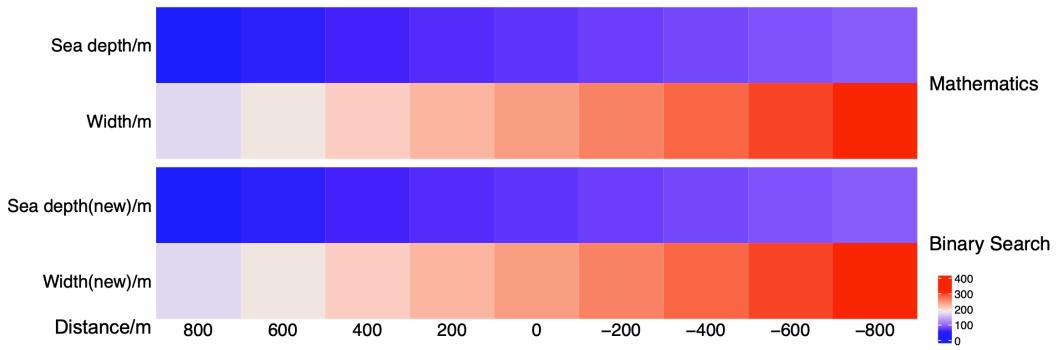
考虑到只需要确定某个测线的 β 角度，即可用贪心的方法来模拟出所有测线，可以通过枚举的方式遍历所有可能的角度，并从中找出总长度最小的测线集合。

具体而言，对于任意一个给定航线角 β ，取 $\beta + 90^\circ$ 作为测线位移的法向角度。这里我们假设待测的海域为一个凸多边形，则总是可以找到凸该多边形上的某个顶点作为搜索的起点。第一条测线离该点的距离定义为：

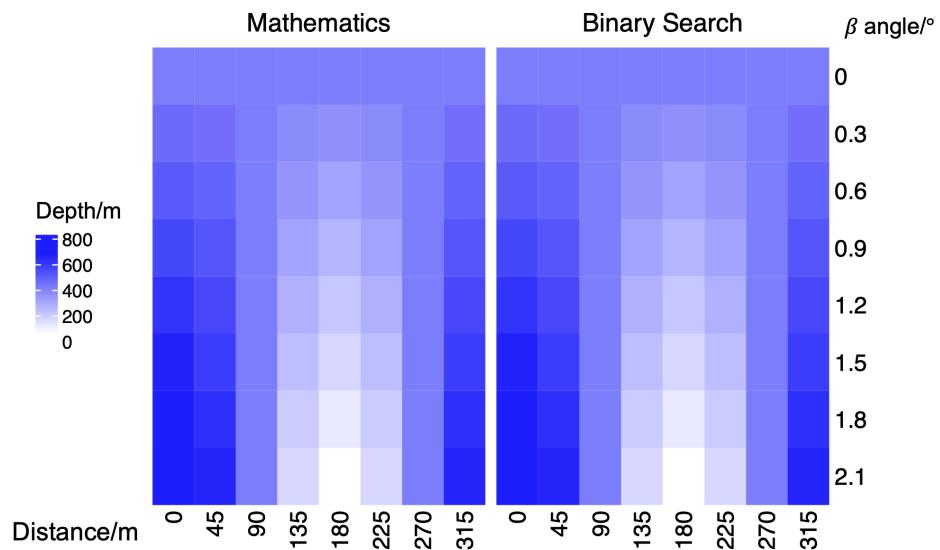
$$d_0 = D_0 \tan (\theta/2) \quad (11)$$

其中 D_0 为该点处的深度。该定义可以保证起点会被测线所覆盖。

当确定了一条测线后，随后的问题是如何确定该测线的起点和终点，也即该测线上的有效位置。不难推断出，一个点是有效位置，当且仅当该点能探测到的区域与待测海域有重合，即该点对应的探测线段与待测海域相交。该条件可以等价为线段的两个端点至少有一个在多边形内，或者线段与多边形的边相交。故可以通过遍历直线上每个点的方式来得到线段端点。为了使该连续过程离散化，我们每隔 0.1m 作为采样点进行计算



(a) 问题一两种方法结果比较



(b) 问题二两种方法结果比较

图 8 计算机模拟问题一、二结果比较

模拟，则每条测线的搜索次数大约在 10^5 量级，对于计算机来说是一个可以接受的数量。同时这样可以将每条测线长度的误差控制在 0.2m 以下，对于实际应用来说是完全可以接受的。

从第一条测线开始，同样可以使用模拟的方法确定下一条测线的距离。由(1)可以推出：

$$d_{i+1} = \min_{x \in l_i, p(x) \in A} ((1 - \eta_{min}) W_x) \quad (12)$$

其中 l_i 为第 i 条测线线段， W_x 为点 x 的探测线段的长度， $p(x)$ 代表探测线段在测线法线方向上的右端点， A 为待测海域， η_{min} 为允许的最小的重叠率。其中 W_x 可以使用上文提到的二分算法得出。特别地，如果对于所有的 x ， $p(x)$ 都落在待测海域之外，代表该测线已经结束对整个海域的测量，可以返回结果。

对于重叠率上界的限制，可以检验是否满足下式：

$$\forall (x \in l_i, p(x) \in A), d_{i+1} \geq (1 - \eta_{max})W_x \quad (13)$$

若不满足，证明在航向角 β 下无解。使用这个条件对搜索进行剪枝，能有效提升搜索的效率。

该算法的具体实现可见附录L代码。

7.4.2 算法应用的实际流程

首先取搜索步长为 2.5° ，取值范围从 0° 到 360° ，覆盖率限制为 $[0.10, 0.20]$ 进行检索，计算结果见附录C表 6。发现仅在 90° 以及 270° 处有解，故进行细化搜索：取步长为 0.1° ，搜索范围 $(87.5^\circ, 92.5^\circ)$ 以及 $(267.5^\circ, 272.5^\circ)$ ，计算结果见附录C表 7。可以发现在 90° 下测线总长度最短，与理论情况相符。

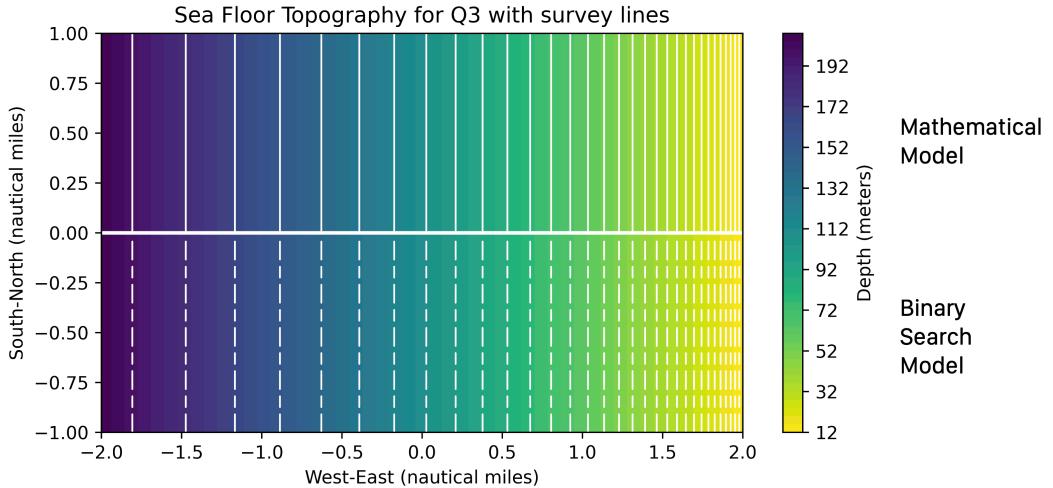


图 9 问题三测线位置示意图

利用该数据（附录D），我们可以画出如图 9 中虚线所示的测线。因为这片海域南北方向上的深度不变，所以我们将海域沿南北方向对半划分，用于可视化数学模型及计算机模拟得到的测线结果。模拟优化程序求出的最优 β 角度也为 90° ，仅存在由于（角度转为弧度时）计算精度产生的数量级约为 10^{-10} 的误差。并且当我们比较两种方法计算得出的直线位置时，两种方法间仅有 10^{-9} 数量级的误差，也就是纳米级别的误差，在实际情况中完全可以忽略。

至此，我们已用多种方法从理论和实践两个方面证明我们的模拟优化程序是正确的。

八、问题四模型建立与求解

8.1 对于问题四的初步分析

问题四给出了若干年前对于某海域（南北长 5 海里，东西宽 4 海里）的单波束测深数据。对该海域深度进行可视化可得到图 10。由图 10 我们可以看出，该给定海域最浅处为西南角，并沿正东与正北方向逐渐变深，东南角为海域最深处。我们以最西南角为 $(0, 0)$ 点，西东方向为 x 轴，南北方向为 y 轴建立单位为海里的坐标系。

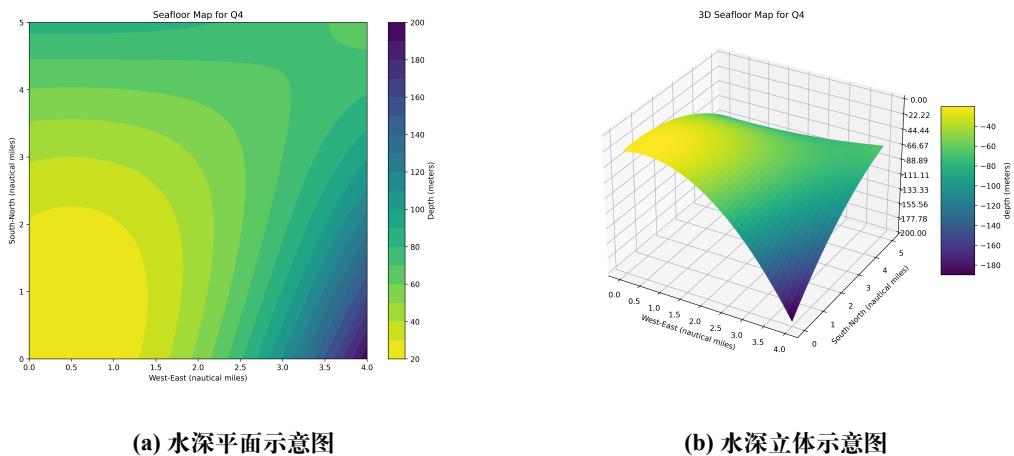


图 10 问题四海底平面可视化

8.2 模拟优化的可行性分析

由于模拟优化算法可以应用于任意的相对平坦的海底平面，可以使用问题三中编写的模拟优化程序来计算所有可能的测线组合。而与问题三相比，由于海床此时已非简单斜面，若要使用模拟优化程序，有两个问题需要解决，一是海床是否满足探测宽度二分算法的平坦假设前提，二是如何将离散的深度数据连续化。

8.2.1 探测宽度二分算法的假设前提

针对这片海域，我们可以得知它最深的位置深度为 197.20m，而最浅的位置的深度为 20.00m。如果这片海域中发生最为激烈的深度变化，那么变化的深度将为 177.20m。经过计算可得，如果坡度为 30° ，坡底离坡顶的水平距离应该为 306.92m，即 0.17NM。从图 10 中可以看出，在这片海域中，不会出现如此剧烈的深度变化。所以我们编写的模拟优化算法可以运用于对问题四的求解。

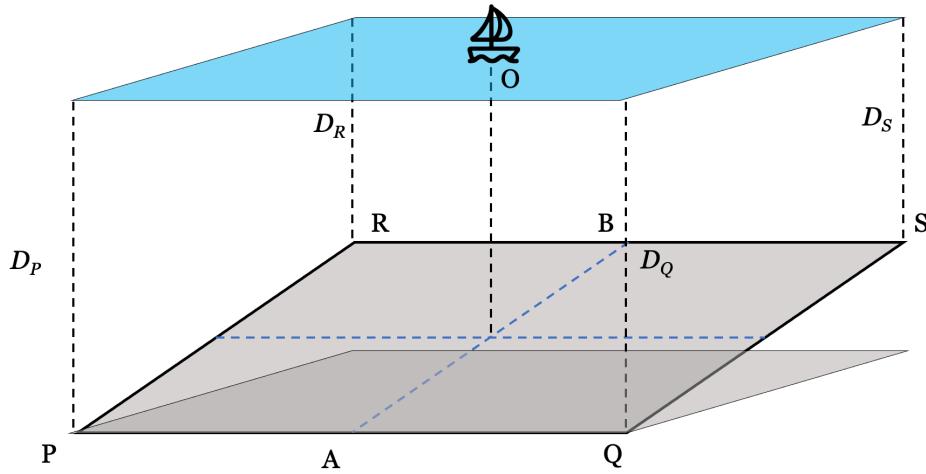


图 11 离散深度连续化示意图

8.2.2 离散深度数据连续化方法

注意到附录给的深度数据为离散化坐标上的深度，而要使用二分查找，就需要得到任意坐标下的深度数据。我们选择对深度数据进行插值。为简单起见，考虑仅使用最靠近目标坐标的四个已知深度的坐标点进行插值，如图 11 所示，可以得到深度表达式：

$$D_O = D_P + \frac{D_Q - D_P}{d_x} x_O + \frac{D_R - D_P}{d_y} y_O + \frac{D_S + D_P - D_R - D_Q}{d_x d_y} x_O y_O \quad (14)$$

其中 d_x , d_y 分别为线段 PQ , PR 在水平面上投影的长度。

8.3 对于问题四的可能解

对于问题四，我们首要保证的是目标海域的测深覆盖面积，再尽可能降低重叠率，最后保证测线的长度。

如果对整个区域进行搜索，发现即便在重叠率限制为 $[-0.10, 0.40]$ 的情况下，仍然搜索不到有效解。

于是我们猜想如果将海底平面分成多个区域，并且尽可能保证区域内的等高线平行，我们便可以利用模拟优化程序找到每个区域中的最优解。在这个假设中，我们将忽略区域之间边界部分不同测线对于重叠率、覆盖率以及测线总长度的影响。因为题目对于重叠率的定义 (1) 并不能计算非平行测线的重叠率。如果考虑区域间交点，将出现很多测线不平行的区域，而这些区域中的重叠率将无法进行计算。

接下来我们将尝试多种划分海域的方法，并利用模拟优化程序找到海域中测线的最优解。模拟优化程序中搜寻最优 β 角度的步长为 1° ，这三种情况都可能存在比下文所列数据更优的长度。

以下情况中，每个区域内的测线簇均满足重叠率 $\in [0.00, 0.20]$ ，即 0% 至 20%。

8.3.1 Case 1

我们首先尝试将海域沿对角线划分。从图 12a 中可以看出，整个海域被我们分为由南向北逐渐变深的区域 1 与由西向东逐渐变深的区域 2。这样的划分可以保证两个区域内大部分等高线平行。但区域二沿分割线部分等高线角度与东南角等高线角度相差较大，可能导致没有符合我们对覆盖率与重叠率要求的测线。

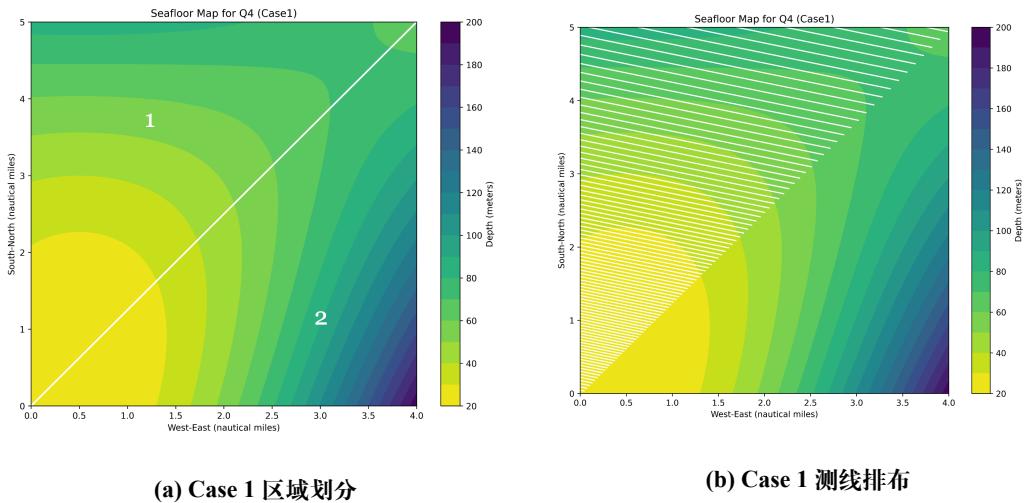


图 12 问题四 Case1

从图 12b 中我们可以看出，对于区域 2 确实没有找到最优的测线，于是我们要考虑其他的划分方法（区域 1 测线数据详见附件E）。

8.3.2 Case 2

我们继续不同的区域切割方案。在 Case 2 (图 13a) 中我们考虑了右上角的较浅的部分，并将海域划分为三个区域。其中区域 1 的顶点坐标为 $(0, 0), (3.6, 5), (0, 5)$ ，区域 2 的顶点坐标为 $(0, 0), (2.4, 0), (4, 4), (4, 5), (3.6, 5)$ ，区域 3 顶点坐标为 $(2.4, 0), (4, 0), (4, 4)$ 。

可以看出，在 Case 2 的区域划分中，我们求出了每个区域中存在的最优测线(图 13b)。所有测线的位置见附录F。在这种测线排布的情况下，覆盖率为 100%，测线间的重叠率均低于 20%。在区域 1 中，最优测线的 β 角，即测线与 x 轴夹角，为 170° ，测线总长度为 117.17NM。在区域 2 中，最优测线 β 角为 269° ，测线总长度为 102.08NM。在区域 3 中，最优测线 β 角为 248° ，测线总长度为 20.09NM。海域内总测线长度为 239.34NM。

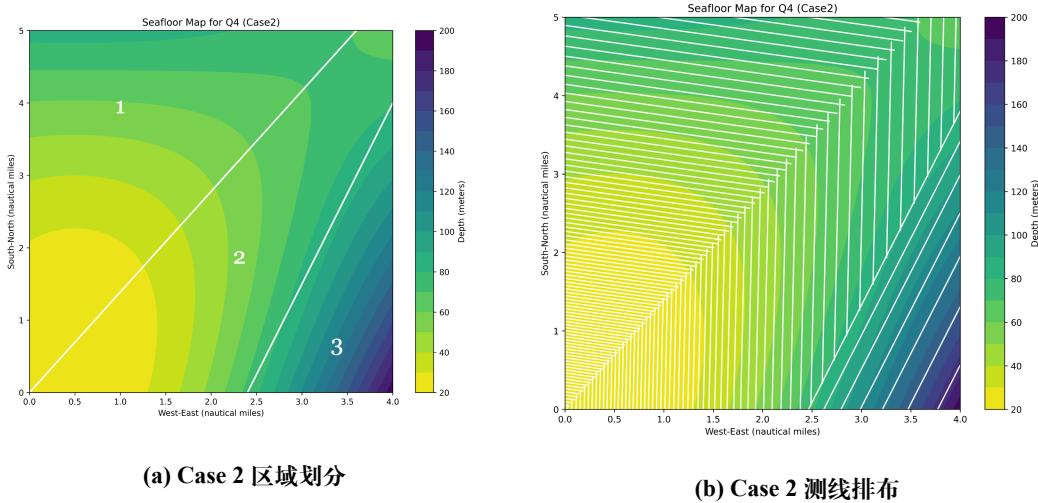


图 13 问题四 Case 2

8.3.3 Case 3

在 Case 3 (图 14a) 中，我们尝试将西南角非常平坦的区域，即区域 1，单独区分开来考虑。观察区域 2 与区域 3 中是否会出现不同的最优解。在 Case3 中，区域 1 顶点的坐标为 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1.6)$, $(0, 1.6)$ ，区域 2 顶点坐标为 $(0, 1.6)$, $(1, 1.6)$, $(3.6, 5)$, $(0, 5)$ ，区域 3 顶点坐标为 $(1, 0)$, $(2.4, 0)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(3.6, 5)$, $(1, 1.6)$ ，区域 4 顶点坐标为 $(2.4, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$ 。

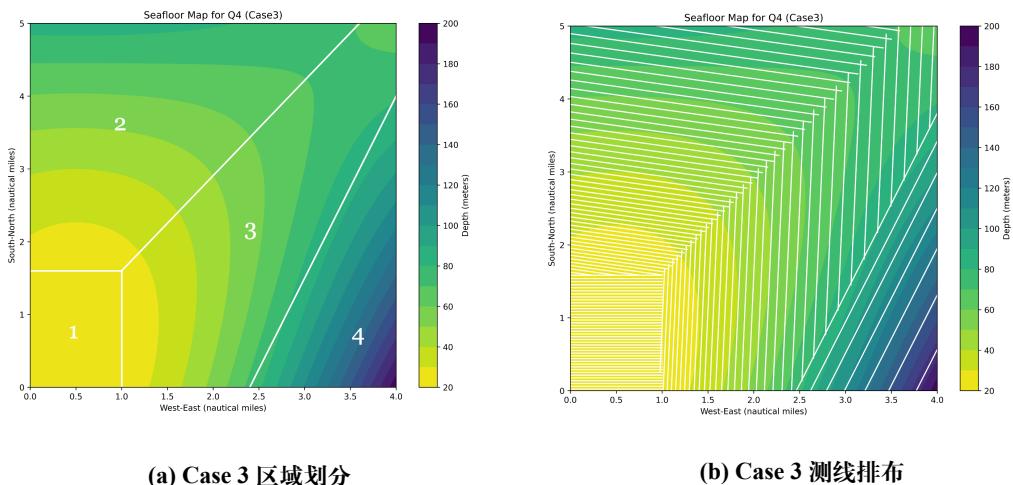


图 14 问题四 Case 3

模拟优化给出的最优测线排布 (图 14b) 覆盖率为 100%，重叠率均低于 20%。测线排布参看附件G。其中区域 1 最优测线排布 β 角为 0° ，测线总长度为 41.00NM。区域 2 最优测线排布 β 角为 170° ，测线总长度为 90.60NM。区域 3 最优测线排布 β 角为 268° ，测线总长度为 88.34NM。区域 4 最优测线排布 β 角为 248° ，测线总长度为 20.09NM。该

测线排布方法总长度为 240.03NM。

根据模拟优化的结果，我们发现该划分方法得出的结果与 Case 2 十分相似，尤其是区域 2, 3 的最优 β 角。Case 3 仅因为区域 1,3 交界处的一条测线导致答案相比于 Case 2 来说增加了 0.7NM。这样的结果符合我们的预期，对于一片完全水平的海域来说， β 角并不会影响走过单位长度时测量的面积。Case 3 中的区域一较为平坦且为整片海域中最浅的部份，在这个区域内 β 角的角度变化对于测线总长度影响较小。不将其单独划出还可以减少区域交界处的重叠测线。

8.4 对于问题四海域的测线排布设计

于是我们选择 Case 2 中的区域划分方法，将 β 角度步长更改为 0.05° 进行模拟优化。在保证覆盖率的情况下，保证测量重叠率 $\eta \in [0\%, 20\%]$ ，并设计出测线排布。

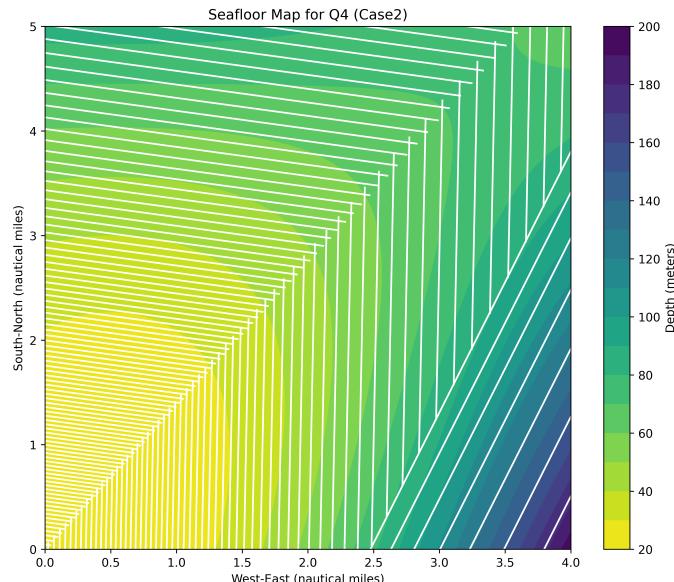


图 15 问题四海域的测线排布

每个区域中存在的最优测线如图 15。所有测线的位置见附录H。在区域 1 中，最优测线的 β 角为 170.25° ，测线总长度为 117.17NM。在区域 2 中，最优测线 β 角为 269.10° ，测线总长度为 101.97NM。在区域 3 中，最优测线 β 角为 248.15° ，测线总长度为 19.84NM。海域内总测线长度为 238.97NM。

九、模型分析

9.1 模型优点

1. 几何模型可以针对任意简单斜面海床精确计算探测宽度以及最优测线。
2. 二分搜索模型可以在任意较为平坦的海床上计算探测宽度。
3. 模拟优化算法可以对较为平坦的海床上任意的探测区域搜索可行测线。
4. 在正确配置环境的前提下，模拟优化算法及可视化的结果可以轻松复现。

9.2 模型缺点

1. 使用二分法计算探测宽度时，对海床的倾斜角有要求。当倾斜角过大时，无法搜索出准确的探测边界。
2. 本文实现的模拟优化算法只能搜索出满足给定重叠率的测线，无法使用插入测线的方法来提升覆盖率，且实际结果受计算机模拟精度影响。

9.3 模型推广与改进

在多波束测量的问题中我们还可以对于重叠率进行进一步的定义，比如将重叠率定义基于测线 i 与 j 之间的区域面积，这样的定义将有助于测线的设计并确保测量的覆盖率。如果测线间的重叠率基于测量面积，那么我们的测线也不一定需要平行，可以设计出表现更好的测线排布。

我们目前对于测线的假设是他们平行且在海域内连续。如果测线不需要连续，即能在两条长测线中插入一条较短的测线来弥补漏测部分，那么测线的总长度将会减少。

在对于海域的划分中，我们现在的划分方法是按照等高线的平行关系进行区域的划分。实际上应该可以利用等高线的曲率，或者等高线之间的距离关系对于区域进行自动的划分。一种可能的解决方法是在算出每条等高线上的曲率最小点后，将他们拟合成一条直线来划分。我们也可以将我们的程序改写让它能够处理任何形状的区域，这样我们对于区域的切割便不局限于直线的划分。

参考文献

- [1] 中国地质调查局. 海洋多波束测量规程. DZ/T 0292-2016. [S]. 2016.
- [2] 赵建虎. 多波束测深及图像数据处理. [M]. 武汉: 武汉大学出版社. 2008.
- [3] 龚旭东, 刁新源, 吕亚军, 等. 全水深多波束测深系统 Seabeam3012 在西太平洋马里亚纳海山区地形测量中的应用 [J]. 海洋科学, 2020, 44(8):223-230.