Compacité dans L^p

Thierry GOUDON [1]

Mathématiques Appliquées de Bordeaux
CNRS-Université Bordeaux I
351, cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex

Une démarche classique pour aborder certains problèmes (edp, calcul des variations...) consiste à se ramener à l'étude du comportement d'une suite u_n. Cette suite peut, par exemple, être construite en approchant le problème à résoudre $(\mathcal{P})$ par un problème $(\mathcal{P}_n)$ plus facile, la perturbation introduite s'évanouissant quand $n \to \infty$ (exemple : la méthode de "viscosité evanescente"). La suite u_n peut aussi être une suite minimisante d'un problème de minimisation. On espère alors que la suite u_n jouit de propriétés de compacité qui permettent de supposer que u_n converge vers u pour une certaine topologie et que cette convergence suffit pour "passer à la limite" dans le problème, montrant ainsi que u est une solution de $(\mathcal{P})$. La démarche suit donc deux étapes : la première consiste à établir la compacité, la seconde à montrer que la convergence satisfaite par une sous-suite permet d'obtenir que la limite u est solution du problème. La compacité de la suite u_n apparaît souvent comme une conséquence de bornes, d'estimations, sur u_n, indépendantes du paramètre n, dans un certain espace de Banach X. Ces bornes ont en général une interprétation concrète, liée aux phénomènes physiques que le problème considéré est censé représenter (exemple : X est un espace de type L^2 et la norme s'interpréte comme une énergie qui se conserve ou qui décroît au cours du temps...). La difficulté principale réside alors dans l'étape de passage à la limite, notamment si la convergence de u_n vers u est "trop faible" pour identifier directement la limite de quantités (non-linéaires) $F(u_n)$ avec $F(u)$: même si les estimations permettent de dire que $F(u_n)$ admet une limite $\overline{F}$, il n'est pas toujours évident que $\overline{F}$ et $F(u)$ coincident. Pour de nombreuses situations, le programme de la première étape est simplement rempli dès lors qu'on dispose d'une borne sur $\|u_n\|_X$; mais, cette stratégie est prise en défaut lorsque l'espace X n'est pas réflexif, ce qui est le cas, par exemple, pour $X = L^1$ et des problèmes où l'inconnue s'interpréte naturellement comme une densité. Outre quelques rappels, l'objet de cet exposé est de décrire plus précisèment les propriétés de suites bornées dans L^1

1. Rappels d'analyse fonctionnelle
   (de Bolzano-Weierstrass à Banach-Alaoglu-Bourbaki)

2. Critère de compacité faible dans L^1
   (de Banach-Alaoglu-Bourbaki à Dunford-Pettis)

3. Une suite bornée de L^1 est "presque" faiblement compacte
   (de Dunford-Pettis à Chacon)

4. Applications

[1] Une partie de ces notes ont fait l'objet d'un exposé aux "Monoides" de l'Ecole Doctorale de Bordeaux en Novembre 1995.

1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Topologie forte, topologie faible

Soit E un espace de Banach, de norme $\| \cdot \|_E$. On note E', le dual de E, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E [2]

Définition 1 *Soit x_n une suite d'éléments de E. On dit que*

1. *x_n converge fortement vers x dans E, et on note $x_n \longrightarrow x$, si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|_E = 0$*
2. *x_n converge faiblement vers x dans E, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si et seulement si pour tout $\lambda \in E'$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \lambda, x_n \rangle_{E', E} = \langle \lambda, x \rangle_{E', E}$*

On peut montrer assez facilement les propriétés élémentaires suivantes

- Si $x_n \longrightarrow x$ alors $x_n \rightharpoonup x$
- Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\| x_n \|_E$ bornée
- Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ dans E' (i.e. $\| \lambda_n - \lambda \|_{E'}$) alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n, x_n \rangle_{E', E} = \langle \lambda, x \rangle_{E', E}.$$

Si $dim(E) < \infty$, alors les topologies faible et forte coincident. Par contre si $dim(E) = \infty$, alors la topologie faible est strictement plus fine que la topologie forte : il existe des ouverts (resp. fermés) "forts" qui ne sont pas ouverts (resp. fermés) "faibles". Par exemple, la sphère $\{x \in E, \| x \| = 1\}$ n'est jamais faiblement fermée : son adhérence faible est la boule $\{x \in E, \| x \| \leq 1\}$.

Théorème 1 *Soit E un espace de Banach de dimension infinie, on note $S = \{x \in E, \| x \|_E = 1\}$. L'adhérence faible de S est la boule $B(0,1) = \{x \in E, \| x \|_E \leq 1\}$*

Preuve. Soit $x_0 \in E$ vérifiant $\| x_0 \|_E < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ des éléments de E'. On définit un voisinage $\mathcal{V}_0$ de x_0 pour la topologie faible par

$$\mathcal{V}_0 = \{x \in E, \forall i \in \{1, \ldots, p\}, | \langle \lambda_i, x - x_0 \rangle_{E', E} | \leq \varepsilon\}.$$

On introduit l'application

$$\Phi : y \in E \longmapsto \Phi(y) = (\langle \lambda_1, y \rangle_{E', E}, \ldots, \langle \lambda_p, y \rangle_{E', E}) \in I\!R^p.$$

Supposons d'abord $Ker(\Phi) = \{0\}$. Dans ce cas Φ est injective ce qui conduit au résultat absurde $dim(E) \leq p$. Il existe donc $y_0 \in E \backslash \{0\}$ tel que $\Phi(y_0) = 0$. On pose

$$\phi : t \in I\!R^+ \longmapsto \| x_0 + t y_0 \|_E \in I\!R^+$$

[2] E' est l'ensemble des applications linéaires $\lambda : E \to I\!K$ telles que $\sup\limits_{x \in E\backslash\{0\}} \dfrac{|\langle \lambda, x \rangle|}{\|x\|_E} < \infty$

Alors ϕ est continue avec $\phi(0) = \| x_0 \|_E < 1$ et $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ (puisque $t\|y_0\|_E = \|ty_0 - x_0 + x_0\|_E \le \phi(t) + \|x_0\|_E$ implique que $t\|y_0\|_E - \|x_0\|_E \le \phi(t)$ où le terme minorant tend vers $+\infty$ quand $t \to \infty$) On en déduit qu'il existe $t_0 \in I\!R^+$ tel que $\phi(t_0) = \|x_0 + t_0 y_0\|_E = 1$ Soit $z_0 = x_0 + t_0 y_0 \in S$ Par ailleurs, on a

$$(\Phi(z_0))_i = \langle \lambda_i, x_0 \rangle + t_0 \langle \lambda_i, y_0 \rangle = (\Phi(x_0))_i$$

puisque $y_0 \in Ker(\Phi)$, donc $|(\Phi(z_0))_i| \le \varepsilon$ ce qui signifie en fait $z_0 \in \mathcal{V}_0$. Ainsi, tout voisinage faible d'un point x_0, $\|x_0\|_E < 1$, contient au moins un élément de S On peut donc approcher (faiblement) un tel point par une suite d'éléments de S et on a les inclusions suivantes

$$S \subset B(0,1) \subset \overline{S}$$

où $\overline{S}$ désigne l'adhérence faible de S. Comme la boule $B(0,1)$ est convexe ceci donne en fait $B(0,1) = \overline{S}$ grâce au théorème suivant qui énonce l'équivalence des topologies faible et forte sur les ensembles convexes.

Théorème 2 *(Théorème de Mackey) Soit un ensemble convexe C. C est fortement fermé si et seulement si C est faiblement fermé.*

Preuve. Supposons d'abord $C \subset E$ faiblement fermé. Soit x_n une suite d'éléments de C qui converge fortement vers $x \in E$ Alors, on a aussi $x_n \rightharpoonup x$ donc $x \in C$ ce qui prouve que C est fortement fermé. Supposons maintenant C fortement fermé Soit $x_0 \in E \backslash C$ D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\lambda \in E'$ et $\alpha > 0$ tels que $\lambda(x_0) < \alpha$ et pour tout $y \in C, \lambda(y) > \alpha$. Or, par définition de la topologie faible, l'ensemble $\{y \in E, \lambda(y) < \alpha\}$ est faiblement ouvert, donc $A = \{y \in E, \lambda(y) \ge \alpha\}$ est faiblement fermé. Mais, on a $C \subset A$ et $x_0 \notin A$ donc $x_0 \notin \overline{C}$, adhérence faible de C On en conclut que $C = \overline{C}$ est faiblement fermé.

On peut aussi remarquer que si E est un espace de Hilbert, on peut trouver une suite de norme 1 qui converge faiblement vers 0 (par exemple dans $L^2(0,\pi)$ la suite $\frac{2}{\pi}\sin(nx)$) L'intérêt de la topologie faible est qu'elle est plus riche au sens où elle admet plus de compacts que la topologie forte, on verra plus loin que la condition pour qu'une suite soit compacte au sens faible est très simple pour une très grande classe d'espaces.

Il existe des espaces de Banach de dimension ∞ dans lesquels toute suite faiblement convergente est fortement convergente On dit qu'un tel espace a la "propriété de Schur". L'exemple classique est le suivant [7]

Théorème 3 *Soit $l^1 = \{(x_n)_n, \sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid < \infty\}$. Une suite de l^1 est faiblement convergente si et seulement si elle est fortement convergente.*

1.2 Topologies sur un espace dual

Soit E un espace de Banach, on désigne par E' son dual et $E"$ son bidual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E' En particulier, on remarque qu'on peut définir une injection $i : E \longrightarrow E"$ continue par

$$\langle i(x), \lambda \rangle_{E\ E'} = \langle \lambda, x \rangle_{E',E}.$$

L'injection i est une isométrie, mais n'est pas en général, surjective : E'' est un espace "plus gros" que E. Par exemple, pour $E = c_0$, ensemble des suites qui tendent vers 0 à l'infini, on a $E' = l^1$ et $E'' = l^\infty$, l'ensemble des suites bornées, voir [7]. L'espace dual E' est muni de la norme

$$\| \lambda \|_{E'} = \sup\{ |\langle \lambda, x \rangle_{E',E}|,\ x \in E,\ \|x\|_E \leq 1 \}.$$

Soit λ_n une suite d'éléments de E' et $\lambda \in E'$. Sur l'espace E', on peut définir trois topologies :

1. la topologie forte, où on note $\lambda_n \to \lambda$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n - \lambda\|_{E'} = 0;$$

2. la topologie faible, où on note $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$, pour tout $\Phi \in E''$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Phi, \lambda_n \rangle_{E'',E'} = \langle \Phi, \lambda \rangle_{E'',E'};$$

3. la topologie faible $*$, où on note $\lambda_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \lambda$, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n, x \rangle_{E',E} = \langle \lambda, x \rangle_{E',E}.$$

La topologie faible $*$ est strictement plus fine que la topologie faible qui est elle-même strictement plus fine que la topologie forte. On montre facilement que :

- si $\lambda_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \lambda$ alors $\| \lambda_n \|_{E'}$ est bornée
- Si $\lambda_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \lambda$ dans E' et $x_n \to x$ dans E alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n, x_n \rangle = \langle \lambda, x \rangle.$$

(Bien entendu ceci n'est plus vrai si on suppose seulement $x_n \rightharpoonup x$.)

1.3 Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Dans $\mathbb{R}$, il est bien connu qu'il suffit qu'une suite soit bornée pour qu'on puisse en extraire une sous-suite convergente, c'est le célèbre théorème de Bolzano-Weierstrass. Par contre, lorsque E est un espace de Banach de dimension infinie, la condition x_n bornée ne suffit plus en général. Toutefois, dans le cas d'un espace dual, on a

Théorème 4 *La boule unité fermée de E' est faiblement $*$ compacte.*

Si on suppose de plus que E est séparable (i.e. il existe un ensemble D dénombrable et dense dans E), on peut exprimer ce résultat de compacité pour l'espace dual E' sous la forme

Corollaire 1 *De toute suite bornée de E', on peut extraire une sous-suite faiblement $*$ convergente.*

Lorsque l'espace E est un espace dual, la compacité, pour la topologie faible $*$, est donc facile à obtenir et les espaces "intéressants" sont ceux qui sont espace dual d'un autre Ceci est réalisé en particulier lorsque on peut identifier E avec son bidual E'' au moyen de l'injection i

Définition 2 *E est réflexif lorsque l'injection i est surjective (i.e. $i(E) = E''$)*

La caractérisation suivante des espaces réflexifs est due à Kakutani

Théorème 5 *E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de E est faiblement compacte.*

Autrement dit, la compacité faible d'une suite bornée est assurée lorsque l'espace est réflexif Pour résumer, si x_n est une suite bornée d'un espace E, on a

- lorsque $dim(E) < \infty$, alors x_n est compacte (fortement !),
- lorsque $dim(E) = \infty$ et E est réflexif alors x_n est faiblement compacte,
- lorsque $dim(E) = \infty$ et E est le dual d'un espace séparable alors x_n est faiblement $*$ compacte

Remarque 1 *La réciproque du second point est vraie, c'est un théorème du à Eberlein-Smulian : sSi E est un espace de Banach tel que toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente, alors E est réflexif. Mais, il existe des espaces de Banach pour lesquels les suites bornées de E' n'admettent aucune sous-suite faiblement convergente (il n'y a pas de contradiction avec le théorème 1 : un tel espace E n'est pas séparable et la boule unité de E' n'est pas métrisable).*

2 Critère de compacité faible dans L^1

2.1 Le cas des espaces L^p

Pour simplifier, on se place dans le cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (borné ou non, éventuellement $\mathbb{R}^N$ lui-même) et dx désigne la mesure de Lebesgue. L'espace L^p est composé des fonctions f de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que, pour $1 \leq p < \infty$,

$$\int_\Omega | f(x) |^p \, dx < \infty$$

et pour $p = \infty$, f est essentiellement bornée Pour appliquer les résultats précédents à ces espaces, il faut rappeler les propriétés de base de ces espaces.

Théorème 6 *Si $1 < p < \infty$, alors L^p est réflexif et séparable ; on a $(L^p)' = L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
Si $p = 1$, on a $(L^1)' = L^\infty$ (Steinhaus, 1918) et L^1 est séparable mais n'est pas réflexif.
Si $p = \infty$, L^∞ n'est ni réflexif, ni séparable

En terme de suites, ce résultat conduit aux conséquences suivantes.

Corollaire 2 *Soit f_n une suite bornée de L^p alors,*

- *si $1 < p < \infty$, on peut extraire une sous-suite telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans L^p c'est-à-dire pour tout $\phi \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_{n_k} \phi dx = \int_\Omega f \phi dx;$$

- *Si $p = \infty$, on peut extraire une sous-suite telle que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans L^∞ c'est-à-dire pour tout $\phi \in L^1$,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_{n_k} \phi dx = \int_\Omega f \phi dx$$

Exemple (homogéneisation) : on considère la suite $f_\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ où a est une fonction Y-périodique, bornée. Alors

$$f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} = \frac{1}{mes(Y)} \int_Y a(y) dy$$

Le cas $p = 1$ est plus délicat puisque l'espace L^1 n'est pas réflexif, ce n'est pas le dual de L^∞. Considérons l'exemple suivant de la fonction "créneau". Soit $\Omega = (-1, +1)$ et $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{(-\varepsilon,+\varepsilon)}(x)$. Il est clair que

$$\| f_\varepsilon \|_{L^1} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = 1.$$

Donc f_ε est bien bornée dans L^1, on a même lorsque ε tend vers 0

$$f_\varepsilon(x) \longrightarrow 0$$

presque partout dans $(-1, +1)$. Pourtant, f_ε n'est pas faiblement compacte dans L^1. En effet, supposons qu'il existe une sous-suite telle que pour tout $\phi \in L^\infty$ on ait

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{+1} f_\varepsilon \phi dx = \int_{-1}^{+1} f \phi dx$$

avec $f \in L^1$. En particulier, pour $\phi = 1$, il vient

$$\int_{-1}^{+1} f dx = 1.$$

Maintenant, soit $\phi \in C_0^\infty(-1, +1)$ avec $0 \notin supp(\phi)$. Lorsque ε est "assez petit", on a $supp(\phi) \cap (-\varepsilon, +\varepsilon) = \emptyset$ donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{+1} f_\varepsilon \phi dx = 0 = \int_{-1}^{+1} f \phi dx$$

ce qui implique $f = 0$ *pp*. On obtient donc une contradiction.

Cet exemple montre qu'une suite bornée de L^1, même si on suppose de plus la convergence pp, n'est pas faiblement compacte dans L^1. On peut comparer cette situation avec le résultat suivant (qu'on démontrera plus tard).

Théorème 7 *Soit f_n une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, avec $1 < p < \infty$ et $mes(\Omega) < \infty$. On suppose de plus que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pp $x \in \Omega$. Alors f_n converge fortement vers f dans L^q pour tout $1 \leq q < p$.*

Pour l'exemple de la fonction "créneau", on peut toutefois montrer que pour $\phi \in C_0^\infty(-1,+1)$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{+1} f_\varepsilon \phi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \phi(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \phi(\varepsilon y) dy = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

La suite f_ε converge vers une masse de Dirac Cette remarque nous amène à considérer L^1 comme un sous-espace d'un ensemble de mesures.

On a vu que l'espace L^1 n'est pas un espace dual, on peut toutefois l'interpréter comme un sous-ensemble d'un espace dual :

$$L^1 \subset \mathcal{M}^1$$

où $\mathcal{M}^1 = (C_0^0(\Omega))'$ est l'espace des mesures de Radon sur Ω. On en déduit qu'une suite bornée dans L^1 est aussi bornée dans $\mathcal{M}^1$ et on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement $*$ (on dit parfois "vaguement") vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}^1$. La question naturelle qu'on est amené à se poser est : quelle hypothèse supplémentaire faut-il faire sur une suite bornée de L^1 pour qu'elle soit compacte au sens de la topologie faible $((L^1)', L^1) = (L^\infty, L^1)$? On a vu avec la fonction créneau que la convergence pp ne permet pas de répondre positivement. La caractérisation des suites faiblement compactes de L^1 est donnée par le théorème de Dunford-Pettis.

Remarque 2 *On peut définir plusieurs topologies sur l'espace $\mathcal{M}^1(\Omega)$ des mesures bornées (i.e. de masse finie) sur Ω. La topologie faible $*$, ou "vague" est définie par rapport à l'espace des fonctions tests C_0^0, des fonctions continues à support compact dans Ω :*

$$\forall \phi \in C_0^0, \lim_{n \to \infty} \langle \mu_n, \phi \rangle = \langle \mu, \phi \rangle.$$

La topologie "étroite" est elle définie par rapport à l'espace des fonctions tests C_b^0, des fonctions continues et bornées sur Ω :

$$\forall \phi \in C_b^0, \lim_{n \to \infty} \langle \mu_n, \phi \rangle = \langle \mu, \phi \rangle.$$

étroit $\Rightarrow$ vague

Pour plus de détails, on peut consulter [26].

Remarque 3 *Considérons les fonctions "créneaux"*

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{(-\varepsilon,+\varepsilon)}(x) \; ; g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \chi_{(0,+\varepsilon)}(x) \; ; h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \chi_{(-\varepsilon,0)}(x)$$

Ces trois suites convergent vaguement vers la masse de Dirac δ_0, mais, si on note Y la fonction d'Heaviside, les suites Yf_ε, Yg_ε et Yh_ε ont des comportements tout à fait différents (elles convergent respectivement vers $\frac{1}{2}\delta_0$, δ_0 et 0). Ces trois exemples décrivent des phñomènes de concentrations, on obtient à la limite des mesures qui "chargent" l'origine, mais dans les deux derniers cas il y a une direction privilégiée (on charge par la droite ou la gauche).

2.2 Le théorème de Dunford-Pettis

Le caractère non réflexif de L^1 impose la recherche de conditions supplémentaires pour assurer la compacité faible d'une suite bornée. Divers auteurs (parmi lesquels Dunford-Pettis (1940), Dieudonné (1951), Grothendieck (1954-58), Bourbaki (1952-59)) ont cherché des critères assurant la compacité faible. Le théorème suivant est connu sous le nom de théorème de Dunford-Pettis.

Théorème 8 *Soit f_n une suite bornée de L^1. La suite f_n est faiblement compacte si et seulement si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subset \Omega \ \textit{avec}\ K_\varepsilon\ \textit{compact}, \sup_n \int_{\Omega - K_\varepsilon} | f_n | \, dx < \varepsilon$$

et

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall\mathcal{A} \in \Omega,\ \textit{mesurable}\ \ mes(\mathcal{A}) < \eta\ \textit{implique}\ \sup_n \int_{\mathcal{A}} | f_n | \, dx < \varepsilon$$

Le premier point de ce théorème contrôle le comportement de la suite à l'infini ; en particulier, il est vérifié dès lors que Ω est borné. Le second point contrôle les phénomènes de concentration.

Exemples : le "créneau" $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{(-\varepsilon,+\varepsilon)}(x)$ converge vers une masse de Dirac : il y a concentration en 0, le second point n'est pas satisfait.

la "bosse glissante" $f_\varepsilon(x) = \chi_{(\frac{1}{\varepsilon}, 1+\frac{1}{\varepsilon})}(x)$ dans $\Omega = \mathbb{R}$ ne vérifie pas le premier point et f_ε converge vers 0 dans $\mathcal{M}^1$ (car pour $\phi \in C_0^0$ pour ε assez petit $supp(\phi) \cap (\frac{1}{\varepsilon}, 1 + \frac{1}{\varepsilon}) = \emptyset$).

Remarque 4 *Si la suite f_n est dominée, i.e. il existe $g \in L^1$ telle que pp $x \in \Omega$, on a $| f_n(x) | \leq g(x)$ alors f_n est faiblement compacte dans L^1. Le résultat est encore vrai si on a $| f_n(x) | \leq g_n(x)$ où on sait déjà que g_n est faiblement compacte dans L^1.*

Remarque 5 *Pour obtenir le second point on peut montrer que f_n vérifie*

$$\lim_{A\to\infty} \sup_n \int_{|f_n|>A} | f_n | \, dx = 0.$$

En effet, pour tout mesurable $\mathcal{A} \subset \Omega$, on a pour $A > 0$

$$\int_{\mathcal{A}} | f_n | \, dx = \int_{\mathcal{A}} | f_n | \, \chi_{|f_n|>A} dx + \int_{\mathcal{A}} | f_n | \, \chi_{|f_n|\leq A} dx$$

$$\leq \sup_n \int_{|f_n|>A} | f_n | \, dx + A \ mes(\mathcal{A})$$

On prend A assez grand pour que le premier terme soit $< \varepsilon$, et on fait tendre $mes(\mathcal{A})$ vers 0.

Preuve du théorème 8 ~~4~~. Soit f_n bornée dans $L^p(\Omega)$, avec $1 < p < \infty$ et $mes(\Omega) < \infty$. Alors f_n est équi-intégrable. En effet, on a pour tout mesurable $\mathcal{A} \subset \Omega$

$$\int_{\mathcal{A}} | f_n | \, dx \leq \left(\int_{\mathcal{A}} 1^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathcal{A}} | f_n |^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (mes(\mathcal{A}))^{\frac{1}{p'}} \ \| f_n \|_{L^p} \leq C(mes(\mathcal{A}))^{\frac{1}{p'}}.$$

De plus, f_n est bornée dans L^1 car

$$\int_{\Omega} | f_n | \, dx \leq C(mes(\Omega))^{\frac{1}{p'}}.$$

On en déduit donc que f_n est faiblement compacte dans $L^1(\Omega)$. Or, f_n converge pp vers f, alors le théorème 8 assure que f_n converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$.

Soit $u \in L^p \cap L^1(\Omega)$. Alors, pour $1 < q < p$, on a l'inégalité d'interpolation suivante

$$\int_{\Omega} | u |^q \, dx = \int_{\Omega} | u |^{q-\frac{1}{s}} | u |^{\frac{1}{s}} \, dx \leq \left(\int_{\Omega} | u | \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\Omega} | u |^{r(q-\frac{1}{s})} \, dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

avec $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$. Il vient, avec $p = r(q - \frac{1}{s})$

$$\| u \|_q^q \leq \| u \|_1^{\frac{1}{s}} \| u \|_p^{\frac{p}{r}}.$$

On applique ce résultat pour obtenir la convergence forte dans L^q. On pose $\theta = \frac{1}{sq} \in (0, 1)$, et on a

$$\| f_n - f \|_q \leq \| f_n - f \|_1^{\theta} \| f_n - f \|_p^{1-\theta} \leq C \| f_n - f \|_1^{\theta}$$

Où la constante $C < \infty$ majore $\| f_n \|_p$, qui est bornée plus $\| f \|_p$ (car le lemme de Fatou assure que $f \in L^p$). On conclut grâce à la convergence forte dans L^1.

2.3 Critère pratique

Dans la pratique, on déduit la compacité faible dans L^1 de diverses estimations, liées au problème. On est amené à utiliser le lemme suivant

Lemme 1 *Soit w une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} w(x) = +\infty$ et soit G une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{G(s)}{s} = +\infty$. Si on a*

$$\sup_n \int_{\Omega} ((1 + w(x)) \mid f_n(x) \mid + G(\mid f_n(x) \mid)) dx < \infty$$

alors f_n est faiblement compacte dans L^1

Le poids w permet le contrôle à l'infini et l'estimation sur G (appelé "fonction de Nagumo") donne le second point du théorème de Dunford-Pettis.

De telles estimations sont souvent liées à des considérations physiques. Ainsi, pour l'équation de Boltzmann qui décrit l'évolution d'un gaz raréfié (voir [13] [19]), on a une estimation du type (avec $f_n \geq 0$)

$$\sup_n \int_{\Omega} (1 + x^2 + \mid \ln(f_n) \mid) f_n dx < \infty$$

La quantité $G(f_n) = \mid \ln(f_n) \mid f_n$ est lié à l'entropie du système.

3 Compacité forte dans L^p

On dispose aussi d'un critère permettant de déterminer si une suite donnée est fortement compacte dans L^p valable pour toute valeur de $1 \leq p < \infty$. Ce critère est du essentiellement à M. Riesz (1933) puis A. Weil (1951) ; on l'appelle parfois théorèm e de Weil-Kolmogorov-Fréchet

Théorème 9 *Soit $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset I\!R^N$ (borné ou non). Un ensemble $\mathcal{F}$ de $L^p(\Omega)$ est fortement compact dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *F est bornée*

$$\sup_{\mathcal{F}} \int_{\Omega} | f |^p \, dx < \infty$$

- *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \subset \Omega$, compact tel que*

$$\sup_{\mathcal{F}} \int_{\Omega \setminus K_\varepsilon} | f |^p \, dx < \varepsilon$$

- *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $| h | < \eta$ alors*

$$\sup_{\mathcal{F}} \int_{\Omega} | f(x+h) - f(x) |^p \, dx < \varepsilon$$

Le second point est un contrôle à l'infini ; le dernier point est une condition d'équicontinuité au sens L^p : le critère de Weil s'interpréte comme une version L^p du théorème d'Ascoli. Notons que dans le cas $p = 2$, on dispose d'un critère équivalent en terme de transformée de Fourier [3].

Théorème 10 *Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$. Une suite bornée f_n de $L^2(\Omega)$ est fortement compacte dans $L^2_{loc}(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a*

$$\lim_{R \to \infty} \sup_n \int_{|\xi| > R} |\mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Preuve. Supposons que la condition du Théorème soit satisfaite. On remarque que

$$\mathcal{F}(\phi f_n(\cdot + h))(\xi) = \int e^{-ix\,\xi} \phi f_n(x+h) dx = \int e^{-iy\,\xi} e^{ih\,\xi} \phi f_n(y) dy = e^{ih\,\xi} \mathcal{F}(\phi f_n)(\xi).$$

La formule de Parseval donne donc

$$\int |\phi f_n(x+h) - \phi f_n(x)|^2 dx = c \int |\mathcal{F}(\phi f_n(\cdot + h))(\xi) - \mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi$$

$$= c \int |(1 - e^{ih\,\xi}) \mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi.$$

[3] qu'on définit ici par $\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \displaystyle\int e^{-ix\,\xi} \phi(x) dxt.$

Il est donc facile de voir, en appliquant le théorème de Lebesgue, que pout tout n ce terme tend vers 0 avec h ; la difficulté est d'obtenir une convergence uniforme vis-à-vis de n. On décompose cette intégrale sur les hautes et basses fréquences

$$\int |(1-e^{ih\,\xi})\mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi|<R} |(1-e^{ih\,\xi})\mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ \int_{|\xi|>R} |(1-e^{ih\,\xi})\mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi = I_n(h,R) + J_n(h,R).$$

Tout d'abord, on a

$$\sup_n J_n(h,R) \leq 4 \sup_n \int_{|\xi|>R} |\mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi$$

où, par hypothèse, le majorant tend vers 0 quand $R \to \infty$. Par ailleurs, on majore $I_n(h,R)$ par

$$\|\mathcal{F}(\phi f_n)\|^2_{L^\infty} \int_{|\xi|<R} |1-e^{ih\,\xi}|^2 d\xi \leq \|\phi f_n\|^2_{L^1} \int_{|\xi|<R} |1-e^{ih\,\xi}|^2 d\xi$$

$$\leq C_\phi \|f_n\|^2_{L^2} \int_{|\xi|<R} |1-e^{ih\,\xi}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi|<R} |1-e^{ih\,\xi}|^2 d\xi,$$

en utilisant la borne L^2 sur f_n et la propriété de support compact de ϕ. Par le théorème de Lebesgue, on obtient immédiatement que, pour R fixé, cette intégrale tend vers 0 quand $h \to 0$. On obtient donc un résulat du type

$$\sup_n (I_n(h,R) + J_n(h,R)) \leq \delta_R(h) + g(R)$$

avec $\lim_{R\to\infty} g(R) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \delta_R(h) = 0$ qui permet de conclure que ϕf_n vérifie les conditions du théorème. Réciproquement, si f_n est fortement compacte dans $L^2_{loc}(\Omega_x)$, alors pour $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathcal{F}(\phi f_n)$ est fortement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$ et vérifie donc la condition du théorème qui n'est autre que le second point du critère de Weil appliqué à $\mathcal{F}(\phi f_n)$.

Une conséquence immédiate de ce résultat est le célèbre théorème de compacité de Rellich.

Corollaire 3 *Soit $s \in \mathbb{R}$. On note*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{\phi}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

l'espace de Sobolev d'ordre s. Alors, pour $s > t$, l'injection $H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^t_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est compacte.

Preuve. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On montre seulement que l'application $f \longmapsto \phi f$ est compacte de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ pour $s > 0$. En effet, on a

$$\int_{|\xi|>R} |\mathcal{F}(\phi f)(\xi)|^2 d\xi \leq (1+R^2)^{-s} \int_{|\xi|>R} (1+\xi^2)^s |\mathcal{F}(\phi f)(\xi)|^2 d\xi \leq C(\phi)(1+R^2)^{-s} \|f\|_{H^s}$$

qui tend clairement vers 0 quand $R \to \infty$.

Ce dernier critère est à l'origine de l'introduction dans [20] du "front d'onde de compacité" $WF_c(f_n)$ d'une suite f_n bornée dans $L^2(\Omega)$.

Définition 3 *On dit un point* $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ *n'appartient pas à* $WF_c(f_n)$ *s'il existe une fonction* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, *non nulle en* x_0 *et un voisinage conique* $\mathcal{V}_0$ *de* ξ_0 *tels que*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{|\xi|>R, \xi\in\mathcal{V}_0} |\mathcal{F}(\phi f_n)(\xi)|^2 d\xi = 0$$

Comme le front d'onde classique, voir [2], permet de repèrer les défauts de régularité, ce front d'onde de compacité permet de repérer les défaut de compacité.

4 Une suite bornée de L^1 est "presque" faiblement compacte

Dans cette section, on suppose pour simplifier que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On a vu qu'une suite bornée de L^1 est faiblement $*$ compacte dans l'espace de mesures $\mathcal{M}^1$, mais pas en général dans L^1. Le défaut de compacité est alors imputable à des phénomènes de concentration des oscillations. On peut préciser cette idée par le résultat suivant (du à Chacon [10], voir aussi [1] [4], [5]) : une suite bornée de $L^1(\Omega)$ est faiblement compacte dans L^1 hors d'ensembles de mesure petite qu'il faut "grignoter" sur l'ouvert Ω.

Théorème 11 *("bitting lemma" ou "lemme qui mord" de Chacon) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* f_n *une suite bornée de* $L^1(\Omega)$. *Alors, il existe*

- $f \in L^1(\Omega)$
- *une sous-suite* f_{n_k}
- *une suite d'ensembles mesurables* $E_j \subset \Omega$ *avec*

$$E_{j+1} \subset E_j \ ; \ \lim_{j\to\infty} | E_j |= 0$$

tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \quad dans\ L^1(\Omega\backslash E_j).$$

On dit alors que f_{n_k} converge vers f au sens de Chacon (ou "weak-weak converge").

Remarque 6 *Il serait tentant d'affirmer que pour toute suite* f_n *bornée dans* L^1 *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un mesurable* $E \subset \Omega$ *tel que* $mes(E) < \varepsilon$ *et* f_n *converge faiblement dans* $L^1(\Omega\backslash E)$. *Cet énoncé est faux : le lemme de Chacon ne donne la convergence faible que pour une sous-suite* je ne vois pas le [illegible]

On peut extraire de f_n bornée dans L^1 une sous-suite telle que

$$f_{n_k} \ converge\ faiblement\ *\ vers\ \mu\ dans\ \mathcal{M}^1$$

et

$$f_{n_k} \ converge\ faiblement\ au\ sens\ de\ Chacon\ vers\ f\ dans\ L^1$$

Il est naturel de chercher à comparer f et μ. Malheureusement, il n'y a pas en général de lien entre f et μ. En particulier, les ensembles E_j ne sont que des mesurables et ne sont pas en général fermés : on ne peut pas définir de fonctions tests ϕ continues à support compact dans $\Omega \backslash E_j$ (qui n'est pas un ouvert) pour étudier $\lim_{k \to \infty} \langle f_{n_k}, \phi \rangle$. Toutefois, si $f_n \geq 0$, alors on peut montrer, au sens des mesures, que

$$d\mu \geq f\ dx$$

La différence entre f et μ mesure le défaut de compacité du aux effets des concentrations (voir une autre approche dans [14], [15]).

Remarque 7 *Tous les résultats qui précédent, théorème de Dunford-Pettis, lemme de Chacon notamment peuvent s'énoncer de manière générale pour des fonctions définies sur un espace mesuré $(\Omega, d\mu)$ à valeurs dans un espace de Banach réflexif X et telles que*

$$\int_\Omega \| f \|_X \, d\mu < \infty$$

Le lecteur intéressé pourra trouver un autre critère de compacité faible dans [16].

5 Applications

5.1 Amélioration de la convergence faible

Lorsque x_n est une suite d'un espace de Hilbert H pour laquelle on arrive à montrer à la fois que x_n converge faiblement vers x et que la norme $\| x_n \|_H$ converge vers $\| x \|_H$, alors il est bien connu qu'en fait x_n converge fortement vers x. Il est naturel de chercher quel type d'information supplémentaire sur une suite qui converge faiblement dans L^1 assure la convergence forte. En fait, il suffit d'avoir en plus la convergence pp. Pour montrer ce résultat, on rappelle d'abord le théorème d'Egoroff.

Théorème 12 *Soit Ω un ouvert de mesure finie de $\mathbb{R}^N$. Soit f_n une suite de fonctions qui converge pp vers f. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un mesurable $E \subset \Omega$ avec $mes(E^c) < \varepsilon$ tel que f_n converge vers f uniformément sur E.*

Le résultat suivant est une conséquence du théorème d'Egoroff et du critère de Dunford-Pettis.

Théorème 13 *Soit Ω un ouvert (quelconque) de $\mathbb{R}^N$ et f_n une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_n est faiblement compacte dans $L^1(\Omega)$ et que pp$x \in \Omega$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. Alors, f_n converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$.*

En effet, on a pour tout $R > 0, \eta > 0$, convergence uniforme de f_n vers f sur $E \subset \{| x | \leq R\}$ avec $mes(E^c) < \eta$. On écrit

$$\int_\Omega | f_n - f | \, dx = \int_E | f_n - f | \, dx + \int_{|x|>R} | f_n - f | \, dx + \int_{E^c \ |x|<R} | f_n - f | \, dx$$

$$\leq \| f_n - f \|_{L^\infty(E)} \, mes(B(0,R)) + \sup_n \int_{|x|>R} | f_n | \, dx + \int_{|x|>R} | f | \, dx$$

$$+\sup_n \int_{E^c} | f_n | dx + \int_{E^c} | f | dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in L^1(\Omega)$ et f_n est faiblement compacte, on peut prendre R_ε et η_ε tels que les intégrales sur $\{| x |> R_\varepsilon\}$ et E^c soient $\leq \varepsilon$. Enfin la convergence uniforme sur E permet de terminer la preuve.

On obtient encore la convergence forte si on arrive à obtenir des informations sur une suite $\Phi(f_n)$.

Lemme 2 *Soit Φ une fonction de $I\!R$ dans $I\!R$ strictement concave. On suppose que f_n converge faiblement vers f dans L^1 et $\Phi(f_n)$ converge faiblement vers $\Phi(f)$ dans L^1. Alors f_n converge fortement vers f dans L^1.*

Preuve. On remarque que $\frac{f_n+f}{2} \rightharpoonup f$ dans L^1. Alors, comme la concavité de Φ assure une propriété de faible semi-continuté supérieure

$$\lim_{n\to\infty} \int \Phi(\frac{f_n+f}{2})dx \leq \int \Phi(f)dx.$$

Mais, Φ est strictement concave, donc $\forall M > 0, \exists \nu_M > 0$ tel que

$$\Phi(\frac{f_n+f}{2}) \geq \frac{1}{2}\Phi(f_n) + \frac{1}{2}\Phi(f) + \nu_M \mid f_n - f \mid \chi_{|f_n|<M}\chi_{|f|<M}.$$

Alors, il vient

$$\int | f_n - f | dx \leq \int | f_n - f | \chi_{|f_n|<M}\chi_{|f|<M} dx + \int | f_n - f | (\chi_{|f_n|\geq M} + \chi_{|f|\geq M})dx$$

On majore la première intégrale par

$$\frac{1}{\nu_M} \int \Phi(\frac{f_n+f}{2})dx - \frac{1}{2\nu_M} \int (\Phi(f_n) + \Phi(f))dx$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, on obtient en utilisant l'inégalité de semi-continuité et l'hypothèse $\Phi(f_n) \rightharpoonup \Phi(f)$ une majoration par

$$\frac{1}{\nu_M} \int \Phi(f)dx - \frac{1}{2\nu_M} \int (\Phi(f) + \Phi(f))dx = 0.$$

Alors, on en déduit

$$0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int | f_n - f | dx \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int | f_n - f | dx$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int | f_n - f | (\chi_{|f_n|>M} + \chi_{|f|>M})dx$$

$$\leq \sup_n \int | f_n | (\chi_{|f_n|>M} + \chi_{|f|>M})dx + \sup_n \int | f | \chi_{|f_n|>M} + \chi_{|f|>M} dx = G(M)$$

Or, $mes(\{| f_n(x) |> M\} \leq \frac{1}{M} \sup_n \| f_n \|_{L^1}$. On en déduit par le théorème de Lebesgue pour f et par équi-intégrabilité (voir remarque 3) pour f_n que $\lim_{M\to\infty} G(M) = 0$.

Remarque 8 *On peut trouver des applications de lemmes de ce type dans [24] (avec $\Phi(s) = \ln(1+s)$). Bien entendu, il n'est pas du tout évident que la limite faible de $\Phi(f_n)$ soit $\Phi(f)$ (voir section 3).*

Le résultat suivant permet de passer de la convergence de Chacon à la convergence faible.

Lemme 3 *Soit f_n une suite de fonctions positives telle que $f_n \overset{Ch}{\rightharpoonup} f$ Alors f_n converge faiblement vers f si et seulement si*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_\Omega f_n dx \leq \int_\Omega f dx$$

L'implication est immédiate et pour la réciproque on suppose que f_n ne vérifie pas Dunford-Pettis, alors l'inégalité ne peut être satisfaite.

5.2 Convergence faible et produits

On a vu dans le chapitre 1 qu'on ne pouvait passer à la limite dans le produit $\langle \lambda_n, x_n \rangle_{E',E}$ que si l'une des suite converge fortement. Pourtant, dans de nombreuses applications, on doit étudier le comportement de $\alpha_n f_n$ où α_n est une suite bornée de L^∞ et f_n converge faiblement vers f dans L^1 Si α_n converge fortement vers α dans L^∞ (i.e. converge uniformèment) alors il est facile de montrer que $\alpha_n f_n$ converge faiblement dans L^1 vers αf Par contre, ce résultat n'est plus vrai si on a seulement $\alpha_n \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha$ dans L^∞. Un cas intermédiaire est donné par le lemme suivant.

Lemme 4 *Soit f_n une suite qui converge faiblement vers f dans L^1 et α_n une suite bornée de L^∞ qui converge pp vers α. Alors $\alpha_n f_n$ converge faiblement dans L^1 vers αf.*

La preuve est une conséquence des théorèmes de Egoroff et Dunford-Pettis. On a pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$ et avec les notations du théorème 8

$$\left| \int_\Omega (\alpha_n f_n \phi - \alpha f \phi) dx \right| \leq \int_\Omega | \alpha_n - \alpha || f_n \phi | dx + \left| \int_\Omega (f_n - f) \alpha \phi dx \right|$$

$$\leq \| \alpha_n - \alpha \|_{L^\infty(E)} \| \phi \|_\infty \sup_n \int_\Omega | f_n | dx$$

$$+ (\sup_n \| \alpha_n \|_\infty + \| \alpha \|_\infty) \| \phi \|_\infty \sup_n \int_{E^c \, |x|>R} | f_n | dx + | \langle f_n - f, \alpha\phi \rangle_{L^1, L^\infty} | .$$

Où l'ensemble de Egoroff E et R sont pris de manière à contrôler le deuxième terme. Le premier terme tend vers 0 par convergence uniforme sur E et le dernier terme tend vers 0 par convergence faible de f_n vers f.

Remarque 9 *Lorsqu'on ne dispose que de la converge faible $*$ pour α_n, la complexité de la situation peut être décrite par l'exemple suivant. On suppose que $f_n(x,v) \rightharpoonup f(x,v)$ dans $L^1(X \times V)$ et $\alpha_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha(x)$ dans L^∞ (f_n et f dépendent de $x \in X$ et de $v \in V$ alors que α_n et α ne dépendent que de $x \in X$). Il est clair que $g_n(x,v) = \alpha_n(x) f_n(x,v)$ vérifie les hypothèses du thérèreme de Dunford-Pettis ; on peut donc supposer que $g_n(x,v) \rightharpoonup g(x,v)$ Mais en général le passage à la limite mélange les oscillations c'est-à-dire qu'on ne peut pas écrire la limite faible $g(x,v)$ sous la forme $h(x)f(x,v)$ où f est la limite faible de f_n et h ne dépend que de la variable x.*

5.3 Convergence faible et non-linéarités

Soit Φ une fonction continue On s'intéresse à la suite $\Phi(f_n)$. Si f_n converge en norme L^p, alors, au moins pour une sous-suite, il y a convergence pp. qui permet d'étudier le passage à la limite dans $\Phi(f_n)$ Par contre, le comportement de la convergence faible vis-à-vis des non-linéarités est mauvais. On ne dispose guère que de propriétés de semi-continuité lorsque Φ est convexe

Lemme 5 *Soit Φ une fonction convexe de $I\!R$ dans $I\!R$, avec $\forall s \in I\!R$, $\mid \Phi(s) \mid \leq C \mid s \mid$. On suppose que $f_n \rightharpoonup f$ et $\Phi(f_n) \rightharpoonup \overline{\Phi}$ dans L^p (pour $1 \leq p < \infty$ ou $\overset{*}{\rightharpoonup}$ pour $p = \infty$). Alors*

$$\Phi(f) \leq \overline{\Phi} \ pp\Omega.$$

En général $\overline{\Phi} \neq \Phi(f)$ Un outil permettant de caractériser $\overline{\Phi}$ est la notion de mesure de Young ([27], [28], adaptée à la convergence au sens de Chacon par [4], [5]).

Proposition 1 *Soit f_n une suite bornée de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ et $mes(\Omega) < \infty$ Alors, il existe une sous-suite, toujours notée f_n, telle que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ (pour $1 < p < \infty$, respectivement faiblement $*$ pour $p = \infty$ ou faiblement-Chacon pour $p = 1$) et il existe une famille de mesures de probabilités, paramétrée par $x \in \Omega$, notée $\nu_x(d\lambda)$ telle que pour toute fonction continue Φ avec $\mid \Phi(s) \mid \leq C \mid s \mid$, la limite faible de $\Phi(f_n)$ (respectivement faible $*$ ou au sens de Chacon) est donnée par*

$$\overline{\Phi}(x) = \langle \nu_x(d\lambda), \Phi(\lambda) \rangle$$

Remarque 10 *Comme les mesures de Young $\nu_x(d\lambda)$ sont des mesures de probabilités (i.e. $\langle \nu_x(d\lambda), 1 \rangle = 1$), l'inégalité de semi-continuité pour Φ convexe s'interpréte ici comme une application du lemme de Jensen. On remarque aussi que la limite de f_n est donnée par*

$$f(x) = \langle \nu_x(d\lambda), \lambda \rangle$$

De tels outils (Chacon-convergence, mesures de Young,...) ont été utilisés pour étudier certains problèmes de calcul des variations Par exemple pour minimiser la quantité

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

avec $\mid f(x, \xi, \zeta) \mid \leq C(\mid \xi \mid^p + \mid \zeta \mid^p)$, Ω borné régulier et $u \in W^{1,p} = \{u \in L^p, \partial_i u \in L^p\}$ On se réferera pour de telles applications à [6], [25], [23].

References

[1] E. ACERBI and N FUSCO *Semi-continuity problems in the calculus of variations*, Arch Rat. Mech. Anal., 86, 125-145 (1984).

[2] S. ALHINAC et P. GÉRARD **Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser** (InterEditions-CNRS, 1991)

[3] L. ARKERYD *On the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., 45, 1-35 (1972)

[4] J. BALL *A version of the fundamental theorem for Young measures,* in **Pde's and continuum models of phase transition**, Lecture Notes in Physics 344, M Rascle, D. Serre, M Slemrod Eds., pp 207-215 (Springer, 1989)

[5] J BALL and F MURAT *Remarks on Chacon's bitting lemma,* Proc Amer Math Soc., 107 (1989).

[6] J. BALL and ZHANG *Lower semicontinuity of multiple integrals and the bitting lemma,* Proc Roy Soc Edimburgh., 114 A, 367-379 (1990)

[7] B BEAUZAMY **Introduction to Banach spaces and their geometry.** North-Holland (1982).

[8] N BOURBAKI **Intégration.**

[9] H BREZIS **Analyse fonctionnelle** (Masson, 1994).

[10] J BROOKS and R CHACON *Continuity and compactness of measures,* Adv. in Math, 37, 16-26 (1980)

[11] C CESARI **Optmization. Theory and applications** (Springer, 19).

[12] R. COIFMAN, P L. LIONS, Y. MEYER and S SEMMES *Compensated compactness and Hardy spaces,* J Math Pures et Appl, 72, 247-286 (1993).

[13] R. DI PERNA and P. L. LIONS *On the Cauchy problem for Boltzmann equation : global existence and weak stability,* Ann Math, 130, 321-366 (1989).

[14] R. DI PERNA and A. MAJDA *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations,* Comm Math Phys, 108, 667-689 (1987)

[15] R. DI PERNA and A MAJDA *Reduced Haussdorf dimension and concentration-cancellation for two-dimensional incompressible flow,* J AMS, 1, 59-95 (1988)

[16] J DIESTEL, W. M RUESS and W SCHACHERMAYER *On weak compactness in* $L^1(\mu, X)$, Proc. Amer Math. Soc, 118, 447-453 (1993)

[17] R. E EDWARDS **Functional analysis, theory and applications** (Holt, Rinehart and Winston, 1965).

[18] L. C. EVANS **Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations,** CBMS 74 (1990).

[19] P. GÉRARD *solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann,* Séminaire Bourbaki n 699 (1988).

[20] P GÉRARD *Compacité par compensation et régularité 2-microlocale,* Séminaire edp Ecole Polytechnique (1988).

[21] K. HAMDACHE *Homogénéisations d'équations de transport cinétiques à coefficients oscillants,* Notes de cours, Université Bordeaux I, 1995

[22] K. Hamdache *Oscillations et concentrations*, Notes de groupe de travail , Bordeaux 1995.

[23] D. Kinderlehrer and P Pedregal *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*, SIAM Math. Anal., 23, 1, 1-19 (1992).

[24] P. L. Lions *Compactness in Boltzmann equation via Fourier integral operators and applications*, Part I, II J. Math Kyoto Univ., 34, 2, (39) 1-461 (1994), Part III J. Math Kyoto Univ., 34, 3, 539-584 (1994).

[25] P Lin *Maximization of entropy for an elastic body free of surface traction*, Arch. Rat. Mech. Anal., 112, 161-191 (1990)

[26] P. Malliavin **Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale** (Masson, 1982)

[27] L Tartar *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in **Non linear analysis and Mechanics, Heriott-Watt Symposium**, Vol IV, Research Notes in Math , pp. 136-192 (Pitman, 1979).

[28] L Tartar *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws.* in **Systems of non linear partial differential equations**, J. M. Ball Eds., NATO ASI Series, Vol C111, pp. 263-285 (Reidel, 1984)