

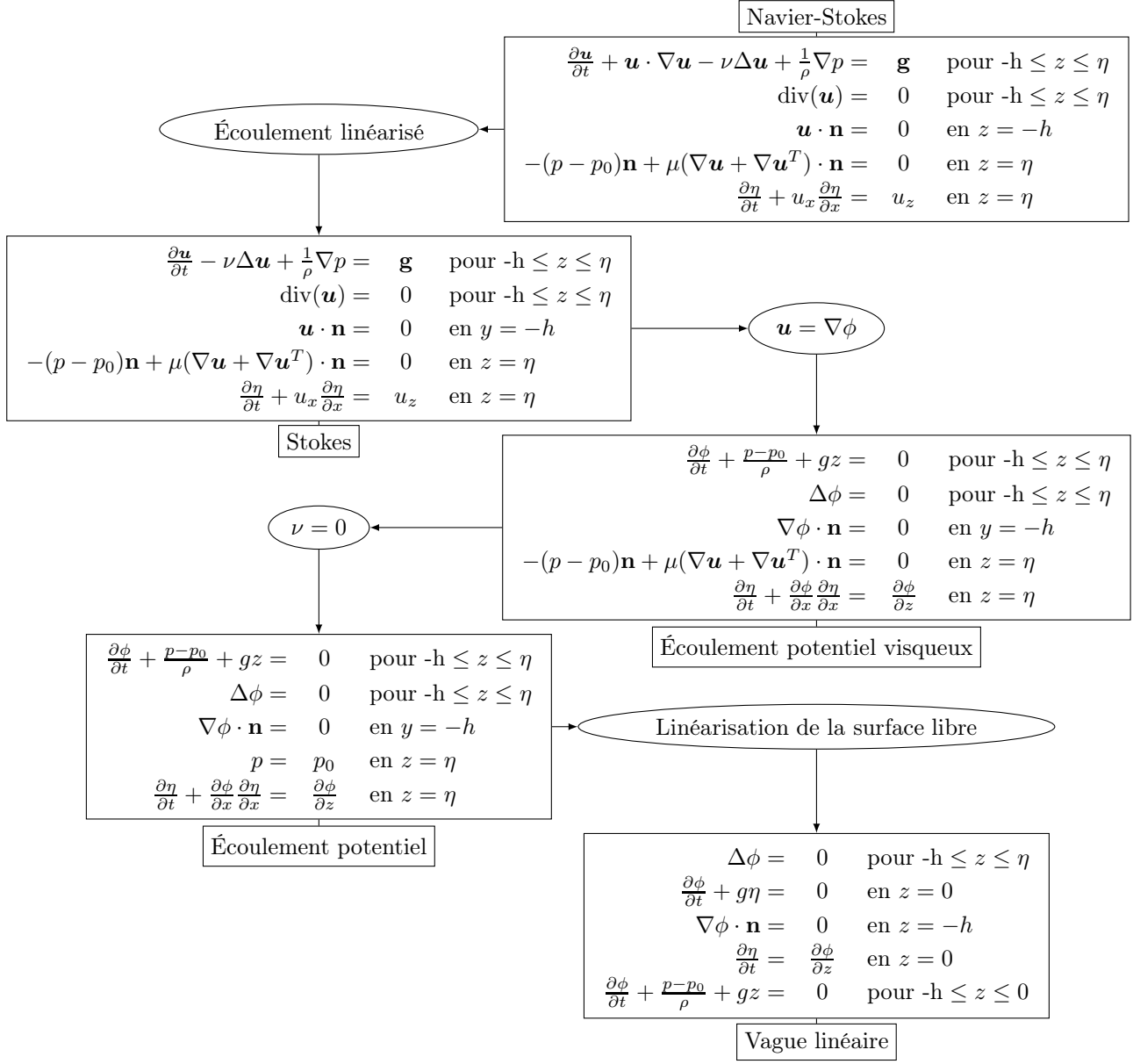
Schémas utilisés

Pierre Marchand

October 17, 2014

1 Introduction

On se propose de mettre en avant la différence entre la modèle potentiel linéaire et le problème de Stokes, et ceci, afin d'observer la partie vorticale ainsi que l'effet de la viscosité.



2 Potentiel

On considère le problème suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -h \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} & \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 & \text{en } y = 0, \end{array} \right.$$

qui peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -h \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{en } z = 0 \end{array} \right.$$

On remarque qu'on peut trouver ϕ si on a sa valeur en $z = 0$. On propose alors plusieurs schémas avec $\varphi = \phi|_{z=0}$:

1. On se donne (ϕ_0, ϕ_1) puis $\varphi_2 = -g\Delta t \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + 2\varphi_1 - \varphi_0$
2. On se donne (φ_0, η_0) puis $\varphi_1 = -g\eta_0\Delta t + \varphi_0$ et après $\eta_1 = \eta_0 + \Delta t \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}$
3. On se donne (φ_0, η_0) puis $\eta_1 = \eta_0 + \Delta t \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$ et après $\varphi_1 = -g\eta_1\Delta t + \varphi_0$

Le premier schéma semble assez peu stable tandis que les deux derniers semblent équivalents. Les deux derniers schémas sont du type *Euler symplectique* et comme notre problème admet une Hamiltonien pour la dynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -g\eta & \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} & \text{en } z = 0 \end{array} \right.$$

on peut observer qu'ils sont équivalents en précision et qu'ils ont un bon comportement en temps long. Mais pour garder la structure Hamiltonienne et profiter des avantages de ces schémas, il faut retravailler la condition dynamique car elle fait apparaître une dérivée en ϕ . Celle-ci implique une erreur d'interpolation pour récupérer des éléments finis du même ordre que η et ϕ . Pour éviter cela, on va résoudre la condition dynamique faiblement. Soit $\hat{w} \in H^1(\Omega)$ et w sa trace. On a alors en appliquant la formule de Stokes et en utilisant le fait que $\Delta\phi = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, w \right)_{\Gamma_0} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}, w \right)_{\Gamma_0} \\ \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, w \right)_{\Gamma_0} &= \int_{\partial\Omega} (\nabla\phi \cdot \mathbf{n})w \\ \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, w \right)_{\Gamma_0} &= \int_{\Omega} \text{div}(\nabla\phi \hat{w}) \\ \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, w \right)_{\Gamma_0} &= \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\hat{w}. \end{aligned}$$

On obtient une formulation variationnelle de la condition dynamique adéquate aux éléments finis. Seul les termes à la surface libre nous intéressent, il faut donc extraire de la matrice de masse la sous matrice correspondant aux noeuds à la surface libre pour le terme de droite et supprimer les lignes correspondant à ces derniers dans la matrice de rigidité. Toujours dans l'idée de profiter de la structure Hamiltonienne du problème, on propose aussi un schéma du type *velocity verlet* qui à l'avantage d'être d'ordre 2 :

4. On se donne (φ_0, η_0) puis $\eta_{\frac{1}{2}} = \eta_0 + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ puis $\varphi_1 = -g\eta_{\frac{1}{2}}\Delta t + \varphi_0$ et enfin $\eta_1 = \eta_{\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$.

3 Stokes

3.1 À surface libre linéarisée

3.2 À surface libre

On s'intéresse au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} & \text{pour } -h \leq z \leq \eta \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{pour } -h \leq z \leq \eta \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } y = -h \\ -(p - p_0)\mathbf{n} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = 0 & \text{en } z = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_z & \text{en } z = \eta \end{array} \right.$$

qui, a priori, doit comporter une composante verticale contrairement au cas uniquement potentiel. On résout ce problème à l'aide d'une méthode ALE avec deux schémas numériques possibles. On note \mathbf{X}^n , la position des noeuds, \mathbf{V}^n , la vitesse des noeuds, \mathbf{U}^n , la vitesse du fluide aux noeuds, \mathbf{P}^n , la valeur de la pression aux noeuds, M , la matrice de masse, R , la matrice de rigidité qui inclue en plus les termes liés à la vitesse du maillage, F , le vecteur force, L , le problème vérifié par la vitesse du maillage et B , le vecteur associé aux conditions de bords, G , la matrice liée aux termes couplant vitesse et pression, et D , la matrice liée à l'incompressibilité du fluide. On notera D_2 , l'opérateur tel que $D_2 f^{n+1} = \frac{3}{2} f^{n+1} - 2 f^n + \frac{1}{2} f^{n-1}$.

1. Version conservative

- Initialisation : $(\Omega_0, \mathbf{u}_0, p_0)$
- $L(\mathbf{X}^n) \mathbf{V}^n = 0$
On en déduit la vitesse du maillage.
- $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{V}^n$
On en déduit Ω_{n+1} , on va maintenant boucler sur i avec $\mathbf{V}_0^{n+1} = \mathbf{V}^n$.
- $M(\mathbf{X}^{n+1}) \frac{1}{\Delta t} D_2 \mathbf{U}_i^{n+1} = R(\mathbf{X}^{n+1}, \mathbf{V}_i^{n+1}) \mathbf{U}_i^{n+1} + G(\mathbf{X}^{n+1}) \mathbf{P}_i^{n+1} + F(\mathbf{X}^{n+1}, t_{n+1})$ et $D(\mathbf{X}^{n+1}) \mathbf{U}_i^{n+1} = 0$

- $L(\mathbf{X}^{n+1})\mathbf{V}_{i+1}^{n+1} = B(\mathbf{U}_i^{n+1})$

On regarde la différence en norme L_2 sur la vitesse pour tester la convergence, et si cela à converger, on passe à l'étape suivante.

2. Version non conservative

- Initialisation : $(\Omega_0, \mathbf{u}_0, p_0)$ et $(\Omega_1, \mathbf{u}_1, p_1)$

- $\hat{\mathbf{U}}^{n+1} = 2\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}$

Avec la formule (BDF2 extrapolée mais je n'ai toujours pas compris le rapport) : $\hat{f}_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}$, on obtient une vitesse $\hat{\mathbf{U}}^{n+1}$ définie sur un domaine $\hat{\Omega}^{n+1}$ avec $\hat{\mathbf{X}}^{n+1}$.

- $L(\hat{\mathbf{X}}^{n+1})\mathbf{V}^{n+1} = B(\hat{\mathbf{U}}^{n+1})$

On en déduit la vitesse du maillage en $n+1$.

- $\frac{1}{\Delta t}D_2\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1}$

On en déduit Ω^{n+1}

- $M(\mathbf{X}^{n+1})\frac{1}{\Delta t}D_2\mathbf{U}^{n+1} = R(\mathbf{X}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1})\mathbf{U}^{n+1} + G(\mathbf{X}^{n+1})\mathbf{P}^{n+1} + F(\mathbf{X}^{n+1}, t_{n+1})$ et $D(\mathbf{X}^{n+1})\mathbf{U}^{n+1} = 0$

On résout le problème au pas de temps n en calculant la vitesse et la pression.