Espaces vectoriels normés – Calcul différentiel

Karine Beauchard

Semestre 6 2014-2015

Table des matières

Chapitre 1

Rappels : topologie dans les espaces métriques

Voir poly.

Théorème 1.1 (*Ascoli*)

Soient (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet et $A \subset \mathcal{C}^0(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est relativement compact dans $(\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty)$ où

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d_F(f(x), g(x)),\ x \in E\}.$$

c'est-à-dire toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A admet une sous-suite qui converge dans $(\mathbb{C}^0(E, F), d_\infty)$ (la limite n'est pas forcément dans A, c'est $\overline{A}$ qui est compact).

(ii) A est équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in E, \quad d_E(x, y) < \eta \quad \Rightarrow \quad \forall g \in A,\ d_F(g(x), g(y)) < \varepsilon$$

et $A_x = \{f(x),\ f \in A\}$ est relativement compact dans (F, d_F) pour tout $x \in E$.

$\triangleright$ $(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. On cherche une extraction ψ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$ telles que $d_\infty(f_{\psi(n)}, f) \underset{n_\infty}{\longrightarrow} 0$.

Étape 1 : Montrons qu'il existe $D \subset E$ dénombrable et dense dans (E, d_E).

E est compact donc (Borel Lebesgue) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on peut extraire de $\{B_E(x, \frac{1}{n}),\ x \in E\}$ un sous-recouvrement fini de E :

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{K_n} B\left(x_{k,n}, \frac{1}{n}\right).$$

Alors, $D = \{x_{k,n},\ 1 \leq k \leq K_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable et dense. Notons $D = \{d_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Étape 2 : Montrons qu'il existe une extraction ψ telle que $(f_{\psi(d)})n \in \mathbb{N}$ converge dans (F,d_F) pour tout $d \in D$.

On construit par récurrence une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'extractions telles que $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). Pour $k = 0$, $(f_n(d_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A_{d_0} qui est relativement compact dans (F, d_F) donc il existe une extraction φ_0 telle que $(f_{\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). Pour passer de k à $k+1$, $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(d_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}} \subset A_{d_{k+1}}$ qui est relativement compact donc il existe une extraction comme voulue. On pose alors

$$\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$(f_{\psi(n)}(d_k))_{n\geq k}$ est extraite de $(f_{\varphi_0\circ\varphi_k(n)}(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ donc elle converge dans (F, d_F). Notons

$$f(d) = \lim_{n\to+\infty} f_{\psi(n)}(d), \qquad \forall d \in D.$$

Étape 3 : Montrons que $f : D \to F$ se prolonge en une application uniformément continue $\widetilde{f} : E \to F$.

– (E, d_E) est un espace métrique, (F, d_F) est un espace métrique complet, $D \subset E$ est dense dans (E, d_E).

– $f : (D, d_E) \to (F, d_F)$ est uniformément continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E \qquad d_E(x, y) < \eta \quad\Rightarrow\quad \forall g \in A,\ d_F(g(x), g(y)) < \varepsilon.$$

En particulier, on a :

$$\forall x, y \in D, \qquad d_E(x, y) < \eta \quad\Rightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N},\ d_E(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y)) < \varepsilon.$$

À x, y fixés vérifiant $d_E(x, y) < \eta$ on fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient

$$d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On conclut avec le théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Etape 4 : Montrons que $d_\infty(f_{\psi(n)}, \widetilde{f}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_F(f_{\psi(n)}(x), \widetilde{f}(x)) < \varepsilon$$

pour tout $x \in E$ et tout $n > n_0$.

Par équicontinuité de A et uniforme continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E,\ (d_E(x,y) < \eta) \Rightarrow \begin{cases} d_F(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) < \varepsilon \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y)) < \varepsilon \end{cases} \tag{1.1}$$

E est compact donc (Borel Lebesgue) on peut extraire de $\{B(d,\eta),\ d \in D\}$ un recouvrement fini de E :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(d_j, \eta) \tag{1.2}$$

Comme $f_{\psi(n)}(d_j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{f}(d_j)$ pour $j = 1, \ldots, N$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_F(f_{\psi(n)}(d_j), \widetilde{f}(d_j)) < \varepsilon, \quad \forall 1 \leq j \leq N,\ \forall n > n_0. \tag{1.3}$$

Soit $x \in E$ et $n > n_0$. Grâce à 1.2, il existe $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $d_E(x, d_j) < \eta$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d_F(f_{\psi(n)}(x), \widetilde{f}(x)) &\leq d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(d_j)) + d_F(f_{\psi(n)}(d_j), \widetilde{f}(d_j)) + d_F(\widetilde{f}(d_j), \widetilde{f}(x)) \\ &\leq \underbrace{\varepsilon}_{(1.1)} + \underbrace{\varepsilon}_{(1.3)} + \underbrace{\varepsilon}_{(1.1)}. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc $d_\infty(f_{\psi(n)}, \widetilde{f}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ *Étape 1* : Montrons que A_x est relativement compact dans (F, d_F) pour tout $x \in E$.

Soient $x \in E$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A_x. On veut montrer que (y_n) admet une sous-suite qui converge dans (F, d_F). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in A$ telle que $y_n = f_n(x)$. Par hypothèse (i) il existe une extraction ψ et $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$ telles que $d_\infty(f_{\psi(n)}, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors, $(y_{\psi(n)} = f_{\psi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F) (CVU $\Rightarrow$ CVS)

Étape 2 : Montrons que A est équicontinue.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad d_E(x,y) < \eta \quad d_F(g(x), g(y)) < \varepsilon, \forall g \in A.$$

$\mathrm{Adh}_\infty(A)$ est compact dans $(\mathcal{C}^0(E,F), d_\infty)$ donc (Borel Lebesgue) de $\{B_{d_\infty}(f, \varepsilon),\ f \in A\}$ on peut extraire un sous recouvrement fini

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{d_\infty}(f_n, \varepsilon) \tag{1.4}$$

Les $(f_n)_{1\leq n\leq N}$ sont continues sur le compact (E, d_E) donc (théorème de Heine) uniformément continues donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad d_E(x,y) < \eta \quad \Rightarrow \quad d_F(g(x), g(y)) < \varepsilon,\ \forall 1 \leq n \leq N. \tag{1.5}$$

Soit $g \in A$. Grâce à (1.4), il existe $n \in [\![1, N]\!]$ tel que

$$d_\infty(g, f_n) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Alors pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} d_E(x,y) < \eta \quad \Rightarrow \quad d_F(g(x), g(y)) &\leq d_F(g(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f_n(y)) + d_F(f_n(y), g(y)) \\ &\leq \underbrace{\varepsilon}_{(1.6)} + \underbrace{\varepsilon}_{(1.5)} + \underbrace{\varepsilon}_{(1.6)} \end{aligned}$$

□

Application : Pour tout M,

$$A_M = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}),\ M\text{-lipschitzienne},\ \|f\|_\infty \leq 1\}$$

est relativement compact dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

L'hypothèse M-lipschitzienne assure l'équicontinuité et l'hypothèse sur la norme infini assure que $(A_M)_x$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$ (car borné) $\forall x \in [0,1]$. Pour tester le caractère lipschitzien, regarder si $\|f'\|_\infty \leq M$ (inégalité des accroissements finis).

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

2.1 Normes

2.1.1 Définition

Définition 2.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(N1) : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(N2) : $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E$.

(N3) : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in E$.

Alors, $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque : Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé alors

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \to \mathbb{R}_+ & \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

est une distance donc toute la première section s'applique aux espaces vectoriels normés.

Exemples : – $(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{R}^n, \ \|.\|_p)$ où

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup\{|x_k|, \ 1 \leq k \leq n\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

– $(\mathbb{R}[X], N)$ où

$$N = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

qui est égal à l'ensemble des suites à support fini muni de la norme 1.

– $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_p)$ où

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{avec } 1 \leq p < \infty$$

⚠ $\|.\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p([0,1],\mathbb{R})$ car (N1) n'est pas vérifié. $f \in \mathcal{L}^p$ et $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout. Pour avoir un espace vectoriel normé, il faut quotient : $L^p = \mathcal{L}^p / \sim_{=pp}$.

– $(\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_p)$ est une espace vectoriel normé pour tout $1 \leq p \leq \infty$ où

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup\{|x_n|,\ n \in \mathbb{N}\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

▷ Preuve de l'inégalité triangulaire dans $(\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_p)$ quand $1 < p < \infty$. Soit $q \in]1, \infty[$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Étape 1 : Hölder. Par concavité de ln on a :

$$\ln(xy) = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^p) \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \qquad \forall x, y \in]0, +\infty[$$

Par croissance de exp, on a :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \forall x, y \in]0, +\infty[.$$

Soit $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^q$ non nuls. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \times \frac{|y_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q} = 1$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

Étape 2 : Minkowski. Soient $x, y \in \ell^p$. Montrons que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n||x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n||x_n+y_n|^{p-1} \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n+y_n|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{par Hölder} \\
&\leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x+y\|^{\frac{p}{q}} \qquad \text{car } q(p-1) = p
\end{aligned}$$

On en déduit Minkowski car $p - \frac{p}{q} = 1$. □

2.1.2 Normes équivalentes

Définition 2.2

Soit E un espace vectoriel. Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont équivalentes s'il existe $C_1, C_2 \in]0, \infty[$ tels que

$$C_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq C_2 \|x\| \qquad x \in E.$$

Théorème 2.3

Sur un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

▷ On peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|.\|_\infty$. On sait que les compacts de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}$. Donc, en passant au produit cartésien, les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ sont les fermés bornés de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$. En particulier, la sphère unité $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| = 1\}$ est compacte dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$.

Montrons que toute norme $\|.\|$ que $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|.\|_\infty$.

Étape 1 : Montrons que $\|.\|$ est continue $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}_+, |.|)$.
Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\|x+h\| - \|x\|| \underbrace{\leq}_{i.t.} \|h\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} h_k e_k\right\| \underbrace{\leq}_{i.t.} \|h\|_\infty M$$

où $M = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|$. Ainsi, $\|.\|$ est M-lipschitzienne sur $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ donc continue $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}_+, |.|)$.

Étape 2 : Argument de compacité.
$\mathcal{S}$ est compacte dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ et $\|.\|$ est continue et strictement positive sur $(\mathcal{S}, \|.\|_\infty)$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. On pose

$$C_1 = \min\{\|x\|\,,\ x \in \mathcal{S}\} \in]0, \infty[$$

Alors,

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ainsi,

$$C_1 \|.\|_\infty \leq \|.\| \leq M \|.\|_\infty$$

$\square$

Contre-exemples en dimension infinie : – Sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. On a $\|.\|_1 \leq \|.\|_\infty$ mais il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|.\|_\infty \leq C \|.\|_1$: $f_n(x) = x^n$ satisfait $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$.

– Pour $1 \leq p < q \leq \infty$, $\ell^p \subset \ell^q$ et $\|.\|_q \leq \|.\|_p$ car $\|.\|_q^q \leq \|.\|_\infty^{q-p} \|.\|_p^p$:

$$\|x\|_q^q = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^q \leq \|x\|_\infty^{q-p} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \leq \|x\|_p^{q-p} \|x\|_p^p = \|x\|_p^q$$

Mais $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ ne sont pas équivalentes sur ℓ^p car il n'existe $C > 0$ tel que $\|.\|_p \leq C \|.\|_q$. En effet, $x^n = (\mathbf{1}_{[1,n]}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait $\|x^n\|_p = n^{\frac{1}{p}}$ et $\|x^n\|_q = n^{\frac{1}{q}}$ $(\frac{1}{p} > \frac{1}{q})$.

– $1 \leq p < q \leq \infty$, $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$ et $\|.\|_p \leq \|.\|_q$ (Hölder) (la mesure est finie) mais $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ ne sont pas équivalentes sur L^q car il n'existe pas de $C > 0$ tel que $\|.\|_q \leq C \|.\|_p$.

Exemple : $p = 1$ et $q = \infty$ déjà fait $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice : Cas général $1 \leq p, q \leq \infty$.

Si $1 \leq p < q \leq \infty$ alors il n'existe pas $C_1, C_2 > 0$ telles que $\|.\|_p \leq C_1 \|.\|_q$ ou $\|.\|_q \leq C \|.\|_p$ dans $L^p \cap L^q(\mathbb{R})$: dessin

Pour $1 \leq p < q \leq \infty$, on a vu que $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$ par l'inégalité de Hölder. C'est vrai car $[0,1]$ est de mesure finie.

$$L^q(\mathbb{R}) \not\subset L^p(\mathbb{R}) \qquad 1 \in L^\infty(\mathbb{R}),\ 1 \notin L^1(\mathbb{R})$$

$$L^p(\mathbb{R}) \not\subset L-q(\mathbb{R}) \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1]} \in L^1(\mathbb{R}),\ \notin L^\infty(\mathbb{R})$$

2.2 Théorème de Riesz

Théorème 2.4

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) E est de dimension finie.
(ii) $\overline{B_E}(0,1)$ est compacte.

$\triangleright$ $(i) \Rightarrow (ii)$ La boule unité est compacte pour la norme infinie (produit de compacts) donc par équivalence des normes, on a le résultat.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On suppose $\overline{B} = \overline{B}_E(0,1)$ est compacte. Du recouvrement

$$\overline{B} \subset \bigcup_{x\in E} B_E\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

on peut extraire un sous recouvrement fini

$$\overline{B} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_E\left(x_j, \frac{1}{2}\right).$$

Montrons que $F = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ coincide avec E. Par l'absurde, supposons qu'il existe $y \in E\backslash F$. Alors $d = \text{dist}(y, F) > 0$ (distance entre un fermé (F) et un compact $(\{y\})$ disjoints) et il existe $x \in F$ tel que $d = \|x-y\|$. Alors $\frac{x-y}{d} \in \overline{B}$ donc il existe $j \in [\![1, N]\!]$ tel que

$$\left\|\frac{y-x}{d} - x_j\right\| < \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\left\|y - \underbrace{(x + dx_j)}_{\in F}\right\| < \frac{d}{2}$$

absurde. $\square$

Contre exemple en dimension infinie : $E = L^2(0, 2\pi)$ muni de

$$\|f\|_2 = \sqrt{⨍_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t}.$$

On pose

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{int} \end{array}.$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{B}_E(0,1)$. Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite qui converge dans E. Par l'absurde, supposons qu'il existe une extraction φ et $g \in L^2(0,2\pi)$ telles que

$$\left\| f_{\varphi(n)} - g \right\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors, $\|g\|_2 = 1$.

$$\left\| f_{\varphi(n)} - g \right\|^2 = 2 - 2\Re\left(⨍_0^{2\pi} g(t)e^{-i\varphi(n)t}\mathrm{d}t \right).$$

Or l'intégrale tend vers 0 par le lemme de Riemann-Lebesgue, absurde.

Lemme 2.5 (*Riemann-Lebesgue*)

Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in L^1(a,b)$. Alors,

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0.$$

▷ – 1^{er} cas : $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t \right| &= \left| \frac{f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}}{in} - \frac{1}{in}\int_0^b f'(t)e^{int}\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

– 2^{e} cas : $f \in L^1(a,b)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \int_a^b g_n(t)e^{int}\mathrm{d}t \right| < \varepsilon, \qquad |n| > n_0.$$

Alors, pour $n > n_0$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}te^{int}\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_a^b g(t)e^{int}\mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^b (f-g)(t)e^{int}\mathrm{d}t \right| < \varepsilon + \|f-g\|_1 < 2\varepsilon.$$

□

2.3 Espaces de Banach

Définition 2.6

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemples : – $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est complet pour toute norme $\|.\|$.
– $(L^p, \|.\|_p)$ est complet $\forall 1 \leq p \leq \infty$.
– $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|.\|_p)$ est un $\forall 1 \leq p \leq \infty$.

$\triangleright$ Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k, j \geq k_0,\ \left\|x^k - x_j\right\|_p < \varepsilon.$$

ie.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k, j \geq k_0,\ \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \varepsilon^p \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \\ \left\|x_n^k - x_n^j\right\| < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Étape 1 : Convergence du terme général. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$ et k_0 comme ci-dessus. Alors, pour tout $k, j \geq k_0$ on a

$$|x_{n_0}^k - x_{n_0}^j| \leq \left\|x^k - x^j\right\|_p < \varepsilon.$$

Ceci, montre que $(x_{n_0}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc, par complétude de $\mathbb{C}$, elle converge. Notons

$$x_n^\infty = \lim_{k\to+\infty} x_n^k.$$

Étape 2 : Montrons que $x^\infty \in \ell^p$ et $\left\|x^k - x^\infty\right\|_p \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus et $k > k_0$.

1$^{\text{er}}$ cas : $p < \infty$. Par le lemme de Fatou,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^\infty|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{j\to+\infty} |x_n^k - x_n^j|^p \leq \liminf_{j\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p}_{<\varepsilon^p \text{ quand } j>k_0}.$$

Ceci montre que $x^\infty = (x^\infty - x^k) + x^k \in \ell^p$ (espace vectoriel) et

$$\forall k \geq k_0, \qquad \left\|x^\infty - x^k\right\|_p < \varepsilon.$$

2$^{\text{e}}$ cas : $p = \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n^k - x_n^\infty| = \lim_{j \to +\infty} |x_n^k - x_n^j| \leq \varepsilon.$$

Ceci, montre que $x^\infty \in \ell^\infty$ et $\forall k > k_0,\ \left\| x^k - x^\infty \right\|_\infty \leq \varepsilon.$ □

– Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés tel que F est **complet** et

$$d_\infty(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\|_F\ ,\ x \in E\}$$

Alors, $(\mathcal{C}_b^0(E, F), d_\infty)$ est complet.

Remarque : Si $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach et F un sous-epace vectoriel de E. Alors $(F, \|.\|_E)$ est un Banach si et seulement si F est fermé.

Contre-exemples : – $(\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ n'est pas un espace de Banach.

– Les suites à support fini ($\approx \mathbb{R}[X]$) $(C_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_p)$ n'est pas un espace de Banach.

2.4 Séries dans les espaces vectoriels normés

Définition 2.7

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E.

(i) La série $\sum x_n$ converge si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sa somme.

(ii) La série $\sum x_n$ converge absolument (ou normalement) si $\sum \|x_n\|$ converge.

(iii) La série $\sum x_n$ satisfait le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n_0 \leq n < p < \infty \qquad \left\| \sum_{k=n}^{p} x_k \right\|_p < \varepsilon.$$

Proposition 2.8

(i) Dans un espace vectoriel normé, si une série converge, elle satisfait le

critère et Cauchy. Si une série satisfait le critère de Cauchy alors son terme général tend vers 0.

(ii) Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série de Cauchy converge.

(iii) Dans un espace de Banach, la convergence absolue implique la converge. L'implication réciproque est fausse.

(iv) Soient E un espace de Banach et $\sum x_n$ une série convergeant absolument. Alors pour tout bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \qquad \textit{(sommabilité commutative).}$$

$\triangleright$ (ii) $\Rightarrow$ Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Alors toute suite de Cauchy dans E converge dans E. Soit $\sum x_n$ une série de E qui satisfait le critère de Cauchy. Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E donc converge. En conclusion, la série $\sum x_n$ converge.

$\Leftarrow$ Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé dans lequel toute série de Cauchy converge. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Alors la série $\sum(x_{n+1}-x_n)$ vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n_0 \leq p < n < \infty \qquad \|x_p - x_n\| < \varepsilon$$

donc

$$\forall n_0 \leq p, n \qquad \left\|\sum_{k=p}^{n}(x_{k+1} - x_k)\right\| = \|x_{n+1} - x_p\| < \varepsilon.$$

Donc la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge. Or $\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(iii) Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Soit $\sum x_n$ une série convergeant absolument dans E. Alors, $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$ donc elle est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n_0 \leq n, p < \infty \qquad \sum_{k=n}^{p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Alors

$$\forall n_0 \leq n < p < \infty, \qquad \left\|\sum_{k=n}^{p} x_k\right\| \leq \sum_{k=n}^{p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\sum x_n$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|)$ donc elle converge.

Contre-exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge (critère des séries alternées) mais ne converge pas absolument. De même, en considérant $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$ qui n'est pas complet et

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}] \\ 1 \text{ si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, 1] \\ \text{affine sinon.} \end{cases}$$

$\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge absolument dans E car $\|f_{n+1} - f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ mais $\sum (f_{n+1} - f_n)$ ne converge pas dans E car

$$\sum_{n=0}^{N} (f_{n+1} - f_n) = f_N - f_0 \xrightarrow{\|.\|_1} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]} \notin \mathcal{C}^0([0,1]).$$

(iv) Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $\sum x_n$ une série absolument convergente et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma(n)\| < \infty$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{N} \left\|x_{\sigma(n)}\right\| = \sum_{k \in \sigma(\llbracket 0,N \rrbracket)} \|x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$$

Les sommes partielles de la série $\sum \left\|x_{\sigma(n)}\right\|$ sont donc uniformément majorées donc $\sum \left\|x_{\sigma(n)}\right\|$ converge.

Notons $\ell = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \qquad \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \ell \right\| < \varepsilon \quad \text{ et } \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| \leq \varepsilon.$$

Soit $n_1 = \max \sigma^{-1}(\llbracket 0, n_0 \rrbracket)$. Alors, $\sigma^{-1}(\llbracket 0, n_0 \rrbracket) \subset (\llbracket 0, n_1 \rrbracket)$ donc (σ est bijective) $\llbracket 0, n_0 \rrbracket \subset \llbracket 0, n_1 \rrbracket$. Soit $n > n_1$. Alors $\llbracket 0, n_0 \rrbracket \subset \sigma(\llbracket 0, n_1 \rrbracket) \subset (\llbracket 0, n \rrbracket)$ donc

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \ell \right\| = \left\| \sum_{j \in \sigma(\llbracket 0,n \rrbracket)} x_j - \ell \right\| \leq \left\| \sum_{j=0}^{n_0} x_j - \ell \right\| + \sum_{j \in \sigma(\llbracket 0,n \rrbracket) \setminus \llbracket 0,n_0 \rrbracket} \|x_j\| < 2\varepsilon.$$

□

Contre-exemple : Pour tout $y \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} = y$$

cf. poly.

Remarque : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ alors la convergence absolue équivaut à la sommabilité commutative (*cf.* poly).

2.5 Séparabilité

Définition 2.9

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est séparable s'il admet une partie dénombrable dense. Une famille $(f_j)_{j\in E}$ de E est totale si Vect$_{\mathbb{K}}\{f_j, j \in J\}$ est dense dans E.

Exemples : – $\mathbb{R}^n$ est séparable car $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense.

– $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_p)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$. En effet, $C_c(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \approx \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $(\ell^p, \|.\|_p)$.

$\triangleright$ Soit $x \in \ell^p$ et $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists q_n \in \mathbb{Q},\ |x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Alors

$$\|x - q\|_p^p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - q_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{np}}\right)^{\frac{1}{p}} = C\varepsilon$$

$\square$

– $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ séparable car $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et dense (Weierstrass).

– $(L^p(0, 1), \|.\|_p)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$. Vect$_{\mathbb{Q}}\{\mathbf{1}_{[a,b]}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable et dense.

Lemme 2.10

Soit (E, d) un espace métrique. S'il existe une famille $(B_j)_{j\in J}$ non dénombrable de boules ouvertes deux à deux disjointes alors (E, d) n'est pas séparable.

$\triangleright$ Par l'absurde, supposons que (E, d) est séparable. Il existe donc une partie $D = \{g_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ dense dans (E, d). Alors,

$$\forall j \in J,\ \exists n_j \in \mathbb{N}, \qquad g_{n_j} \in B_j.$$

Comme les B_j sont deux à deux disjointes, $\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{N} \\ j & \mapsto & n_j \end{array}$ est injective ce qui contredit la non-dénombrabilité de J. $\square$

Contre-exemples : – $(\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ n'est pas séparable.

$$\{B_{\|.\|_\infty}\left(\mathbf{1}_A, \frac{1}{2}\right),\ A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})\}$$

vérifie les hypothèses du lemme précédent. En effet, si $A \neq A' \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ alors $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A'}\|_\infty = 1$ donc $B_{\|.\|_\infty}(\mathbf{1}_A, \frac{1}{2}) \cap B_{\|.\|_\infty}(\mathbf{1}_A, \frac{1}{2})$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable : par l'absurde, on suppose que $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On construit $B \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ de la façon suivante :

$$B = \{n \in \mathbb{N},\ n \notin A_n\}.$$

Par construction, $B \notin \{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ce qui est absurde.

– $(L^\infty, \|.\|_\infty)$ n'est pas séparable car

$$\{B_{\|.\|_\infty}\left(\mathbf{1}_{[0,a]}, \frac{1}{2}\right), a \in \mathbb{R}\}$$

vérifie les hypothèses du lemme. Pour $a \neq a' \in \mathbb{R}$, $\left\|\mathbf{1}_{[0,a]} - \mathbf{1}_{[0,a']}\right\|_\infty = 1$ donc $B_a \cap B_{a'} = \varnothing$.

– $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ n'est pas séparable

$$\{B\left(f_a, \frac{1}{2}\right),\ a \in \mathbb{R}\} \qquad \text{où } f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(ax) \end{array}$$

vérifie les hypothèses du lemme. Pour $a \neq a'$, on montre qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|\sin(ax) - \sin(a'x)| \geq 1$ (exercice : 1er cas, $a' \in a\mathbb{Z}$, 2e cas $\frac{a'}{a} \notin \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z} + \frac{a'}{a}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$...) donc $\|f_a - f_{a'}\|_\infty \geq 1$.

Proposition 2.11

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E est séparable.

(ii) E admet une famille totale dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de vecteurs linéairement indépendants.

▷ $(ii) \Rightarrow (i)$ $D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et dense dans E.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si E est de dimension finie, le résultat est déjà vu. Supposons que E est séparable et de dimension infinie. Soit $D = \{d_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ dense dan $(E, \|.\|)$. On peut supposer $d_0 \neq 0$. On construit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{N}$ par récurrence.

$n_0 = 0$.

On pose $n_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N},\ m > n_k,\ d_m \notin \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{d_{n_0}, d_{n1}, \ldots, d_{n_k}\}\}$ qui est bien défini dans $\mathbb{N}$ car E est de dimension infinie. Par construction, $(d_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est libre et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{d_{n_i}, 0 \leq i \leq k\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{d_n,\ 0 \leq n \leq n_k\}$ donc $\mathrm{Vect}_K\{d_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(E, \|.\|)$. □

Chapitre 3

Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

3.1 Norme subordonnée

Proposition 3.1

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en 0.

(ii) f est continue.

(iii) $\exists M > 0,\ \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E,\ \forall x \in E.$

En particulier, si E est de dimension finie alors toute application linéaire $E \to F$ est continue.

$\triangleright$ $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $x \in E$.

$$\|f(x+h) - f(x)\|_F = \|f(h)\|_F \xrightarrow[\|h\|_E \to 0]{} 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Par continuité de f en $x = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in B_E(0, \delta), \qquad \|f(x)\|_F \leq 1.$$

Alors, par linéarité,

$$\|f(x)\|_F = \frac{\|x\|_E}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\delta} \qquad \forall x \in E \backslash \{0\}$$

donc $M = \frac{1}{\delta}$ convient.

$(iii) \Rightarrow (i)$ ok.

Supposons E de dimension finie. Soient $(e_n)_{1\leq n\leq N}$ une base de E et $\|.\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n| \qquad \text{lorsque } x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$$

Par équivalence des normes en dimension finie, il existe $C > 0$ tel que $\|.\|_1 \leq C\|.\|_E$. Alors, pour $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F = \left\|\sum_{n=0}^{N} x_n f(e_n)\right\|_F \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n| M \leq MC\|x\|_E$$

où $M = \max\{\|f(e_n)\|_F\,,\ 1 \leq n \leq N\}$. □

Exemple : Pour $f \in L^1(0, 2\pi)$, on définit les coefficients de Fourier de f :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} (L^1(0,2\pi), \|.\|_1) & \to & (C_0(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \|.\|_\infty) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est continue car $\|c_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_1\,,\ \forall f \in L^1$.

Contre-exemples : – $\begin{array}{rcl} (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \|.\|_1) & \mapsto & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$ n'est pas continue. Par l'absurde, supposons qu'il existe $M > 0$ telle que

$$f(0) \leq M\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t, \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \geq \frac{1}{n} \\ \text{affine sur } [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

alors $1 = |f_n(0)| \leq M\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t = \dfrac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui est absurde.

– D : $\begin{array}{rcl} (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_{\mathcal{C}^1}) & \to & (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est continue car

$$\|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty := \|f\|_{\mathcal{C}^1}$$

mais $\widetilde{D} : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|.\|_1) & \to & (\mathbb{R}[X], \|.\|_1) \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ n'est pas continue. Par l'absurde, si elle l'était alors il existerait $M > 0$ tel que $\|P'\|_1 \leq M \|P\|_1$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $n = \|nX^{n-1}\|_1 \leq M \|X^n\| = M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisait tendre n vers $+\infty$ on obtient une contradiction.

Définition 3.2

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $E \to F$ et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \to F$.

Proposition 3.3

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

(i) $\sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \inf\{M > 0,\ \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E,\ \forall x \in E\}$. On note $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ cette quantité.

(ii) $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$ est un espace vectoriel normé.

(iii) Si $(F, \|.\|_F)$ est complet, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$ est un espace de Banach.

(iv) Si $(G, \|.\|_G)$ est un espace vectoriel normé et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}_c(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}.$$

▷ (i) exercice.

(ii) ok.

(iii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \varepsilon,\ \forall n, p \geq n_0.$$

Étape 1 : Convergence ponctuelle. Soient $x \in E\backslash\{0\}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0(\frac{\varepsilon}{\|x\|_E})$ comme ci-dessus. Alors,

$$\forall n, p \geq n_0, \qquad \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|x\|_E \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. Comme F est complet, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. Notons $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Alors $f : E \to F$ est linéaire (passage à la limite).

Étape 2 : Montrons que f est continue $E \to F$ et $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 = n_0(\varepsilon)$ comme dans $(*)$. Soit $n \geq n_0$. Soit $x \in E$. On a

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F = \lim_{p\to+\infty} \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $f_n - f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ donc $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ ($f = f_n + (f - f_n)$). Ceci montre aussi que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \varepsilon,\ \forall n > n_0$ donc $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(iv) ok. $\square$

Définition 3.4

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. La norme $\|.\|_{\mathcal{L}_c(E)}$ est appelée norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ subordonnée à $\|.\|$ sur E.

Exemples de calculs de norme subordonnée : – Notons $\|.\|_p$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty},\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right\} = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$$

$$\|A\|_1 = \max\left\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1},\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right\} = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$$

$$\|A\|_2 = \max\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},\ x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right\} = \max\{\sqrt{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A^*A)\} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

$\triangleright$ Pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |A_{i,j}||x_{i,j}| = \sum_{j=1}^n |x_j|\left(\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|\right)\\ &\le \sup_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|\right\}\underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_{\|x\|_1}\end{aligned}$$

donc $\|A\|_1 \le \sup\limits_{1\le j\le n}\{\sum\limits_{i=1}^n |A_{i,j}|\}$. Soit $j_* \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n |A_{i,j_*}| = \sup_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

Alors $\|Ae_{j_*}\|_1 = |A_{i,j_*}| = \sup\left\{\sum\limits_{i=1}^n |A_{i,j}|\right\}\|e_{j_*}\|_1$.

– $T : \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (1-2t)f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est continue car

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 (1-2t)f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |1-2t|\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{2}.$$

Ainsi, $\|T\|_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0,\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}$.

Pour réaliser l'égalité, on voudrait prendre f valant le signe de $(1-2t)$. Mais cette fonction n'est pas continue. On l'approche donc convenablement. f_n dessin. $\dfrac{|T(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = \left|\displaystyle\int_0^1 (1-2t)f_n(t)\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 |1-2t|\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$ par le théorème de convergence dominée :

– $(1-2t)f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} |1-2t|$ pour presque tout $t \in [0,1]$

– $|(1-2t)f_n(t)| \leq |1-2t| \in L^1(0,1)$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

3.2 Norme d'algèbre

Définition 3.5

Une algèbre normée $(E, \|.\|)$ est une algèbre munie d'une norme sous-multiplicative (« norme d'algèbre ») :

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \forall x, y \in E$$

Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

Exemples : – Soit E un espace vectoriel normé. $(\mathcal{L}_c(E), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est une algèbre normée. Si E est complet, c'est une algèbre de Banach.

– Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la norme de Frobenius est

$$\|A\|_{Fr} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2}$$

est sous-multiplicative (Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$) mais n'est pas subordonnée car $\|I_n\|_{Fr} = \sqrt{n} \neq 1$.

Proposition 3.6

(i) Soit $(X, \|.\|)$ une algèbre de Banach. Alors Inv(X) est un ouvert de $(X, \|.\|)$.

(ii) L'ensemble $GL(E)$ isomorphismes continus $E \to E$ (E complet) à ré-

ciproque continue est ouvert dans $(\mathcal{L}_c(E), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E)})$.

Remarque : Si E est de dimension finie, alors $GL(E) \simeq GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application continue det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (polynomiale).

$\triangleright$ *Étape 1 :*Montrons que $B_X(\mathrm{Id}, 1) \subset \mathrm{Inv}(X)$. Si $h \in X$ et $\|h\|_X < 1$ alors $\sum h^n$ converge absolument donc converge car $(X, \|.\|)$ est complet. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Id} - h) \sum_{n=0}^{N} h^n = \mathrm{Id} - h^{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathrm{Id}$ donc

$$(\mathrm{Id} - h) \sum_{n=0}^{\infty} h^n = \mathrm{Id}.$$

Ceci, montre que $\mathrm{Id} - h \in \mathrm{Inv}(X)$ et $(\mathrm{Id} - h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$. Ainsi, $B_X(\mathrm{Id}, 1) \subset \mathrm{Inv}(X)$.

Étape 2 : Montrons que pour $x \in \mathrm{Inv}(X)$, $B_X(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|}) \subset \mathrm{Inv}(X)$. Soit $h \in X$ tel que $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Alors $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\| \, \|h\| < 1$ donc $\mathrm{Id} - x^{-1}h \in \mathrm{Inv}(X)$ d'après l'étape 1. Alors $(x - h) = x(\mathrm{Id} - x^{-1}h) \in \mathrm{Inv}(X)$ comme produit de deux inversibles.

(ii) E complet $\Rightarrow \mathcal{L}_c(E)$ algèbre de Banach : on applique (i). □

B : La preuve via les séries n'a d'intérêt que pour E de dimension ∞.

3.3 Généralisation aux applications multilinéaires

Proposition 3.7

Soient $(E_1, \|.\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|.\|_{E_n}), (F, \|.\|_F)$ *des espaces vectoriels normés et* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *n-linéaire. On munit* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *de la norme*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \|x_1\|_{E_1} + \cdots + \|x_n\|_{E_n}.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est continue ;*
(ii) *f est continue en zéro ;*
(iii) *il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \qquad \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}$$

Conséquence : L'espace vectoriel des applications n-linéaires continues $E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, noté $\mathcal{L}_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\ldots,E_n;F)} = \sup \left\{ \frac{\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}},\ x_1 \in E_1 \backslash \{0\}, \ldots, x_n \in E_n \backslash \{0\} \right\}$$

est un espace vectoriel normé. Il est complet si $(F, \|.\|_F)$ est complet (même preuve que pour $\mathcal{L}_c(E, F)$).

▷ $(i) \Rightarrow (ii)$ ok

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Par continuité de f en 0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \qquad \|x_1\|_{E_1} + \cdots + \|x_n\|_{E_n} < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_n) < 1.$$

Alors, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in (E_1 \backslash \{0\}) \times \cdots \times (E_n \backslash \{0\})$ on a

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F &= \frac{n^n \|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}}{\delta^n} \left\| f\left(\frac{\delta x_1}{n \|x_1\|_{E_1}}, \ldots, \frac{\delta x_n}{n \|x_n\|_{E_n}} \right) \right\| \\ &\leq \underbrace{\frac{n^n}{\delta^n}}_{M} \|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supposons que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \qquad \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}.$$

Soit $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

$$\begin{aligned} &\|f(\overline{x_1} + h_1, \overline{x_2} + h_2, \ldots, \overline{x_n} + h_n) - f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})\|_F \\ &= \|f(\overline{x_1} + h_1, \overline{x_2} + h_2, \ldots, \overline{x_n} + h_n) - f(\overline{x_1}, \overline{x_2} + h_2, \ldots, \overline{x_n} + h_n) + f(\overline{x_1}, \overline{x_2} + h_2, \ldots, \overline{x_n} + h_n) - \ldots \|_F \\ &= \|f(h_1, \overline{x_2} + h_2, \ldots, \overline{x_n} + h_n) + f(\overline{x_1}, h_2, \overline{x_3} + h_3, \ldots, \overline{x_n} + h_n) + \cdots + f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}}, h_n)\|_F \end{aligned}$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{n} \|h_k\|_{E_k} \left(\prod_{j<k} \|\overline{x_j}\|_{E_j} \right) \left(\prod_{l>k} \|\overline{x_l} + h_l\|_{E_l} \right) \xrightarrow[(h_1, \ldots, h_n) \to 0]{} 0.$$

□

3.4 Dualité (rudiments)

Définition 3.8

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, son dual est $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues $E \to \mathbb{K}$.

Si E est de dimension finie n alors E' est de dimension n.

$\triangleright$ Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on définit $\varphi_j \in E'$ par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \qquad \varphi_j(b_k) = \delta_{j,k} \quad \text{(famille duale).}$$

Alors,

$$\zeta : \begin{array}{rcl} E & \to & E' \\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \end{array}$$

est bien définie (unicité de la décomposition de x sur la base $(b_1, \ldots, b_n)$), linéaire, injective : si $\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j = 0$ dans E' alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad 0 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right)(b_k) = x_k$$

surjective : si $\psi \in E'$ s'écrit $\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi(b_j) \varphi_j = \zeta \left(\sum_{j=1}^{n} \psi(b_j) b_j \right)$ □

Remarque : Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne, E' de la norme subordonnée et $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ est orthonormée alors $\zeta : E \to E'$ est une isométrie.

$$\begin{aligned} \|\zeta(x)\|_{E'} &= \max \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(y) \right|, \ y \in \mathbb{R}^n, \ \|y\|_2 = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right|, \ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1 \right\} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \end{aligned}$$

($\leq$ par Cauchy-Schwarz et $=$ car atteint en $y_j = \frac{x_j}{\|x\|_2}$)

Si E est de dimension infinie, on ne peut pas identifier E à son dual E', mais on peut l'identifier à un sous-espace vectoriel de son bi-dual

$$J : \begin{array}{rcl} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & \begin{array}{rcl} E' & \mapsto & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \end{array}$$

est linéaire (trivial) et continue. Montrons en effet qu'il existe $M > 0$ tel que $\|J(x)\|_{E''} \leq M \|x\|_E$. Soit $x \in E$. Pour $f \in E'$,

$$|J(x) \cdot f| = |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E .$$

Ceci montre que $J(x) : E' \to \mathbb{K}$ est continue et $\|J(x)\|_{E''} \leq \|x\|_E$.
On montrera ultérieurement que J est une isométrie *ie.* $\forall x \in E \; \|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$.
Autrement dit,

$$\forall x \in E, \; \exists f \in E' \qquad |f(x)| = \|x\|_E \text{ et } \|f\|_{E'} \leq 1.$$

(utilisation du théorème de Hahn-Banach)

3.5 Espace quotient

Définition 3.9

Soit E un espace vectoriel et $\widetilde{E}$ un sous-espace vectoriel de E. La relation sur E définie par

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \widetilde{E}$$

est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive). On note $E/\widetilde{E}$ l'ensemble des classes d'équivalences. Il est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($s(x + \lambda y) = s(x) + \lambda s(y)$ où s est la surjection canonique)

Proposition 3.10

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

$$\mathit{Im}(f) \simeq E/\ker(f)$$

▷ Soit $\Theta : \begin{array}{ccc} E/\ker(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ s(x) & \mapsto & f(x) \end{array}$ est :

– bien définie : si $x, y \in E$, vérifient $s(x) = s(y)$ alors $x - y \in \ker(f)$ donc $f(x) = f(y)$,

– linéaire,

– injective : si $\Theta(s(x)) = 0$ alors $f(x) = 0$ *ie.* $x \in \ker(f)$ *ie.* $s(x) = 0$ dans $E/\ker(f)$,

– surjective : si $z \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$ et $z = \Theta(f(x))$. □

3.6 Hyperplan

Proposition 3.11

Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) *H est un sous-espace vectoriel strict de E maximal pour l'inclusion,*
(ii) $\forall e \in E \backslash H,\ E = H \oplus \mathbb{K}e,$
(iii) $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}),\ \varphi \neq 0,\ H = \ker(\varphi),$
(iv) $\dim(E/H) = 1,$
(v) $\exists e \in E \backslash H,\ E = H \oplus \mathbb{K}e.$
On dit alors que H est un hyperplan de E. De plus, si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ satisfont $H = \ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.

⚠Il n'y a pas d'hypothèse de continuité des formes linéaires.

$\triangleright$ $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $e \in E \backslash H$. Alors, $\mathbb{K}e \cap H = \{0\}$. De plus, $\mathbb{K}e \oplus H$ est une sous-espace vectoriel de H contenant strictement H donc $\mathbb{K}e \oplus H = E$ par maximalité de H.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $e \in E \backslash H$. Pour $x \in E$ qui se décompose sur la somme directe en $x = \lambda e + h$, on définit $\varphi(x) = \lambda$. Alors $\varphi : E \to \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$- linéaire et $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}),\ \varphi \neq 0$ telle que $H = \ker \varphi$. Alors, $\mathbb{K} = \mathrm{Im} \simeq E/H$ par le théorème d'isomorphisme donc $\dim_{\mathbb{K}}(E/H) = 1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Supposons $\dim(E/H) = 1$. Alors il existe $e \in E$ tel que $s(e) \neq 0$ dans E/H. Alors, $e \notin H$ donc $\mathbb{K}e \cap H = \{0\}$. Soit $x \in E$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $s(x) = \lambda s(e)$. Alors, $x - \lambda e \in H$. Ainsi, $E = \mathbb{K}e \oplus H$.

$(v) \Rightarrow (i)$ Supposons qu'il existe $x \in E \backslash H$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}e$ alors H est un sous-espace vectoriel strict de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant H. Si $e \in F$ alors $F = E$. Sinon, $F = H$ □

Proposition 3.12

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) *φ est continue $E \to \mathbb{K}$,*
(ii) *$H = \ker(\varphi)$ est un hyperplan fermé de $(E, \|.\|_E)$.*

$\triangleright$ $(i) \Rightarrow (ii)$ Si φ est continue, alors $\ker(\varphi)$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K}$ par l'application continue φ.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit H un hyperplan fermé de $(E, \|.\|_E)$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \ker(\varphi)$. Pour montrer que φ est continue, on va montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B_E(0, r),\ |\varphi(x)| \leq 1$. On introduit $V = \{x \in E,\ \varphi(x) = 1\}$. V est un sous-ensemble de E qui est non vide car $\varphi \neq 0$ et linéaire. Soit $a \in V$.

Alors $V = a + H$. Comme H est fermé dans $(E, \|.\|_E)$, V est fermé dans $(E, \|.\|_E)$. Or $0 \notin V$ donc il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset V^c$: $\forall x \in B(0,r),\ \varphi(x) \neq 1$. Or $\varphi(0) < 1$ donc $\forall x \in B(0,r),\ \varphi(x) < 1$. En effet, si $\varphi(x) > 1$, il existe $0 < \theta < 1$ tel que $\varphi(\theta x) = 1$ or $\theta x \in B(0,r)$: absurde. En conclusion,

$$\forall x \in E\backslash\{0\}, \qquad |\varphi(x)| = \frac{2\|x\|}{r}\varphi\left(\frac{rx}{2\|x\|}\right) < \frac{2\|x\|}{r}$$

donc φ est continue. $\square$

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

4.1 Espaces préhilbertiens

Définition 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$:

(PS1) bilinéaire : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\langle x_1, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle \qquad \langle \lambda x_1 + x_2, y_1 \rangle = \overline{\lambda} \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle$$

(PS2) symétrique : $\forall x, y \in E, \qquad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(PS3) définie : $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

(PS4) positive : $\forall x \in E, \qquad \langle x, x \rangle \geq 0.$

Alors, $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien. Un espace euclidien est un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *est une norme et $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemples : – $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n.$$

– $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \Re \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n \right).$$

– $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t.$$

– $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \Re\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Proposition 4.2

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien. On a

(i) l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x,y\in E,\ |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|,$$

(ii) l'identité du parallélogramme :

$$\forall x,y\in E,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

(iii) formules de polarisation :

$$\text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R} \qquad \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

$$\text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C} \qquad \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-i\,\|x+iy\|^2+i\,\|x-iy\|^2)$$

▷ (ii) et (iii) développer les carrés.

(i) Soient $x,y\in E$. L'inégalité est triviale si x et y sont colinéaires. Supposons qu'ils ne le sont pas.

1^er^ cas : $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}$. Alors

$$\forall t\in\mathbb{R}, \qquad 0<\|x+ty\|^2 = \|x\|^2+2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2$$

donc $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 < 0$ et on en déduit le résultat.

2^e^ cas : $\langle x,y\rangle\in\mathbb{C}$. Alors il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $|\langle x,y\rangle| = e^{i\theta}\langle x,y\rangle = \langle x,e^{i\theta}y\rangle$ et on est ramené au cas précédent. □

Définition 4.3

Une famille $(f_j)_{j\in J}$ d'un espace préhilbertien $(E,\langle .,.\rangle)$ est orthogonale si

$$\forall j\neq k\in J, \qquad \langle f_j,f_k\rangle = 0$$

et orthonormale si

$$\forall j,k \in J, \qquad \langle f_j, f_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Proposition 4.4 (*Pythagore*)

Si $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ *est une famille orthogonale de* $(E, \langle .,. \rangle)$ *alors*

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2 .$$

Exemples : – La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormée.

– $(e^{2i\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2((0,1),\mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

– $\{\sqrt{2}\cos(2\pi nx), \sqrt{2}\sin(2\pi kx),\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est orthonormée dans $L^2((0,1),\mathbb{R})$ pour $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

– $\{e^{2i\pi nt}\mathbf{1}_{[k,k+1]},\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Définition 4.5

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertien et* A *une partie de* E*. L'orthogonal de* A *est*

$$A^\perp = \{x \in E,\ \langle x, a\rangle = 0,\ \forall a \in A\}$$

Proposition 4.6

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertien et* $A, B \subset E$*.*

(i) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E*.*

(ii) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad B^\perp \subset A^\perp$*.*

(iii) $A^\perp = (\overline{A})^\perp = \mathit{Vect}(A)^\perp$*.*

▷ (i) Pour $a \in E$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle a, x\rangle \end{array}$ est linéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) donc $a^\perp = \ker\langle ., a\rangle$ est fermé. Pour $A \subset E$, $A^\perp = \displaystyle\bigcap_{a\in A} a^\perp$ est fermé comme intersection quelconque de fermés.

(iii) $A \subset \overline{A}$ donc $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$ d'après (ii). Soit $x \in A^\perp$. Soit $b \in \overline{A}$. Il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \to b$. Par continuité du produit scalaire,

$$\langle x, b\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x, a_n\rangle = 0.$$

□

4.2 Espaces de Hilbert et théorème de projection

4.2.1 Espace de Hilbert

Définition 4.7

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet (pour la norme associée au produit scalaire).

Exemples : – $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.
– $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert.
– $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Contre-exemples : Soient $(H,\langle .,.\rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. $(F,\langle .,.\rangle)$ est un espace de Hilbert si et seulement si F est fermé dans $(H,\|.\|)$.
– $H=\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. $F=c_c(\mathbb{N},\mathbb{C})$ (suites à support compact) n'est pas fermé donc $(c_c(\mathbb{N},\mathbb{C}),\langle .,.\rangle_{\ell^2})$ est un espace préhilbertien mais pas un Hilbert.
– $H=L^2((0,1),\mathbb{R})$ $F=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle_{L^2(0,1)}$ n'est pas un Hilbert.

4.2.2 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Proposition 4.8

Soient $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(b_1,\dots,b_n)$ une base orthonormée de F.
(i) Pour tout $x\in E$, $d(x,F)=\inf\{\|x-y\|\,,\ y\in F\}$ est atteinte en

$$P_F(x)=\sum_{j=1}^{n}\langle b_j,x\rangle b_j$$

et

$$d(x,F)^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{n}|\langle b_j,x\rangle|^2.$$

(ii) L'application $P_F:E\to F$ est linéaire continue de norme 1.
(iii) $E=F\oplus F^{\perp}$.

$\triangleright$ (i) Pour $y \in F$,

$$\|x-y\|^2 = \Big\| \underbrace{x - P_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{P_F(x) - y}_{\in F} \Big\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|x - P_F(x)\|^2 .$$

Donc $d(x,F)^2 = \|x - P_F(x)\|^2 = \left\| x - \sum_{j=1}^n \langle b_j, x\rangle b_j \right\|^2$ d'où le résultat en développant.

(ii) $\|P_F(x)\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle b_j, x\rangle|^2 = \|x\|^2 - d(x,F)^2 \leq \|x\|^2$. Ceci montre que $P_F : E \to F$ est continue de norme inférieure ou égale à . De plus $P_F(x) = x,\ \forall x \in F$ donc $\|P_F\| = 1$.

(iii) On a $F \cap F^\perp = \{0\}$. Pour $x \in E$, $x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - P_F(x)}_{\in F^\perp}$ donc

$$E = F \oplus F^\perp.$$

$\square$

Applications : – Pour $f \in L^2((0,1),\mathbb{R})$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que

$$\|f - P\|_2 = \inf\{\|f - Q\|_2 ,\ Q \in \mathbb{R}_N[X]\}$$

(existence et unicité du polynôme (de degré N) de meilleure approximation)
Remarque : $E = L^\infty(0,1)$. Pour tout $f \in E$, il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, \mathbb{R}_N[X])$ mais ce polynôme de meilleure approximation n'est pas forcément unique, contrairement au cadre hilbertien.
$\triangleright$ Soient $f \in L^\infty(0,1)$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_N[X]$ telles que

$$\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf\{\|f - Q\|_\infty ,\ Q \in \mathbb{R}_N[X]\}.$$

Alors $\|P_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f - P_n\|_\infty$ est bornée. Donc il existe une extraction φ telle que $P_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P_\infty \in \mathbb{R}_N[X]$ et $\|f - P_\infty\| = d_\infty(f, \mathbb{R}_N[X])$. Par ailleurs, si $f = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ et $N = 1$ $d_\infty(f, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{2}$ est atteint en plusieurs fonctions. $\square$

– Régression linéaire. Soient $0 < x_1 < \cdots < x_n < \infty$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |a x_j + b - y_j|^2 = \inf\left\{ \sum_{j=1}^n |\alpha x_j + \beta - y_j|^2,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On projette le vecteur $(y_1, \ldots, y_n)^T$ sur $\mathrm{Vect}((x_1, \ldots, x_n)^T, (1, \ldots, 1)^T)$.

4.2.3 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 4.9

Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de H.

(i) Pour tout $x \in H$, il existe un unique vecteur $P_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$ tel que

$$\|x - P_{\mathcal{C}}(x)\| = d(x, \mathcal{C})$$

qu'on appelle projection de x sur $\mathcal{C}$.

(ii) $P_{\mathcal{C}}(x)$ est caractérisé par

$$P_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathcal{C}, \quad \Re(\langle x - P_{\mathcal{C}}(x), z - P_{\mathcal{C}}(x)\rangle).$$

(iii) $P_{\mathcal{C}} : H \to \mathcal{C}$ est 1-lipschitzienne : $\forall x_1, x_2 \in H,\ \|P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$.

(iv) En particulier, si F est un sous-espace vectoriel fermé de H alors pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$\mathbb{P}_F(x) \in F \qquad \text{et} \qquad \forall z \in F, \quad \Re(\langle x - P_F(x), z\rangle) = 0.$$

Application : Espérance conditionnelle.

Exemple : $H = L^2(0,1)$ $F = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}^{\perp}$ est un espace vectoriel fermé de $(H, \|.\|_2)$. Pour $h \in H$ $P_F(h) = h - \left(\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} h(t)\mathrm{d}t\right) \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ est l'unique point de F qui atteint $d_2(h, F)$.

Contre-exemples : $-$ $H_1 = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire de $L^2(0,1)$ est un espace préhilbertien mais pas un espace de Hilbert. On considère $F_1 = F \cap H1$. F_1 est un sous-espace vectoriel fermé de $(H_1, \langle ., . \rangle)$. Pour $h_1 \in H_1$ $d_2(h_1, F_1) = d_2(h_1, F)$ (approcher $P_F(h_1)$ en norme 2 par une fonction continue...) n'est atteinte qu'en $P_F(h_1)$ qui n'est pas continue donc n'appartient pas à F_1. Ainsi, l'hypothèse de complétude sur $(H, \langle ., . \rangle)$ est nécessaire.

$-$ $H = L^2(0,1)$ est un espace de Hilbert. $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(0,1)$ mais n'est pas fermé. Pour $f \in L^2(0,1) \backslash \mathbb{R}[X]$ alors

$$\|f - P\|_{\|.\|_2} (f, \mathbb{R}[X]) \underset{\text{Weierstrass}}{=} 0$$

donc l'hypothèse de fermeture est nécessaire.

$\triangleright$ (i) Soit $x \in H \backslash \mathcal{C}$ et $d = d(x, \mathcal{C}) > 0$.

– Unicité : Soient $x_{\mathcal{C}}^1, x_{\mathcal{C}}^2 \in \mathcal{C}$ tels que $\|x - x_{\mathcal{C}}^1\| = \|x - x_{\mathcal{C}}^2\| = d$. Alors, par l'identité du parallélogramme,

$$\begin{aligned} \|x_{\mathcal{C}}^1 - x_{\mathcal{C}}^2\|^2 &= \|(x - x_{\mathcal{C}}^1) - (x - x_{\mathcal{C}}^2)\|^2 = 2(\|x - x_{\mathcal{C}}^1\|^2 + \|x - x_{\mathcal{C}}^2\|^2) - \|2x - x_{\mathcal{C}}^1 - x_{\mathcal{C}}^2\|^2 \\ &= 4d^2 - 4 \underbrace{\left\| x - \frac{x_{\mathcal{C}}^1 + x_{\mathcal{C}}^2}{2} \right\|^2}_{\geq d} \leq 0 \end{aligned}$$

car $\frac{x_{\mathcal{C}}^1 + x_{\mathcal{C}}^2}{2} \in \mathcal{C}$ par convexité de $\mathcal{C}$ donc $x_{\mathcal{C}}^1 = x_{\mathcal{C}}^2$.

– Existence : Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d$. Par l'identité du parallélogramme et convexité de $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_p\|^2 &= \|(x - y_n) - (x - y_p)\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2) - 4\left\|x - \tfrac{y_n + y_p}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2) - 4d^2 \xrightarrow[n,p\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H. Comme H est complet, elle converge vers un vecteur $y_\infty \in H$. Alors $y_\infty \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est fermé) et

$$\|x - y_\infty\| = \lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = d.$$

D'après l'étape d'unicité, $\lim_{n\to+\infty} y_n$ ne dépend pas de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie, ce qui rend légitime la définition

$$P_{\mathcal{C}}(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

(ii) $\Rightarrow$ Soit $z \in \mathcal{C}$. Alors $(1-t)P_{\mathcal{C}}(x) + tz \in \mathcal{C}$ pour tout $t \in [0,1]$ par convexité de $\mathcal{C}$ donc pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \left\| \underbrace{x - ((1-t)P_{\mathcal{C}}(x) + tz)}_{(x - P_{\mathcal{C}}(x)) - t(z - P_{\mathcal{C}}(x))} \right\|^2 - \|x - P_{\mathcal{C}}(x)\|^2 = -2t\Re\langle x - P_{\mathcal{C}}(x), z - P_{\mathcal{C}}(x)\rangle + t^2 \|z - P_{\mathcal{C}}(x)\|^2.$$

En particulier, (diviser par $t \in]0,1]$),

$$\forall t \in]0,1], \qquad -2\Re\langle x - P_{\mathcal{C}}(x), z - P_{\mathcal{C}}(x)\rangle + t\|z - P_{\mathcal{C}}(x)\|^2 \geq 0$$

donc $(t = 0)$

$$\Re\langle x - P_{\mathcal{C}}(x), z - P_{\mathcal{C}}(x)\rangle \leq 0.$$

$\Leftarrow$ Soit $x_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ vérifiant $\forall z \in \mathcal{C}$, $\Re\langle x - x_{\mathcal{C}}, z - x_{\mathcal{C}}\rangle \leq 0$. Montrons que $\|x - x_{\mathcal{C}}\| = d(x, \mathcal{C})$. Pour tout $y \in \mathcal{C}$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|(x - x_{\mathcal{C}}) - (y - x_{\mathcal{C}})\|^2 = \|x - x_{\mathcal{C}}\|^2 + \|y - x_{\mathcal{C}}\|^2 - 2\Re\langle x - x_{\mathcal{C}}, y - x_{\mathcal{C}}\rangle \geq \|x - x_{\mathcal{C}}\|^2.$$

(iii) Soient $x_1, x_2 \in H$.

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|^2 &= \|(P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2)) + ((x_1 - P_{\mathcal{C}}(x_1)) - (x_2 - P_{\mathcal{C}}(x_2)))\|^2 \\
&= \|P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2)\|^2 + \|(x_1 - P_{\mathcal{C}}(x_1)) - (x_2 - P_{\mathcal{C}}(x_2))\|^2 \\
&\quad + \underbrace{2\Re\langle P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2), x_1 - P_{\mathcal{C}}(x_1)\rangle}_{\geq 0 \text{ par } (ii)} \\
&\quad -2\underbrace{\Re\langle P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2), x_2 - P_{\mathcal{C}}(x_2)\rangle}_{\leq 0 \text{ par } (ii)} \\
&\geq \|P_{\mathcal{C}}(x_1) - P_{\mathcal{C}}(x_2)\|^2 .
\end{aligned}$$

(iv) Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H alors $\{z - P_{\mathcal{C}}(x),\ z \in F\} = F$ (espace vectoriel). La caractérisation du (ii) s'écrit $\forall z \in F,\ \Re\langle x - P_{\mathcal{C}}(x), z\rangle \leq 0$ en prenant $-z$, on obtient l'égalité à 0. □

4.3 Applications du théorème de projection

4.3.1 Théorème du supplémentaire orthogonal

Théorème 4.10

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors

$$H = F \oplus F^{\perp} \qquad \text{et} \qquad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

▷ Il est clair que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Tout $x \in H$ s'écrit $x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^{\perp}}$ où $P_F : H \to F$ est la projection sur F.

De plus, il est clair que $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Si $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ alors $x \perp (x - P_F(x))$ donc $\|x - P_F(x)\|^2 = \langle x, x - P_F(x)\rangle - \langle P_F(x), x - P_F(x)\rangle = 0$ d'après le théorème de projection. Donc $x = P_F(x) \in F$. □

Exercice : Trouver des contre-exemples sans hypothèses Hilbert/fermé.

Corollaire 4.11

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est dense dans $(H, \|.\|)$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

▷ F est dense dans $(H, \|.\|)$ si et seulement si $\overline{F}^{\|.\|} = H$. Or $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}$. Donc F est dense si et seulement si $\overline{F}^{\perp} = 0$ *ie.* $F^{\perp} = \{0\}$ car $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$. □

4.3.2 Théorème de Riesz

Théorème 4.12

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $\phi \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\forall h \in H, \qquad \phi(h) = \langle f, h \rangle.$$

Applications : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $v : \Omega \to \mathbb{R}$. On veut trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = v \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En dimension 1, on aurait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on sait résoudre. En dimension supérieure, on réécrit l'équation en terme de produit scalaire dans l'espace de Sobolev H^1 (voir poly)

$\triangleright$ – Existence : Soit $\phi \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K}) \backslash \{0\}$. Alors $\ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(H, \|.\|)$. D'après le théorème du supplémentaire orthogonal,

$$H = \ker(\phi) \oplus \ker(\phi)^{\perp}$$

$\ker(\phi)$ est un hyperplan. Soient $e \in \ker(\varphi)^{\perp}$ tel que $\|e\| = 1$ et $f = \overline{\phi(e)}e$. Alors pour $h \in H$, on a $h = h_1 + \lambda e$ où $h_1 \in \ker(\phi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ de sorte que

$$\phi(h) = \phi(h_1) + \lambda\phi(e) = \lambda\phi(e)$$

et

$$\langle f, h \rangle = \langle \overline{\phi(e)}e, h_1 + \lambda e \rangle = \lambda\phi(e) \|e\|^2 = \lambda\phi(e)$$

donc

$$\forall h \in H, \qquad \phi(h) = \langle f, h \rangle.$$

– Unicité : Si $f_1, f_2 \in H$ satisfont $\forall h \in H,\ \langle f_1, h \rangle = \langle f_2, h \rangle$ alors

$$\|f_1 - f_2\|^2 = 0$$

donc $f_1 = f_2$. $\square$

4.4 Bases hilbertiennes

4.4.1 Définition, existence

Définition 4.13

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une base hilbertienne de H est une famille $(e_j)_{j \in J}$ orthonormée et totale :

$$\forall j,k \in J, \quad \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k} \qquad et \qquad Vect_{\mathbb{K}}(e_j,\ j \in J) \text{ est dense dans } (H, \|.\|)$$

Remarque : La famille $(e_j)_{j \in J}$ n'est pas forcément dénombrable.

Proposition 4.14

Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.

$\triangleright$ $\Leftarrow$ S'il existe une base hilbertienne dénombrable alors il existe une famille totale libre et dénombrable donc $(E, \|.\|)$ est séparable.

$\Rightarrow$ Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert séparable. Alors il existe une famille totale de H dénombrable $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour produire une suite orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(f_0, \dots, f_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_0, \dots, e_n)$ donc $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale $\square$

4.4.2 Caractérisation des bases hilbertiennes par l'égalité de Bessel

Théorème 4.15

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E.

(ii) $\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$

(iii) $\forall x, y \in E, \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle.$

Remarque : Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée alors $\forall x, y \in E$, la série $\sum \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$ converge absolument. En effet

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\langle y, e_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \, \|y\|$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les sommes finies.

$\triangleright$ $(iii) \Rightarrow (ii)$ $y = x$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ polarisation.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_{\|.\|}(x, \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_0, \ldots, e_{n_0})) < \varepsilon$. Alors, pour $n \geq n_0$, $d(x, \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)) < \varepsilon$. Or, pour $n \geq n_0$,

$$d_{\|.\|}(x, \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_0, \ldots, e_n))^2 = \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons l'égalité de Bessel. Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{n_0} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Alors, $d(x, \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_{n_0})) = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} |\langle e_k, x\rangle|^2 < \varepsilon$. □

Théorème 4.16

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E. Alors :

(i) $x \in E \mapsto (\langle e_k, x\rangle)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une isométrie linéaire (égalité de Bessel).

(ii) cette isométrie est surjective si et seulement si E est complet (tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$).

(iii) Pour tout $x \in E$, la série $\sum \langle e_n, x\rangle e_n$ converge dans E et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n = x.$$

C'est une série commutativement convergente : pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum \langle e_{\sigma(n)}, x\rangle e_{\sigma(n)}$ converge et $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_{\sigma(n)}, x\rangle e_{\sigma(n)}$.

⚠ La série $\sum \langle e_n, x\rangle e_n$ peut ne pas converger absolument : $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle| = +\infty$.

$\triangleright$ (*ii*) Si l'isométrie $E \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est surjective alors $(E, \|.\|)$ est isométrique à $(\ell^2, \|.\|_2)$ donc complet.

Réciproquement, supposons que E est complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On va construire $u \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \langle e_n, u\rangle = x_n$. Notons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_k = \sum_{n=0}^{k} x_n e_n$$

et montrons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon^2$. Alors, par le théorème de Pythagore, pour tout $k \geq n_0$ et $p \geq 1$,

$$\|u_{k+p} - u_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^{k+p} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Comme E est complet, $u = \lim_{k\to+\infty} u_k$ est bien définie dans E. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a,

$$\langle e_n, y\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle e_n, u_k\rangle = x_n$$

(*iii*) Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. D'après l'égalité de Bessel, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall N \geq n_0, \qquad \|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Alors, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

De plus, (e_n) est une base hilbertienne si et seulement si $(e_{\sigma(n)})$ est une base hilbertienne. $\square$

4.4.3 Application aux séries de Fourier

Théorème 4.17

On munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

et de la norme $\|.\|_2$ associée. Alors, $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $(L^2((0,2\pi),\mathbb{C}),\langle .,.\rangle)$.

$\triangleright$ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est clairement orthonormée. Montrons que l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{int}, n \in \mathbb{Z})$ est dense dans $(L^2((0,2\pi),\mathbb{C}),\|.\|_2)$.

Stratégie 1 : Stone Weierstrass.

Stratégie 2 : Preuve à la main (voir les rappels ci-après). Soient $g \in L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. On cherche un polynôme trigonométrique P tel que $\|g-P\|_2 < \varepsilon$. Par densité de $\mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ dans $(L^2((0,2\pi),\mathbb{C}),\|.\|_2)$, il existe $f \in \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ telle que $\|g-f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le théorème de Fejer, il existe un polynôme trigonométrique tel que $\|f-P\|_2 \leq \|f-P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où le résultat. $\square$

Définition 4.18

On définit le noyau de Dirichlet

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

et le noyau de Fejer :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad F_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)^{2}{}^{2}}{N\sin(\frac{t}{2})}.$$

Pour $f \in L^1((0,2\pi),\mathbb{C})$ on définit les coefficients de Fourier de f

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

la série de Fourier de f

$$\sum c_n(f)e^{int} \qquad \text{(possiblement non convergent, objet algébrique),}$$

ses sommes partielles

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = (f * D_N)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)D_N(s)ds$$

et leur moyenne de Césaro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(D_n * f)(t) = (F_N * f)(t).$$

Remarque : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} l$. La réciproque est fausse.

Ainsi, $(F_n * f)(t)$ a de meilleures propriétés de convergence que $(D_N * f)(t)$. C'est lié au fait que $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, mais pas $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$ car $\displaystyle\int_0^{2\pi} |D_N(t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

Théorème 4.19 (*Fejer*)

Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ $\|F_N * f - f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ (convergence uniforme par rapport à $t \in [0,2\pi]$).

▷ Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,2\pi], \qquad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $t \in [0,2\pi]$. Comme $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)\mathrm{d}s = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|f(t) - (F_N * f)(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)(f(t) - f(t-s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|s|<\delta} F_N(s)|f(t) - f(t-s)|\mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi>|s|>\delta} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})s)^2}{N\sin(\frac{s}{2})^2}|f(t) - f(t-s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \times 2\,\|f\|_\infty \times \frac{2\pi}{N\sin(\frac{\delta}{2})} < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

pour N assez grand. □

Conséquences : – Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est 2π-périodique et si $D_N * f$ converge simplement alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $(D_N * f)(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$.

– Pour tout $f \in L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ la série de Fourier de f converge dans $L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ et $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int}$ dans $L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$. Si $f \in \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ et si sa série de Fourier converge simplement alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int} = f(t)$ pour presque tout $t \in [0,2\pi]$.

$\triangleright$ $D_N * f \xrightarrow[N\to+\infty]{} f$ dans $L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ donc il existe une extraction φ telle que $(D_{\varphi(N)} * f)(t) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(t)$ converge pour presque tout $t \in [0,2\pi]$. Comme $(D_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement, sa limite simple est la même que $(D_{\varphi(N)} * f)_{N\in\mathbb{N}}$. $\square$

⚠ Il existe des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ dont la série de Fourier ne converge pas simplement.

Chapitre 5

Théorème de Baire et applications

5.1 Théorème de Baire

Théorème 5.1

Soit (X, d) un espace métrique complet.

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses dans (X, d) alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est dense.

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés de (X, d) d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide.

Contre-exemple sans hypothèse de complétude : $X = c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ n'est pas complet.

$$O_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}),\ x_n \neq 0\}$$

est un ouvert de $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et est dense dans $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ car si $x \notin O_n$ alors $\forall\varepsilon,\ x + \varepsilon e_n \in O_n$, $\|x - (x + \varepsilon e_n)\|_\infty = \varepsilon$. Mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing$ donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ n'est pas dense dans $(c_c(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$.

$\rhd$ (*i*) Soit $\omega \neq \varnothing$ un ouvert de (X, d). Montrons que $\omega \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n\right) \neq \varnothing$. On construit par récurrence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\bar{B}(x_0, r_0) \subset \omega \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap B(x_n, r_n) \text{ et } r_{n+1} < \frac{r_n}{2}\right).$$

$n = 0$: ω est un ouvert non vide de (X, d) donc il existe $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ tels que $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \omega$.

$n \to n+1$: Supposons $(x_0, \dots, x_n)$ et $(r_0, \dots, r_n)$ construits. Comme O_{n+1} est dense, il existe $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme $O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est ouvert, il existe $r_{n+1} > 0$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Quitte à réduire r_{n+1}, on a $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$. De plus,

$$\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap B(x_n, r_n).$$

On a $\forall n < p,\ d(x_n, x_p) < r_n < \frac{r_0}{2^n}$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). Comme (X, d) est complet, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\infty$. Comme les boules $(\bar{B}(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont emboîtées, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_\infty \in \bar{B}(x_n, r_n)$. En particulier $(n = 0)$ $x \in \omega$ et $(n \in \mathbb{N}^*)$ $x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$.

$(ii) \iff (i)$ par passage au complémentaire. □

5.2 Théorème de Banach-Steinhauss

5.2.1 Énoncé

Théorème 5.2 (*Banach-Steinhauss*)

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé et $(T_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}_c(E, F)$. Si $\sup\{\|T_i x\|\ ,\ i \in I\} < \infty$ pour tout $x \in E$ alors $\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\ ,\ i \in I\} < \infty$.

Corollaire 5.3

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}_c(E, F)$. Si $T_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(x)$ pour tout $x \in E$ alors $\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\ ,\ n \in \mathbb{N}\} < \infty, T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$.

Contre-exemple sans hypothèse de complétude : $E = c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$, $F = \mathbb{R}$. On considère la suite $T_n : (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mapsto n x_n \in \mathbb{R}$. Elle satisfait

$$\forall x \in c_c(\mathbb{N}), \qquad \sup\{|T_n(x)|,\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

mais

$$\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(c_c,\mathbb{R})} = n,\ n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

$\triangleright$ (du théorème) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{x \in E,\ \|T_i(x)\|_F \leq n,\ \forall i \in I\}$ est un fermé de $(E, \|.\|_E)$ comme intersection quelconque d'images réciproques de fermés par des applications continues. Par hypothèse, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Or E est complet et d'intérieur non vide donc d'après le théorème de Baire il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{E}_{n_0} \neq \varnothing$: il existe $x_0 \in E_n$ et $r_0 > 0$ tels que $B(x_0, r_0) \subset E_{n_0}$. Autrement dit, $\forall i \in I,\ \forall z \in B_E(0,1),\ \|T_i(x_0 + r_0 z)\|_F \leq n_0$. Par linéarité et l'inégalité triangulaire,

$$\forall i \in I,\ \forall z \in B_E(0,1), \qquad \|T_i(z)\|_F = \left\| \frac{1}{r_0}(T_i(x_0 + r_0 z) - T_i(x_0)) \right\|_F \leq \frac{2n_0}{r_0}.$$

Ainsi, $\forall i \in I,\ \|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \frac{2n_0}{r_0}$. $\square$

5.2.2 Application aux séries de Fourier

Proposition 5.4

Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique dont la série de Fourier ne converge pas en $t = 0$ (et donc ne converge pas simplement).

$\triangleright$ Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit $\Lambda_N : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & (D_N * f)(0) \end{array}$ définit une application linéaire.

Étape 1 : Montrons que Λ_N est continue $(\mathcal{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty) \to (\mathbb{C}, |.|)$ de norme $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}|D_N(t)|\mathrm{d}t$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a

$$|\Lambda_N(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(0 - s)\mathrm{d}s \right| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)||D_N(s)|\mathrm{d}s \leq \|f\|_\infty \|D_N\|_1 .$$

Donc Λ_N est continue et $|||\Lambda_N||| \leq \|D_N\|_1$.

$$D_N(s) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})s)}{\sin(\frac{s}{2})} = 0 \Longleftrightarrow (N + \frac{1}{2})s = k\pi.$$

Ainsi, $D_N(s)$ change N fois de signe sur $[0, \pi]$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère f_ε affine par morceaux, $f_\varepsilon \equiv \operatorname{sign}(D_N)$ sur $[0,\pi] \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k\pi}{N + \frac{1}{2}} - \varepsilon, \frac{k\pi}{N + \frac{1}{2}} + \varepsilon \right]$, de pente $\pm\frac{1}{\varepsilon}$ sur les $\left[\frac{k\pi}{N+\frac{1}{2}} - \varepsilon, \frac{k\pi}{N+\frac{1}{2}} + \varepsilon \right]$, paire (extension à $[-\pi, \pi]$), 2π-périodique (extension à $\mathbb{R}$). On a $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$ donc

$$\begin{aligned}
|||\lambda_N||| &\geq |\lambda_N(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(s)D_N(s)\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{2\pi}|D_N(s)|\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_\varepsilon(s) - \operatorname{sign}(D_N(s)))D_N(s)\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(s)|\mathrm{d}s - \|f_\varepsilon - \operatorname{sign}(D_N)\|_1 \|D_N\|_\infty \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(s)|\mathrm{d}s - \frac{2N\varepsilon}{2\pi}\|D_N\|_\infty .
\end{aligned}$$

Étape 2 : Montrons que $\|D_N\|_1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$. Par parité, on a :

$$\|D_N\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right|\mathrm{d}t$$

Or $\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ \sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{t}{2}$ donc

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((N+\frac{1}{2})s)|}{s}\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin(\tau)|}{\tau}\mathrm{d}\tau \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\tau|}{\tau}\mathrm{d}\tau \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\tau|\mathrm{d}\tau = C\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.
\end{aligned}$$

Étape 3 : Conclusion. Par l'absurde, supposons que $(\Lambda_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Comme $(\mathcal{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ est complet alors, d'après le théorème de Banach-Steinhauss, $\sup\{|||\Lambda_N|||,\ N \in \mathbb{N}\} < \infty$: contradiction. $\square$

5.3 Théorème d'isomorphisme de Banach

5.3.1 Énoncé

Théorème 5.5 (*de l'application ouverte*)

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Exercice : Trouver un contre-exemple sans hypothèse de complétude.

▷ *Étape 1 :* Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $F_n = n\overline{T(B_E(0, 1))}$. Les F_n sont des fermés de $(F, \|.\|_F)$. Comme T est surjective, $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Or $(F, \|.\|_F)$ est complet donc, par le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. Nécessairement, $\overset{\circ}{\overline{T(B_E(0, 1))}} \neq \varnothing$: il existe $x_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$ et $c > 0$ tels que

$$B_F(x_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Alors,

$$B_F(0, 4c) = -x_0 + B_F(x_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))} + \overline{T(B_E(0, 1))} \underset{\text{linéarité}}{\subset} 2\overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Donc $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$.

Étape 2 : Montrons que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$. Soit $y \in F$ avec $\|y\|_F \leq c$. On cherche $x \in E$ tel que $\|x\|_E < 1$ et $y = T(x)$. Construisons $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|z_n\|_E < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\|_F < \frac{c}{2^n}$.

– $n = 1$: On a $2y \in B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc ($\varepsilon = c$) il existe $\widetilde{z_1} \in B_E(0, 1)$ tel que $\|2y - T(\widetilde{z_1})\|_F < c$. Alors $z_1 = \frac{\widetilde{z_1}}{2}$ satisfait $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ et $\|y - T(z_1)\|_F < \frac{c}{2}$.

– $n \to n + 1$: $2^{n+1}(y - T(z_1 + \cdots + z_n)) \in B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc il existe $\widetilde{z}_{n+1} \in B_E(0, 1)$ tel que $\|2^{n+1}(y - T(z_1 + \cdots + z_n)) - T(\widetilde{z}_{n+1})\|_F < c$. alors $z_{n+1} = \frac{\widetilde{z}_{n+1}}{2^{n+1}}$ satisfait $\|z_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\|y - T(z_1 + \cdots + z_{n+1})\|_F < \frac{c}{2^{n+1}}$. Comme $(E, \|.\|_E)$ est complet et que $\sum z_n$ converge normalement alors $\sum z_n$ converge dans $(E, \|.\|_E)$. En passant à la limite ($n \to +\infty$) et en utilisant la continuité de T, on obtient

$$T\left(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\right) = y \qquad \text{et} \qquad \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\right\| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

□

Théorème 5.6 (*d'isomorphisme de Banach*)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Si $T : E \to F$ est bijective alors T^{-1} est continue $(F, \|.\|_F) \to (E, \|.\|_E)$.

$\triangleright$ Soit $c > 0$ comme dans le théorème de l'application ouverte. Soit $y \in F$ tel que $\|y\| \leq 1$. Alors $\frac{cy}{2} \in B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$, donc il existe $x \in E$ tel que $\frac{cy}{2} = T(x)$. Comme T est bijective, $T^{-1}(y) = \frac{2x}{c}$ et donc $\|T^{-1}(y)\|_E \leq \frac{2}{c}$. Ceci montre que T^{-1} est continue $(F, \|.\|_F) \to (E, \|.\|_E)$ et que $\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)} \leq \frac{2}{c}$. $\square$

5.3.2 Application aux séries de Fourier

Proposition 5.7

L'application $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} (L^1(0, 2\pi), \|.\|_1) & \to & (c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est linéaire, continue, injective mais pas surjective.

$\triangleright$ L'injectivité sera vue en TD. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}$ soit surjective. Alors $\mathcal{F}$ est un isomorphisme continu entre deux espaces de Banach donc, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, $\mathcal{F}^{-1} : (c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty) \to (L^1(0, 2\pi), \|.\|_1)$ est continu. En particulier, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in L^1(0, 2\pi)\ \|f\|_{L^1(0,2\pi)} \leq C \left\|(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\right\|_\infty .$$

Donc $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \leq C$: contradiction car on a vu que $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$. $\square$

Exemple : $\left(\dfrac{\mathbf{1}_{\{n\geq 2\}}}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Lemme : $f \in L^1(0, 2\pi)$ $\sum \dfrac{b_n(f)}{n}$ converge.

Chapitre 6

Topologie faible dans les espaces de Hilbert

6.1 Suites faiblement convergentes

Définition 6.1

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers $f \in H$ si $\langle f_n, g\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f, g\rangle$ pour tout $g \in H$. On note $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$.

Exemples : – Dans $L^2(0, 2\pi)$, $e^{int} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ par le lemme de Riemann-Lebesgue.

– Plus généralement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$. En effet, pour tout $z \in H$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle z, f_n\rangle|^2 \leq \|z\|^2$$

donc $\langle z, f_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 6.2

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$.

(i) $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \implies f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$

(ii) $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f \implies \|f\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|$

(iii) $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f \implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée*

(iv) $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \iff f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ *et* $\|f_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|$

(v) $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ et $g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g \implies \langle f_n, g_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f, g\rangle$ *(la conver-*

gence faible de g_n ne suffit pas)
(vi) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \implies f \in \overline{Conv(f_n,\ n \in \mathbb{N})}$ *où* $\overline{Conv(f_n,\ n \in \mathbb{N})}$ *est l'enveloppe convexe fermée de* $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *(adhérence de l'intersection de tous les convexes contenant* $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$*).*

$\triangleright$ *(i)* $|\langle f_n - f, g\rangle| \leq \|f_n - f\| \, \|g\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(ii) $\|f\|^2 = \Re(\langle f, f\rangle) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Re(\langle f, f_n\rangle)$ car $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$. Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\Re(\langle f, f_n\rangle) \leq \|f\| \, \|f_n\| \ \forall n \in \mathbb{N}$, donc $\|f\|^2 \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| \, \|f\|$.

(iii) On applique le théorème de Banach-Steinhaus :
– $(H, \|.\|)$ est complet et $(\mathbb{K}, |.|)$ est un espace vectoriel normé.
– $T_n : \begin{array}{ccc} H & \to & K \\ f & \mapsto & \langle f_n, f\rangle \end{array} \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ et $\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(H,\mathbb{K})} = \|f_n\|$ (Cauchy-Schwarz justifie que $\|T_n\| \leq \|f_n\|$ et $T_n\left(\frac{f_n}{\|f_n\|}\right) = \|f_n\|$).
– $(T_n(f) = \langle f_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout $f \in H$
donc $\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(H,\mathbb{K})} = \|f_n\|,\ n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

(iv) $\Rightarrow$ est trivial. Montrons $\Leftarrow$: $\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\Re\langle f_n, f\rangle$. Or $\langle f_n, f\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|^2$ car $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ et $\|f_n\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|^2$ par hypothèse. Donc $\|f_n - f\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(v) $\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle = \langle f_n - f, g\rangle + \langle f_n, g\rangle + \langle f_n, g_n - g\rangle$. Or $\langle f_n - f, g\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ et $\langle f_n, g_n - g\rangle$ est dominé par $\|f_n\| \, \|g_n - g\| \leq M \|g_n - g\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le point *(iii)*. Donc $\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $(g_n = f_n)$ $1 = \langle f_n, f_n\rangle \not\to 0$.

(vi) Notons $C = \overline{\mathrm{Conv}(f_n,\ n \in \mathbb{N})}$ et $P_C : H \to C$ la projection sur le convexe fermé C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Re\langle f - P_C(f), f_n - P_C(f)\rangle \leq 0.$$

À la limite $n \to +\infty$ on obtient $\|f - P_C(f)\|^2 \leq 0$ donc $f = P_C(f) \in C$. $\square$

Trois obstructions à la convergence forte (exemples) :
– Perte à l'infini :
➢ Perte dans les hautes fréquences. Exemple : suite orthonormée $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $f_n \not\to 0$.

➢ Perte à l'infini en espace : $H = L^2(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \neq 0$, $\tau_n f(x) = f(x-n)$. $\tau_n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\tau_n f \not\to 0$ car $\|\tau_n f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

▷ Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x-n)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y+n)f(y)\mathrm{d}y$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $\mathrm{Supp}(f) \subset]a,b[$. Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x-n)\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{a+n}^{\infty} |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

– Concentration : Dans $H = L^2(\mathbb{R})$, $f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ converge faiblement vers 0 mais pas fortement car $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

▷ Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle g, f_n\rangle = \sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{n}} g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{n}} |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par le théorème de convergence dominée car $|g|^2\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ et $|g|^2\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]} \leq |g|^2$ est une domination $L^1(\mathbb{R})$ indépendante de $n \in \mathbb{N}^*$. □

– Oscillation : $e^{inx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $L^2(0,T)$ mais ne converge pas fortement vers 0.

6.2 Compacité faible

Théorème 6.3

Dans un espace de Hilbert séparable, toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement.

▷ Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert séparable, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable et dense dans H et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\| \leq M$.

Étape 1 : Montrons qu'il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(\langle h_k, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\langle h_k, f_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\|h_k\|\, M$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). On obtient ψ par un procédé d'extraction diagonale.

Étape 2 : Montrons que $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout $g \in H$. Soit $g \in H$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\{h_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - h_{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Comme $(\langle h_{k_0}, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est de Cauchy donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq n_0, \qquad |\langle h_{k_0}, f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $m, n \geq n_0$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\langle g, f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}\rangle| & \leq & |\langle g - h_{k_0}, f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}\rangle| + |\langle h_{k_0}, f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}\rangle| \\ & \leq & \|g - h_{k_0}\| \times 2M + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \end{array}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, $(\langle g, f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc elle converge dans $\mathbb{K}$. Notons $T : \begin{array}{rcl} H & \to & \mathbb{K} \\ g & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} \langle g, f_{\psi(n)}\cdot\rangle \end{array}$

Étape 3 : On applique le théorème de Riesz. T est clairement linéaire. De plus, T est continue car

$$\forall g \in H, \qquad |T(g)| = \lim_{n\to+\infty} |\langle g, f_{\psi(n)}\rangle| \leq M \|g\|.$$

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\forall g \in H,\ T(g) = \langle f, g\rangle$$

c'est-à-dire $f_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$. □

6.3 Application à l'optimisation

Proposition 6.4

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert séparable, C un convexe fermé de H et $J : H \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ convexe et coercive :

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} J(x) = +\infty.$$

Alors, il existe $x_* \in C$ tel que $J(x_*) = \min\limits_C(J)$.

▷ Soit $m = \inf\limits_C(J)$. Par la propriété de la borne inférieure, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tel que $J(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ J(x_n) \leq M$. Comme J est coercive, il existe $R > 0$ tel que $\|x\| > R \Rightarrow J(x) > M$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leq R$. Donc il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et

$x_* \in H$ tels que $x_{\psi(n)}$. En particulier $x_* \in \overline{\mathrm{Conv}(x_{\psi(n)},\ n \in \mathbb{N})} \subset C$. Par convexité de J,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J(x_{\psi(n)}) \geq J(x_*) + \langle \nabla J(x_*), x_{\psi(n)} - x_* \rangle$$

À la limite $n \to +\infty$, on obtient $m \geq J(x_*)$. En conclusion, $x_* \in C$ et

$$J(x_*) = \min_C(J).$$

□

Chapitre 7

Théorème spectral

Théorème 7.1 (***théorème spectral en dimension finie***)

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors

(i) il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de T ;

(ii) les espaces propres de T sont deux à deux orthogonaux et les valeurs propres de T sont réelles ;

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in VP(T)\}$;

(iv) Inégalité de Rayleigh :

$$\min(VP(T)) \leq \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \max(VP(T)).$$

Théorème 7.2 (***théorème spectral sur un espace de Hilbert séparable***)

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint et compact. Alors

(i) il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T ;

(ii) les espaces propres de T sont deux à deux orthogonaux et les valeurs propres de T sont réelles ;

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in VP(T)\}$;

(iv) Inégalité de Rayleigh :

$$\min(VP(T)) \leq \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \max(VP(T)).$$

$\triangleright$ (de $(i) + (ii) \Rightarrow (iii) + (iv)$ avec inf et sup) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne formée de valeurs propres de T : $\forall n \in \mathbb{N},\ T(e_n) = \lambda_n e_n$.

Étape 1 : Montrons que pour tout $x \in H$, la série $\sum \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n$ converge vers $T(x)$. Soit $x \in H$. $\sum_{n=0}^{N} \lambda \langle e_n, x\rangle e_n = T\left(\sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n\right)$ car la somme est finie donc

$$\begin{aligned}\left\|T(x) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n\right\| &= \left\|T\left(x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n\right)\right\| \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)} \left\|x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n\right\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

car $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.

Étape 2 : Montrons (iii) avec max $\leftarrow$ sup. Soit $x \in H$. On a, par l'étape 1 et comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée,

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n \langle e_n, x\rangle|^2 \leq \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{VP}(T)\}^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2}_{=\|x\|^2 \text{ (Bessel)}}$$

Étape 3 : Montrons (iv) avec min $\leftarrow$ inf et max $\leftarrow$ sup. Soit $x \in H$, par l'égalité de Bessel, on a

$$\langle T(x), x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T(x), e_n\rangle \langle e_n, x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\langle e_n, x\rangle|^2$$

d'où les inégalités voulues. $\square$

7.1 Endomorphisme adjoint

Définition 7.3

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et $g, f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que g est l'endomorphisme adjoint de f si $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$. On note alors $g = f^*$. On dit que f est autoadjoint si $f = f^*$.

▷ (de l'unicité de l'adjoint) Si $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E)$ vérifient

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g_1(t)\rangle = \langle x, g_2(y)\rangle$$

alors

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle x, (g_1 - g_2)(y)\rangle = 0.$$

En particulier ($x = (g_1 - g_2)(y)$),

$$\forall y \in E, \qquad \|(g_1 - g_2)(y)\|^2 = 0$$

donc $g_1 = g_2$. $\square$

Exemple : $H = \ell^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et $T : \ell^2 \to \ell^2$ le shift à droite $T(u) = (0, u_1, u_2, \dots)$.

$$\langle T(u), v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_{n+1} = \langle u, T^*(v)\rangle$$

avec $T^*(v) = (v_2, v_3, \dots)$: shift à gauche.

Proposition 7.4

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien.

(i) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ admettent des adjoints f^* et g^* alors $f^{**} = f$, $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(ii) Si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ est autoadjoint alors ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles.

(iii) Si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*.

▷ manipulations élémentaires : exercice. $\square$

Théorème 7.5

Sur un espace de Hilbert, tout endomorphisme continu admet un adjoint. De plus, $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$.

▷ Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(H)$. Soit $x \in H$. L'application $\begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \langle x, T(y)\rangle \end{array}$ est linéaire et continue car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, T(y)\rangle| \leq \|x\| \, \|T(y)\| \leq \|x\| \, \|T\| \, \|y\| . \tag{7.1}$$

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $u_x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \qquad \langle u_x, y\rangle = \langle x, T(y)\rangle.$$

L'unicité de u_x permet de définir $T^* : \begin{array}{ccc} H & \to & H \\ x & \mapsto & u_x \end{array}$ et de montrer que T^* est linéaire. Grâce à (7.1) on a

$$\forall x, y \in H, \qquad |\langle T^*(x), y\rangle| = |\langle x, T(y)\rangle| \leq \|x\| \, \|T\| \, \|y\| .$$

En particulier, $(y = T^*(x))$,

$$\forall x \in H, \qquad \|T^*(x)\|^2 \leq \|x\| \, \|T\| \, \|T^*(x)\| \, .$$

Ainsi, $\|T^*\| \leq \|T\|$. La même inégalité avec $T \leftarrow T^*$ donne $\|T^{**}\| = \|T\| \leq \|T^*\|$. Donc $\|T\| = \|T^*\|$. □

Contre-exemple : $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

est un espace préhilbertien (mais pas de Hilbert). $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est linéaire mais pas continue sur $(H, \|.\|_{L^2(0,1)})$. T n'admet pas d'adjoint. Par l'absurde si $\langle T(P), Q \rangle = \langle P, T^*(Q) \rangle$, alors

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \qquad \int_0^1 P'(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t) \underbrace{T^*(Q)(t)}_{\in \mathbb{R}[X]} \mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^1 P'(t)Q(t)\mathrm{d}t = P(1)Q(1) - P(0)Q(0) - \int_0^1 P(t)Q'(t)$$

donc

$$\forall P \in \mathbb{R}, \quad \int_0^1 P(t) \underbrace{R(t)}_{T^*(Q)+Q'} \mathrm{d}t = P(1)Q(1) - P(0)Q(0).$$

Avec $P = X^n$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^n R(t)\mathrm{d}t = Q(1)$$

donc $Q(1) = 0$ (à la limite) ce qui est faux en général.

7.2 Opérateurs compacts sur un espace de Banach

Définition 7.6

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. T est compact si $T(\overline{B}_E(0,1))$ est relativement compact dans $(F, \|.\|_F)$. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts $E \to F$.

Remarque : Si T est compact, T est continue.

Exemples : – Id : $E \to E$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

– Les opérateurs de rang finis sont compacts.

– Les opérateurs à noyau sont compacts :

$$T : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right) \end{array}$$

quand $K \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
Preuve : théorème d'Ascoli. Exemple : produits de convolutions.

– La primitive $T : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^x f \right) \end{array}$ est compact (Ascoli)

Proposition 7.7

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$, $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach et $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$.

(i) Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}_c(E,F)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$.

(ii) Si $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $S \in \mathcal{K}(F,G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$.

$\triangleright$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_E(0,1)$.

(i) Comme T est compact, il existe $y \in F$ et une extraction ϕ tels que $T(x_{\phi(n)}) \to y$ dans $(F, \|.\|_F)$. Par continuité de S, $S \circ T(x_{\phi(n)}) \to S(y)$ dans $(G, \|.\|_G)$.

(ii) $\left(\frac{T(x_n)}{\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}}\right) \subset \overline{B}_F(0,1)$ et S est compact donc il existe $z \in G$ et une extraction ϕ tels que $S\left(\frac{T(x_{\phi(n)})}{\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}}\right) \to z$ dans $(G, \|.\|_G)$. Alors

$$S \circ T(x_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \, \|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$$

dans $(G, \|.\|_G)$. □

7.3 Spectre et valeurs propres

Définition 7.8

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

L'ensemble résolvant de T est $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (T - \lambda Id) : E \to E$ bijectif$\}$.

Le spectre de T est $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (T - \lambda Id) : E \to E$ n'est pas injectif ou n'est pas surjectif$\}$.

L'ensemble des valeurs propres de T est

$$VP(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}.$$

Remarque : 1. Si $\lambda \in \rho(T)$, alors $(T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} : E \to E$ est continu (théorème d'isomorphisme de Banach).

2. $\mathrm{VP}(T) \subset \sigma(T)$ avec égalité si E est de dimension finie mais l'inclusion peut être stricte en dimension infinie.

Exemples : – $E = \ell^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et $T : E \to E$ shift à droite)($T(u) = (0, u_1, u_2, \dots)$). $0 \in \sigma(T)$ car T n'est pas bijectif $E \to E$ (pas surjectif) mais $0 \notin \mathrm{VP}(T)$ car $T(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Donc $\mathrm{VP}(T) \subsetneq \sigma(T)$.
Exercice : Déterminer $\mathrm{VP}(T)$ et $\sigma(T)$.

– $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ et $T : E \to E$ définie par $T(f)(x) = xf(x)$. Alors $\mathrm{VP}(T) = \varnothing$ et $\rho(T) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. En effet, $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\subset \rho(T)$ car

$$(T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} g = \frac{g}{x - \lambda}.$$

$[0,1] \subset \sigma(T)$ car $g \equiv 1$ n'admet pas d'antécédent continu sur $[0,1]$ par $(T - \lambda \mathrm{Id})$.

Théorème 7.9

Soit $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un espace de Hilbert de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(H)$.
(i) $0 \in \sigma(T)$.
(ii) Si $VP(T)\backslash\{0\}$ est infini alors son unique valeur d'adhérence est 0.
(iii) $VP(T)$ est fini ou dénombrable.
(iv) $\inf VP(T) = \min VP(T)$ et $\sup VP(T) = \max VP(T)$,
$\sup\{|\lambda|,\ \lambda \in VP(T)\} = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in VP(T)\}$.

$\triangleright$ (i) $0 \in \sigma(T) \Longleftrightarrow T$ n'est pas bijectif. Par l'absurde, supposons que $0 \in \rho(T)$. Alors $T : H \to H$ est linéaire continue et bijective donc (théorème d'isomorphisme de Banach) $T^{-1} : H \to H$ est continu. Donc $\mathrm{Id} = \underbrace{T^{-1}}_{\text{continu}} \circ \underbrace{T}_{\text{compact}}$ est compact, c'est-à-dire $\overline{B}_H(0,1)$ est compacte dans H. D'après le théorème de Riesz, H est de dimension finie : absurde.

(ii)Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de valeurs propres de T non nulles et deux à deux distinctes et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ des vecteurs propres associés : $\forall n \in \mathbb{N},\ T(x_n) = \lambda_n x_n$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}\{x_0, \dots, x_n\}.$$

Montrons que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\{y_0, \dots, y_n\}$ =$\mathrm{Vect}\{x_0, \dots, x_n\}$.

Étape 1 : Montrons que $T(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in \overline{B}_H(0,1)$ et T est compact, alors $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans H. Soient $z \in H$ et une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tels que $T(y_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$ dans $(H, \|.\|)$. On a (T admet un adjoint car T est continu sur un espace de Hilbert)

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle z, T(y_{\phi(n)})\rangle = \lim_{n\to+\infty} T^*(z), y_{\phi(n)}\rangle = 0$$

car $y_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite orthonormée).

Étape 2 : Montrons que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{array}{rcl} (T-\lambda_n\mathrm{Id})(y_n) & = & (T-\lambda_n\mathrm{Id})(\alpha_n x_n + \alpha_{n-1}x_{n-1} + \cdots + \alpha_1 x_1) \text{ par construction} \\ & = & \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_{n-1} + \cdots + \alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1 \\ & & \in \mathrm{Vect}\{x_0,\ldots,x_{n-1}\} = \mathrm{Vect}\{y_0,\ldots,y_{n-1}\} \end{array}$$

donc $\|T(y_n)\|^2 = \|(T-\lambda_n\mathrm{Id})(y_n) + \lambda_n y_n\|^2 = \|(T-\lambda_n\mathrm{Id})(y_n)\|^2 + |\lambda_n|^2 \geq |\lambda_n|^2$. D'après l'étape 1, $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(*iii*) $\mathrm{VP}(T)\backslash\{0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{\lambda \in \mathrm{VP}(T),\ |\lambda| > \frac{1}{n}\}$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (0 est l'unique valeur d'adhérence de $\mathrm{VP}(T)\backslash\{0\}$) donc $\mathrm{VP}(T)$ est fini ou dénombrable.

(*iv*) ok. □

Chapitre 8

Théorème de Hahn-Banach – Compléments de dualité

8.1 Théorème de Hahn-Banach analytique

Théorème 8.1

Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et $g \in F' = \mathcal{L}_c(F, \mathbb{R})$. Alors il existe $\widetilde{g} \in E'$ telle que $\widetilde{g}_{|F} = g$ et $\|\widetilde{g}\|_{E'} = \|g\|_{F'}$.

Rappel : On a

$$\|g\|_{F'} = \sup\{_{F'}\langle g, x\rangle_F,\ x \in F \text{ et } \|x\| = 1\}$$

et

$$\|\widetilde{g}\|_{E'} = \sup\{_{E'}\langle \widetilde{g}, x\rangle_E,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

Corollaire 8.2

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, alors

$$\|x\| = \max\{_{E'}\langle g, x\rangle_E,\ g \in E' \text{ et } \|g\|_{E'} = 1\}$$

(caractérisation de la norme par dualité).

Remarque : Il faut bien distinguer le rappel qui est une définition avec sup qui peut ne pas être atteint du résultat du corollaire où sup=max.

$\triangleright$ du corollaire. Pour tout $g \in E'$ tel que $\|g\|_{E'} = 1$, on a

$$_{E'}\langle g, x\rangle_E \leq \|g\|_{E'} \|x\| \leq \|x\|$$

donc

$$\|x\| \geq \sup\{_{E'}\langle g, x\rangle_E,\ g \in E',\ \|g\|_E \leq 1\}.$$

Pour conclure, on construit $\widetilde{g} \in E'$ tel que $\|\widetilde{g}\|_{E'} = 1$ et $\|x\| = {}_{E'}\langle \widetilde{g}, x\rangle_E$. On applique Hahn-Banach avec $F = \mathbb{R}x$ et $g \in F'$ défini par $g(tx) = t\,\|x\|$ qui vérifie bien $\|g\|_{F'} = 1$. $\square$

$\triangleright$ du théorème de Hahn-Banach sur un espace de Hilbert. Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, il existe $\overline{g} \in (\overline{F})'$ tel que $\overline{g}_{|F} = g$ et $\|\overline{g}\|_{(\overline{F})'} = \|g\|_{F'}$. Comme $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, le théorème du supplémentaire orthogonal s'applique : $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$. On définit $\widetilde{g} \in H'$ par, $\forall (x, y) \in \overline{F} \times F^{\perp}$, ${}_{H'}\langle \widetilde{g}, x + y\rangle_H = {}_{(\overline{F})'}\langle \overline{g}, x\rangle_{\overline{F}}$. Alors

$$|_{H'}\langle \widetilde{g}, x + y\rangle_H| = {}_{(\overline{F})'}\overline{g}, x\rangle_{\overline{F}} \leq \|\overline{g}\|_{(\overline{F})'}\,\|x\| \leq \|g\|_{F'}\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \leq \|g\|_{F'}\,\|x + y\|\,.$$

Donc $\|\widetilde{g}_{H'}\| \leq \|g\|_{F'}$. Or $\widetilde{g}$ prolonge g donc $\|\widetilde{g}\|_{H'} \geq \|g\|_H$. $\square$

Lemme 8.3

Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel, $g \in F'$, $x_0 \in E\backslash F$ et $G = F \oplus \mathbb{R}x_0$. Il existe $h \in G'$ tel que $h_{|F} = g$ et $\|h\|_{G'} = \|g\|_{F'}$.

$\triangleright$ On définit h par $\forall x \in F,\ t \in \mathbb{R},\ h(x + tx_0) = g(x) + t\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi. On peut supposer $\|g\|_{F'} = 1$.

$$\begin{aligned}(\forall x \in F, \forall t \in \mathbb{R},\ |h(x + tx_0)| \leq \|x + tx_0\|) &\iff (\forall x \in F,\quad |h(x + x_0)| \leq \|x + x_0\|)\\ &\iff (\forall x \in F,\ -\|x + x_0\| \leq g(x) + \alpha \leq \|x + x_0\|)\\ &\iff (\forall x \in F,\ g(-x) - \|x + x_0\| \leq \alpha \leq \|x + x_0\| - g(x))\end{aligned}$$

$$\textit{ie.}\ (\sup\{g(y) - \|y - x_0\|\,,\ y \in F\} \leq \alpha \leq \inf\{\|x + x_0\| - g(x),\ x \in F\})$$

Pour montrer qu'un tel $\alpha \in \mathbb{R}$ existe, on va montrer que

$$\forall x, y \in F,\ g(y) - \|y - x_0\| \leq \|x + x_0\| - g(x)) \iff (\forall x, y \in F,\ g(x + y) \leq \|x + x_0\| + \|y - x_0\|)$$

qui est vrai par inégalité triangulaire car $\|g\|_{F'} = 1$. $\square$

$\triangleright$ du théorème de Hahn-Banach de dimension finie : Récurrence descendante sur $\dim(F)$ + lemme à chaque itération. $\square$

Rappel : Lemme de Zorn : Tout ensemble non vide muni d'un ordre inductif admet un élément maximal. (ordre inductif : toute famille totalement ordonnée admet un majorant.)

$\triangleright$ du théorème de Hahn-Banach en toute généralité : On applique l'axiome de Zorn à l'ensemble Z des couples $(D(h), h)$ où $D(h)$ est un sous-espace vectoriel de F et $h \in D(h)'$ sont tels que $h_{|F} = g$ et $\|h\|_{D(h)'} = \|g\|_{F'}$, qui est non vide car $(F, g) \in Z$ et est muni d'un ordre inductif :

$$D(h_1, h_1) \leq (D(h_2), h_2) \text{ si } D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_{2\,|D(h_1)} = h_1.$$

En effet, soit $(D(h_n), h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite totalement ordonnée de Z :

$$\forall n \neq m, \qquad (D(h_n), h_n) \leq (D(h_m), h_m) \text{ ou } (D(h_m), h_m) \leq (D(h_n), h_n).$$

Alors $D^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(h_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $n \neq m$ et $D(h_n) \cap D(h_m) \neq \varnothing$ alors, par exemple, $D(h_n) \subset D(h_m)$ (suite totalement ordonnée) et $h_{m\,|D(h_m)} = h_n$ donc $h_n(x) = h_m(x),\ \forall x \in D(h_m) \cap D(h_n)$. Ceci permet de définir

$$h^* : \begin{array}{ccl} D^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h_n(x) \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ est tel que } x \in D(h_n). \end{array}$$

Alors $|h^*(x)| = |h_n(x)| \leq \|g\|_{F'} \|x\|$ donc $\|h^*\|_{(D^*)'} \leq \|g\|_{F'}$. Soient $\varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}$, $x \in D(h_n)$ tel que $\|x\| = 1$ et $|h_n(x)| > \|g\|_{F'} - \varepsilon$. Alors $|h^*(x) = |h_n(x)| > \|g\|_{F'} - \varepsilon$ donc $\|h^*\|_{(D^*)'} = \|g\|_{F'}$. Ainsi, $(D^*, h^*) \in Z$ et $(D^*, h^*) \geq (D(h_n), h_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme de Zorn, Z admet un élément maximal $(\widetilde{F}, \widetilde{g})$. Si $\widetilde{F} \subsetneq E$ alors le lemme permet de prolonger $\widetilde{g}$ en restant dans Z, ce qui contredit la maximalité. Donc $\widetilde{E} = F$. $\square$

8.2 Compléments de dualité

Proposition 8.4

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On munit E' de la norme subordonnée à $\|.\|$

$$\|g\|_{E'} = \sup\{{}_{E'}\langle g, x\rangle_E,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}$$

et E'' de la norme subordonnée à $\|.\|_{E'}$

$$\|\xi\|_{E''} = \sup\{{}_{E''}\langle \xi, g\rangle_{E'},\ g \in E' \text{ et } \|g\|_{E'} = 1\}.$$

Alors l'injection canonique $J : \begin{array}{ccc} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} E' & \mapsto & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & {}_{E'}\langle g, x\rangle_E \end{array}\right) \end{array}$ *est une isomé-*

trique :

$$\forall x_0 \in E, \qquad \|J(x_0)\|_{E''} = \|x_0\| \, .$$

▷ *cf.* corollaire. □

Définition 8.5

Un espace de Banach $(E, \|.\|)$ est réflexif si l'injection canonique J est surjective.

Remarque : 1. Cette propriété compense l'absence de théorème de Riesz sur les espaces de Banach.

2. J surjectif $\Rightarrow$ E complet car $(E'' = \mathcal{L}_c(E', \mathbb{R}), \|.\|_{E''})$ est complet.

Exemples d'espaces réflexifs : – les espaces de dimension finie car $\dim(E'')=\dim(E)$;

– les espaces $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs car $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}))' = \ell^{p'}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ pour $1 \leq p < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

– les espaces $L^p(\nu)$ pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs $(L^p(\nu))' = L^{p'}(\nu)$ où ν est σ-finie.

Exemple d'espaces non-réflexif : $(c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ (suites tendant vers 0) car $(c_0)' = \ell^1$ et $(\ell^1)' = \ell^\infty \supsetneq c_0$.

$\ell^1 \subset (c_0)'$ car si $u \in \ell^1$, on définit $\begin{array}{ccc} c_0 & \to & \mathbb{R} \\ (x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n \end{array}$ et $\left| \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n \right| \leq \|u\|_1 \|x\|_\infty$.

Si $\xi \in (c_0)'$ on définit $u_n = \xi(e_n) \in \mathbb{R}$. Montrons que $u \in \ell^1$

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n| = \sum_{n=0}^{N} \xi(\varepsilon_n e_n) = \xi() \leq \|\xi\|_{(c_0)'} \Rightarrow u \in \ell^1.$$

Chapitre 9

Fonctions d'une variable réelle

9.1 Dérivabilité

Définition 9.1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $f : I \to E$ et $a \in I$.

– *f est dérivable en a si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie dans $(E, \|.\|)$ quand h tend vers 0, notée $f'(a)$.*

– *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I.*

– *$f \in \mathcal{C}^1(I)$ si f est dérivable sur I et $f' \in \mathcal{C}^0(I, E)$.*

Proposition 9.2

(i) (dérivable en a) $\Longrightarrow$ (continue en a) réciproque fausse : $|x|$,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

n'est pas dérivable en 0 car $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin(\frac{1}{h})$.

(ii) $(\mathcal{C}^1(I)) \Longrightarrow$ (dérivable sur I) réciproque fausse : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$, dérivable en 0 avec $g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} h\sin(\dfrac{1}{h}) = 0$ mais $g \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $f'(x) \not\Longrightarrow 0$.

(iii) (Leibniz) $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}$

(iv) (Fonctions composées) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

(v) f dérivable sur I et f croissante $\Longrightarrow f' \geq 0$.

(vi) f dérivable sur I ouvert et admet un extremum local en $x_* \in I$ ($=\overset{\circ}{I}$) $\Longrightarrow f'(x_*) = 0$.

Contre-exemple : $f(x) = x$ admet un extremum en $x = 1$ sur [0,1] mais $f'(1) \neq 0$.

9.2 Rolle, Accroissements finis, Taylor pour les fonctions à valeurs réelles

9.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 9.3

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

$\triangleright$ On peut supposer f non constante. Alors $\inf\limits_{]a,b[}(f) < \sup\limits_{]a,b[}(f)$. Quitte à remplacer f par $(-f)$, on peut supposer $f(a) = f(b) < \sup\limits_{]a,b[}(f)$. f est continue sur le compact $[a, b]$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \max\limits_{[a,b]}(f)$. Alors $c \in]a, b[$ et $f'(c) = 0$ (extremum local à l'intérieur). $\square$

Contre-exemple : $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{2i\pi t} \end{array}$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, vérifie $f(0) = f(1)$ mais $f'(t) \neq 0, \ \forall t \in]0, 1[$.

Exemple d'application : P scindé sur $\mathbb{R} \Longrightarrow P'$ scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9.4 (*des accroissements finis*)

Soient $a < b \in \mathbb{R}, \ f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

$\triangleright$ (technique de la fonction auxiliaire) On introduit

$$\phi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - f(a) - K(t - a) \end{array}$$

avec $K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ϕ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $\phi(a) = \phi(b) = 0$ donc (Rolle) il existe $c \in]a, b[$ telle que $\phi'(c) = 0$ c'est-à-dire $K = f'(c)$. $\square$

Corollaire 9.5

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable.
(i) f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$.
(ii) Si $f' > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante.

$\triangleright$ $(i) \Leftarrow$, (ii) : accroissements finis.

La réciproque de (ii) est fausse : $x \in]-1, 1[\overset{f}{\mapsto} x^3$, $f'(0) = 0$ mais $f'(0) = 0$ mais f strictement croissante. $\square$

9.2.2 Taylor-Lagrange

Théorème 9.6

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ (il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in \mathcal{C}^n(]a - \varepsilon, b + \varepsilon[, \mathbb{R})$) une fonction $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{n+1}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

$\triangleright$ On introduit la fonction auxiliaire

$$\phi : \begin{array}{rcl} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k - K(x - a)^{n+1} \end{array}$$

avec $K \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(b) = 0$. Alors ϕ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $\phi(a) = \phi(b) = 0$ donc (Rolle) il existe $c_1 \in]a, b$ tel que $\phi'(c_1) = 0$. Montre l'existence de $(c_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ tels que $c_j \in]a, c_{j-1}[$ et $\phi^{(j)}(c_j) = 0$, $\forall 1 \leq j \leq n + 1$. $c = c_{n+1}$ convient car $\phi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - K(n + 1)!$. $\square$

9.3 Inégalité des accroissements finis, Taylor pour les fonctions à valeurs vectorielles

9.3.1 Taylor reste intégral

Théorème 9.7

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R}^N)$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

$\triangleright$ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Remarque : On peut remplacer $\mathbb{R}^N$ par un espace de Banach, mais l'intégrale devient seulement une intégrale de Riemann.

Ruse : Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f(0)=0$ alors $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$ (théorème de dérivation sous l'intégrale).

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f^{(k)}(0)=0$ pour $k=0,\ldots,N$ alors

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x^N} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ \frac{f^{(N)}(0)}{N!} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} f^{(N+1)}tx\mathrm{d}t$.

Application 2 : Développements limités usuels, par exemple

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Application 3 : Développements en série entière. La fonction de Bessel

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$$

est développable en série entière en tout point x c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum \frac{J_0^{(k)}(x)}{k!}h^k$ a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme est égale à $J_0(x+h)$ pour $|h| < R$.
En effet,

$$\left| J_0(x+h) - \sum_{k=0}^{N} \frac{J_0^{(k)}(x)}{k!}h^k \right| \leq h^{N+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!}\left|J_0^{(N+1)}(x+th)\right| \leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!}.$$

9.3.2 Taylor-Young

Théorème 9.8

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}^N)$. *Alors*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

Remarque : Toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet un développement limité à l'ordre n. La réciproque est fausse. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$ vérifie $f(h) = o(h^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais elle n'est pas $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. En effet,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h}} \sin\left(e^{\frac{1}{h}}\right) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Mais

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \not\to 0.$$

9.3.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 9.9 (*IAF*)

Soient $a < b \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R}^N)$. *Alors*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

Remarque : Vrai en remplaçant $\mathbb{R}^N$ par un espace de Banach.

9.3.4 Prolongement

Théorème 9.10

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^N)$ *dérivable sur* $]a,b[$. *Si* $f'(x)$ *admet une limite finie* L *quand* x *tend vers* a^+ *alors* f *est dérivable à droite en* a *et*

$f'_d(a) = L$.

$\triangleright$ Pour tout $h > 0$, il existe $c_h \in]a, a+h[$ tel que $f(a+h) - f(a) = hf'(c_h)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe δ tel que $0 < h < \delta \implies |f'(h) - L| < \varepsilon$. Alors, pour tout $h \in]0, \delta[$, on a $\left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - L\right| = |f'(c_h) - L| < \varepsilon$. □

Variation : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(]a,b[,\mathbb{R})$. Si $f^{(k)}(x)$ admet une limite finie L_k quand x tend vers a^+ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ alors f est n fois dérivable en a et $f^{(k)}(a) = L_k$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Exemple : $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \end{array}$ Alors $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(x) = F_k(x)e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Donc $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On pose $k(x) = g(x)g(1-x)$ et $h(x) = \frac{\int_0^x k}{\int_0^1 k}$. $h(x)h(3-x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ a support compact et vaut 1 sur [1,2].

9.4 Fonctions convexes

9.4.1 Définition

Définition 9.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

$f : I \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in]0,1[, \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Lemme 9.12 (*Croissance des taux d'accroissement*)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z \in I$. Alors

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

En particulier, $x < y < x' < y' \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$.

▷ Soient $x < y < z \in I$. Alors $y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$ (combinaison convexe) donc

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z).$$

– $f(y) - f(x) \leq \left(\frac{z-y}{z-x} - 1\right) f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) = (y-x)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ d'où la première inégalité.

– $(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)f(z)$ soit $(x-y)f(z) \leq (z-y)f(x) + (x-z)f(y)$ d'où

$$(x-y)(f(z)-f(x)) \leq (z-y+y-x)f(x) + (x-z)f(y) \leq (z-x)(f(x)-f(y))$$

d'où la deuxième inégalité.

On applique les inégalités avec x, y, x' puis y, x', y' et on obtient le résultat. □

9.4.2 Régularité des fonctions convexes

Théorème 9.13

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors

(i) pour tout $a < b \in I$, f est lipschitzienne sur $[a, b]$,

(ii) f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point de I,

(iii) f'_d et f'_g sont des fonctions croissantes sur I et

$$x < y \qquad \Longrightarrow \qquad f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq f'_g(y) \leq f'_d(y).$$

(iv) L'ensemble D des points de I en lesquels f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable et f' est continue sur $I \backslash D$.

Remarque : f peut ne pas être lipschitzienne sur tout I.

▷ (i) Soient $a < b \in I$ et $a', b' \in I$ tels que $a' < a < b < b'$. Par croissance des taux d'accroissement, on a

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad \frac{f(a)-f(a')}{a-a'} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(b')-f(b)}{b'-b}$$

donc

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M = \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\right|, \left|\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}\right|\right\}$$

c'est-à-dire $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

(ii) Soit $x \in I$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x[\subset I$ et $y > x \in I$ fixés. La fonction $t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ est croissante sur $]-\varepsilon, 0[$ et majorée par $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ par le lemme donc $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} = f'_g(x)$ est bien définie.

(iii) Soient $x < y \in I$. Pour $t < 0$ assez petit, d'après le lemme,

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} \leq \frac{f(y+t)-f(y)}{t}$$

donc en passant à la limite quand t tend vers 0^-, $f'_g(x) \leq f'_g(y)$. Les inégalités se démontrent en passant à la limite dans le lemme.

(iv) $D = \{x \in I,\ f'_g(x) \neq f'_d(x)\} = \{$points de discontinuité de $f'_g\}$. On conclut grâce au lemme suivant. □

Lemme 9.14

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors l'ensemble D des points de discontinuité de h est fini ou dénombrable.

▷ Pour $x \in D$, $h(x^-) < h(x^+)$. On construit $J : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & q \in]h(x^-), h(x^+)[\end{array}$ qui est injective par croissance de h. □

9.4.3 Caractérisation de la convexité

Proposition 9.15

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$.

(i) Si f est dérivable sur $]a,b[$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a_1) f est convexe sur $]a,b[$

(b_1) f' est croissance

(c_1) $\forall x, y \in]a,b[,\ f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$

(ii) Si f est deux fois dérivable sur $]a,b[$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a_2) est convexe sur $]a,b[$

(b_2) $f'' \geq 0$ sur $]a,b[$

(iii) Si f est deux fois dérivable sur $]a,b[$ et $f'' > 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement convexe. La réciproque est fausse : x^4 est strictement convexe mais $12x^2$ s'annule en 0.

▷ (i) $(a_1) \Rightarrow (b_1)$ car $f' = f'_g$ est croissante.

$(b_1) \Rightarrow (c_1)$ Soit $f :]a,b[\Rightarrow \mathbb{R}$ dérivable avec f' croissante. Soient $x < y \in I$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x) \geq f'(x)$$

d'où le résultat.

$(c_1) \Rightarrow (a_1)$ Soient $x < y \in]a,b[$ et $\lambda \in [0,1]$. Par hypothèse

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f'(\lambda x + (1-\lambda)y)(1-\lambda)(x-y)$$

$$f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f'(\lambda x + (1-\lambda)y)\lambda(y-x)$$

d'où

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

(ii) f' est croissante sur $]a,b[$ si et seulement si $f'' \geq 0$ sur $]a,b[$ ($]a,b[$ est connexe).

(iii) Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' > 0$ sur $]a,b[$. Soient $x < y \in]a,b[$, $\lambda \in]0,1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_1 \in]x,z[$ et $c_2 \in]z,y[$ tel que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c_1) \underset{f''>0}{<} f'(c_2) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

donc

$$\lambda(y-x)(f(z)-f(x)) < (1-\lambda)(y-x)(f(y)-f(x))$$

d'où

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

□

9.4.4 Inégalités de convexité classiques

Proposition 9.16

- $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.
- $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
- *(Hölder)* $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^\infty b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ $\forall p \in]1,\infty[$, $a_j, b_j \geq 0$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

9.4.5 Convexité et optimisation

Théorème 9.17

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ *et* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *et* $c \in]a,b[$.

(i) *Si f est dérivable sur $]a,b[$ et convexe sur $]a,b[$ alors* $f(x) = \min\limits_{]a,b[} f$ *si et* *seulement si* $f'(c) = 0$.

(ii) *Si* f *est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum sur* $]a, b[$.

$\triangleright$ (i) Si $f'(c) = 0$ alors $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ (caractérisation de la convexité) d'où $f(x) \geq f(c)$ $\forall x \in]a, b[$.

(ii) Si f est strictement convexe et minimale en $u_1, u_2 \in]a, b[$ alors $f(\frac{u_1+u_2}{2}) < \frac{1}{2}f(u_1) + \frac{1}{2}f(u_2) = \min\limits_{]a,b[}(f)$ absurde. $\square$

Chapitre 10

Différentielle

Exemple 1 : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admet des dérivées partielles par rapport à x et à y car

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ mais n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(at,bt) = \frac{ab}{a^2+b^2}$ donc $f(x,y)$ n'admet pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$.

Exemple 2 : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$ admet des dérivées dans toutes les directions car

$$\frac{f(at,bt) - f(0,0)}{t} = \frac{a^5 t^4}{(bt - a^2t^2)^2 + a^8 t^8} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq 0 \\ a & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

mais f n'est pas continue car $f(x,x^2) = \frac{1}{x^3}$ diverge quand $x \to 0$.

10.1 Différentiabilité

10.1.1 Définitions

Définition 10.1

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$.

(i) f est différentiable en a s'il existe $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)$$

ie.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \qquad \|h\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(a+h) - f(a)L(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E .$$

On note $L = df(a)$ la différentielle de f en a.

(ii) f est différentiable sur Ω si f est différentiable en tout point de Ω.

(iii) f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω si f est différentiable sur Ω et $df : (E, \|.\|_E) \to (\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$ (norme subordonnée à $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$) est continue.

$\triangleright$ Preuve de l'unicité de la différentielle de f en a ($\mathrm{d}f$ est bien définie). Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telles que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_j > 0,\ \|h\|_E < \delta_j \Rightarrow \|f(a+h) - f(a) - L_j(h)\|_F < \varepsilon \|h\|_E ,\ \forall j \in \{1,2\}.$$

Pour $h \in E$ tel que $\|h\|_E < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ on a

$$\begin{aligned} \|(L_1 - L_2(h))\|_F &= \|(f(a+h) - f(a) - L_2(h)) - (f(a+h) - f(a) - L_1(h))\|_F \\ &\leq \|f(a+h) - f(a) - L_2(h)\|_F + \|f(a+h) - f(a) - L_2(h)\|_F \\ &\leq 2\varepsilon \|h\|_E . \end{aligned}$$

Par linéarité, $\|(L_1 - L_2)(x)\|_F \leq 2\|x\|_E ,\ \forall x \in E$ *ie.* $\|L_1 - L_2\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $L_1 = L_2$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. $\square$

10.1.2 Exemples classiques

Exemples : 1. Si $f : E \to F$ est constante alors elle est $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}f = 0$.

2. Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ alors f est $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}f(a) = f$, $\forall a \in E$. En effet, pour $a \in E$ fixé, par linéarité $f(a+h) = f(a) + \underbrace{f(h)}_{\mathcal{L}_c(E,F)} = f(a) + f(h) + o(\|h\|_E)$.

3. Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre normée (commutative ou non), par exemple $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $E = (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. L'application $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}f(a).h = ah + ha$, $\forall h \in E$.

$\triangleright$ Soit $a \in E$. *Étape 1 :* Montrons que $L : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ h & \mapsto & ah + ha \end{array} \in \mathcal{L}_c(E)$. En effet, par l'inégalité triangulaire et sous-multiplicative,

$$\|L(h)\|_E \leq \|ah\|_E + \|ha\|_E \leq 2\|a\|_E \|h\|_E$$

ainsi $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq 2\|a\|_E$. $(*)$

Étape 2 : Différentiabilité. On a $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + ah + ha + h^2$ et $\|h^2\|_E \leq \|h\|_E^2 = \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)$. Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a)$:

$\begin{array}{ccc} E & \to E & \\ h & \mapsto & ah+ha \end{array}$. C'est vrai pour tout $a \in E$ donc f est différentiable sur E.

Étape 3 : Continuité de la différentielle. $\mathrm{d}f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}_c(E) \\ a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$ est clairement linéaire. Pour montrer qu'elle est continue, il suffit d'exhiber un réel de continuité $M > 0$ tel que $\|\mathrm{d}f(a)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq M \|a\|_E$, $\forall a \in E$. $M = 2$ convient (*cf.* $(*)$) □

4. Soit $(H, \langle .,. , \|.\|\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors $f : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|^2 \end{array} \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ et $\mathrm{d}f(a).h = 2\langle a, h\rangle$ $\forall a, h \in H$.

▷ Soit $a \in H$. *Étape 1 :* $L : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto 2\langle a, h\rangle & \end{array} \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$ (Cauchy-Schwarz) et $\|L\|_{\mathcal{L}_c(H,R)} = 2\|a\|$.

Étape 2 : $f(a+h) = f(a)+L(h)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|)$ car $\|a+h\|^2 = \|a\|^2+2\langle a, h\rangle+\|h\|^2$ donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a).h = 2\langle a, h\rangle$, $\forall h \in H$.

Étape 3 : $\mathrm{d}f : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & 2\langle a, \cdot\rangle \end{array}$ est linéaire et continue car $\|\mathrm{d}f(a)\|_{\mathcal{L}_c(H,R)} = 2\|a\|$, $\forall a \in H$. Donc $f \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$. □

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \|\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|.\|_{E_n})$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ n-linéaire $E_1 \times \cdots \times E_n \to F$. On munit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_{E_1 \times E_n} = \max\{\|x_j\|_{E_j}, \ 1 \leq j \leq n\}$ ou de toute norme équivalente. Alors $f \in \mathcal{C}^1(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ et

$$\mathrm{d}f(a_1, \ldots, a_n).(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} f(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

▷ Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. *Étape 1 :* Le candidat est linéaire et continu car

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n} f(a_1, \ldots, h_k, \ldots, a_n)\right\| &\leq \sum_{k=1}^{n} \|f(a_1, \ldots, h_k, \ldots, a_n)\| \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\ldots,E_n;F)} \sum_{k=1}^{n} \|a_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|h_k\|_{E_k} \times \cdots \times \|a_n\|_{E_n} \\
&\leq C(a, f)\, \|(h_1, \ldots, h_n)\|_{E_1 \times \cdots \times E_n}
\end{aligned}$$

Étape 2 : $(n=2)$ Par bilinéarité

$$\begin{array}{rcl} f(a_1+h_1,a_2+h_2) & = & f(a_1,a_2)+f(a_1,h_2)+f(h_1,a_2)+f(h_1,h_2) \\ & = & f(a_1,a_2)+L(h_1,h_2)+\underset{\|(h_1,h_2)\|_{E_1\times E_2}\to 0}{o}(\|(h_1,h_2)\|_{E_1\times E_2}) \end{array}$$

car $\|f(h_1,h_2)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} \|h_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} \leq C(f)\,\|(h_1,h_2)\|^2_{E_1\times E_2}$.

Étape 3 : ($n=2$ comme avant car $\mathrm{d}f : E_1\times E_2 \to \mathcal{L}_c(E_1\times E_2,F)$ est linéaire) $n\geq 3$ exercice □

6. Soit $(E,\|.\|)$ une algèbre de Banach et $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}(E) & \to & \mathrm{Inv}(E) \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$ est $\mathcal{C}^1(\mathrm{Inv}(E),E)$ et $\mathrm{d}f(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$

Rappel : *Inv*(E) est ouvert et $\forall x\in \mathrm{Inv}(E)$ et $\forall h\in E$ vérifiant $\|h\|_E < \frac{1}{\|x^{-1}\|_E}$,

$$(x+h)^{-1} = (1+x{-}1h)^{-1}x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^{-1}h)^n x^{-1}$$

▷ Soit $x\in E$. *Étape 1 :* $L : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ h & \mapsto & -x^{-1}hx^{-1} \end{array} \in \mathcal{L}_c(E)$ car $\|L(h)\|_E \leq \|x^{-1}\|^2\|h\|$ (norme sous-multiplicative).

Étape 2 : Pour $h\in E$ vérifiant $\|h\| < \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|f(x+h)-f(x)-L(h)\| & = & \left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x^{-1}h)^n x^{-1}\right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\left\|x^{-1}\right\|^{n+1}\|h\|^n \\ & \leq & \dfrac{\|x^{-1}\|\,\|h\|^2}{1-\|x^{-1}\|\,\|h\|} \leq 2\left\|x^{-1}\right\|^3\|h\|^2 \end{array}$$

Ceci montre que f est différentiable en x et $\mathrm{d}f(x)=L$. C'est vrai $\forall x\in\mathrm{Inv}(E)$, f est différentiable sur $\mathrm{Inv}(E)$.

Étape 3 : Continuité de la différentielle. Soit $x\in\mathrm{Inv}(E)$. Pour $\widetilde{x}\in\mathrm{Inv}(E)$ et $h\in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|(\mathrm{d}f(x)-\mathrm{d}f(\widetilde{x})).h\| & = & \|-x^{-1}hx^{-1}+\widetilde{x}^{-1}h\widetilde{x}^{-1}\| = \|(x^{-1}-\widetilde{x}^{-1})hx^{-1}-\widetilde{x}^{-1}h(x^{-1}-\widetilde{x}^{-1})\| \\ & \leq & \|\widetilde{x}^{-1}-x^{-1}\|\,(\|x^{-1}\|+\|\widetilde{x}^{-1}\|)\,\|h\|\,. \end{array}$$

Donc $\|\mathrm{d}f(x)-\mathrm{d}f(\widetilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \|\widetilde{x}^{-1}-x^{-1}\|\,(\|x^{-1}\|+\|\widetilde{x}^{-1}\|) \xrightarrow[\|x-\widetilde{x}\|\to 0]{} 0$ par continuité de f en x. Ainsi $\mathrm{d}f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}(E) & \to & \mathcal{L}_c(E) \\ x & \mapsto & \mathrm{d}f(x) \end{array}$ est continue donc $f\in\mathcal{C}^1(\mathrm{Inv}(E),E)$.

□

8. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Alors $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est $\mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ et $\mathrm{d}\Phi(f).h = \displaystyle\int_0^1 \varphi' \circ f(t)h(t)\mathrm{d}t,\ \forall f, h \in E.$

▷ Soit $f \in E$. *Étape 1 :* $L : \begin{array}{ccc} E & \to \mathbb{R} & \\ h & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \varphi' \circ f(t)h(t)\mathrm{d}t \end{array} \in \mathcal{L}_c(E,R)$ car

$$\left|\int_0^1 \varphi' \circ f(t)h(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|h\|_\infty \underbrace{\int_0^1 |\varphi' \circ f(t)|\mathrm{d}t}_{<\infty \text{ car } \varphi'\circ f \in E}.$$

Étape 2 : On a :

$$\begin{aligned} \Phi(f+h) - \Phi(f) - L(h) &= \int_0^1 \left[\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)) - \varphi'(f(t))h(t)\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1\int_0^1 \left[\varphi'(f(t)+sh(t)) - \varphi'(f(t))\right]h(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \qquad (*) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M = \|f\|_\infty$. φ' est continue sur le segment $[-M-1, M+1]$ donc (Heine) uniformément continue :

$$\exists \delta \in]0,1[,\ \forall y, \widetilde{y} \in [-M-1, M+1], \qquad |y - \widetilde{y}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(y) - \varphi'(\widetilde{y})| < \varepsilon.$$

Soit $h \in E$ tel que $\|h\|_\infty < \delta$. Alors,

$$\forall t \in [0,1],\ \forall s \in [0,1], \qquad |\varphi'(f(t)+sh(t)) - \varphi'(f(t))| < \varepsilon$$

car $|f(t)+sh(t)| \leq M+1$, $f(t) \leq M \leq M+1$ et $|sh(t)| < \delta$. On déduit alors de $(*)$ que

$$|\Phi(f+h) - \Phi(f) - L(h)| < \varepsilon \|h\|_\infty.$$

On a donc montré que $\Phi(f+h)$ est différentiable en f et que $\mathrm{d}\Phi(f) = L$. C'est vrai pour tout $f \in E$ donc Φ est différentiable sur E.

Étape 3 : Montrons que $\mathrm{d}\Phi : E \to \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ est continue. Soit $f \in E$. Pour tout $\widetilde{f}, h \in E$, on a :

$$|(\mathrm{d}\Phi(f) - \mathrm{d}\Phi(\widetilde{f})).h| = \left|\int_0^1 (\varphi'(f(t)) - \varphi'(\widetilde{f}(t)))h(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|h\|_\infty \int_0^1 |\varphi'(f(t)) - \varphi'(\widetilde{f}(t))|\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que $\left\|\mathrm{d}\Phi(f)-\mathrm{d}\Phi(\widetilde{f})\right\|_{\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})} \leq \int_0^1 |\varphi'(f(t))-\varphi'(\widetilde{f}(t))|\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon>0$ et $\delta=\delta(\varepsilon)$ module d'uniforme continuité de φ' sur $[-M-1,M+1]$. Pour tout $\widetilde{f}\in E$ vérifiant $\left\|\widetilde{f}-f\right\|_\infty<\delta$, on a

$$\forall t\in[0,1], \qquad |\varphi'(f(t))-\varphi'(f(t))|<\varepsilon$$

donc $\displaystyle\int_0^1 |\varphi'\circ f(t)-\varphi'\circ\widetilde{f}(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon$. □

10.1.3 Propriétés

Proposition 10.2

(i) Différentiable en $a \Longrightarrow$ continue en a.

(ii) f,g différentiables en a et $\lambda\in\mathbb{R} \Longrightarrow \lambda f+g$ différentiable en a et $d(\lambda f+g)(a)=\lambda df(a)+dg(a)$.

(iii) Soient $(E,\|.\|_E),(F_1,\|.\|_{F_1}),\dots,(F_n,\|.\|_{F_n})$ des espaces vectoriels normés. On munit $F_1\times F_n$ de la norme $\|(y_1,\dots,y_n)\|_{F_1\times\cdots\times F_n}=\max\{\|y_j\|_{F_j},\ 1\leq j\leq n\}$. Soient Ω ouvert de $(E,\|.\|_E)$, $a\in\Omega$, $f_j:E\to F_j$ différentiables en a (respectivement $\mathcal{C}^1$ sur Ω). Alors $f:\begin{array}{ccc}E&\to&F_1\times\cdots\times F_n\\ x&\mapsto&(f_1(x),\dots,f_n(x))\end{array}$ est différentiable en a (respectivement $\mathcal{C}^1$ sur Ω) et

$$df(a).h=(df_1(a).h,\dots,df_n(a).h)$$

(iv) Soient $(E,\|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F,\|.\|)$ une algèbre normée, Ω un ouvert de $(E,\|.\|_E)$ et $f_j:\Omega\to F$ différentiables en a (respectivement $\mathcal{C}^1$ sur Ω). Alors le produit f_1f_2 est différentiable en a (respectivement $\mathcal{C}^1$ sur Ω) et

$$d(f_1f_2)(a).h=(d(f_1)(a).h)f_2(a)+f_1(a)(df_2(a).h)$$

▷ *(iv) Étape 1 :* $L:\begin{array}{ccc}E&\to&F\\ h&\mapsto&(\mathrm{d}f_1(a).h)f_2(a)+f_1(a)(\mathrm{d}f_2(a).h)\end{array}\in\mathcal{L}_c(E,F)$ par sous-multiplicativité de la norme d'algèbre et continuité de $\mathrm{d}f_j(a):E\to F$.

Étape 2 : On a :

$$(f_1f_2)(a+h)=(f_1(a)+\mathrm{d}f_1(a).h+o(\|h\|_E))(f_2(a)+\mathrm{d}f_2(a).h+o(\|h\|_E))=f_1(a)f_2(a)+L(h)+\underbrace{\text{restes}}_{=o(\|h\|_E)}$$

Par exemple, $\|(\mathrm{d}f_1(a).h)(\mathrm{d}f_2(a).h)\|\leq\|\mathrm{d}f_1(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\|\mathrm{d}f_2(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\|h\|^2$ par sous-multiplicativité.

Étape 3 : Montrons que $\mathrm{d}(f_1f_2) : \Omega \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est continue quand $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$. Soit $a \in \Omega$. Pour $\widetilde{a} \in \Omega$ et $h \in E$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|(\mathrm{d}(f_1f_2)(a) - \mathrm{d}(f_1f_2)(\widetilde{a})).h\| & = & \|f_1(a)(\mathrm{d}f_2(a).h) + (\mathrm{d}f_1(a).h)f_2(a) - f_1(\widetilde{a})(\mathrm{d}f_2(\widetilde{a}).h) - (\mathrm{d}f_1(\widetilde{a}).h)f_2 \\ & = & \|(f_1(a) - f_1(\widetilde{a}))(\mathrm{d}f_2(a).h) + f_1(\widetilde{a})((\mathrm{d}f_1(a) - \mathrm{d}f_2(a)).h) + 2^{\mathrm{e}} \text{ morcea} \\ & \leq & \|f_1(a) - f_1(\widetilde{a})\| \, \|\mathrm{d}f_2(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|h\|_E \\ & & + \|f_1(\widetilde{a})\|_F \|\mathrm{d}f_2(a) - \mathrm{d}f_2(\widetilde{a})\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|h\|_E + 2^{\mathrm{e}} \text{ morceau.} \end{array}$$

Ceci montre que $\|\mathrm{d}(f_1f_2) - \mathrm{d}(f_1f_2)(\widetilde{a})\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \xrightarrow[\|\widetilde{a}-a\|_E \to 0]{} 0$. □

Théorème 10.3 (*Théorème des fonctions composées et conséquences*)

(i) Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F), (G, \|.\|_G)$ des espaces vectoriels normés, Ω_E ouvert de E, $a \in \Omega_E$, Ω_F ouvert de F, $f : E \to F$ différentiable en a et vérifiant $f(\Omega_E) \subset \Omega_F$ et $g : \Omega_F \to G$ différentiable en en $f(a)$. Alors $g \circ f : \Omega_E \to G$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \qquad \textit{composition d'applications linéaires)}$$

(ii) Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $\gamma : I \to \Omega_E$ dérivable en t_0, $f : \Omega_E \to F$ différentiable en $\gamma(t_0)$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0).$$

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+th)\big|_{t=0} = df(a).h$.

(iv) Si Ω_E est convexe et $f : \Omega_E \to F$ est différentiable alors $u : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & F \\ t & \mapsto & f(x+t(y-x)) \end{array}$ est dérivable, $u'(t) = df(x+t(y-x)).(y-x)$ et

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x+t(y-x)).(y-x)dt, \qquad \forall x, y \in \Omega_E.$$

▷ (i) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Il existe $\delta_f, \delta_g > 0$ tels que

$$\forall h \in E, \qquad \|h\|_E < \delta_f \quad \Rightarrow \quad \|f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a).h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E \qquad (1)$$

$$\forall s \in F, \qquad \|s\|_F < \delta_g \quad \Rightarrow \quad \|g(f(a)+s) - g(f(a)) - \mathrm{d}g(f(a)).s\|_G \leq \varepsilon \|s\|_F \qquad (2).$$

Soit $\delta = \min\left\{\delta_f, \frac{\delta_g}{\|\mathrm{d}f(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}+1}\right\}$. Pour $h \in E$ vérifiant $\|h\|_E < \delta$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|f(a+h) - f(a)\|_F & \leq & \|\mathrm{d}f(a).h\|_F + \varepsilon \|h\|_E \qquad \text{par (1)} \\ & \leq & (\|\mathrm{d}f(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + 1) \|h\|_E \qquad (3) \\ & < & \delta_g \qquad \text{par choix de } \delta. \end{array}$$

Donc on peut appliquer (2) avec $s = f(a+h) - f(a)$. On obtient

$$\|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - \mathrm{d}g(f(a)).(f(a+h) - f(a))\|_F < \varepsilon \|f(a+h) - f(a)\|_F .$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - \mathrm{d}g(f(a)).(\mathrm{d}f(a).h)\|_G &\leq \varepsilon \|f(a+h) - f(a)\|_F \\ &\quad + \|\mathrm{d}g(f(a)).(f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a).h)\| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon C(f,a)\|h\|}_{(3)} + C(g,a)\underbrace{\varepsilon \|h\|_E}_{(1)} \leq \varepsilon M \|h\|_E\end{aligned}$$

On a donc montré que $g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + \mathrm{d}g(f(a)).(\mathrm{d}f(a).h) + \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)$. De plus $\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}_c(E,F)$ comme composées d'applications linéaires et continues. Donc $g \circ f$ est différentiable et on a le résultat. □

Corollaire 10.4 (*Inégalité des accroissements finis "soft"*)

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, Ω un ouvert convexe de $(E, \|.\|_E)$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$. Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\| \sup\{\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)},\ z \in [x,y]\}$$

Théorème 10.5

Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $a \in U$, $f : U \to F$ différentiable en a telle que f soit un homéomorphisme de U sur V (continue, bijective, d'inverse continu) et $df(a)$ soit une bijection de $E \to F$. Alors $f^{-1} : V \to U$ est différentiable en $b = f(a)$ et $d(f^{-1})(b) = df(a)^{-1}$.

▷ Par le théorème d'isomorphisme de Banach, $\mathrm{d}f(a)^{-1}$ est continue $F \to E$ ce qui justifie que $M : \|\mathrm{d}f(a)^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)} < \infty$. On a

$$f(x) - b - \mathrm{d}f(a).(x-a) = \|x - a\|_E \, \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : \Omega \to F$ vérifie $\|\varepsilon(x)\|_F \xrightarrow[\|x-a\|_E \to 0]{} 0$. On applique $\mathrm{d}f(a)^{-1}$ à cette égalité avec $x = f^{-1}(y)$.

$$\mathrm{d}f(a)^{-1}.(y-b) - f^{-1}(y) + a = \left\|f^{-1}(y) - a\right\| \mathrm{d}f(a)^{-1}.\varepsilon(f^{-1}(y))$$

ie.

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - \mathrm{d}f(a)^{-1}.(y-b) = \|y - b\|_F \, \varepsilon'(y)$$

où $\varepsilon' : F \to E$,

$$\varepsilon'(y) = -\frac{\|f^{-1}(y)-a\|_E}{\|y-b\|_F} \underbrace{\underset{\text{continu}}{\mathrm{d}f(a)^{-1}}.\underset{\text{convergence connue}}{\varepsilon}(\underset{\text{continu}}{f^{-1}}(y))}_{\xrightarrow[\|y-b\|_F \to 0]{} 0}.$$

Or

$$\exists \delta_E > 0,\ \forall x \in E, \qquad \|x-a\|_E < \delta_E \quad \Rightarrow \quad \|\varepsilon(x)\|_F < \frac{1}{2M},$$

$$\exists \delta_F > 0,\ \forall y \in F, \qquad \|y-b\|_F < \delta_F \quad \Rightarrow \quad \left\|f^{-1}(b)-a\right\| < \delta_E.$$

Pour $y \in B_F(b, \delta_F)$ on a $\|f^{-1}(y)-a\|_E \leq \|\mathrm{d}f(a)^{-1}(y-b)\|_E + \|f^{-1}(y)-a\| M \times \frac{1}{2M}$ donc $\|f^{-1}(y)-a\|_E \leq 2M\|y-b\|_F$. Donc $\varepsilon'(y) \to 0$. □

10.1.4 Gradient

Théorème 10.6

Soient $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un espace de Hilbert, Ω un ouvert de $(H, \|.\|)$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}$ une application différentiable à valeurs scalaires. Pour tout $x \in \Omega$, il existe un unique $v \in H$ tel que

$$\forall h \in H, \qquad df(x).h = \langle v, h \rangle.$$

Ce vecteur est noté $v = \nabla f(x)$ et appelé "gradient de f en x".

$$\nabla f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & H \\ x & \mapsto & \nabla f(x) \end{array}$$

▷ Théorème de Riesz à $\mathrm{d}f(x) : H \to \mathbb{K}$. □

10.2 Inégalité des accroissements finis

10.2.1 Énoncés

Théorème 10.7 (*IAF à variable réelle*)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{C}^0([a,b], F)$ dérivable sur $]a,b[$ et $\phi \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\|f'(t)\|_F \leq \phi'(t),\ \forall t \in]a,b[$. Alors,

$$\|f(b)-f(a)\|_F \leq \phi(b) - \phi(a).$$

Remarque : Si F est de dimension finie ($F = \mathbb{R}^n$), on peut écrire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(intégrale de Lebesgue sur chaque composante)}$$

et alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \int_a^b \|f'(t)\|_F \,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \phi'(t)\mathrm{d}t = \phi(b) - \phi(a).$$

Mais ceci ne marche plus si F est de dimension infinie.

$\triangleright$ Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que

$$\forall t \in [a,b], \qquad \|f(t) - f(a)\|_F \leq \phi(t) - \phi(a) + \varepsilon(t-a).$$

Soient $A = \{x \in [a,b],\ \forall t \in [a,b],\ \|f(t) - f(a)\|_F \leq \phi(t) - \phi(a) + \varepsilon(t-a)\}$. $A \neq \varnothing$ car $a \in A$ et $\theta = \sup(A)$. Par propriété de la borne supérieure,

$$\forall \delta > 0, \qquad [\theta - \delta, \theta] \cap A \neq \varnothing$$

et en particulier

$$\forall t \in [a, \theta - \delta], \qquad \|f(t) - f(a)\|_F \leq \phi(t) - \phi(a) + \varepsilon(t-a).$$

Ceci est vrai pour tout $\delta > 0$ donc l'inégalité vaut pour tout $t \in [a, \theta[$. En passant à la limite quand t tend vers θ, on obtient

$$\|f(\theta) - f(a)\|_F \leq \phi(\theta) - \phi(a) + \varepsilon(\theta - a) \qquad (1).$$

Par l'absurde, supposons $\theta < b$. Alors, f et ϕ sont dérivables en θ :

$$\exists \eta > 0,\ \forall t \in]0, \eta[\qquad \|f(\theta + t) - f(\theta) - tf'(\theta)\|_F < \frac{\varepsilon t}{2} \qquad (2) \text{ et } \qquad \phi(\theta + t) \geq \phi(\theta) + t\phi'(\theta) - \frac{\varepsilon t}{2}$$

Alors, pour tout $t \in]0, \eta[$, on a

$$\begin{array}{rcll}
\|f(\theta+t) - f(a)\|_F & \leq & \|f(\theta+t) - f(\theta)\|_F + \|f(\theta) - f(a)\|_F & \text{par inégalité triangulaire} \\
& \leq & \underbrace{t\,\|f'(\theta)\|_F + \frac{\varepsilon t}{2}}_{\text{par (2)}} + \underbrace{\phi(\theta) - \phi(a) + \varepsilon(\theta - a)}_{\text{par (1)}} & \\
& \leq & t\phi'(\theta) + \phi(\theta) - \phi(a) + \varepsilon(\theta + \frac{t}{2} - a) & \text{par hypothèse} \\
& \leq & \phi(\theta + t) - \phi(\theta) + \frac{\varepsilon t}{2} + \phi(\theta) - \phi(a) + \varepsilon(\theta + \frac{t}{2} - a) & \text{par (3)} \\
& \leq & \phi(\theta + t) - \phi(a) + \varepsilon(\theta + t - a) &
\end{array}$$

ce qui contredit la maximalité de θ. En conclusion, $\theta = b$ donc

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \phi(b) - \phi(a) + \varepsilon(b - a).$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc, à la limite,

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \phi(b) - \phi(a).$$

□

Corollaire 10.8

Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *des espaces vectoriels normés,* ω *un ouvert de* E*,* $f : \Omega \to F$ *différentiable,* $x, y \in \Omega$ *tels que* $[x, y] \subset \Omega$*,* $\phi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ *dérivable sur* $]0, 1[$*. Si*

$$\forall t \in]0, 1[, \qquad \|df[x + t(y - x)].(y - x)\|_F \leq \phi'(t)$$

alors

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \phi(1) - \phi(0).$$

▷ On applique le théorème précédent à la fonction auxiliaire

$$u : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \to & F \\ t \mapsto & f(x + t(y - x)) & \end{array}$$

□

10.2.2 Application : différentiabilité et suites

Théorème 10.9

Soient $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* Ω *un ouvert connexe de* $(E, \|.\|)$*,* $(F, \|.\|_F)$ *un espace de Banach,* $(f_n : E \to F)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'applications différentiables sur* Ω*. On suppose*

(i) *il existe* $x_1 \in \Omega$ *tel que* $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans* $(F, \|.\|_F)$*.*

(ii) $(df_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans* $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\mathcal{L}_c(E, F)\|)$ *vers* $L(x)$*, uniformément par rapport à* $x \in \Omega$ *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega \qquad \|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \varepsilon.$$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une application* $f : \Omega \to F$ *différentiable telle que*

$$\forall x \in \Omega, \qquad df(x) = L(x).$$

Lemme 10.10

Sous les mêmes hypothèses, pour tout $x_2 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$, pour tout $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$ alors la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$ pour tout $x \in B_E(x_2, r)$.

$\triangleright$ On montre que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, p \geq n_0, \qquad \|(f_n - f_p)(x_2)\|_F < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et } \forall n \geq n_0,\ \forall y \in \Omega, \qquad \|\mathrm{d}f_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \frac{\varepsilon}{4r}.$$

Alors, $\forall n, p \geq n_0,\ \forall y \in \Omega,\ \|\mathrm{d}(f_n - f_p)(y)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{2r}$. Alors, pour $n, p \geq n_0$,

$$\|(f_n - f_p)(x)\|_F \leq \|(f_n - f_p)(x_2)\|_F + \int_0^1 \|\mathrm{d}(f_n - f_p)(x_2 + t(x - x_2))\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|x - x_2\|_E \,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

$\square$

$\triangleright$ (du théorème) *Étape 1 :* Montrons que $A = \{x \in \Omega,\ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)\}$ coïncide avec Ω. $A \neq \varnothing$ car $x_1 \in A$. A est un ouvert de $(\Omega, \|.\|_E)$ par le lemme et A est fermé dans $(\Omega, \|.\|_E)$. En effet, soit $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de A et $b \in \Omega$ tel que $\|b_k - b\|_E \to 0$. Comme Ω est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B_E(b, \rho) \subset \Omega$. Pour k assez grand $b_k \in B_E(b, \frac{\rho}{2})$. Alors, $b \in B_E(b_k, \frac{\rho}{2}) \subset \Omega$. En appliquant le lemme avec $x_2 = b_k$ et $r = \frac{\rho}{2}$ on obtient que $(f_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Notons $f(x)$ la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(F, \|.\|_F)$ pour tout $x \in \Omega$, $f : \Omega \to F$.

Étape 2 : Montrons que f est différentiable sur Ω. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \Omega,\ \|\mathrm{d}f_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Alors

$$\forall x \in \Omega,\ \forall n, p \geq n_0, \qquad \|d(f_n - f_p)(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset \Omega$. Alors, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall n, p \geq n_0,\ \forall h \in B_E(0, r), \qquad \|(f_n - f_p)(x_0 + h) - (f_n - f_p)(x_0)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3} \|h\|_E.$$

Pour $n = n_0$ et $p \to \infty$

$$\forall h \in B_E(0, r), \qquad \|(f_{n_0} - f)(x_0 + h) - (f_{n_0} - f)(x_0)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3} \|h\|_E.$$

Par différentiabilité de f_{n_0} en x_0, il existe $\eta \in]0, r[$ tel que

$$\forall h \in B_E(0, \eta)\ \|f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0} - \mathrm{d}f_{n_0}(x_0).h\|_F < \frac{\varepsilon}{3} \|h\|_E.$$

Ainsi, pour tout $h \in B_E(0,\eta)$, $\|f(x_0+h)-f(x_0)-L(x_0).h\|_F \leq \|f_{n_0}(x_0+h)-f_{n_0}(x_0)-\mathrm{d}f_{n_0}(x_0).h\|_F$ $\|(f-f_{n_0})(x_0+h)-(f-f_{n_0})(x_0)\|_F + \|(L(x_0)-\mathrm{d}f_{n_0}(x)).h\|_F < \varepsilon \|h\|_E$.

Étape 3 : Convergence uniforme. *cf.* poly. □

Exemple : Soit $(E,\|.\|)$ algèbre de Banach. Alors

$$\exp : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

est bien définie (convergence absolue ⇒ convergence car E complet) et différentiable sur E.

10.3 Différentielles partielles

Dans toute cette section, $(E_1,\|.\|_{E_1}),\ldots,(E_n,\|.\|_{E,n})$ et $(F,\|.\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés. On munit $E_1\times\cdots\times E_n$ de la norme

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \max\{\|x_j\|,\ 1\leq j\leq n\}.$$

Ω est un ouvert de E, $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\Omega$.

10.3.1 Différentielles partielles d'ordre 1

Définition 10.11

$f:\Omega\to F$ admet une différentielle partielle par rapport à x_j en a si l'application

$$\begin{array}{ccl} E_j & \to & F \\ x_j & \mapsto & f(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_n) \end{array}$$

est différentiable en a_j, on note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\in\mathcal{L}_c(E_j,F)$ sa différentielle. La différentielle partielle de f par rapport à x_j est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}:\Omega\to\mathcal{L}_c(E,F)$.

Proposition 10.12

Si f est différentiable en a alors elle admet des différentielles partielles par rapport à toutes les variables x_j et

$$\forall h=(h_1,\ldots,h_n)\in E,\qquad df(a).h=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j.$$

▷ Il suffit de montrer que $\forall j \in \{1,\dots,n\}, \forall h_j \in E_j,\ \mathrm{d}f(a).\widetilde{h_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j$ où $\widetilde{h_j} = (0,\dots,0,h_j,0,\dots 0) \in E$ par linéarité de $\mathrm{d}f(a)$. La différentiabilité de f en a implique

$$f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h_j,a_{j+1},a_n) = f(a) + \mathrm{d}f(a).\widetilde{h_j} + o(\underbrace{\left\|\widetilde{h_j}\right\|_E}_{=\|h_j\|_{E_j}})$$

donc f admet une différentielle partielle par rapport à x_j en a et $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j = \dots$ □

La réciproque est fausse : *cf.* contre-exemple en introduction.

Théorème 10.13

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ si et seulement si pour tout $j = 1,\dots,n$ f admet une dérivée partielle par rapport à x_j continue sur Ω.

▷ $\Leftarrow$: L'application L : $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ h=(h_1,\dots,h_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j \end{array}$ est linéaire et continue car $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c(E_j,F)$ pour $j=1,\dots,n$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall h \in B_E(0,\delta), \qquad \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F < \varepsilon \|h\|_E .$$

On traite le cas $n = 2$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2 = \Delta_1(h_1,h_2) + \Delta_2(h_1,h_2)$$

où

$$\Delta_1(h_1,h_2) = f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2).h_1$$

et

$$\Delta_2(h_1,h_2) = f(a_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2).h_2.$$

Par continuité en a de $\frac{\partial f}{\partial x_1} : \Omega \to \mathcal{L}_c(E_1,F)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2} : \Omega \to \mathcal{L}_c(E_2,F)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall h \in B_E(0,\delta), \qquad \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right\|_{\mathcal{L}_c(E_j,F)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $h \in B_E(0,\delta)$, on a

$$\|\Delta_1(h)\|_F = \left\|\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+th_1,a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right).h_1 \mathrm{d}t\right\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h_1\|_{E_1}$$

et

$$\|\Delta_2(h)\|_F = \left\| \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + th_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) .h_2 \mathrm{d}t \right\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h_2\|_{E_2}$$

d'où le résultat. □

10.3.2 Différentielles partielles d'ordre supérieur à 2

Théorème 10.14 (*Lemme de Schwarz*)

Soient $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}$ existent sur Ω et sont continues sur Ω alors elles sont égales.

$n = 2 : f : E_1 \times E_2 \supset \Omega \to F$. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ est la différentielle de $\begin{array}{ccc} E_2 & \to & F \\ x_2 & \mapsto & f(a_1, x_2) \end{array}$ donc $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \in \mathcal{L}_c(E_2, F)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2} : E_1 \times E_2 \supset \Omega \to \mathcal{L}_c(E_2, F)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$ est la différentielle de $\begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathcal{L}_c(E_2, F) \\ x_1 & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, a_2) \end{array}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \in \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$.
De même, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \in \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_1, F))$.

$\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ est l'espace vectoriel normé des formes bilinéaires $E_1 \times E_2 \to F$, muni de

$$\|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} = \sup\{\|\alpha(x_1, x_2)\|_F, (x_1, x_2) \in E,\ \|x_1\|_{E_1} = \|x_2\|_{E_2} = 1\}.$$

Proposition 10.15

L'application $J : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F) & \to & \mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F)) \\ \alpha & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathcal{L}_c(E_2, F) \\ x_1 & \mapsto & \alpha(x_1, \cdot) \end{array} \right. \end{array}$ est une isométrie bijective. Elle permet d'identifier $\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$ et $\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ et $\mathcal{L}_c(E_2, \mathcal{L}_c(E_1, F))$.

▷ *Étape 1 :* J est à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$. Pour $\alpha \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ et $x_1 \in E_1$, $\alpha(x_1, \cdot)$ est linéaire et continu $E_2 \to F$ par bilinéaire de α et $\|\alpha(x_1, \cdots)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)} \|x_1\|_{E_1}$. De plus $x_1 \mapsto \alpha(x_1, \cdot)$ est linéaire et continue (même majoration).

Étape 2 : J est linéaire $J(\lambda\alpha + \beta) = \lambda J(\alpha) + J(\beta)$.

Étape 3 : J est isométrique ($\Rightarrow$ injective)

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, \mathcal{L}_c(E_2, F))} \leq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété de la borne supérieure, il existe $(x_1^*, x_2^*) \in E$ tel que $\|x_1^*\|_{E_1} = \|x_2^*\|_{E_2} = 1$ et

$$\|\alpha(x_1^*, x_2^*)\|_F \geq \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} - \varepsilon.$$

$$\begin{array}{rcl} \|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F))} & \geq & \|J(\alpha)(x_1^*)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} \qquad \text{car } \|x_1^*\| = 1 \\ & \geq & \|\alpha(x_1^*, x_2^*)\|_F \qquad \text{car } \|x_2^*\| = 1 \\ & \geq & \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E2;F)} - \varepsilon. \end{array}$$

Étape 4 : Soit $\phi \in \mathcal{L}_c(E1, \mathcal{L}_c(E_2, F))$. On définit

$$\alpha : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 & \to & F \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \phi(x_2).x_2 \end{array}$$

On vérifie que $\alpha \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$. □

▷ (lemme de Schwarz) Soit $a \in \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$. On traite le cas $n = 2$. Montrons que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} < \varepsilon.$$

Par hypothèse, pour $\{i, j\} = \{1, 2\}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (b_1, b_2) \in B_E(0, \delta) \subset \Omega, \qquad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(b_1, b_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} < \varepsilon \qquad (*).$$

(quitte à translater Ω et f, on peut supposer $a = (0, 0)$). On considère Soit $u = (u_1, u_2) \in B_E\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. On considère

$$\Delta(u_1, u_2) = f(u_1, u_2) - f(u_1, 0) - f(0, u_2) + f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, u_2).$$

Montrons que $\|\Delta(u_1, u_2)\|_F < \varepsilon \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}$. On a

$$\Delta(u_1, u_2) = \varphi_{u_1}(u_2) - \varphi_{u_1}(0)$$

où $\varphi_{u_1} : \begin{array}{rcl} \Omega_2 \subset E_2 & \to & F \\ t & \mapsto & f(u_1, t) - f(0, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, t) \end{array}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\|\Delta(u_1, u_2)\|_F \leq \|u_2\|_{E_2} \sup_{t \in [0,u_2]} \{\|\mathrm{d}\varphi_{u_1}(t)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)}\}.$$

Soient $\tau \in E_2$ et $t \in [0, u_2]$,

$$\mathrm{d}\varphi_{u_1}(t).\tau = \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1, t).\tau - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, t).\tau - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(u_1, \tau).$$

On a donc

$$\mathrm{d}\varphi_{u_1}(t).\tau = \theta_{t,\tau}(u_1) - \theta_{t,\tau}(0)$$

où $\theta_{t,\tau}$: $\begin{array}{ccc} \Omega_1 \subset E_1 & \to & F \\ s & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_2}(s, t).\tau - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(s, \tau). \end{array}$ Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\|\mathrm{d}\varphi_{u_1}(t).\tau\|_F \leq \|u_1\|_{E_1} \sup_{s \in [0, u_2]} \|\mathrm{d}\theta_{t,\tau}(s)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, F)}.$$

Soit $s \in [0, u_1]$,

$$\mathrm{d}\theta_{t,\tau}(s).\sigma = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(s, t).(\sigma, \tau) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0).(\sigma, \tau)$$

donc, d'après $(*)$,

$$\|\mathrm{d}\theta_{t,\tau}(s)\|_{\mathcal{L}_c(E_1, F)} \leq \varepsilon \|\tau\|_{E_2}.$$

Ceci est vrai pour tout $s \in [0, u_1]$ donc

$$\|\mathrm{d}\varphi_{u_1}(t).\tau\|_F \leq \varepsilon \|u_1\|_{E_1} \|\tau\|_{E_2}.$$

Ceci est vrai pour tout $\tau \in E_2$, donc

$$\|\mathrm{d}\varphi_{u_1}(t)\|_{\mathcal{L}_c(E_2, F)} \leq \varepsilon \|u_1\|_{E_1}.$$

Ceci est vrai pour tout $t \in [0, u_2]$ donc

$$\|\Delta(u_1, u_2)\|_F \leq \varepsilon \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}.$$

On a donc montré que pour tout $(u_1, u_2) \in B_E((0, 0), \delta)$

$$\left\| f(u_1, u_2) - f(u_1, 0) - f(0, u_2) + f(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0)(u_1, u_2) \right\|_F \leq \varepsilon \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}.$$

Par symétrie, pour tout $(u_1, u_2) \in B_E((0, 0), \delta)$

$$\left\| f(u_1, u_2) - f(u_1, 0) - f(0, u_2) + f(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0).(u_1, u_2) \right\|_F \leq \varepsilon \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}.$$

Alors, par inégalité triangulaire,

$$\forall (u_1, u_2) \in B_E((0, 0), \delta), \qquad \left\| \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) \right).(u_1, u_2) \right\| < 2\varepsilon \|u_1\|_{E_1} \|u_2\|_{E_2}.$$

Par homogénéité, c'est vrai pour tout $(u_1, u_2) \in E$. □

10.3.3 Dérivées partielles d'ordre n

On a vu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c(E_k, E_j; F)$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} : \Omega \subset E \to \mathcal{L}_c(E_k, E_j; F)$.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c(E_l, \mathcal{L}_c(E_k, E_j; F)) \simeq \mathcal{L}_c(E_l, E_k, E_j; F)$$

l'espace vectoriel normé des applications tri-linéaires continues $E_l \times E_k \times E_j \to F$.

$\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_n}}(a)$ est une application n-linéaire continue $E_{k_1} \times \cdots \times E_{k_n} \to F$.

10.3.4 $E = \mathbb{R}^n$ ($E_j = \mathbb{R}$ pour $j = 1, \dots, n$)

Soient F un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^n \to F$. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F) \simeq F$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x_k} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to F$ comme f.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F) \simeq F$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to F$.

10.3.5 Exercices type

Exercice 1 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est-elle différentiable en $(0,0)$?

– Comme $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|f(x,y)| \leq 2\,\|(x,y)\| \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} 0$ donc f est continue en $(0,0)$.

– $f(x,0) = 0$ donc f admet une dérivée partielle selon x et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

– De même, $f(0,y) = -y$ donc f admet une dérivée partielle selon y en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

– Supposons que f est différentiable en $(0,0)$, alors pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{d}f(0,0).(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = -h_2$$

et

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0).(x,y)}{\|(x,y)\|} \xrightarrow[\|(x,y)\| \to 0]{} 0.$$

Or, pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\varepsilon(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(y(x^2-y^2) + y(x^2+y^2) \right) = \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En particulier, pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $t > 0$,

$$\varepsilon(at, bt) = \frac{2a^2 b}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \not\to 0 \qquad \text{contradiction}$$

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0,0)$?

$x^3 y \leq \frac{1}{p} x^{3p} + \frac{1}{q} y^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On veut $3p > 4$ entre autres. On prend $p = \frac{3}{2}$ et $q = 3$

$$x^3 y \leq \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{y^3}{3} \leq C \underbrace{\max\{x^{\frac{1}{2}}, y\}}_{\xrightarrow[\|(x,y)\| \to 0]{} 0} (x^4+y^2)$$

donc f est continue en $(0,0)$.

$f(x,0) = 0$ donc f admet une dérivée partielle selon x en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $f(0,y) = 0$ donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Si f est différentiable en $(0,0)$, alors $\mathrm{d}f(0,0) = 0$. Or

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^3 y}{(x^4+y^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\varepsilon(x, x^2) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{1+x^2}} \not\to 0$$

donc f n'est pas différentiable en 0.

Exercice 3 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent. Les calculer. Que dire ?

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2) + 2x^2 y)(x^2+y^2) - 2x^2 y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^3 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \qquad (1).$$

$f(x,0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (2)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} -y & \text{si } y \neq 0 \text{ d'après (1)} \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ d'après (2).} \end{cases}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1.

Comme $f(x,y) = -f(y,x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. En particulier, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. On en déduit (lemme de Schwarz) que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ n'est pas continue en (0,0). Par symétrie, aucune ne l'est.

Remarque : f est différentiable en (0,0) car

$$|f(x,y)| \leq 2\,\|(x,y)\|^2 = o(\|(x,y)\|)$$

et $\mathrm{d}f(0,0) = 0$. Comme $\mathrm{d}f(0,0).(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$ on retrouve $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

10.4 Différentielle d'ordre supérieur à 2

10.4.1 Différentielle d'ordre 2

Définition 10.16

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$. f est deux fois différentiable en a si f est différentiable sur un voisinage ouvert U de a dans Ω et $df : U \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est différentiable en a. On note

$$d^2 f(a) = d(df)(a) \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F)) \simeq \mathcal{L}_c(E^2; F)$$

l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E \times E \to F$.

Exemple : 1. On a déjà vu que det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$\mathrm{d}(\det)(A).H = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$$

pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées
$\forall A \in GL_n(\mathbb{C}),\ \forall K, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$(\mathrm{d}(\mathrm{d}(\det))(A).K).h = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}K)\mathrm{Tr}(A^{-1}H) + \det(A)\mathrm{Tr}(-A^{-1}KA^{-1}H).$$

2. Soit $(E, \|.\|_E)$ une algèbre de Banach. On a vu que $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}(E) & \to & \mathrm{Inv}(E) \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$ est différentiable et que

$$\mathrm{d}f(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$$

pour tout $h \in E$.

$$((\mathrm{d}f)(x).k).h = x^{-1}kx^{-1}hx^{-1} + x^{-1}hx^{-1}kx^{-1}.$$

Remarque : $\|\mathrm{d}f(x+k) - \mathrm{d}f(x) - L(k)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = o(\|k\|_E) \Rightarrow \|\mathrm{d}f(x+k).h - \mathrm{d}f(x).h - L(h).k\|_F = o(\|k\|_F \|h\|_E)$.

Proposition 10.17

Si f est deux fois différentiable en a alors $\mathrm{d}^2 f(a)$ est une application bilinéaire continue et symétrique $E \times E \to F$.

$\triangleright$ Montrons que

$$\forall h, h' \in E, \qquad (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h).h' = (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h') \qquad \text{dans } F.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall s \in B_E(0,\delta), \qquad \|\mathrm{d}f(a+s) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).s\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \varepsilon \|s\|_E .$$

Soient $h, h' \in B_E(0,\delta)$ et

$$\Delta(h,h') = f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) \in F.$$

On a :

$$\Delta(h,h') - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h').h = G(1) - G(0)$$

où $G : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+th+h') - f(a+th) - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h').(th) \end{array}$. Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\|\Delta(h,h') - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h').h\|_F \leq \sup\{\|G'(t)\|_F\,,\ t \in [0,1]\}$$

où, d'après le théorème des fonctions composées,

$$\begin{array}{rcl} G'(t) & = & \mathrm{d}f(a+th+h').h - \mathrm{d}f(a+th).h - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h').h \\ & = & (\mathrm{d}f(a+th+h') - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).(th+h')).h - (\mathrm{d}f(a+th) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).(th)).h \end{array}$$

Ainsi,

$$\forall t \in]0,1[, \qquad \|G'(t)\|_F \leq \varepsilon \|th+h'\|_E \|h\|_E + \varepsilon \|th\|_E \|h\|_E \leq 2\varepsilon(\|h\|_E + \|h'\|_E)^2$$

d'où

$$\|\Delta(h,h') - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h').h\|_F \leq 2\varepsilon(\|h\|_E + \|h'\|_E)^2.$$

En échangeant h et h', on montre que

$$\forall h, h' \in B_E(0,\delta), \qquad \|\Delta(h,h') - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h).h'\|_F \leq 2\varepsilon(\|h\|_E + \|h'\|_E)^2.$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$\|(\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h).h' - (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h').h\|_F \leq 4\varepsilon(\|h\|_E + \|h'\|_E)^2.$$

Par homogénéité, la majoration vaut pour tout $h, h' \in E$. Pour $h, h' \in E$ fixés, on fait tendre ε vers 0 et on conclut. □

Proposition 10.18

Si $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ et $f : \Omega \subset E \to F$ est deux fois différentiable en a alors

$$\forall h, h' \in E, \qquad \mathrm{d}^2 f(a).(h, h') = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).(h_k, h'_j).$$

▷ On a vu que

$$\forall h \in E, \qquad \mathrm{d}f(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j \qquad \text{dans } F \qquad (1)$$

donc

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \circ p_j \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F)$$

où $p_j : \begin{array}{ccc} E & \mapsto & E_j \\ h & \mapsto & h_j \end{array}$. On a bien :

$$E \xrightarrow{p_j} E_j \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)} F.$$

D'après le théorème des fonctions composées,

$$\forall h_k \in E_k, \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathrm{d}f)(a).h_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)} .h_k \right) \circ p_j \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F).$$

Appliquons (1) à $\mathrm{d}f$: pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathrm{d}f)(a).h_k \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F) \\ &= \textstyle\sum_{k,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \right) \circ p_j \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\forall h, h' \in E, \qquad (\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a).h).h' = \sum_{k,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \right).h'_j \qquad \text{dans } F.$$

□

10.4.2 Différentielle d'ordre n

Définition 10.19

Par récurrence sur n : f est n-fois différentiable en a s'il existe un voisinage ouvert U de a dans Ω tel que f soit $(n-1)$-fois différentiable sur U et $\mathrm{d}^{n-1}f : U \to \mathcal{L}_c(E^{n-1}; F)$ est différentiable en a. $\mathrm{d}^n f(a)$ s'identifie à une application n-linéaire continue $E^n \to F$.

On définit $\mathcal{C}^n(\Omega, F) = \{f : \Omega \to F,\ f \text{ différentiable sur } \Omega,\ df : \Omega \to \mathcal{L}_c(E, F) \in \mathcal{C}^{n-1}(\Omega, \mathcal{L}_c(E, F))\}$ et $\mathcal{C}^\infty(\Omega, F) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Omega, F)$.

Proposition 10.20

Si f est n-fois différentiable en a alors $\mathrm{d}^n f(a)$ est une application n-linéaire continue et symétrique $E^n \to F$:

$$\forall h_1, \dots, h_n \in E,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \qquad \mathrm{d}^n f(a).(h_1, \dots, h_n) = \mathrm{d}^n f(a).(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)}).$$

▷ Il suffit de le démontrer pour σ une transposition car toute permutation est produit de transpositions. Pour simplifier, prenons $\sigma = (1, 2)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}^n f(a).(h_1, \dots, h_n) & = & \mathrm{d}^2(\mathrm{d}^{n-2} f)(a).(h_1, h_2).(h_3, \dots, h_n)) \\ & = & \mathrm{d}^2(\mathrm{d}^{n-1} f)(a).(h_2, h_1).(h_3, \dots, h_n) \\ & = & \mathrm{d}^n f(a).(h_2, h_1, h_2, \dots, h_n). \end{array}$$

□

Proposition 10.21

Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.

(i) Si f est k-fois différentiable en a alors elle admet des différentielles partielles d'ordre k en a.

(ii) La réciproque est fausse (dès $k = 1$).

(iii) $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ si et seulement si f admet des différentielles partielles jusqu'à l'ordre k continues sur Ω.

Proposition 10.22

(i) $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ *est un espace vectoriel.*

(ii) Les applications affines continues ou n*-linéaires continues sont* $\mathcal{C}^\infty$*.*

(iii) La composée d'applications $\mathcal{C}^k$ *est* $\mathcal{C}^k$*.*

(iv) Si $(F, \|.\|_F)$ *est une algèbre normée alors le produit d'applications* $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ *est* $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$*.*

(v) Si $(E, \|.\|_E)$ *est une algèbre de Banach alors* $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}(E) & \to & \mathrm{Inv}(E) \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$*.*

(vi) Si f *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* Ω_E *sur* Ω_F *et* $f \in \mathcal{C}^k(\Omega_E, F)$ *alors* $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(\Omega_F, E)$*.*

$\triangleright$ (ii) Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est constante en f : $\mathrm{d}f(a) = f$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ pour tout $a \in \Omega$ donc $\mathrm{d}^2 f = 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$.

Si $f \in \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2; F)$ est une application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \to F$ alors $\mathrm{d}f : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire continue

$$\mathrm{d}f(a_1, a_2).(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2).$$

D'après le cas précédent $\mathrm{d}^3 f = 0$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$.

De même, si f est une application n-linéaire continue alors $\mathrm{d}^{n+1} f = 0$ et donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$.

(iii) Récurrence : $k = 1$: ok

$(k \to k+1)$ $\mathrm{d}(f \circ g)(a) = \mathrm{d}f(g(a)) \circ \mathrm{d}g(a)$ est composée d'applications $\mathcal{C}^k$ donc est $\mathcal{C}^k$ donc $f \circ g \in \mathcal{C}^{k+1}$ par définition.

(iv) Par récurrence : $k = 1$ ok

$(k \to k+1)$ $\mathrm{d}(fg)(a).h = (\mathrm{d}f(a).h)g(a) + f(a)(\mathrm{d}g(a).h)$ donc $\mathrm{d}(fg)$ est une somme de produits d'applications $\mathcal{C}^k$ donc elle est $\mathcal{C}^k$ et donc $fg \in \mathcal{C}^{k+1}$.

(v) $\mathrm{d}f(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$ + récurrence.

(vi) Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\Omega_E \to \Omega_F$ alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ sur Ω_E donc, d'après le théorème des fonctions composées

$$\forall a \in \Omega, \qquad \mathrm{d}f^{-1}(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) = \mathrm{Id}$$

donc

$$\forall b \in \Omega_F, \qquad \mathrm{d}f^{-1}(b) = \mathrm{d}f(f^{-1}(b))^{-1}$$

et on conclut par récurrence sur k : $k = 1$ ok. Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ alors $f \in \mathcal{C}^k$ donc, par hypothèse de récurrence f^{-1} est $\mathcal{C}^k$ donc $\mathrm{d}f$ est $\mathcal{C}^k$ (d'après la formule ci-dessus) donc $f \in \mathcal{C}^{k+1}$. $\square$

10.5 Formules de Taylor

10.5.1 Taylor-Young

Proposition 10.23

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$ et $a \in \Omega$. Si $f : \Omega \to F$ est n-fois différentiable en a alors

$$f(a+h) = f(a)+df(a).h+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a).(h,h)+\cdots+\frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(a).\underbrace{(h,\ldots,h)}_{n \text{ fois}}+\underset{\|h\|_E\to 0}{o}(\|h\|_E^n).$$

$\triangleright$ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 1$ c'est la définition.

$(n \to n+1)$ Supposons la proposition vraie à l'ordre n (quelques soient les espaces). Soit $f \in \Omega \to F$ $(n+1)$-fois différentiable en a. On veut montrer que

$$H(h) = f(a+h)-f(a)-\mathrm{d}f(a).h-\cdots-\frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(a).(h,\ldots,h)-\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1}f(a)(h,\ldots,h) = o(\|h\|_E^{n+1}).$$

On a, comme $d^k f(a)$ est symétrique,

$$\mathrm{d}H(h).h' = \mathrm{d}f(a+h).h'-\mathrm{d}f(a).h'-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{d}^n f(a)(h,\ldots,h,h')-\frac{1}{n!}\mathrm{d}^{n+1}f(a).(h,\ldots,h,h')$$

donc $h \to \mathrm{d}f(a+h)$ est n-fois différentiable en 0 donc par hypothèse de récurrence, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall h \in B_E(0,\delta), \qquad \|\mathrm{d}H(h)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \varepsilon \|h\|^n .$$

L'inégalité des accroissements finis justifie que

$$\forall h \in B_E(0,\delta), \qquad \|H(f)\|_F \leq \|h\|_E \sup\{\|\mathrm{d}H(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)},\ z \in [0,h]\} \leq \varepsilon \|h\|_E^{n+1} .$$

□

10.5.2 Taylor avec reste intégral

Proposition 10.24

Si $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\Omega, F)$ et $[a, a+h] \subset \Omega$ alors

$$f(a+h) = f(a)+df(a).h+\cdots+\frac{1}{n!}d^n f(a).(h,\ldots,h)+\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}d^{n+1}f(a+th).(h,\ldots,h)dt.$$

▷ $u : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+th) \end{array}$ est de classe $\mathbb{C}^{n+1}([0,1],F)$ donc (chapitre 9)

$$u(1) = u(0) + u'(0) + \cdots + \frac{u^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} u^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

□

Corollaire 10.25 (*Inégalité de Taylor-Lagrange*)

Sous les mêmes hypothèses,

$$\begin{aligned} &\left\| f(a+h) - f(a) - \cdots - \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h,\dots,h) \right\|_F \\ &\qquad \leq \tfrac{\|h\|_E^{n+1}}{(n+1)!} \sup \left\{ \left\| d^{n+1} f(z) \right\|_{\mathcal{L}_c(E^{n+1},F)},\ z \in [a, a+h] \right\}. \end{aligned}$$

▷ On majore le reste intégral. □

10.6 En dimension finie

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^q$. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^q \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_q(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} \end{array}$ différentiable en $a \in \Omega$.

Définition 10.26

La Jacobienne de f en a est la matrice $q \times n$ de l'application $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$. Comme

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_k$$

les colonnes de $Jac(f)(a)$ sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathbb{R}^q$.

$$Jac(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Définition 10.27

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (à valeurs scalaires) est différentiable en a, $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Comme

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

on a :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Définition 10.28

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (à valeurs scalaires) est deux fois différentiable en a, la Hessien de f en a est la matrice de l'application bilinéaire $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme

$$d^2 f(a).(h, h') = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h'_j = h^T Hess(f)(a) h$$

où

$$Hess(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

10.7 Optimisation et convexité

10.7.1 Extremum

Définition 10.29

a est un point critique de $f : \Omega \to F$ si f est différentiable en a et $df(a) = 0$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Proposition 10.30

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $c \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(i) Si f est différentiable en c et admet un extremum local en c alors c est un point critique.

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et admet un minimum local en c alors $df(c) = 0$ et $d^2 f(c) \geq 0$ ie. $\forall h \in E,\ d^2 f(a).(h, h) \geq 0$.

(iii) Si E est de dimension finie, $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un point critique en c et $d^2 f(c) > 0$ alors c est un minimum local de f.

$\triangleright$ (*i*) Il existe $r > 0$ tel que $B_E(0,r) \subset \Omega$ et $\forall x \in B_E(c,r),\ f(c) \leq f(x)$. Soit $h \in E$ tel que $\|h\| = 1$.

$$\mathrm{d}f(c).h = u'(0)$$

où $u : \begin{array}{rcl}]-r,r[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(c+th) \end{array}$ est minimale en $t = 0$ sur $]-r,r[$ et dérivable en 0 donc $u'(0) = 0$.

(*ii*) $\mathrm{d}^2 f(c).(h,h) = u''(0) \geq 0$.

(*iii*) Si $q : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & q(x) \end{array}$ est une forme quadratique définie positive alors il existe $\alpha > 0$ tel que $q(x) \geq \alpha \|x\|^2$ (prendre $0 < \alpha = \min\{q(x),\ \|x\| = 1\}$).

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall h \in B_E(0,\delta), \left\| f(c+h) - f(c) - \mathrm{d}f(c).h - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(c)(h,h) \right\|_F \leq \varepsilon \|h\|^2 .$$

On fixe $\varepsilon \in]0, \frac{\alpha}{2}[$. Alors $\forall h \in B_E(0,\delta),\ f(c+h) \geq f(c) + \frac{\alpha}{2}\|h\|_E^2 - \varepsilon \|h\|_E^2 \geq f(c)$. $\square$

10.7.2 Applications convexes

Définition 10.31

Soit $\Omega \in E$ un ouvert convexe. $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-y)f(y)$$

f est strictement convexe si

$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in]0,1[, \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-y)f(y)$$

Proposition 10.32

Soit $f : \Omega \subset E \to F$ différentiable sur Ω convexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *f est convexe sur Ω ;*

(*ii*) $\forall x, y \in \Omega,\ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+t(y-x)) \end{array}$ *est convexe ;*

(*iii*) $\forall x, y \in \Omega,\ f(y) \geq f(x) + df(x).(y-x)$.

Remarque : On a utilisé (*iii*) dans le paragraphe sur la topologie faible.

▷ $(i) \Rightarrow (ii)$: Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} u(\lambda t-1+(1-\lambda)t_2) &= f(x+(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)(y-x)) \\ &= f(\lambda(x+t_1(y-x))+(1-\lambda)(x+t_2(y-x))) \\ &\leq \lambda u(t_1)+(1-\lambda)u(t_2). \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soient $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = f(x+(1-\lambda)(y-x)) = u(1-\lambda) = u(\lambda\times 0+(1-\lambda)\times 1) \leq \lambda u(0)+(1-\lambda)u(1).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Si u est convexe, $u(1) \geq u(0)+u'(0)\times 1$ (déjà démontré).
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Soient $x, y \in \Omega$, (iii) implique

$$\forall t_1, t_2 \in [0,1], \qquad u(t_1) \geq u(t_2)+u'(t_2)(t_1-t_2)$$

ce qui implique que u est convexe. □

Proposition 10.33

Soient $(E, \|.\|_E)$, Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est convexe ;
(ii) $\forall x \in \Omega,\ \mathrm{d}^2 f(x) \geq 0$ ie. $\forall h \in E,\ \mathrm{d}^2 f(a).(h,h) \geq 0$.

▷ $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tel que $\|h\| = 1$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. Alors

$$u : \begin{array}{rcl}]-r,r[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+th) \end{array}$$

est convexe et deux fois dérivable donc $\forall t \in]-r,r[,\ u''(t) \geq 0$. En particulier, $\mathrm{d}^2 f(x)(h,h) = u''(0) \geq 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soient $x, y \in \Omega$ et $u : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+t(y-x)) \end{array}$.

$$u''(t) = \mathrm{d}^2 f(x+y(y-x)).(y-x, y-x) \geq 0$$

par hypothèse donc u est convexe sur $[0,1]$. C'est vrai pour tous x, y donc f est convexe sur Ω. □

10.7.3 Extremum d'applications convexes

Voir poly.

Chapitre 11

Inversion locale et fonctions implicites

11.1 Théorème d'inversion locale

11.1.1 $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Définition 11.1

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, V un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, W un ouvert de $(F, \|.\|_F)$. Une application $f : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W si
- *$f \in \mathcal{C}^1(V, W)$;*
- *f est une bijection de V sur W ;*
- *$f^{-1} \in \mathcal{C}^1(W, V)$.*

Remarque : Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W alors pour tout $x \in V$, $\mathrm{d}f(x)$ est une bijection de E sur F. En effet, $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}d$ sur V donc, par le théorème des fonctions composées,

$$\forall x \in V, \qquad \mathrm{d}f^{-1}(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{Id} \qquad \text{sur } E.$$

Donc $\mathrm{d}f(x) : E \to F$ est bijective et

$$\forall x \in V, \qquad \mathrm{d}f(x)^{-1} = \mathrm{d}f^{-1}(f(x)).$$

11.1.2 Théorème d'inversion locale

Théorème 11.2 (*théorème d'inversion locale*)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$,

$a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit bijective ($E \to F$). Alors, il existe
- *un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega \, \|.\|_E)$;*
- *un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|F\|)$*

tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W ("$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local").

Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^k(V, W)$ alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(W, V)$.

Corollaire 11.3 (*théorème d'inversion locale en dimension finie*)

Si $E = F = \mathbb{R}^n$, il suffit de vérifier que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $\det(J_f(a)) \neq 0$.

Exemples et contre-exemples : 1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ car polynômiale et

$$\det(J_f(x,y)) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0 \text{ si et seulement si } (x,y) \neq (0,0).$$

D'après le théorème d'inversion locale, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}((a,b))$ et $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(f(a,b))$ tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. Mais f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ sur son image ("difféomorphisme global") car f n'est pas injective : $f(x,y) = f(-x,-y)$. La conclusion du théorème d'inversion locale est uniquement locale.

2. L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ est nécessaire. En effet,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right). \end{array}$$

est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 \neq 0$ car $f(x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$. Mais f n'est pas injective car non monotone au voisinage de 0.

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} > f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2k+1}$$

mais

$$f\left(\frac{1}{2k + \frac{1}{2}}\right) > f\left(\frac{1}{2k}\right) \qquad \text{(calcul).}$$

3. L'hypothèse de complétude est nécessaire. En effet $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$ (non complet) et $f = \mathrm{Id}$. Alors $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ car $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(E, F)$. De plus, $\mathrm{d}f(0) = \mathrm{Id}$ est bijective $E \to F$ mais f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local de $E \to F$ au voisinage de 0 car $f^{-1} : (\mathcal{C}^0, \|.\|_1) \to (\mathcal{C}^0, \|.\|_\infty)$ n'est pas continue.

$\triangleright$ (du théorème d'inversion locale) Quitte à translater, on peut supposer $a = 0$ et $f(a) = 0$. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, $\|\mathrm{d}f(0)^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)} = c$ est bien défini dans $\mathbb{R}$. Comme f est $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \overline{B_E}(0,r), \qquad \|f(x) - f(0) - \mathrm{d}f(0).x\|_F \leq \frac{1}{2c}\|x\|_E$$

et

$$\forall x \in \overline{B_E}(0,r), \qquad \|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(0)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \frac{1}{2c}.$$

Soit $W = B_F\left(0, \frac{r}{2c}\right)$.

Étape 1 : Montrons que pour tout $\forall y \in W,\ \exists! x \in B_E(0,r),\ f(x) = y$.
Soit $y \in W$. On applique le théorème du point fixe de Banach à

$$\phi_y : \begin{array}{rcl} \overline{B_E}(0,r) & \to & \overline{B_E}(0,r) \\ x & \mapsto & x - \mathrm{d}f(0)^{-1}.(f(x) - y) = -\mathrm{d}f(0)^{-1}.(f(x) - f(0) - \mathrm{d}f(0).x - y) \end{array}$$

(car $f(0) = 0$).

– $\overline{B_E}(0,r)$ munie de $\|.\|_E$ est un espace métrique complet (fermé dans un espace de Banach) ;

– ϕ_y envoie $\overline{B_E}(0,r)$ dans elle même. En effet, pour tout $x \in \overline{B_E}(0,r)$, on a

$$\|\phi_y(x)\|_E \leq c\left(\frac{\|x\|}{2c} + \|y\|_F\right) < c\left(\frac{r}{2c} + \frac{r}{2c}\right) = r;$$

– ϕ_y est $\frac{1}{2}$-contractante grâce à l'inégalité des accroissements finis (la boule est convexe) et la majoration

$$\|\mathrm{d}\phi_y(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} = \left\|\mathrm{d}f(0)^{-1} \circ (\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(0))\right\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq c\,\|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(0)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc il existe un unique $x \in \overline{B_E}(0,r)$ tel que $\phi_y(x) = x$, ce qui équivaut à $f(x) = y$. En fait, $x \in \mathring{B}_E(0,r)$ car l'argument de point fixe fonctionne encore avec $r \leftarrow r' = 2c\,\|y\|_F < r$: la boule $\overline{B_E}(0,r')$ est stable par le même calcul.

(Attention, on n'a pas montré que $f(B_E(0,r)) \subset W$!) Soit $V = B_E(0,r) \cap f^{-1}(W)$. Alors V est un voisinage ouvert de 0 dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et f est une bijection de V sur W.

*Étape 2 :*Montrons que $f^{-1} : W \to V$ est continue (ce qui implique qu'elle est différentiable : *cf* chapitre précédent)

Soient $y_1, y_2 \in W$ et $x_j = f^{-1}(y_j) \in V$ pour $j = 1, 2$. On a

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\| &= \|\phi_1(x_1) - \phi_2(x_2)\|_E \\
&= \|\mathrm{d}f(0)^{-1}.(f(x_1) - f(x_2) - \mathrm{d}f(0).(x_1 - x_2) - y_1 + y_2)\|_E \\
&\leq c\left(\left\|\int_0^1 (\mathrm{d}f(x_2 + t(x_1 - x_2)) - \mathrm{d}f(0)).(x_1 - x_2)\mathrm{d}t\right\|_F + \|y_1 - y_2\|_F\right) \\
&\leq c\left(\tfrac{1}{2c}\|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\|_F\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\right\|_E = \|x_1 - x_2\|_E \leq 2c\,\|y_1 - y_2\|_F\,.$$

Donc f^{-1} est $2c$- lipschitzienne sur W donc continue $W \to V$.

Étape 3 : Conclusions. f est une bijection bicontinue de V sur W et f est différentiable sur V donc f^{-1} est différentiable sur W et

$$\forall y \in W, \qquad \mathrm{d}f^{-1}(y) = \mathrm{d}f\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}.$$

Ceci montre que $\mathrm{d}f^{-1}$ est continue $W \to \mathcal{L}_c(F, E)$ *ie.* $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(W, V)$.

Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^k(V, W)$ alors la formule précédente montre que $\mathrm{d}f^{-1} \in \mathcal{C}^{k-1}(W, \mathcal{L}_c(F, E))$ *ie.* $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(W, V)$. □

11.1.3 Exercice type

Soit $(E, \|.\|_E)$ une algèbre de Banach. On a déjà vu que $\exp \in \mathcal{C}^1(E, E)$ et $\mathrm{d}(\exp)(0) = \mathrm{Id}_E$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $(E, \|.\|)$ et un voisinage ouvert W de 1 dans $(E, \|.\|_E)$ tels que exp soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de V sur W. On peut montrer que son inverse est

$$\forall y \in B_E(0, 1), \qquad \ln(1 + y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} y^k}{k}.$$

11.2 Théorème des fonctions implicites

11.2.1 Énoncé

Théorème 11.4 (*Théorème des fonctions implicites*)

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach. On munit $E \times F$ de la norme

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Soient U un ouvert de $E \times F$, $(a,b) \in U$, $f \in \mathcal{C}^1(U,G)$ telle que $f(a,b) = 0$ et $\frac{f}{\partial y}(a,b)$ soit une bijection de F sur G. Alors, il existe
- *un voisinage ouvert V de a dans E,*
- *un voisinage ouvert W de b dans F tels que $V \times W \subset U$;*
- *$\varphi \in \mathcal{C}^1(V,W)$;*

tels que

$$((x,y) \in V \times W,\ f(x,y) = 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))\,.$$

Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^k(U,G)$ alors $\varphi \in \mathcal{C}^k(V,W)$.

Remarque : Quitte à réduire $V \times W$, on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est bijective pour tout $(x,y) \in V \times W$ (image réciproque de l'ouvert $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}_c(E,F))$ par application continue). De

$$\forall x \in V, \qquad f(x,\varphi(x)) = 0 \text{ dans } G$$

on déduit que

$$\forall x \in V, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \circ \mathrm{d}\varphi(x) = 0 \text{ dans } \mathcal{L}_c(E,G).$$

En particulier, on connait

$$\mathrm{d}\varphi(a) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ dans } \mathcal{L}_c(E,F).$$

Corollaire 11.5 (*Théorème des fonctions implicites en dimension finie*)

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = G = \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^p)$ et

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial t}(a,b)\right) \neq 0$$

alors on a la conclusion.

Application : $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$: folium de Descartes. L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 + y^3 - 3xy \end{array}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y^2 - x) \neq 0$ si et seulement si $x \neq y^2$. Or

$$\big((x,y) \in \mathcal{C} \text{ et } x = y^2\big) \Leftrightarrow \big(y^3(y^3-2) = 0 \text{ et } x = y^2\big) \Leftrightarrow \Big((x,y) \in P = \{(0,0),(2^{\frac{2}{3}},2^{\frac{1}{3}})\}\Big)\,.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, pour tout $(a,b) \in \mathcal{C}\backslash P$, il existe $V \in \mathcal{V}_R(a)$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(b)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V,W)$ tels que

$$((x,y) \in \mathcal{C} \cap [V \times W]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)) \,.$$

De

$$\forall x \in V, \qquad x^3 + \varphi(x)^3 - 3x\varphi(x) = 0$$

on déduit que

$$3x^2 + 3\varphi'(x)\varphi(x)^2 - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0.$$

En particulier, si $x = a$ et $\varphi(x) = b$, on obtient

$$3a^2 + 3b^2\varphi'(a) - 3b - 3a\varphi'(a) = 0$$

soit

$$\varphi'(a) = \frac{b - a^2}{b^2 - a}$$

On constate que $|\varphi'(a)| \to \infty$ quand (a,b) tend vers un point de P.

▷ (du théorème des fonctions implicites) L'application

$$g : \begin{array}{ccc} E \times F & \to & E \times G \\ (x,y) & \mapsto & (x, f(x,y)) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1(U, E \times G)$ et

$$\mathrm{d}g(a,b).(h_1,h_2) = \left(h_1, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).h_2 \right).$$

Pour $(h_1,h_2) \in E \times F$ et $(u,v) \in E \times G$, on a

$$(\mathrm{d}g(a,b).(h_1,h_2) = (u,v)) \Leftrightarrow \left(h_1 = u \text{ et } h_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)^{-1}. \left(v - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).u \right) \right)$$

donc $\mathrm{d}g(a,b)$ est une bijection de $E \times F$ sur $E \times G$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe $\Omega_{E\times F}$ un voisinage ouvert de (a,b) dans $E \times F$, $\Omega_{E\times G}$ un voisinage ouvert de $(a,0)$ dans $E \times G$ tels que g soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\Omega_{E\times F}$ sur $\Omega_{E\times G}$. Il existe V un voisinage ouvert de a dans E et W un voisinage ouvert de b dans F tel que $V \times W \subset \Omega_{E\times F}$ et $V \times \{0\} \subset \Omega_{E\times G}$. Alors, g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $V \times W$ sur $g(V \times W)$ qui contient $V \times \{0\}$. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} V & \to & W \\ x & \mapsto & p_F(g^{-1}(x,0)) \end{array}$$

où, pour $(x,y) \in E \times F$, $p_F(x,y) = y \in F$. Alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(V,W)$ et

$$\begin{aligned}((x,y) \in V \times W \text{ et } f(x,y)=0) &\iff ((x,y) \in V \times W \text{ et } g(x,y) = (x,0)) \\ &\iff ((x,y) \in V \times W \text{ et } (x,y) = g^{-1}(x,0)) \\ &\iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).\end{aligned}$$

Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^k(U,G)$ alors $\mathrm{d}\varphi \in \mathcal{C}^{k-1}(V, \mathcal{L}_c(E,F))$ car

$$\mathrm{d}\varphi(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))$$

et donc $\varphi \in \mathcal{C}^k(V,W)$. □

11.3 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

11.3.1 Définitions équivalentes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $k \in \{1,\dots,n\}$. Un sous-ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$ et de dimension k si pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que l'un des énoncés équivalents suivants est vrai.

Carte locale : Il existe un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme local $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(W \cap N) = (\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}) \cap \varphi(W)$.

Graphe : Il existe $u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $W \cap N = \{A(z,u(z)), z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$.

Équation : Il existe $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $\mathrm{d}F(x_0)$ est surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$.

Nappe paramétrée : Il existe $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et $j : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que $j(0) = x_0$, $\mathrm{d}j(0)$ est injective et j soit une bijection bicontinue de U sur $W \cap N$.

Exercice : Montrer que $\mathcal{P} = \{(x,x^2), x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variétés de $\mathbb{R}^2$ en appliquant chaque définition.

– $^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Soit $X_0 = (x_0,y_0,z_0) \in {}^2$. On peut supposer $z_0 \neq 0$. Si $z_0 > 0$ ^{2} est localement le graphe de $(x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2} \in \mathcal{C}^\infty$. Si $z_0 < 0$, ^{2} est localement le graphe de $(x,y) \mapsto -\sqrt{1-x^2-y^2} \in \mathcal{C}^\infty$.

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,x^2+y^2+z^2-1) \end{array} \in \mathcal{C}^\infty \text{ et}$$

$$\operatorname{Jac}(\varphi)(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \end{vmatrix} = 2z_0 \neq 0$$

donc par le théorème d'inversion local, φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local au voisinage de X_0.

On va montrer qu'on a les implications suivantes entre les définitions :

Carte locale $\Rightarrow$ Équation $\Rightarrow$ Graphe $\Rightarrow$ Carte locale Graphe $\Rightarrow$ Nappe $\Rightarrow$ Graphe.

Carte $\Rightarrow$ Équation : Soit $x_0 \in N$ et φ une carte locale. Soient $(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_{n-k})$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, espace d'arrivée de φ. L'application

$$F : \begin{array}{rcl} W & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ x & \mapsto & (v_1(\varphi(x)),\ldots,v_{n-k}(\varphi(x))) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^p$. $N \cap V = F^{-1}(\{0\})$ et d'après le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{d}F(x_0).h = (v_1(\mathrm{d}\varphi(x_0).h),\ldots,v_{n-k}(\mathrm{d}\varphi(x_0).h)).$$

Comme φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W sur $\varphi(W)$ et $x_0 \in W$ alors $\mathrm{d}\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Pour $\widetilde{v} \in \mathbb{R}^{n-k}$, il existe un unique $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{d}\varphi(x_0).h = (0,\widetilde{v})$ et alors, $\mathrm{d}F(x_0).h = \widetilde{v}$. Donc $\mathrm{d}F(x_0)$ est surjective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-k}$.

Équation $\Rightarrow$ Graphe : Soient $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F \in \mathcal{C}^p(W,\mathbb{R}^{n-k})$ tels que $\mathrm{d}F(x_0)$ est surjective et $N \cap W = F^{-1}(\{0\})$.

Soit $E_1 = \ker(\mathrm{d}F(x_0))$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k (théorème du rang) et E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$. Soient $\widetilde{W} = \{(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2,\ x_1+x_2 \in W\}$ est un ouvert de $E_1 \times E_2$ (image réciproque) et

$$\widetilde{F} : \begin{array}{rcl} \widetilde{W} \subset E_1 \times E_2 & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & F(x_1+x_2) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^p$ et

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1},x_{0,2}).h_2 = \mathrm{d}F(x_0).h_2.$$

Comme $\mathrm{d}F(x_0)$ est une bijection de E_2 sur $\mathbb{R}^{n-k}$, alors $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_0)$ est bijective de E_2 sur $\mathbb{R}^{n-k}$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$, $V_2 \in \mathcal{V}_{E_2}(x_{0,2})$, $u \in \mathcal{C}^p(V_1, V_2)$ tels que

$$(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \widetilde{F}(x_1, x_2) = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)).$$

Ainsi, $N \cap (V_1 + V_2) = \{(x_1, u(x_1)), x_1 \in V_1\}$.

Graphe $\Rightarrow$ Carte : Soient $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que $N \cap W = \{(z, u(z)), z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$ (quitte à changer de coordonnées, $A = I_n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}^k$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{\ -k}$. L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, x_2 - u(x_1)) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^p$, $\varphi(N \cap W) = (\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}) \cap \varphi(W)$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathrm{d}\varphi(x_0).h = (h_1, h_2 - \mathrm{d}u(x_{1,0}).h_1)) \quad \Longleftrightarrow \quad (h_1 = v_1 \text{ et } h_2 = v_2 + \mathrm{d}u(x_{0,1}).v_1)$$

donc $\mathrm{d}\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Par le théorème d'inversion locale, φ est un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0.

Graphe $\Rightarrow$ Nappe : Soient $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que $N \cap W = \{(z, u(z)), z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$ (quitte à changer de coordonnées, $A = I_n$). Soit $z_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $x_0 = (z_0, u(z_0))$. $U = \{\widetilde{z} \in \mathbb{R}^k,\ (z_0 + \widetilde{z}, u(z_0 + \widetilde{z})) \in W\}$ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$ (image réciproque). L'application

$$j : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ \widetilde{z} & \mapsto & (z_0 + \widetilde{z}, u(z_0 + \widetilde{z})) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^p$, $j(0) = (z_0, u(z_0)) = x_0$ et

$$\forall h \in \mathbb{R}^k, \qquad \mathrm{d}j(0).h = (h, \mathrm{d}u(z_0).h)$$

donc $\mathrm{d}j(0)$ est injective sur $\mathbb{R}^k$. De plus, j est injective sur U. Donc j est une bijection de U sur $\varphi(U) = N \cap W$. Sa réciproque est continue car

$$j^{-1} : \begin{array}{ccc} W \cap N & \to & U \\ (z, u(z)) & \mapsto & z - z_0. \end{array}$$

Nappe $\Rightarrow$ Graphe : Soient $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}$ et j une nappe paramétrée. Soit $z_0 \in U$ tel que $x_0 = j(z_0)$. Soient $E_1 = \mathrm{Im}(\mathrm{d}j(0))$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et E_2 un supplémentaire de E_1. On note p_1 et p_2 les projections sur E_1 et E_2 respectivement.

$$(x \in N \cap W) \iff (\exists z \in U,\ x = j(z)) \iff (\exists z \in U,\ x_1 = p_1(j(z)), x_2 = p_2(j(z))).$$

L'application
$$f : \begin{array}{rcl} U \subset \mathbb{R}^k & \to & E_1 \\ z & \mapsto & p_1(j(z)) \end{array}$$

est $\mathcal{C}^p$ et
$$\forall h \in \mathbb{R}^k, \qquad \mathrm{d}f(z_0).h = p_1(\mathrm{d}j(z_0).h)$$

donc $\mathrm{d}f(z_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^k$ sur E_1. D'après le théorème d'inversion locale, il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{R^k}(z_0)$, $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$ tels que f soit un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme de V_0 sur V_1 :
$$(z \in V_0, x_1 = f(z)) \quad \iff (x_1 \in V_1, z = f^{-1}(x_1)).$$

$\widetilde{W} = j(V_0)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (image réciproque de V_0 par j^{-1}) et

$$(x \in N \cap \widetilde{W}) \iff (\exists z \in V_0,\ x_1 = f(z), x_2 = p_1(j(z))) \iff (x_1 \in V_1, x_2 = p_2 \circ j \circ f^{-1}(x_1)).$$

11.3.2 Espace tangent

Définition 11.6

L'espace tangent à N en x_0 est

$$T_{x_0}N = \{\gamma'(0), \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n),\ I \text{ un intervalle ouvert contenant } 0,\ \gamma(I) \subset N \text{ et } \gamma(0) = x_0\}.$$

Carte locale :

$$T_{x_0}N = \mathrm{d}\varphi(x_0)^{-1}.(\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}) = \mathrm{d}\varphi^{-1}(\varphi(x_0)).(\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}).$$

Graphe :
$$T_{x_0}N = \{A(h, \mathrm{d}u(z_0).h), h \in \mathbb{R}^k\}.$$

Équation :
$$T_{x_0}N = \ker(\mathrm{d}F(x_0)).$$

Nappe paramétrée :

$$T_{x_0}N = \mathrm{d}j(0)(\mathbb{R}^k).$$

$\triangleright$ *Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de carte locale :* $\subset$: Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ tels que $\gamma(I) \subset N$ $v = \gamma'(0)$ et $\gamma(0) = x_0$. Quitte à réduire I, on peut supposer $\gamma(I) \subset W$. Alors $\forall t \in I,\ \varphi(\gamma(t)) \subset (\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\})$. Donc $(\varphi \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}\varphi(x_0).v \in (\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\})$.
$\supset$: Soit $v \in \mathrm{d}\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\})$: $v = \mathrm{d}\varphi(x_0)^{-1}.w$ où $w \in \mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}$. Comme $\varphi(W)$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \qquad \varphi(x_0) + tw \in \varphi(W).$$

Alors,

$$\beta : \begin{array}{rcl}]-\varepsilon, \varepsilon[& \to & \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ t & \mapsto & \varphi(x_0) + tw \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, \varphi(W))$ donc $\gamma : \varphi^{-1} \circ \beta \in \mathcal{C}^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, W)$ et vérifie

$$\gamma(0) = \varphi^{-1} \circ \varphi x_0 = x_0$$

et

$$\gamma'(0) = \mathrm{d}(\varphi^{-1})(\varphi(x_0)).\beta'(0) = \mathrm{d}\varphi(x_0)^{-1}.w = v.$$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de nappe paramétrée : idem.

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de graphe : Soit $u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ comme dans la définition par graphe. On a construit une nappe paramétrée j :

$$j : \begin{array}{rcl} U \subset \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^n \\ z & \mapsto & (z_0 + z, u(z_0 + z)). \end{array}$$

On sait alors que

$$T_{x_0}N = \mathrm{d}j(0).(\mathbb{R}^k) = \{(h, \mathrm{d}u(z_0).h), h \in \mathbb{R}^k\}.$$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme d'équation : Soit F comme dans la définition par l'équation. On en déduit $u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ comme précédemment (théorème des fonctions implicites). On sait alors que

$$T_{x_0}N = \{(h, \mathrm{d}u(z_0).h), h \in \mathbb{R}^k\}.$$

Or $F(x_1+u(x_1))=0$ au voisinage de $x_{0,1}$ donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0)+\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0)\circ \mathrm{d}u(x_{0,1})=0.$$

Comme $E_1=\ker(\mathrm{d}F(x_0))$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0)$ donc $\mathrm{d}u(x_{0,1})=0$ et

$$T_{x_0}N=\{(h,0),h\in E_1\}=\ker(\mathrm{d}F(x_0))$$

(à identification près d'une somme directe avec un produit cartésien). □

11.4 Théorème des extrema liés

Théorème 11.7

Soient $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x_0\in N$. Si $f_{|N}$ admet un extremum local en x_0 alors

$$T_{x_0}N\subset\ker(df(x_0)).$$

▷ Soit $v\in T_{x_0}N$: il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $\gamma\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ tels que $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(I)\subset N$ et $\gamma'(0)=v$. Alors, $f\circ\gamma\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ admet un extremum local en 0 donc $(f\circ\gamma)'(0)=\mathrm{d}f(x_0).v=0$. □

Corollaire 11.8

Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0\in W$, $f_1,\dots,f_{n-k}\in\mathcal{C}^1(W,\mathbb{R})$ tels que $df_1(x_0),\dots,df_{n-k}(x_0)$ soient des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes et $N=\{x\in W,\ f_1(x)=\dots=f_{n-k}(x)=0\}$. Si $g\in\mathcal{C}^1(W,\mathbb{R})$ et $g_{|N}$ admet un extremum local en x_0 alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-k}\in\mathbb{R}$ tel que

$$dg(x_0)=\lambda_1 df_1(x_0)+\dots+\lambda_{n-k}df_{n-k}(x_0).$$

▷ $N=F^{-1}(\{0\})$ où $F=(f_1,\dots,f_{n-k})$. Donc

$$T_{x_0}N=\ker(\mathrm{d}F(x_0))=\bigcap_{j=1}^{n-k}\ker(\mathrm{d}f_j(x_0))$$

Lemme 11.9

Soient $T,L_1,\dots,L_m$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^m$ telles que $L_1,\dots,L_m$ soient *libres. Si* $\bigcap_{j=1}^{m} \ker(L_j) \subset \ker(T)$ *alors il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$T = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j L_j.$$

□

Exercice : Pour $r > 0$ on définit $V_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ xyz = 1,\ x^4+y^4+z^4 = r\}$.

1. Pour quelles valeurs de r, a-t-on $V_r \neq \varnothing$?
2. Si V_r est non vide, est-ce une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

1. On introduit $N_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^4 + y^4 + z^4 = r\}$. N_r est non vide et c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 comme graphe local de $(x,y) \mapsto \pm\sqrt[4]{r - x^4 + y^4}$ si $z \neq 0$. L'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & xyz \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$. N_r est compacte (fermée et bornée) donc $g_{|N}$ atteint son minimum et son maximum. Soit (x_*, y_*, z_*) un point critique de $g_{|N}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla g(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$ avec $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - r$, *ie.*

$$\left\{ \begin{array}{r} y_* z_* = 4\lambda x_*^3 \\ x_* z_* = 4\lambda y_*^3 \\ x_* y_* = 4\lambda z_*^3 \\ x_*^4 + y_*^4 + z_*^4 = r \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad x_* y_* z_* = 4\lambda x_*^4 = 4\lambda y_*^4 = 4\lambda z_*^4.$$

Si $\lambda = 0$ alors deux composantes de (x_*, y_*, z_*) sont nulles et la troisième vaut $\pm\sqrt[4]{r}$ donc $g(x_*, y_*, z_*) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x_*^4 = y_*^4 = z_*^4 = \frac{r}{3}$ donc

$$(x_*, y_*, z_*) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}} \right)$$

avec le produit de signe constant. On en déduit que

$$\min g_{|N} = -\left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \qquad \text{et} \qquad \max g_{|N} = \left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Donc $V_r \neq 0$ quand $r < 3$. Si $r = 3$ alors V_r contient un nombre fini de points.

2. Montrons que $\forall r > 3$, V_r est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.