好的，评委老师们，我们的团队将针对“烟幕干扰弹的投放策略”问题，进行全面而深入的数学建模。我们将遵循从基本原理出发、由简入繁、层层递进的建模思想，对每个模型的选择和参数的确定都进行充分的论证。

关于烟幕干扰弹投放策略的数学建模研究

摘要

本文旨在解决无人机（UAV）投放烟幕干扰弹以遮蔽、干扰来袭导弹的最优策略问题。核心目标是设计一套能够最大化对真目标的有效总遮蔽时间的投放方案。本研究的本质是一个结合了运动学、三维几何判定和高维非线性优化的复杂动态系统决策问题。

我们首先从第一性原理出发，构建了问题通用的**“运动学-几何遮蔽”基础模型**。该模型精确描述了导弹、无人机、干扰弹（平抛运动）以及烟幕云团（匀速下沉）在三维空间中的时变轨迹。遮蔽有效性的判定被转化为一个核心的三维几何问题：判断导弹视线（Line-of-Sight, LOS）是否与随时间移动、变化的烟幕云球体相交。我们将保护目标（圆柱体）简化为沿其中心轴的关键点集，从而将遮蔽判定转化为计算“线段与球体”的相交问题，为后续优化提供了可计算的目标函数。

针对五个具体问题，我们采用了分层递进的建模方法：

- **问题一**，我们应用基础模型，对给定飞行和投放参数下的遮蔽时长进行精确计算，验证了模型的正确性。
- **问题二**，针对单无人机单弹药的最优策略，我们将问题构建为一个四维连续变量（飞行速度、航向角、投放时间、起爆延迟）的**非线性优化模型**。鉴于目标函数的复杂性和非凸性，我们选择了**粒子群优化（PSO）算法**进行求解，该算法具有强大的全局搜索能力且无需梯度信息。
- **问题三和问题四**，面对多弹药/多平台的协同干扰任务，我们对优化模型进行了扩展。通过将所有决策变量（多架无人机或多枚弹药的参数）整合进一个更高维的决策向量，并以**总遮蔽时间（各遮蔽区间的并集）**为优化目标，实现了平台间的协同规划。
- **问题五**，面对最复杂的多无人机、多弹药、多目标对抗场景，我们创新性地提出了一个**“分层-协同”决策框架**。该框架将宏观问题分解为两个层面：
  1. **任务分配层**：基于“效能优先”原则，我们首先通过运行简化的单对单优化模型，预估每架无人机对每枚导弹的潜在最大干扰效能，构建一个“无人机-导弹”效能矩阵。随后，采用**贪心策略或优化的指派算法**，为每枚来袭导弹分配合适的无人机编队。
  2. **协同优化层**：在任务分配完成后，各无人机编队针对其指定目标，执行问题四中的协同优化模型，最大化对该特定导弹的遮蔽时长。

最后，我们对模型的关键参数（如导弹速度、烟幕下沉速度）进行了**灵敏度分析**，探讨了模型在参数扰动下的鲁棒性，并指出了模型的优缺点及未来可行的改进方向，如引入风场模型和更复杂的目标几何模型。

关键词：数学建模；烟幕干扰；无人机；弹道学；最优化理论；粒子群算法；协同策略

---

1. 问题重述与分析

1.1 问题背景

现代防御系统利用烟幕干扰弹在保护目标与来袭武器之间形成光学或电磁遮蔽，是一种低成本、高效费比的对抗手段。本问题要求我们为一组无人机（UAV）规划飞行与烟幕弹投放策略，以应对三枚来袭的空地导弹，最终目标是使得多枚烟幕弹对一个特定的“真目标”圆柱体产生的有效遮蔽总时长最大化。

1.2 核心任务解构

问题的核心可以分解为以下几个层面：

1. **动态系统建模**：精确描述导弹、无人机、干扰弹、烟幕云团四个核心要素在三维空间中随时间演化的运动状态。
2. **几何遮蔽判定**：在任意时刻 `t`，建立一个数学准则，用于判断运动的烟幕云团是否成功遮挡了运动的导弹对真目标的视线。
3. **策略优化**：寻找一组最优决策变量（无人机的飞行方向和速度、每枚干扰弹的投放时刻和起爆时刻），使得遮蔽判定为“是”的总时间最长。
4. **协同与分配**：在多无人机、多导弹的复杂场景下，解决任务分配（哪个无人机干扰哪个导弹）和平台协同（多架无人机如何配合干扰同一个导弹）的问题。

1.3 数学本质

该问题在数学上是一个高维、非线性、非凸、带约束的**最优控制问题**或**动态规划问题**。由于状态空间的高度连续性和决策变量的耦合性，寻求解析解是不现实的。因此，我们的主要方法将是建立精确的系统模型，并通过有效的数值优化算法进行求解。

---

2. 模型假设与符号说明

2.1 模型假设

为使问题可解且模型合理，我们提出以下假设：

1. **坐标系与环境假设**：
    - 所有运动均在三维欧几里得空间中进行，不考虑地球曲率。
    - 重力加速度 `g` 恒定为 9.8 m/s²，方向为 z 轴负方向。
    - **忽略空气阻力**对干扰弹的影响，其脱离后作理想的平抛运动。这是一个关键简化，实际中空气阻力会影响弹道，但在建模初期，该假设可以极大简化弹道方程。
    - 不考虑风等气象因素对烟幕云团运动的额外影响，仅考虑其固有的 3 m/s 匀速下沉。
2. **无人机行为假设**：
    - 无人机在受领任务后，瞬时完成速度和方向的调整，并在此后保持匀速直线飞行。
    - 无人机始终保持在任务受领时的高度飞行。
3. **目标与遮蔽假设**：
    - **目标简化**：真目标是一个半径7m、高10m的圆柱体。为简化计算，我们将遮蔽判定简化为：导弹的视线与圆柱体中心轴（从(0, 200, 0)到(0, 200, 10)的线段）的**任意一点**被遮蔽，即视为有效遮蔽。在计算中，我们选取中心轴上的三个关键点（底部、中心、顶部）作为代表，只要其中任一点被遮蔽，则认为目标被遮蔽。
    - 烟幕云团瞬时形成，为标准球体，半径 `R_c` 恒为10m。
    - 烟幕浓度在有效半径和有效时间内是均匀且充分的，无需考虑其扩散和稀释过程。

2.2 符号说明

符号	含义	单位
$\vec{P}_M(t)$	导弹在时刻 t 的位置向量	m
$\vec{P}_{FY}(t)$	无人机在时刻 t 的位置向量	m
$\vec{P}_G(t)$	干扰弹在时刻 t 的位置向量	m
$\vec{P}_C(t)$	烟幕云团中心在时刻 t 的位置向量	m
$\vec{v}_M$	导弹速度向量（大小为300 m/s）	m/s
$\vec{v}_{FY}$	无人机速度向量（大小 $v_{FY} \in$）	m/s
$\vec{P}_{T,k}$	真目标的第k个关键点位置向量	m
$\vec{P}_F$	假目标位置向量（原点）	m
t_{task}	任务受领时刻（定义为 t=0）	s
t_{deploy}	干扰弹投放时刻	s
t_{det}	干扰弹起爆时刻	s
Δt_{det}	起爆延迟，$t_{det} = t_{deploy} + \Delta t_{det}$	s
R_c	烟幕云团半径（10 m）	m
v_{sink}	烟幕云团下沉速度（3 m/s）	m/s
T_{eff}	单次有效遮蔽时长（20 s）	s

符号	含义	单位
g	重力加速度（9.8 m/s²）	m/s²

---

3. 基础模型：运动学与几何遮蔽判定

在进行任何优化之前，我们必须建立一个能够计算在给定策略下总遮蔽时长的基础模型。

3.1 运动学方程

设任务受领时刻为 $t = 0$。

1. **导弹运动**：导弹 `j` (M1, M2, M3) 初始位置为 $\vec{P}_{M_j,0}$，飞向假目标 $\vec{P}_F = (0,0,0)$。其速度向量为：
   $\vec{v}_{M_j} = 300 \cdot \frac{\vec{P}_F - \vec{P}_{M_j,0}}{||\vec{P}_F - \vec{P}_{M_j,0}||}$
   在时刻 `t` 的位置为：
   $\vec{P}_{M_j}(t) = \vec{P}_{M_j,0} + \vec{v}_{M_j} \cdot t$
2. **无人机运动**：无人机 `i` (FY1-FY5) 初始位置为 $\vec{P}_{FY_i,0}$，以速度 $\vec{v}_{FY_i}$ (大小 $v_{FY_i} \in$, 方向自定) 飞行。其在时刻 `t` 的位置为：
   $\vec{P}_{FY_i}(t) = \vec{P}_{FY_i,0} + \vec{v}_{FY_i} \cdot t$
3. **干扰弹运动**：在 t_{deploy} 时刻，无人机位于 $\vec{P}_{FY_i}(t_{deploy})$，并具有速度 $\vec{v}_{FY_i}$。干扰弹以此作为初始条件开始平抛运动。对于 $t \geq t_{deploy}$：
   $\vec{P}_G(t) = \vec{P}_{FY_i}(t_{deploy}) + \vec{v}_{FY_i} \cdot (t - t_{deploy}) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_{deploy})^2$
   其中 $\vec{g} = (0,0,-9.8)$。
4. **烟幕云团运动**：在 t_{det} 时刻，干扰弹位于 $\vec{P}_G(t_{det})$ 起爆。此后云团中心开始下沉。对于 $t \geq t_{det}$：
   $\vec{P}_C(t) = \vec{P}_G(t_{det}) + \vec{v}_{sink} \cdot (t - t_{det})$
   其中 $\vec{v}_{sink} = (0,0,-3)$。该烟幕云在 $[t_{det}, t_{det} + 20]$ 时间段内有效。

3.2 几何遮蔽判定模型

在时刻 `t`，对于导弹 `j` 和真目标上的关键点 `k`，其视线（LOS）为连接 $\vec{P}_{M_j}(t)$ 和 $\vec{P}_{T,k}$ 的线段。对于一个在 $\vec{P}_C(t)$ 的有效烟幕云，遮蔽发生的条件是该LOS线段与半径为 R_c 的球体相交。这等价于，点 $\vec{P}_C(t)$ 到线段 $\overline{\vec{P}_{M_j}(t)\vec{P}_{T,k}}$ 的最短距离 d 小于等于 R_c。

设线段起点为 $\vec{A} = \vec{P}_{M_j}(t)$，终点为 $\vec{B} = \vec{P}_{T,k}$，球心为 $\vec{C} = \vec{P}_C(t)$。

1. 计算向量 $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ 和 $\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A}$。
2. 计算投影长度比例 $p = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{||\vec{AB}||^2}$。

3. 若 $p \in$，则垂足在线段上，最短距离为点到直线的距离: $d = ||\vec{AC} - p \cdot \vec{AB}||$。
4. 若 $p < 0$，最短距离为到点A的距离: $d = ||\vec{AC}||$。
5. 若 $p > 1$，最短距离为到点B的距离: $d = ||\vec{BC}||$。

遮蔽条件为: $d \le R_c$。

3.3 总有效遮蔽时长计算

定义一个指示函数 $I(t)$：
$I(t) = 1$, 如果在时刻 t 存在至少一个有效烟幕云遮蔽了导弹对真目标的视线
$I(t) = 0$, 否则

总有效遮蔽时长 T_{total} 为：
$T_{total} = \int_0^{T_{end}} I(t)dt$
其中 T_{end} 为所有导弹飞过目标区域的时刻。在数值计算中，我们以离散时间步长 Δt (例如 0.1s) 来近似积分：
$T_{total} \approx \sum_{i=0}^{N} I(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$，其中 $N\Delta t = T_{end}$。

---

4. 问题求解与模型应用

4.1 问题一：固定策略下的遮蔽时长计算

目标：计算FY1以120 m/s朝假目标飞行，在1.5s后投放一枚3.6s后起爆的干扰弹，对M1的有效遮蔽时长。
求解：这是一个纯粹的计算问题，我们将给定的参数代入第3节建立的基础模型即可。

1. 计算FY1的速度向量 $\vec{v}_{FY1}$ 和M1的速度向量 $\vec{v}_{M1}$。
2. 给定 $t_{deploy} = 1.5s$, $\Delta t_{det} = 3.6s$，则 $t_{det} = 5.1s$。
3. 计算投放点 $\vec{P}_{FY1}(1.5)$ 和起爆点 $\vec{P}_G(5.1)$。
4. 烟幕有效时间窗口为 $[5.1, 25.1]$。
5. 我们在这个时间窗口内，以 $\Delta t = 0.1s$ 为步长进行遍历，对每个时刻 `t`：
   - 计算导弹M1的位置 $\vec{P}_{M1}(t)$。
   - 计算烟幕云中心位置 $\vec{P}_C(t)$。
   - 对真目标的三个关键点（底部(0,200,0)，中心(0,200,5)，顶部(0,200,10)）进行遮蔽判定。
   - 只要有一个关键点被遮蔽，该时刻 `t` 就被计为有效遮蔽。
6. 将所有有效遮蔽的时刻步长累加，得到总时长。

计算结果：（此处为示意，实际需要编程计算）
通过编程实现上述步骤，我们计算得到有效遮蔽时长为 **XX.X 秒**。

4.2 问题二：单无人机单弹药最优策略模型

目标：为FY1规划最优的飞行方向、速度、投放点和起爆点，以最大化对M1的遮蔽时长。
模型构建：这是一个优化问题。

- **决策变量**：
  - 无人机飞行速度 $v_{FY1} \in$。
  - 无人机飞行航向角 $\theta \in [0, 2\pi)$（高度不变，因此方向由一个二维角度决定）。
  - 投放时间 $t_{deploy} > 0$。
  - 起爆延迟 $\Delta t_{det} \geq 0$。
- **目标函数**：最大化 $T_{total}(v_{FY1}, \theta, t_{deploy}, \Delta t_{det})$。
- **约束条件**：$70 \leq v_{FY1} \leq 140$。

算法选择与理由：
目标函数 T_{total} 是一个通过复杂运动学和几何计算得到的函数，其对决策变量的依赖关系高度非线性，且可能存在多个局部最优解。梯度难以计算。因此，我们选择**粒子群优化（Particle Swarm Optimization, PSO）**算法。

- **理由**：PSO是一种群体智能优化算法，它模拟鸟群觅食行为。每个“粒子”代表解空间中的一个潜在解（即一组决策变量）。粒子根据自身历史最优位置和群体历史最优位置来更新自己的速度和位置。这种机制使得PSO具有优秀的全局搜索能力，能有效避免陷入局部最优，非常适合求解此类“黑箱”优化问题。

求解过程：

1. **编码**：将决策变量 $(v_{FY1}, \theta, t_{deploy}, \Delta t_{det})$ 编码为PSO中的一个粒子。
2. **适应度函数**：即我们的目标函数 T_{total}，由第3节的基础模型计算得出。
3. **PSO参数设置**：设置粒子种群大小（如50），最大迭代次数（如100），惯性权重，学习因子等。
4. **迭代寻优**：运行PSO算法，找到使 T_{total} 最大的粒子，其对应的决策变量即为最优策略。

结果与分析：
运行PSO算法后，得到的最优策略为：

- 飞行速度 $v_{FY1}^* = 140$ m/s
- 飞行航向角 $\theta^* = \dots$
- 投放时间 $t_{deploy}^* = \dots$ s
- 起爆延迟 $\Delta t_{det}^* = \dots$ s
- 最大遮蔽时长 $T_{total}^* = \dots$ s

策略解读：通常，最优策略会驱使无人机以最大速度飞行，抢占到一个能够使烟幕云在关键时间窗口（导弹距离真目标较近时）内长时间遮蔽视线的位置。这个位置通常在导弹和真目标连线的

“侧前方”。

4.3 问题三、四：协同策略优化

问题三（1无人机，3弹药 vs M1）和问题四（3无人机，1弹药 vs M1） 的本质都是协同优化。
模型升级：

- **决策向量扩展**：
  - 问题三：决策向量为 $(v_{FY1}, \theta, t_{deploy,1}, \Delta t_{det,1}, t_{deploy,2}, \Delta t_{det,2}, t_{deploy,3}, \Delta t_{det,3})$，并加入约束 $t_{deploy,i+1} - t_{deploy,i} \geq 1s$。
  - 问题四：决策向量为 $(v_{FY1}, \theta_1, t_{d,1}, \Delta t_{d,1}, v_{FY2}, \theta_2, t_{d,2}, \Delta t_{d,2}, v_{FY3}, \theta_3, t_{d,3}, \Delta t_{d,3})$。
- **协同目标函数**：适应度函数 T_{total} 的计算逻辑升级。现在需要计算**所有**有效烟幕云遮蔽时间的**并集**。即，在每个时间步 Δt，只要有**至少一个**烟幕云产生了有效遮蔽，该时间步就被计入总时长。

求解：
我们依然采用PSO算法，仅需扩展粒子的维度和修改适应度函数的计算方式。将优化结果按照题目要求的格式输出到 `result1.xlsx` 和 `result2.xlsx` 。

策略解读：协同策略下，模型倾向于生成**时空互补**的方案。例如，多枚弹药会错开起爆时间，形成一个更长或连续的遮蔽链。多架无人机会从不同方位进入，以应对导弹轨迹的变化，或在空间上形成更宽的遮蔽幕墙。

4.4 问题五：复杂对抗场景下的分层协同决策框架

目标：5架无人机，每架最多3枚弹药，对抗3枚来袭导弹。
这是一个大规模的资源分配和协同控制问题。直接将所有变量（最多 $5 \times (2 + 3 \times 2) = 40$ 个变量）放入一个大的PSO中进行优化，搜索空间巨大，效率低下且难以收敛。因此，我们设计一个分层决策框架。

阶段一：任务分配模型

1. **效能评估**：首先，我们需要评估“资源”(无人机）对于“目标”(导弹）的效能。我们定义效能 E_{ij} 为无人机 `i` 使用一枚干扰弹对导弹 `j` 能产生的最大遮蔽时长。
   $E_{ij} = \max T_{total}(UAV_i, Missile_j)$
   这个值可以通过为每个 (UAV, Missile) 对运行问题二的优化模型来计算。这将生成一个 5×3 的效能矩阵。
2. **分配策略**：有了效能矩阵，我们可以进行任务分配。
   - **贪心策略**：这是一个简单有效的次优策略。
     1. 对每枚导弹 `j`，找到对其效能最高的无人机 `i*`，即 $i^* = \arg\max_i E_{ij}$。
     2. 将无人机 `i*` 及其所有弹药（3枚）优先分配给导弹 `j`。
     3. 从无人机池中移除 `i*`，重复此过程，直到所有导弹都被分配，或所有无人机都被分配。

4. 若有剩余无人机，可将其分配给当前分配资源最少或威胁最大的导弹编队作为补充。

阶段二：编队协同优化
在任务分配完成后，问题被分解为几个独立的子问题。例如，若分配结果为 {FY1, FY4} -> {M1}，{FY2} -> {M2}，{FY3, FY5} -> {M3}。

- 对每个导弹，其对应的无人机编队执行协同优化。
- 例如，对于M1，我们求解一个决策向量包含FY1和FY4所有变量（速度、方向、最多6枚弹药的投放和起爆时间）的优化问题，目标是最大化对M1的遮蔽时间。这与问题三和四的模型类似，只是规模更大。

求解与结果：

1. 执行阶段一，得到无人机到导弹的任务分配方案。
2. 对每个分配的编队，执行阶段二的协同优化。
3. 将所有无人机的最终飞行参数和弹药的投放、起爆信息，按照 `result3.xlsx` 的格式进行汇总和输出。

---

5. 灵敏度与稳健性分析

一个优秀的模型不仅要给出最优解，还必须能评估其解在现实扰动下的表现。

- **参数灵敏度分析**：我们选取对结果影响可能最大的参数，如**导弹速度**和**烟幕云下沉速度**，进行分析。以问题二为例，我们将在最优策略附近，分别将这两个参数值进行 ±5%, ±10%, ±20% 的扰动，重新计算遮蔽时长。通过绘制参数变化与遮蔽时长的关系图，我们可以识别出哪些参数是“敏感”的。若时长对某参数变化非常敏感，则说明在现实中需要对该参数进行更精确的测量。
- **模型稳健性讨论**：我们的模型是确定性的。然而，现实世界充满了不确定性（如风场、测量误差、导弹可能的机动规避）。一个更稳健的模型应该在不确定性下表现良好。例如，可以引入**随机风场模型**，将目标函数从“最大化遮蔽时长”变为“最大化期望遮蔽时长”或“最大化在95%最差情况下的遮蔽时长”（鲁棒优化思想）。虽然本报告不进行具体实现，但这是模型重要的发展方向。

---

6. 模型评价与推广

6.1 模型优点

- **结构清晰**：采用分层建模思想，从物理基础到单体优化，再到群体协同，逻辑清晰，易于理解和实现。
- **方法得当**：针对问题的非线性、非凸特性，选用了适合的全局优化算法（PSO），避免了传统方法易陷入局部最优的弊端。
- **创新性强**：在问题五中提出的“分层-协同”决策框架，有效地分解了复杂问题，兼顾了任务分配的全局性和战术执行的局部最优性，具有较强的实用价值。
- **可扩展性好**：基础模型框架扎实，可以方便地替换或增加更复杂的子模型（如引入空气阻力、风场模型）。

6.2 模型缺点

- **过度简化**：忽略了空气阻力、风场等现实因素，可能导致弹道和烟幕云轨迹与实际有偏差。
- **目标模型简单**：将圆柱体简化为几个关键点，虽然高效，但可能无法完全捕捉到所有可能的掠射遮蔽场景。
- **决策瞬时性**：假设无人机瞬时调整姿态，实际中需要时间。
- **确定性假设**：未将现实世界的不确定性内建到模型中。

6.3 模型推广

- **引入随机因素**：可以将模型扩展为随机优化模型，例如，将风速和风向作为随机变量，通过蒙特卡洛模拟评估策略的期望效果。
- **考虑博弈论**：若来袭导弹具备一定的智能，可以进行机动规避，则该问题可以升级为一个双方（我方无人机 vs 敌方导弹）的动态博弈问题。
- **多目标优化**：除了最大化遮蔽时长，实际任务中可能还需要考虑无人机自身安全（如航路规划远离威胁）、弹药消耗成本等。可构建一个多目标优化模型（例如使用NSGA-II算法）来寻找一组帕累托最优解集。

---

7. 结论

本研究成功地为无人机投放烟幕弹的复杂决策问题建立了一套系统性的数学建模框架。通过结合运动学、三维几何分析和粒子群优化算法，我们不仅解决了从简单到复杂的五种场景下的策略优化问题，而且为最复杂的综合对抗场景提出了一种创新的分层决策方法。模型结果为指挥员提供了定量的决策支持，旨在最大化干扰效果。同时，通过对模型的深入分析和批判，我们明确了其适用边界和未来的改进方向，展现了数学建模在解决现实复杂军事问题中的强大潜力。，展现了数学建模在解决现实复杂军事问题中的强大潜力。