

# To be determined

Cécile Della Valle

18 février 2019

## 1 Introduction

Soit  $\tau > 0$ , soit  $v$  une fonction continue,  $v \in C^0([0, \tau])$  strictement négative. On souhaite démontrer l'existence d'une solution dans  $C^0([0, \tau], \mathcal{Y})$  du problème de Cauchy par la théorie des semi-groupes :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0, \tau] \\ y(L, t) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (1)$$

Dans une première partie, on s'intéresse aux cas particuliers ( $v$  est une fonction constante négative, et  $\epsilon$  est nul), pour progressivement revenir sur ces hypothèses.

On s'intéresse ensuite au problème d'observabilité lié à la mesure d'un moment d'ordre  $n$  d'une solution  $y$  :

$$C_n : \begin{cases} \mathcal{Y} & \rightarrow \mathcal{Z} \\ y_0 & \mapsto t \rightarrow \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \end{cases} \quad (2)$$

Par la suite on supposera  $n$  fixé et on notera simplement  $C$  l'observateur.

Dans une deuxième partie, on cherche démontrer l'existence et l'unicité de solutions de l'équation de Riccati associée à l'observateur  $C$  de moments de la solution. Ce problème mal posé sera régularisé par une méthode de Tikhonov.

Enfin la dernière partie portera sur l'étude de la résolution numérique du filtre de Kalman.

## 2 Existence de solution pour le problème direct

### 2.1. $v = \text{cste}$ , $\epsilon = 0$

On suppose dans un premier temps que  $v$  est une constante, et on suppose, sans perte de généralité, que cette constante est négative  $v < 0$ . De plus on suppose que la constante  $\epsilon$  est nulle.

L'équation (1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ y(L, t) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (3)$$

Soit  $\mathcal{Y} = L^2([0, L])$  l'espace de Banach et l'opérateur  $A$  sur  $D(A)$  tel que :

$$\forall y \in D(A), \quad Ay = -v \partial_x y \quad (4)$$

$$D(A) = \{y \mid \partial_x y \in L^2([0, L]), y(L) = 0\} = H_R^1([0, L])$$

#### Proposition 2.1

L'opérateur  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$  défini par (4) est générateur d'un semi-groupe  $C_0$  de contraction dans  $\mathcal{Y}$ .

▷ On souhaite appliquer le théorème de Lumer-Phillips, il nous faut donc démontrer que  $A$  possède les trois propriétés suivantes :

- (i)  $A$  est un opérateur fermé et  $\overline{D(A)} = \mathcal{Y}$  ;
- (ii)  $A$  est dissipatif ;
- (iii) il existe  $\lambda_0$  tel que  $\lambda_0 - A : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$  est surjectif.

(i)

L'opérateur  $A$  est défini sur l'ensemble  $D(A)$  des fonctions de  $H^1$  sur  $[0, L]$  qui s'annulent en  $L$ . Sur cet ensemble, l'opérateur dérivation est fermée, densément défini. (REF ??)

(ii)

Montrons que  $A$  est dissipatif. Soit  $y \in D(A) \subset \mathcal{Y}$ , calculons la quantité :

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle_{\mathcal{Y}} &= \langle v \partial_x y, y \rangle_{\mathcal{Y}} \\ &= v \int_0^L y(z) \partial_x y(z) dz \\ &= v [y(z)^2]_{z=0}^L - v \int_0^L y(z) \partial_x y(z) dz \end{aligned}$$

Soit :

$$\langle Ay, y \rangle_{\mathcal{Y}} = -\frac{1}{2} v y(0)^2 \leq 0$$

Donc  $\forall y \in \mathcal{Y}, \langle Ay, y \rangle_{\mathcal{Y}} \leq 0$ .

(iii)

Soit  $y_1 \in \mathcal{Y}$  et  $\lambda > 0$ .

On cherche une solution  $y$  tel que  $(\lambda - A)y = y_1$ .

Alors on a de façon équivalente que  $y$  est solution de :

$$\begin{cases} \lambda y - v y' = y_1 \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

donc, pour tout  $y_1 \in \mathcal{Y}$ , cette équation possède une unique solution donnée par la formule de Duhamel :

$$y(x) = \int_x^L e^{\lambda/v(x-x')} y_1(x') dx'$$

(On peut par ailleurs vérifier que  $\|y\|_{\mathcal{Y}} \leq 1/\lambda \|y_1\|_{\mathcal{Y}}$ ).

Donc d'après (i), (ii) et (iii), on peut appliquer le théorème de Lumer-Phillips, et  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-group  $C_0$ . On a donc l'existence d'une solution de (3) dans  $C^0([0, \tau], L^2([0, L]))$ .  $\square$

Dans ce cas simple, on peut donner une formule explicite de l'opérateur de semi-group  $C_0$  :

### Lemme 2.2

Pour tout  $t \in [0, \tau]$ , le semi-groupe  $C_0$  généré par  $A$  l'opérateur infinitésimal associé à l'équation (3) est la translation :

$$\forall y \in D(A(t)), \quad S(s)y = y(x - vs)\chi_{0 \leq x - vs \leq L}$$

### Théorème 2.3 (Existence et unicité)

Soit soit  $\tau > 0$  et  $v < 0$ , soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach, et le de générateur infinitésimal du semi-groupe  $C_0$  sur  $\mathcal{Y}$  défini par (4). Alors le problème de Cauchy (3) a une unique solution dans  $C^0([0, \tau], \mathcal{Y})$  qui s'écrit :

$$\forall s \in [0, \tau] \quad y(s) = S(s)y_0$$

où  $S$  est le semi-groupe d'évolution donné par lemme 2.2.

## 2.2. $v \in C^0$ , $\epsilon = 0$

On suppose cette fois que  $v \in C^0$  est une fonction donnée, et de plus que  $v$  ne s'annule pas. Sans perdre de généralité on suppose que  $\forall t \in [0, \tau]$  on a  $v(t) < 0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ y(L, 0) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (5)$$

Soit  $\mathcal{Y} = L^2([0, \infty))$  l'espace de Banach et l'opérateur d'évolution  $A(t)$  définit sur  $D(A(t))$  tel que :

$$\forall y \in D(A(t)), \quad A(t)y = -v(t)\partial_x y \quad (6)$$

Avec

$$\forall t \in [0, \tau], \quad D(A(t)) = \{y \mid \partial_x y \in L^2([0, L]), y(L) = 0\} = H_R^1$$

### Proposition 2.4

Soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach, pour  $t > 0$ , l'opérateur  $A(t)$  est le générateur infinitésimal de semi-groupe  $C_0$ , noté  $S_t$ .

▷ Pour  $t > 0$  fixé, on est ramené au cas de la proposition 2.1.  $\square$

### Proposition 2.5

Soit soit  $\tau > 0$ , soit  $v \in C^0([0, \tau])$  telle que  $\forall t \in [0, \tau]$  on a  $v(t) < 0$ . Soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach, la famille  $(A(t))_{t \in [0, \tau]}$  définie par (6) de générateurs infinitésimaux de semi-groupes  $C_0$  sur  $\mathcal{Y}$  est stable.

▷ Rappelons les conditions nécessaires pour que  $(A(t))_{t \in [0, \tau]}$  soit une famille stable : il existe  $M > 1$  et  $\omega > 0$  tels que pour tout  $t \in [0, \tau]$

$$\begin{cases} (i) \quad ]\omega; +\infty[ \subset \rho(A(t)) \\ (ii) \quad \left\| \prod_{j=1}^k R(\lambda : A(t_j)) \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k} \quad \forall t_0 < \dots < t_j < \dots < t_k \end{cases}$$

La condition (i) est immédiatement vérifiée. En effet, puisque pour tout  $t > 0$  chaque générateur infinitésimal  $A(t)$  vérifie  $\mathbb{R}^{+*} \subset \rho(A(t))$  (en particulier, dans notre cas puisque pour tout  $t > 0$ , pour tout  $\lambda > 0$ , on a que  $\lambda - A$  est un opérateur surjectif, donc  $\mathbb{R} \subset \rho(A(t))$ ).

Pour la condition (ii) calculons explicitement la norme d'un opérateur  $R(\lambda : A(t_j))$  :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A(t_j))y_1\|^2 &= \int_0^L \left| \int_x^L e^{\lambda/v(t_j)(x-x')} y_1(x') dx' \right|^2 dx \\
&\leq \int_0^L \left( \int_x^L e^{2\lambda/v(t_j)(x-x')} dx' \right) \left( \int_x^L y_1(x')^2 dx' \right) dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \int_0^L \left( \int_x^L e^{2\lambda/v(t_j)(x-x')} dx' \right) dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \int_0^L \frac{-v(t_j)}{2\lambda} [e^{2\lambda/v(t_j)(x-x')}]_x^L dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \frac{-v(t_j)}{2\lambda} \int_0^L (e^{2\lambda/v(t_j)(x-L)} - e^{2\lambda/v(t_j)x}) dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \left| \frac{v(t_j)}{2\lambda} \right|^2 (2e^{2\lambda/v(t_j)L} - 1)
\end{aligned}$$

Sachant que  $v$  est une fonction continue donnée, on pose  $V = \|v\|_\infty$  et on choisit les constantes de stabilité :

$$\begin{cases} M = 1 \\ \omega = \frac{2}{V} e^{-\lambda/v(t_j)L} \end{cases} \quad (7)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A(t_j))\| &\leq \frac{V}{2\lambda} e^{\lambda/v(t_j)L} \\
&\leq \frac{V e^{\lambda/v(t_j)L} \omega}{2\lambda \omega} \\
&\leq M \frac{1}{|\lambda - \omega|}
\end{aligned}$$

Donc pour tout  $j > 0$  on a l'inégalité :

$$\|R(\lambda : A(t_j))\|^2 \leq M \frac{1}{|\lambda - \omega|} \quad (8)$$

Ce qui donne l'inégalité (ii). □

### Proposition 2.6

Soit soit  $\tau > 0$ , soit  $v \in C^0([0, \tau])$  telle que  $\forall t \in [0, \tau]$  on a  $v(t) < 0$ . Soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach, la famille  $(A(t))_{t \in [0, \tau]}$  définie par (6) de générateurs infinitésimaux de semi-groupes  $C_0$  sur  $\mathcal{Y}$ . Il existe une unique solution  $U(t, s)$ ,  $0 \leq s \leq t \leq \tau$ , qui satisfait :

- $\|U(t, s)\| \leq M e^{\omega(t-s)}$  pour tout  $0 \leq s \leq t \leq \tau$  ;
- $\partial_t^+ U(t, s)v|_{t=s} = A(sv)$  pour  $v \in \mathcal{Y}$ ,  $0 \leq s \leq \tau$  ;
- $\partial_s U(t, s)v = -U(t, s)A(s)v$  pour  $v \in \mathcal{Y}$ ,  $0 \leq s \leq t \leq \tau$ .

▷ On souhaite appliquer le théorème du chap.5 de Pazy. On rappelle les hypothèses que doit vérifier la famille  $(A(t))_{t \in [0, \tau]}$  pour appliquer le théorème 3.1 page 135 livre de Pazy [1].

- (i)  $(A(t))$  est une famille d'opérateurs stables pour les constantes  $M$  et  $\omega$  ;
- (ii)  $\mathcal{H}$  est  $A(t)$ -admissible pour  $t \in [0, \tau]$  et la famille  $(\tilde{A}(t))$  de  $A(t)$  dans  $\mathcal{H}$  est une famille stable de  $\mathcal{H}$  pour les constantes  $\tilde{M}$  et  $\tilde{\omega}$  ;
- (iii) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $\mathcal{H} \subset D(A(t))$ ,  $A(t)$  est un opérateur borné de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{Y}$  et  $t \rightarrow A(t)$  est continue pour la norme des opérateurs bornés  $\|\cdot\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Y}}$ .

La condition (i) a été démontrée par la proposition 2.5.

Démontrons maintenant la condition (ii). On pose :

$$\mathcal{H} = \{y \mid y \in H^1([0, L]), y(L) = 0\}$$

et la norme associée à cet espace  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  est définie de la façon suivante :

$$\forall y \in \mathcal{H}, \|y\|_{\mathcal{H}} = \|y\|_{\mathcal{Y}} + \|y'\|_{\mathcal{Y}}$$

Et de plus on définit la norme des applications bornées de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{Y}$  :

$$\forall A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{Y}), \|A\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Y}} = \sup_{y \in \mathcal{H}} \frac{\|Ay\|_{\mathcal{H}}}{\|y\|_{\mathcal{H}}}$$

Alors  $\mathcal{H}$  est fermé dans  $\mathcal{Y}$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ . On a de plus une formule explicite pour tout  $t \in [0, \tau]$  :

**Lemme 2.7**

Pour tout  $t \in [0, \tau]$ , le semi-groupe  $C_0$  généré par  $(A(t) = -v(t)\partial_x)_{t \in [0, \tau]}$  avec  $v \in C^0([0, \tau])$  est la translation :

$$\forall y \in D(A(t)), U_t(s)y = y(x - v(t)s)\chi_{0 \leq x - v(t)s \leq L}$$

Donc  $\mathcal{H}$  sous-espace de  $\mathcal{Y}$  est  $A(t)$ -admissible puisque  $\mathcal{H}$  est un espace invariant par la translation  $U_t$  et la restriction de  $U_t$  à  $\mathcal{H}$  est un semi-groupe  $C^0$  de  $\mathcal{H}$ .

Enfin, chaque opérateur  $A(t)$  est borné sur  $\mathcal{H}$  ce qui achève la démonstration puisque (iii) est également vérifiée.  $\square$

**Théorème 2.8**

Soit  $\tau > 0$ , soit  $v \in C^0([0, \tau])$  telle que  $\forall t \in [0, \tau]$  on a  $v(t) < 0$ . Soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach, la famille  $(A(t))_{t \in [0, \tau]}$  définie par (6) de générateurs infinitésimaux de semi-groupes  $C_0$  sur  $\mathcal{Y}$ . Alors le problème de Cauchy (5) a une unique solution dans  $C^0([0, \tau], \mathcal{Y})$  qui s'écrit :

$$\forall t \in [0, \tau] \quad y(t) = U(t, 0)y_0$$

où  $U$  est le semi-groupe d'évolution donné par 2.6.

### 2.3. $v = \text{cste}, \epsilon \neq 0$

Supposons  $v = \text{cste}$  et  $v < 0$ , supposons  $\epsilon > 0$ . On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0, \tau] \\ y(L, t) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (9)$$

Puisque  $v < 0$ , pour faciliter la lecture, on pose  $b = -v > 0$ .

On remarque que la principale difficulté par rapport à ce qui a été développé précédemment est la condition au bord en  $x = 0$ . Pour gérer cette condition, on introduit l'espace :

$$\mathcal{Y} = \{y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R}, u(0) = m, u(L) = 0\}$$

Avec la norme associée

$$\|y\|_{\mathcal{Y}}^2 = \int_0^L u^2 + \frac{\epsilon}{b} m^2$$

On cherche à définir l'opérateur  $A$  tel que :

$$\forall y \in D(A) \subset \mathcal{Y}, \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\partial_x u + \epsilon\partial_{xx} u \\ b\partial_x u(0) \end{pmatrix}$$

Soit  $a$  une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A), a(y_1, y_2) \equiv -\langle Ay_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}}$$

Il vient donc pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$  :

$$\begin{aligned}
\langle Ay_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} &= \langle b\partial_x u_1 + \epsilon \partial_{xx} u_1, u_2 \rangle + \frac{\epsilon}{b} \langle b\partial_x u_1(0), m_2 \rangle \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 + \int_0^L \epsilon(\partial_{xx} u_1)u_2 + \frac{\epsilon}{b} b\partial_x u_1(0)m_2 \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 + [\epsilon(\partial_x u_1)u_2]_0^L - \int_0^L \partial_x u_1 \partial_x u_2 + \epsilon \partial_x u_1(0)m_2 \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon m_2 \partial_x u_1(0) - \int_0^L \epsilon \partial_x u_1 \partial_x u_2 + \epsilon \partial_x u_1(0)m_2 \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon \partial_x u_1 \partial_x u_2
\end{aligned}$$

**Proposition 2.9**

L'opérateur  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$  défini par :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A), \langle Ay_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon \partial_x u_1 \partial_x u_2 \quad (10)$$

est générateur d'un semi-groupe  $C_0$  de contraction dans  $\mathcal{Y}$ .

▷ On souhaite appliquer le théorème de Lumer-Philipps, on reprend les étapes de la preuve de la propriété 2.1.

(i) L'opérateur  $A$  est défini sur l'ensemble  $D(A)$  des fonctions  $H^1[0, L] \cap \mathcal{Y}$ .

(ii) Montrons que  $A$  est dissipatif. Soit  $y \in \mathcal{Y}$ , calculons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle Ay, y \rangle_{\mathcal{Y}} &= \int_0^L b(\partial_x u)u - \epsilon \int_0^L (\partial_x u)^2 \\
&= \int_0^L \frac{b}{2} \partial_x u^2 - \epsilon \int_0^L (\partial_x u)^2 \\
&= \frac{b}{2} [u^2]_0^L - \epsilon \int_0^L (\partial_x u)^2 \\
&= -\frac{b}{2} u(0)^2 - \int_0^L \epsilon (\partial_x u)^2
\end{aligned}$$

Soit :

$$\langle Ay, y \rangle_{\mathcal{Y}} = -\frac{b}{2} m^2 - \epsilon \int_0^L (\partial_x u)^2$$

Donc  $\forall y \in \mathcal{Y}, \langle Ay, y \rangle_{\mathcal{Y}} \leq 0$ .

(iii)

Soit  $y_1 = (u_1, m_1) \in \mathcal{Y}$  et  $\lambda > 0$ .

On cherche une solution  $y$  tel que  $(\lambda - A)y = y_1$ .

Alors pour tout  $y_2 = (u_2, m_2)$ ,  $y$  est solution de :

$$\langle \lambda y - Ay, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} \quad (11)$$

Soit :

$$\lambda \left( \int_0^L uu_2 + \frac{\epsilon}{b} mm_2 \right) - \int_0^L b(\partial_x u)u_2 + \int_0^L \epsilon \partial_x u \partial_x u_2 = \int_0^L u_1 u_2 + \frac{\epsilon}{b} m_1 m_2$$

On choisit  $u_2 \in H_0^1([0, L])$ , donc  $m_2 = 0$ , et on cherche  $u$  solution du problème variationnel :

$$\forall u_2 \in H_0^1([0, L]), \lambda \int_0^L uu_2 - \int_0^L b(\partial_x u)u_2 + \int_0^L \epsilon \partial_x u \partial_x u_2 = \int_0^L u_1 u_2$$

On montre que

$$\tilde{a}(u, u_2) = \lambda \int_0^L u u_2 - \int_0^L b(\partial_x u) u_2 + \int_0^L \epsilon \partial_x u \partial_x u_2$$

est bilinéaire, continue, coercive sur  $H_0^1$ . Et  $L(u_2) = \int_0^L u_1 u_2$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1$ . Donc d'après le théorème de Lax-Milgram il existe une unique fonction  $u_0$  de  $H_0^1(0, L)$  solution.

Alors pour  $m_2 \neq 0$ , il vient par ailleurs :

$$\lambda \frac{\epsilon}{b} m m_2 = \frac{\epsilon}{b} m_1 m_2$$

Ce qui définit un unique  $m$  pour  $\lambda \neq 0$ .

On pose alors  $y = (u_0 + m_1/\lambda, m_1/\lambda)$  qui nous donne l'unique élément de  $\mathcal{Y}$  tel que (11) soit vérifiée. donc, pour tout  $y_1 \in \mathcal{Y}$ , cette équation possède une unique solution

Donc d'après (i), (ii) et (iii), on peut appliquer le théorème de Lumer-Phillips, et  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$ . On a donc l'existence d'une solution de (9) dans  $L^2([0, +\infty) \times [0, \tau])$ .  $\square$

**Remarque 2.10.** Le caractère dissipatif peut être démontré par une égalité d'énergie. En effet, on multiplie par  $y$  la solution forte de l'équation (1) et on intègre entre 0 et  $L$ , et il vient :

$$\int_0^L y \partial_t y + \int_0^L -b y \partial_x y + \int_0^L -\epsilon \partial_{xx} y = 0 \quad (12)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^L -b y \partial_x y &= \frac{-b}{2} \int_0^L \partial_x y^2 \\ &= \frac{b}{2} y(0, \cdot)^2 \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \int_0^L -\epsilon \partial_{xx} y &= -\epsilon [y \partial_x y]_0^L + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \\ &= +\epsilon y(0, \cdot) \partial_x y|_{x=0} + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \\ &= (\epsilon/b) y(0, \cdot) \partial_t y|_{x=0} + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \\ &= (\epsilon/2b) \frac{d}{dt} y(0, \cdot)^2 + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \end{aligned}$$

Alors l'équation (12) devient :

$$\int_0^L \frac{1}{2} \partial_t y^2 + \frac{b}{2} y(0, \cdot)^2 + (\epsilon/2b) \frac{d}{dt} y(0, \cdot)^2 + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 = 0$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^L y^2 + (\epsilon/b) y(0, \cdot)^2 \right] = -2\epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 - b y(0, \cdot)^2 \quad (13)$$

On constate donc que la solution  $y$  de (9) est également solution d'une équation de dissipation d'énergie.

### **Théorème 2.11 (Existence et unicité)**

Soit soit  $\tau > 0$  et  $v < 0$ , soit  $\mathcal{Y}$  un espace de Banach, et le de générateur infinitésimal du semi-groupe  $C_0$  sur  $\mathcal{Y}$  défini par (10). Alors le problème de Cauchy (9) a une unique solution dans  $C^0([0, \tau], \mathcal{Y})$  qui s'écrit :

$$\forall s \in [0, \tau] \quad y(s) = S(s) y_0$$

où  $S$  est le semi-groupe d'évolution donné par 2.2.

## 2.4. $v \in C^0$ , $\epsilon \neq 0$

Supposons  $v$  une fonction connue, négative strictement (ce qui correspond pqr exemple au cas dans Lifschitz-Slyozov où  $0 < b - M$ ), et supposons  $\epsilon > 0$ .

On suppose que  $v$  est bornée, et pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $b \leq |v(t)| \leq v_\infty$ . On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0, \tau] \\ y(L, t) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (14)$$

Puisque  $v < 0$ , pour faciliter la lecture, on pose  $b(t) = -v(t) > 0$ .

Par analogie avec ce qui a été fait dans la section précédente, on pose :

$$\mathcal{Y} = \{y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R}, u(0) = m, u(L) = 0\}$$

Avec la norme associée (on rappelle que  $\forall t > 0$ ,  $b \leq |v(t)|$ ) :

$$\|y\|_{\mathcal{Y}}^2 = \int_0^L u^2 + \frac{\epsilon}{b} m^2$$

On cherche à définir l'opérateur  $A(t)$  tel que :

$$\forall y \in D(A(t)) \subset \mathcal{Y}, \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t) \partial_x u + \epsilon \partial_{xx} u \\ b(t) \partial_x u(0) \end{pmatrix}$$

Soit  $a_t$  une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A), \quad a(t, y_1, y_2) \equiv -\langle A(t)y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}}$$

Il vient donc pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$  :

$$\begin{aligned} \langle A(t)y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} &= \langle b(t) \partial_x u_1 + \epsilon \partial_{xx} u_1, u_2 \rangle + \frac{\epsilon}{b} \langle b(t) \partial_x u_1(0), m_2 \rangle \\ &= \int_0^L b(t) (\partial_x u_1) u_2 + \int_0^L \epsilon (\partial_{xx} u_1) u_2 + \frac{\epsilon}{b} b(t) \partial_x u_1(0) m_2 \\ &= \int_0^L b(t) (\partial_x u_1) u_2 + [\epsilon (\partial_x u_1) u_2]_0^L - \int_0^L \partial_x u_1 \partial_x u_2 + \frac{\epsilon}{b} b(t) \partial_x u_1(0) m_2 \\ &= \int_0^L b(t) (\partial_x u_1) u_2 - \int_0^L \epsilon \partial_x u_1 \partial_x u_2 + \epsilon \left( \frac{b(t)}{b} - 1 \right) \partial_x u_1(0) m_2 \end{aligned}$$

### Lemme 2.12

On définit la famille  $a(t, \cdot, \cdot) : D(A(t)) \times D(A(t)) \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A(t)) \times D(A(t))$$

$$a(t, y_1, y_2) = \int_0^L \epsilon \partial_x u_1 \partial_x u_2 - \int_0^L b(t) (\partial_x u_1) u_2 + \epsilon \left( 1 - \frac{b(t)}{b} \right) \partial_x u_1(0) m_2 \quad (15)$$

Alors, pour tout  $t > 0$ , la forme bilinéaire  $a(t, \cdot, \cdot)$  est coercive sur  $D(A(t))$ .

▷ Soient  $y = (u, m)$  dans  $D(A(t)) \subset \mathcal{Y}$ , calculons la quantité :

$$\begin{aligned} a(t, y, y) &= \int_0^L \epsilon (\partial_x u)^2 - \int_0^L b(t) (\partial_x u) u + \epsilon \left( 1 - \frac{b(t)}{b} \right) \partial_x u(0) m \\ &= \int_0^L \epsilon (\partial_x u)^2 - \int_0^L b(t) \frac{1}{2} (\partial_x u^2) + \epsilon \left( 1 - \frac{b(t)}{b} \right) \partial_x u(0) m \\ &= \int_0^L \epsilon (\partial_x u)^2 - b(t) \frac{1}{2} [u^2]_0^L + \epsilon \left( 1 - \frac{b(t)}{b} \right) \partial_x u(0) m \\ &= \int_0^L \epsilon (\partial_x u)^2 + b(t) \frac{1}{2} m^2 + \epsilon \left( 1 - \frac{b(t)}{b} \right) \partial_x u(0) m \end{aligned}$$



QUEL EST LE SIGNE DE  $\partial_x u(0)$  ? pour obtenir :

$$|a(t, y, y)| \geq \int_0^L \epsilon (\partial_x u)^2 + b \frac{1}{2} m^2$$

□

**Proposition 2.13**

*La famille d'opérateurs définie par :*

$$\langle A(t)y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon \partial_x u_1 \partial_x u_2 + \epsilon \left( \frac{b(t)}{b} - 1 \right) \partial_x u_1(0) m_2 \quad (16)$$

*est une famille de générateurs infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  de contraction dans  $\mathcal{Y}$ .*

### 3 Existence Riccati et estimateur de Kalman

#### 3.1. $v = \text{cste}$ , $\epsilon \neq 0$

Approche variationnelle, on souhaite minimiser la fonctionnelle :

$$\min_{\xi} J(\xi, t) = \frac{\alpha}{2} \|\xi\|_{\mathcal{Y}} + \frac{\gamma}{2} \int_0^t (\|z(s) - C(s)y_{|\xi}\|_{\mathcal{Z}}) ds \quad (17)$$

On définit l'observateur de Kalman sur pour tout temps sur l'intervalle d'observation  $[0, \tau]$  comme l'optimum de la fonctionnelle (17).

$$\forall t > 0, t \in (0, \tau], \hat{y}(t) = \bar{y}_{|t}(t)$$

On cherche l'équation vérifiée par  $\hat{y}$  et  $P$  et  $\bar{q}_{|t}$  tel que  $\hat{y}$  soit l'estimateur associé au modèle et aux mesures et qu'on ait la relation pour  $0 < s < t$ ,  $\hat{y}(s) + P(s)\bar{q}_{|t} = \bar{y}_{|t}(s)$

Soit  $q$  l'adjoint au Lagrangien (qui vérifie la condition d'optimalité du point selle) :

$$\mathcal{L}(y, q) = J(\xi, t) + \int_0^t \langle \dot{y} - Ay, q \rangle_{\mathcal{Y}}$$

Alors au point optimal  $q$ , pour tout  $\delta y$  de  $\mathcal{Y}$  :

$$\begin{aligned} \langle \partial_y \mathcal{L}, \delta y \rangle_{\mathcal{Y}} &= 0 \\ &= \int_0^t \langle z(s) - Cy(s), C\delta y(s) \rangle_{\mathcal{Z}} ds - \int_0^t \langle \dot{q}(s), \delta y(s) \rangle_{\mathcal{Y}} ds - \int_0^t \langle A\delta y(s), q(s) \rangle_{\mathcal{Y}} ds \\ &= \int_0^t \langle C^*(z(s) - Cy(s)) - \dot{q}(s) - A^*q(s), \delta y(s) \rangle_{\mathcal{Y}} ds \end{aligned}$$

Soit l'équation adjointe associée au Lagrangien pour la fonctionnelle  $J(\xi, t)$  :

$$\begin{cases} \dot{q}_{\xi, t} + A^*q_{\xi, t} = -C^*(z - Cy_{\xi}) \\ q_{\xi, t}(t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

**Remarque 3.1.** Le changement de produit vectoriel, de norme, n'induit pas de différence dans l'équation vérifiée par l'adjoint au sens du multiplicateur de Lagrange. De même, l'équation de Riccati n'est pas modifiée.

#### Dynamique

$$\begin{cases} \frac{d\hat{y}}{dt} = A\hat{y}(t) + P(t)C^*(z(t) - C(t)\hat{y}(t)) \\ y(0) = y_{\diamond} \end{cases} \quad (19)$$

#### Riccati

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(t)A^* + AP(t) - P(t)C^*CP(t) \\ P(0) = P_{\diamond} \end{cases} \quad (20)$$

On cherche une expression explicite pour l'adjoint de l'opérateur  $A$  sur  $\mathcal{Y}$  tel que :

$$\begin{cases} D(A) = \{y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R}, u(0) = m, u(L) = 0\} \\ \forall y \in D(A^*), \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\partial_x u + \epsilon\partial_{xx} u \\ b\partial_x u(0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

Donc pour tout  $y_1$  et  $y_2$  de  $D(A)$  on calcule la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
\langle Ay_1, y_2 \rangle_{\mathcal{Y}} &= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon(\partial_x u_1)(\partial_x u_2) \\
&= [bu_1 u_2]_0^L - \int_0^L bu_1(\partial_x u_2) - [\epsilon u_1(\partial_x u_2)]_0^L + \int_0^L \epsilon u_1(\partial_x x u_2) \\
&= -bm_1 m_2 - \int_0^L bu_1(\partial_x u_2) + \epsilon m_1 \partial_x u_2(0) + \int_0^L \epsilon u_1(\partial_x x u_2) \\
&= \int_0^L u_1[-b\partial_x u_2 + \epsilon\partial_x x u_2] + \frac{\epsilon}{b} m_1[-\frac{b^2}{\epsilon} m_2 + b\partial_x u_2(0)] \\
&= \langle y_1, A^* y_2 \rangle_{\mathcal{Y}}
\end{aligned}$$

On en déduit l'adjoint  $A^*$  sur  $\mathcal{Y}$  associé à la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$  :

$$\begin{cases} D(A^*) = \{y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R}, u(0) = m, u(L) = 0\} \\ \forall y \in D(A^*), \quad A^* \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\partial_x u + \epsilon\partial_x x u \\ -\frac{b^2}{\epsilon} m + b\partial_x u(0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (22)$$

On cherche une expression explicite pour l'adjoint  $C^*$  de l'opérateur de mesure  $C$ .  
Donc pour tout  $y_1$  de  $\mathcal{Y}$  et  $z_2$  de  $\mathcal{Z}$ , on calcule la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
\langle Cy_1, z_2 \rangle_{\mathcal{Z}} &= \int_0^L z_2 x^n u_1(x) dx \\
&= \int_0^L (x^n z_2) u_1(x) dx + \frac{\epsilon}{b} m_1 \times 0 \\
&= \langle y_1, (x^n z_2, 0) \rangle_{\mathcal{Y}}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} D(C^*) = \mathcal{Z} \\ \forall z \in D(C^*), \quad C^* z = \begin{pmatrix} x^n z \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

### 3.1.1 Opérateur à noyau

#### Lemme 3.2

On pose  $P = (p_1, p_2) \in L(\mathcal{Y}) \times L(\mathcal{Y})$  et  $y = (u, m) \in \mathcal{Y}$ , alors  $p_1$  ne dépend pas de  $m$ .

▷

□

Il est possible de formuler  $p_1$  à partir d'un noyau de convolution.

## **4 Discrétisation**

## **5 Analyse numérique**

## Références

- [1] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences 44 - Springer Verlag.