Examen : Probèmes inverses et dynamique des population

Cécile Della Valle

28 janvier 2019

1 Introduction

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & x \in [0,L] \\ v(t) = M - \int_0^L xy(x,t)dx - d & t \in [0,\tau] \\ v(t)y(0,t)\mathbb{I}_{v(t)>0} = 0 \\ v(t)y(L,t)\mathbb{I}_{v(t)<0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2 Etude du problème direct

On se propose d'étudier le système linéaire issu du modèle de Lifshitz-Slyosov où la vitesse de réaction totale, somme de la vitesse de polymérisation et dépolimérisation, ne dépend que du temps. Les coefficients de polymérisation p et de dépolymérisation d associés aux réactions sont constants et ne dépendent pas de la taille des polymères notée x.

Soit y la distribution en taille des polymères, par conservation de la masse, la vitesse se déduit de la mesure du moment d'ordre 1, noté μ_1, des polymères.

Ainsi le modèle de Lifshitz-Slyosov s'écrit pour $y(x,t)$ la concentration de polymères de taille x en temps t :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ y(x,0) = y_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

où la vitesse $v(t)$ est calculée par conservation de la masse totale M, des coefficients de polymérisation p et d :

$$v(t) = p(\mathrm{M} - \int_0^\infty xy(x,t)dx) - d$$

et

$$\mu_1 = \int_0^\infty xy(x,t)dx$$

On note que le problème (2) est incomplet et qu'il peut être nécessaire d'imposer des conditions aux limites quand cette vitesse est positive ou négative, en fonction du domaine Ω sur lequel on souhaite résoudre cette équation. Sans perdre de généralité, on pose que le coefficient de polymérisation est égal à 1, soit $p = 1$.

Soit $L > 0$ et $\tau > 0$, l'objectif est de reconstruire $\hat{y_0}$ la condition initiale de l'équation (2) à partir de mesures de moments Ψ_n pour $n \geq 0$:

$$\begin{array}{cccc} \Psi_n : & L^2([0,L]) & \to & L^2([0,\tau]) \\ & y_0 & \mapsto & t \to \int_0^L x^n y_0(x-\theta(t))dx \end{array} \tag{3}$$

Nous souhaitons étudier sous quelles conditions ce problème est dit observable.

3 Etude du problème inverse, premier cas : $c(t)$ connu, on mesure μ_0

3.1 Question 4

a

Soit $\mathscr{U} = L^2(0, L)$ et $\mathscr{Z} = L^2(\mathbb{R}^+)$ deux espaces de Hilbert. On définit l'application Ψ :

$$\Psi \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \rightarrow & \mathscr{Z} \\ u^{in} & \mapsto & t \rightarrow \int_0^L u(x,t)dx \end{array} \right. \tag{4}$$

Alors l'application Ψ appartient à $L(\mathscr{U}, \mathscr{Z})$.

Définition 3.1

Le problème inverde que nous allons étudier se définit ainsi : étant donné $z \in \mathscr{Z}$, on cherche $u_\epsilon^{in} \in \mathscr{U}$ tel que $\Psi u^{in} = z$.

b Soit $u^{in} \in \mathscr{U}$, et $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi u^{in}(t) &= \mu_0(t) \\ &= \int_0^L u(x,t)dx \\ &= \int_0^L u^i n(x - a\int_0^t c(s)ds + bt)dx \end{aligned}$$

b

L'application Ψ est linéaire par linéarité de l'opérateur intégrale. De plus Ψ est positive dès que u^{in} l'est, par intégration d'une fonction positive.

Montrons que Ψ est continu en montrant que :

$$\forall (u_1^{in}, u_2^{in}) \in \mathscr{U},\ \|\Psi u_1^{in} - \Psi u_2^{in}\|_{\mathscr{Z}} \leq C\|u_1^{in} - u_2^{in}\|_{\mathscr{U}}$$

Soit la fonction θ telle que :

$$\theta \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \int_0^t (ac(s) - b)ds \end{array} \right.$$

Puisque pour tout $t \geq 0$ on a $c(t) < \frac{b}{a}$ alors $ac(t) - b < 0$ et θ est une fonction strictement décroissante.

De plus, $\theta(0) = 0$ donc θ est négatif pour tout $t \geq 0$, et il existe τ tel que $\theta(\tau) = -L$.

On pose $u^{in} = u_1^{in} - u_2^{in}$, et u l'unique solution de (2) pour la condition initiale y^{in}.

On pose le changement de variable $x' = x - a\int_0^t c(s)ds + bt) = x - \theta(t)$ il vient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\Psi u^{in}\|_{\mathscr{Z}}^2 &= \int_0^\infty |u(x,t)|^2 dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^L |u^i n(x - \theta(t))|^2 dx \\ &= \int_0^\infty \int_{-\theta(t)}^L |u^{in}(x')|^2 dx' \\ &\leq int_0^\tau \int_{-\theta(t)}^L |u^{in}(x')|^2 dx' \\ &\leq \tau \|u^{in}\|^2 \end{aligned}$$

avec $\tau = \theta^{-1}(-L) =$ constante.

On vient donc par cette inégalité de montrer la continuité de Ψ. De plus la norme de Ψ est majorée par $\tau = \theta^{-1}(-L)$.

c