# $v \in C^0$, $\epsilon \neq 0$

Cécile Della Valle

25 février 2019

## 1 Existence de solution pour le problème direct

Supposons $v$ une fonction connue, négative strictement (ce qui correspond pqr exemple au cas dans Lifschitz-Slyozov où $0 < b - \mathrm{M}$ ), et supposons $\epsilon > 0$.

On suppose que $v$ est bornée, de classe $C^1$ et sa dérivée est également bornée. On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{1}$$

Puisque $v < 0$, pour faciliter la lecture, on pose $b(t) = -v(t) > 0$. De plus on pose $y = (u, m)$ avec $u$ solution de (1) et $u(0) = m$.

On définie $\tilde{y} = (w, \mu)$ tel que $(w, \mu) = (\dfrac{u}{\sqrt{b(t)}}, \dfrac{u(0)}{\sqrt{b(t)}}) = \dfrac{1}{\sqrt{b(t)}} y$.

Calculons la dynamique vérifiée par $w$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{u}{\sqrt{b(t)}} &= \frac{1}{\sqrt{b(t)}}\partial_t u - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\frac{u}{\sqrt{b(t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b(t)}}(b(t)\partial_x u + \epsilon\partial_{xx} u) - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\frac{u}{\sqrt{b}} \\ &= b(t)\partial_x w + \epsilon \partial_{xx} w - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} w \end{aligned}$$

Calculons la dynamique vérifiée par $\mu$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{m}{\sqrt{b(t)}} &= \frac{1}{\sqrt{b(t)}}\partial_t m - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\frac{m}{\sqrt{b(t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b(t)}} b(t)\partial_x u(0) - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\frac{m}{\sqrt{b(t)}} \\ &= b(t)\partial_x w(0) - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu \end{aligned}$$

On cherche donc la solution $\tilde{y}$ du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - b(t)\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} = -\dfrac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\tilde{y} & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ \tilde{y}(x,0) = \dfrac{y_0}{\sqrt{b(0)}}(x) & \forall x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t}|_{x=0} - b(t)\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial x}|_{x=0} = -\dfrac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\tilde{y}(0) & \forall t \in [0,\tau] \\ \tilde{y}(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{2}$$

On montrera par la suite que si $\tilde{y} \in \mathscr{W}$ est solution de (2) alors $y = \sqrt{b(t)}\tilde{y}$ est solution de (1) dans $\mathscr{Y}$. Pour la suite, on notera seulement $y$ la solution de (2). On définit alors l'ensemble :

$$W = \left\{ y \mid y = (w, \mu) \in H^1_R([0,L]) \times \mathbb{R},\ w(0) = \mu, \right\}$$

Et

$$\mathscr{Y} = L^2(0,L) \times \mathbb{R}$$

avec la norme associée :

$$\|y\|^2_{\mathscr{Y}} = \int_0^L w^2 + \epsilon\mu^2$$

On cherche à définir l'opérateur $A(t)$ tel que :

$$\forall y \in D(A(t)) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t)\partial_x w + \epsilon\partial_{xx} w - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} w \\ b(t)\partial_x w(0) - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu \end{pmatrix}$$

Soit $a_t$ une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A),\ a(t, y_1, y_2) \equiv -\langle A(t) y_1, y_2 \rangle_{\mathscr{Y}}$$

Il vient donc pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle b(t)\partial_x w_1 + \epsilon\partial_{xx} w_1, w_2\rangle + \epsilon\langle b(t)\partial_x w_1(0) - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu_1, \mu_2\rangle \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x w_1) w_2 + \int_0^L \epsilon(\partial_{xx} w_1) w_2 - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} \int_0^L w_1 w_2 \\
&\quad + \epsilon b(t)\partial_x w_1(0)\mu_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu_1\mu_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x w_1) w_2 + [\epsilon(\partial_x w_1) w_2]_0^L - \epsilon\int_0^L \partial_x w_1 \partial_x w_2 - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} \int_0^L w_1 w_2 \\
&\quad + \epsilon b(t)\partial_x w_1(0)\mu_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu_1\mu_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x w_1) w_2 - \epsilon\partial_x w_1(0)\mu_2 - \epsilon\int_0^L \partial_x w_1 \partial_x w_2 - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} \int_0^L w_1 w_2 \\
&\quad + \epsilon b(t)\partial_x w_1(0)\mu_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu_1\mu_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x w_1) w_2 - \epsilon\int_0^L \partial_x w_1 \partial_x w_2 - \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} \int_0^L w_1 w_2 \\
&\quad + \epsilon(b(t)-1)\partial_x w_1(0)\mu_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu_1\mu_2
\end{aligned}$$

**Lemme 1.1**

*Soit $b \in C^1([0,\tau])$, tel que $\dot{(b)} > 0$. On définit la famille, $a(t,\cdot,\cdot) : D(A(t)) \times D(A(t)) \to \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A(t)) \times D(A(t))$$

$$\begin{aligned}
a(t, y_1, y_2) = \epsilon\int_0^L \partial_x w_1 \partial_x w_2 + \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} \int_0^L w_1 w_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x w_1) w_2 \\
- \epsilon(b(t)-1)\partial_x w_1(0)\mu_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu_1\mu_2
\end{aligned} \tag{3}$$

*Alors, pour tout $t > 0$, la forme bilinéaire $a(t,\cdot,\cdot)$ est $W$-$\mathscr{Y}$ coercive sur $D(A(t)$ ( ?)*

$\triangleright$ Soient $y = (w, \mu)$ dans $D(A(t)) \subset \mathscr{Y}$, et $\lambda > 0$, calculons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle A(t)y, y\rangle_W + \lambda\|y\|_{\mathscr{Y}} \geq\ & \langle A(t)y, y\rangle_{\mathscr{Y}} + \lambda\|y\|_{\mathscr{Y}} \\
&= \epsilon \int_0^L (\partial_x w)^2 + \frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} \int_0^L w^2 - \int_0^L b(t)(\partial_x w)w \\
&\ - \epsilon(b(t) - 1)\partial_x w(0)\mu + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)}\mu^2 \\
&\ + \lambda \int_0^L w^2 + \lambda\epsilon\mu^2 \\
&= \epsilon \int_0^L (\partial_x w)^2 + (\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} + \lambda) \int_0^L w^2 - b(t)\frac{1}{2}[w^2]_0^L - \epsilon(b(t) - 1)\partial_x w(0)\mu + \epsilon(\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} + \lambda)\mu^2 \\
&= \epsilon \int_0^L (\partial_x w)^2 + (\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} + \lambda) \int_0^L w^2 + b(t)\frac{1}{2}\mu^2 - \epsilon(b(t) - 1)\partial_x w(0)\mu + \epsilon(\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} + \lambda)\mu^2 \\
&= \epsilon \int_0^L (\partial_x w)^2 + (\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} + \lambda) \int_0^L w^2 - \epsilon(b(t) - 1)\partial_x w(0)\mu + (b(t) + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{2b(t)} + \epsilon\lambda)\mu^2
\end{aligned}$$

$\square$

## Références