

# AAL Projekt AAL-6-LS vururuk

Bartosz Cybulski

283721@pw.edu.pl

Numer indeksu: 283721

## 1. Treść zadania

*„W wiosce plemienia Vururuk co 10 lat odbywają się masowe śluby małżeńskie. Wszystkie pełnoletnie panny i pełnoletni kawalerowie stawiają się przed radą starszych, która dokonuje swatania w sposób zgodny z wielowiekową tradycją plemienia. Po pierwsze, mąż musi mieć większy wzrost i większy obwód głowy niż żona. Po drugie, każda panna i każdy kawaler musi znaleźć małżonka. Po trzecie, łączna suma różnic wzrostów i obwodów głów małżonków w całym pleminiu ma być jak najmniejsza. W przypadku niemożności spełnienia pierwszych dwóch warunków, proces swatania kończy się niepowodzeniem i jest odraczany na następne 10 lat. Należy pomóc radzie starszych przeprowadzić proces swatania.”*

## 2. Opis problemu

Problemem jest wybór par małżeństw kobieta-mężczyzna z pośród populacji osobników opisanych pewnymi cechami oraz spełniając warunki zdefiniowane w zadaniu.

## 3. Warunki zadania

- Mąż musi mieć większy wzrost i większy obwód głowy niż kobieta.
- Każda panna i każdy kawaler muszą znaleźć małżonka.
- Suma różnic wzrostów i obwodów głów ma być jak najmniejsza.
- Jeżeli a i b nie mogą być spełnione algorytm kończy się niepowodzeniem.

## 4. Przyjęte założenia

- Na wejściu otrzymujemy taką samą ilość kobiet i mężczyzn ( w przeciwnym wypadku tylko na tej podstawie moglibyśmy udzielić odpowiedzi negatywnej, bo nie da się połączyć w pary wszystkich )
- Zadanie zostanie realizowane przy pomocy grafu nieskierowanego
- WIERZCHOŁKI będą opisane 3 wartościami odpowiadającymi płci, wzrostowi oraz obwodowi głowy.
- KRAWĘDZIE będą łączyły tylko wierzchołki o różnych płciach.
- KRAWĘDŹ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek **a**.
- KRAWĘDZIE będą opisane liczbą, która będzie sumą różnic wzrostów i obwodów głów.

## 5. Rozwiązanie – pomysł

- Dodawanie krawędzi (Naiwnie) dla wierzchołków typu kobieta, iteracyjnie sprawdzać warunki dla wszystkich wierzchołków mężczyzn. To już daje złożoność  $O(n^2)$ .
- Dodawanie krawędzi (Trochę lepsze) – posortować w dwóch tablicach wierzchołki kobiet i mężczyzn według jednego z parametrów np. Wzrostu. W tablicy przechowujemy np. Wskazania na wierzchołki.  
Kolekcja mężczyzn – M, kolekcja kobiet K.  
Bierzemy M[0]->wzrost i porównujemy z K[0]->wzrost. **Jeżeli** jest mniejszy **to** porównujemy

obwód i **jeżeli** obwód też jest większy **to** tworzymy krawędź między wierzchołkami. **Jeżeli** wzrost jest większy, a obwód głowy mniejszy to przechodzimy do kolejnego wierzchołka.

**Jeżeli** wzrost (czyli pierwszy parametr) jest mniejszy lub równy od wzrostu kobiety to nie tworzymy krawędzi i nie ma sensu sprawdzać kolejnych wierzchołków. Przechodzimy do kolejnego wierzchołka mężczyzny.

Tak postępujemy aż do końca tablicy mężczyzn.

Złożoność wciąż będzie  $O(n^2)$ , ale trochę lepsze.

Zauważmy, że przy tym postępowaniu jeżeli przeprocesujemy wierzchołek reprezentujący mężczyznę już nigdy się do niego nie odwołamy podczas tworzenia krawędzi. Z tego wynika, że jeżeli w danym momencie nie utworzymy krawędzi łączącej ten wierzchołek z wierzchołkiem reprezentującym kobietę (liczba krawędzi == 0) to znaczy, że problem tworzenia małżeństw nie będzie miał rozwiązania, bo dany mężczyzna nie będzie mógł się związać z żadną kobietą. Co kończy algorytm z wynikiem negatywnym.

- c) Problem dopasowania w pary można rozwiązać przy pomocy Twierdzenia o Kojarzeniu Małżeństw, które brzmi następująco:

*„Problem małżeństw z  $n$  dziewczynami ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek kojarzenia małżeństw. Każdy podzbiór  $k$  panien,  $1 \leq k \leq n$  zna łącznie nie mniej niż  $k$  kawalerów.”*

- d) Minimalizacja sum różnic wzrostów i obwodów – **Jeszcze nie mam pomysłu jak to rozwiązać?**

## 6. Etapy niezbędne do zbudowania działającego algorytmu

- I. Wygenerowanie  $n$  wierzchołków reprezentujących mężczyzn oraz  $n$  wierzchołków reprezentujących kobiety, które posłużą nam do zbudowania grafu dwudzielnego.
- II. Skonstruowanie krawędzi łączących tylko wierzchołki reprezentujące różną płeć (akceptujemy tylko małżeństwa Mężczyzna-Kobieta), zgodnie z warunkiem [a](#) zadania.
- III. Po zbudowaniu grafu dwudzielnego  $G$  takiego, że  $G=(V,W; E)$ , czyli zbiór wierzchołków  $V$  (reprezentujący kobiety)  $\cup$   $W$  (reprezentujące mężczyzn) i krawędzi  $E$  przy czym krawędzie są tylko tego typu, że jeden w  $V$ , a drugi w  $W$ .  
Wywołujemy algorytm służący do skojarzenia małżeństw.
- IV. Jeżeli da się skojarzyć małżeństwa, szukamy takiego skojarzenia, aby zastosować się to warunku [b](#) zadania.

## 7. Algorytm (etapy) – pomysł

- Generowanie wierzchołków
- Tworzenie krawędzi.
  - I. Stwórz tablicę  $M[n]$  i  $K[n]$  przechowujące wskazania na wierzchołki odpowiednio mężczyzn i kobiet
  - II. Posortuj tablicę  $M[n]$  i  $K[n]$  rosnąco np. Według wzrostu.
  - III. For(  $i=0$ ;  $i < n$ ;  $i++$  )
  - IV. For(  $j = 0$  ;  $j < n$  ;  $j++$  )
  - V. **if**  $M[i].wzrost > K[j].wzrost \ \&\& \ M[i].obwod > K[j].obwod$   
    **to** dodaj krawędź między  $M[i]$  i  $K[j]$ ,  
    **else if**  $M[i].wzrost \leq K[j].wzrost$  **to** {  
        **sprawdź** dla  $M[i]$  istnieje jakakolwiek krawędź  
        **jeżeli istnieje** to wyjdź z wewnętrznej pętli  
        **jeżeli nie istnieje** to zakończ algorytm z wynikiem negatywnym  
    }

- VI. Zastosuj Algorytm Halla do rozwiązania problemu dopasowania małżeństw :

Przechodzimy przez kolejne wierzchołki grafu. Jeśli wierzchołek jest nieskojarzoną panną, to próbujemy utworzyć ścieżkę rozszerzającą prowadzącą do pierwszego napotkanego wolnego wierzchołka kawalera. Ścieżka rozszerzająca jest ścieżką naprzemienną, która zawiera na przemian krawędzie wolne i skojarzone (łącznie wierzchołki skojarzone ze sobą). Jeśli znajdziemy ścieżkę rozszerzającą (może jej nie być, jeśli nie jest spełniony w grafie warunek Halla), to wszystkie krawędzie wolne zmieniamy na skojarzone, a wszystkie krawędzie skojarzone zamieniamy na wolne. Do znalezienia ścieżki możemy posłużyć się metodą BFS oraz drzewem rozpinającym w szerz – odpowiednio przystosowanymi do warunków tego zadania. Ponieważ nie jest nam potrzebna pełna struktura drzewa rozpinającego, lecz jedynie ścieżki od jego liści do korzenia, to drzewo w prosty sposób można zrealizować w tablicy, której elementy o indeksie  $i$  będą zawierały numery wierzchołków grafu będące wierzchołkami nadrzędnymi w drzewie rozpinającym w stosunku do wierzchołka  $i$ -tego. Korzeń drzewa może być reprezentowany w tej tablicy przez wartość -1. Takie rozwiązanie umożliwi przejście od liścia do korzenia – wystarczy podążać za kolejnymi numerami wierzchołków nadrzędných.

Drzewo rozpinające w szerz tworzymy następująco:

Jeśli węzeł jest panną, to dodajemy do drzewa wszystkie krawędzie łączące pannę z kawalerami, którzy nie zostali jeszcze odwiedzeni – powstają krawędzie nieskojarzone.

Jeśli węzeł jest kawalerem, to dodajemy do drzewa tylko krawędź skojarzoną.

- VII. **Jeżeli istnieje rozwiązanie problemu dopasowania małżeństw znajdź minimalną sumę różnic wzrostów i obwodów głów**

## 8. Słownik

- Graf dwudzielny – graf, którego wierzchołki można podzielić na dwa zbiory w taki sposób, że między wierzchołkami z tego samego podgrafu nie biegnie żadna krawędź.
- Skojarzeniem z  $V$  do  $W$  w grafie dwudzielnym  $G$  nazywamy taką funkcję różnowartościową
- $f: V \rightarrow W$ , że wierzchołki  $v$  i  $f(v)$  są połączone krawędzią.
- Drogi powiększające

## 9. Źródła

- Problem o kojarzeniu małżeństw - <http://www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady/grafy/prob-malz.html>
- Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw - <http://www.math.cmu.edu/~ttkocz/teaching/2lorybnik/malzenstwa.pdf>
- Wyjaśniony problem kojarzenia małżeństw wraz z przykładowym algorytmem - [https://eduinf.waw.pl/inf/alg/001\\_search/0131a.php](https://eduinf.waw.pl/inf/alg/001_search/0131a.php)
- Twierdzenie Halla i wyjaśnienie co to drogi powiększające + alg szukania dróg powiększających - [https://inf.ug.edu.pl/~hanna/grafy/12\\_skojarzenia.pdf](https://inf.ug.edu.pl/~hanna/grafy/12_skojarzenia.pdf)
- ALGORYTM HALLA - [http://www.inform.pk.edu.pl/~amarsz/dydaktyka/dyskretna/dyskretna\\_ns\\_w5.pdf](http://www.inform.pk.edu.pl/~amarsz/dydaktyka/dyskretna/dyskretna_ns_w5.pdf)

