

Premier résultat sur la polymérisation

Cécile Della Valle

22 janvier 2019

1 Introduction

On souhaite étudier le problème d'observabilité suivant : sachant des mesures de moments de la solution de l'équation de Lifshitz-Slyozov, correspondant à la polymérisation et dépolymérisation de protéines, peut-on reconstituer la condition initiale ?

On s'intéresse dans une première partie à l'équation de Lifshitz-Slyozov. Sous l'hypothèse qu'une solution existe et qu'elle est unique, alors on obtient des propriétés sur la vitesse de réaction, définie comme la somme des vitesses de polymérisation et de dépolymérisation. Puisque, sous certaines hypothèses, la vitesse ne change pas de signe, il est intéressant d'étudier séparément les cas où elle est positive (polymérisation) et négative (dépolymérisation)

On se place ensuite dans le cas où la vitesse est positive. On suppose alors que cette vitesse est une fonction continue donnée. On en déduit la dynamique explicite de tous les moments par la simple mesure à un temps donné.

D'autre part, on étudie le cas où la vitesse est négative, elle est également une fonction continue donnée. On peut redémontrer dans ce cas les résultats d'A. Armiento [1].

2 Notation

- y – fonction de la concentration des polymères en fonction de leur taille x ;
- c – fonction de concentration du monomère ;
- $v(t)$ – vitesse totale de réaction (dépolymérisation et polymérisation) ;
- $\theta(t)$ – intégrale de la vitesse $\theta(t) = \int_0^t v(s)ds$;
- p – coefficient de polymérisation, par la suite on posera $p = 1$;
- d – coefficient de dépolymérisation ;
- μ_i – moment d'ordre i de la fonction y , soit $\mu_i = \int_0^L x^i y(x, t) dx$.

3 Objectif

On se propose d'étudier le système linéaire issu du modèle de Lifshitz-Slyosov où la vitesse de réaction totale, somme de la vitesse de polymérisation et dépolimérisation, ne dépend que du temps. Les coefficients de polymérisation p et de dépolymérisation d associés aux réactions sont constants et ne dépendent pas de la taille des polymères notée x .

Soit y la distribution en taille des polymères, par conservation de la masse, la vitesse se déduit de la mesure du moment d'ordre 1, noté μ_1 , des polymères.

Ainsi le modèle de Lifshitz-Slyosov s'écrit pour $y(x, t)$ la concentration de polymères de taille x en temps t :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ y(x, 0) = y_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

où la vitesse $v(t)$ est calculée par conservation de la masse totale M , des coefficients de polymérisation p et d :

$$v(t) = p(M - \int_0^\infty xy(x, t) dx) - d$$

et

$$\mu_1 = \int_0^\infty xy(x, t)dx$$

On note que le problème (1) est incomplet et qu'il peut être nécessaire d'imposer des conditions aux limites quand cette vitesse est positive ou négative, en fonction du domaine Ω sur lequel on souhaite résoudre cette équation. Sans perdre de généralité, on pose que le coefficient de polymérisation est égal à 1, soit $p = 1$.

Soit $L > 0$ et $\tau > 0$, l'objectif est de reconstruire y_0 la condition initiale de l'équation (1) à partir de mesures de moments Ψ_n pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_n &: L^2([0, L]) \rightarrow L^2([0, \tau]) \\ y_0 &\mapsto t \rightarrow \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t))dx \end{aligned} \quad (2)$$

Nous souhaitons étudier sous quelles conditions ce problème est dit observable.

4 Généralités

4.1 Définitions

Le modèle que nous allons étudier est le modèle de polymérisation-dépolymérisation suivant sur un compact $\Omega = [0, L] \times [0, \tau]$. Sans perdre de généralité, on pose que le coefficient de polymérisation est égal à 1, soit $p = 1$.

L'équation (1) complétée par des conditions aux limites liées au choix du domaine Ω s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & x \in [0, L] \\ v(t) = M - \int_0^L xy(x, t)dx - d & t \in [0, \tau] \\ v(t)y(0, t)\mathbb{I}_{v(t)>0} = 0 \\ v(t)y(L, t)\mathbb{I}_{v(t)<0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Et on ajoute une hypothèse sur la condition initiale y_0 :

$$\exists l > 0 \text{ t.q. } \forall t \leq \tau, \text{ supp}(y_0) \subset [0, l] \subset [0, L - \int_0^t v(s)ds] \quad (4)$$

Lemme 4.1

Dès lors que le support de y_0 est un compact $[0, l]$ de \mathbb{R}_+ , on peut toujours construire un domaine $[0, L] \times [0, \tau]$ tel que la condition (4) est vérifiée.

▷ Il suffit de remarquer que $\forall t : v(t) = M - d - \mu_1(t) < M - d$ puisque le moment d'ordre 1 est toujours positif. On pose donc $L = l + \tau * (M - d)$. \square

Cette condition (4) signifie que le support de la fonction $y(\cdot, t)$ est toujours inclus dans $[0, L]$ et en particulier on a toujours l'égalité vérifiée :

$$\forall t \in [0, \tau], y(L, t) = 0$$

On peut donc remplacer la condition aux limites en $x = L$ par $y(L, t) = 0$, et ce quelque soit le signe de la vitesse.

Pour la suite on définit deux types de solution du pb de Cauchy (3), une solution classique qui appartient à $C^1([0, \tau] \times [0, L])$ et une solution "faible" qui appartient à $C^1([0, \tau], L^2[0, L])$.

Définition 4.2

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $L > 0$, $y_0 \in C^1([0, L])$. On appelle y une solution classique du problème de Cauchy (3) sur un domaine Ω ouvert de $[0, L] \times [0, \tau]$ si c'est une fonction C^1 de x et de t dans Ω et si elle satisfait (3) point par point dans Ω .

Définition 4.3

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $L > 0$, $y_0 \in L^2([0, L])$. On dit que $y \in$

$C^0([0, \tau], L^2[0, L])$ est solution du problème de Cauchy (3) si et seulement si pour tout $t \in [0, \tau]$ et pour tout $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ telle que :

$$\begin{cases} -\int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) dx ds + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx - \int_0^L y_0(x) \phi(0, x) dx = 0 \\ v(t) = M - \int_0^L xy(x, t) dx - d \\ \phi(0, t) \mathbb{I}_{v(t) < 0} = 0 \\ \phi(L, t) \mathbb{I}_{v(t) > 0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Définition 4.4

Pour toute solution classique de l'équation (3), on définit la fonction θ de la façon suivante :

$$\theta(t) = \int_0^t v(t') dt'$$

Lemme 4.5

La fonction θ associée à une solution classique de l'équation (3) est de classe C^2 .

▷ Soit y une solution classique de l'équation (3). Alors en particulier $y \in C^1(\Omega)$. On pose $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t$. Donc la fonction $t \rightarrow v(t)$ appartient à $C^1(\Omega_t)$ et donc θ appartient à $C^2(\Omega_t)$ \square

4.2 Courbes caractéristiques

Définition 4.6 (Courbes caractéristiques)

Soit une solution classique y de l'équation (3), on définit les courbes caractéristiques de y par $X \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$ telles que :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s; x, t) = v(s) \\ X(t; x, t) = x \end{cases}$$

Alors y est constant le long de chacune de ces droites.

▷ Soit y solution classique de l'équation (3), alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s; x, t) = (M - d) - \int_0^L xy(x, t) ds \\ X(t; x, t) = x \end{cases}$$

admet une unique solution, de plus elle est de classe C^1 . On dérive y le long de la courbe caractéristique définie par X . On pose $Y(X(s)) = y(X(s), s)$ où l'on suppose que y est une solution classique de (3). Lorsque l'on dérive Y le long d'une courbe caractéristique on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} Y &= \frac{dX}{ds} \frac{\partial}{\partial x} y(X(s), s) + \frac{\partial}{\partial t} y(X(s), s) \\ &= v(s) \frac{\partial}{\partial x} y(X(s), s) + \frac{\partial}{\partial t} y(X(s), s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La solution classique y est donc constante le long d'une courbe et $y(X(s), s) = y(X(0), 0)$. \square

Remarque 4.7. Pour que la méthode des caractéristiques définisse sans ambiguïté la valeur de la solution au point (x, t) , il faut qu'il n'y ait qu'une seule courbe qui passe par le point (x, t) . Pour t fixé, $t \in [0, \tau]$, la caractéristique associée passant par le point $(\xi, 0)$ s'écrit :

$$\xi = x - \int_0^t v(s) ds$$

C'est le cas dès que la vitesse v ne change pas de signe.

5 Equations des moments et conséquences

Lemme 5.1

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $l > 0$, $L > 0$, $y_0 \in L^2([0, L])$. Soit y solution classique de l'équation (3) et l'hypothèse (4) vérifiée.

On suppose que la solution $(x, t) \rightarrow y(x, t)$ existe, qu'elle est unique. D'après la méthode des caractéristiques, cette solution peut s'écrire, $\forall (x, y) \in [0, L] \times [0, \tau]$,

$$y(x, t) = y_0(x - \int_0^t v(s) ds)$$

alors $\forall n \geq 0$, $\forall t > 0$, on a

$$\mu_n(t) = \int_0^L x^n y_0(x - \int_0^t v(s) ds) dx$$

▷ (lemme 5.1) Sous l'hypothèse d'existence et d'unicité du problème de Cauchy (3), la solution de l'équation (3) est constante le long d'une courbe caractéristique et s'écrit donc :

$$y(x, t) = y_0(x - \theta(t))$$

□

On définit l'application de Ψ_n pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_n &: L^2([0, L]) \rightarrow L^2([0, \tau]) \\ y_0 &\mapsto t \mapsto \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \end{aligned} \quad (6)$$

Alors, toujours sous l'hypothèse (4), on peut également effectuée le changement de variable $x = x' + \theta(t)$ et

$$\Psi_n(y_0)(t) = \int_0^L x^n y_0(x) dx = \int_{-\theta(t)}^{L-\theta(t)} (x' + \theta(t))^n y_0(x') dx'$$

$\Psi_n(y_0)$ est une fonction C^1 comme composition de fonctions C^1 . On peut donc calculer sa dérivée par rapport au temps t sur $[0, \tau]$. On montre par intégration par partie pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_n(y_0)}{dt} &= \frac{d\mu_n}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \\ &= \int_0^L x^n \frac{\partial}{\partial t} y_0(x - \theta(t)) dx \\ &= \int_0^L x^n (-v(t)) y_0'(x - \theta(t)) dx \\ &= -v(t) [x^n y_0(x - \theta(t))]_0^L + v(t) n \int_0^L x^{n-1} y_0(x - \theta(t)) dx \\ &= nv(t) \mu_{n-1} \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse (4), la fonction y_0 est nulle sur $[L - \theta(t); L]$ et ce $\forall t > 0$. Donc :

$$\frac{d\Psi_n(y_0)}{dt} = v(t) n \mu_{n-1}$$

De plus pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_0(y_0)}{dt} &= \frac{d\mu_0}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^L y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_0^L L \frac{\partial}{\partial t} y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_0^L -v(t) y_0'(x - \theta(t)) dx \\
&= -v(t) [y_0(x - \theta(t))]_0^L \\
&= +v(t) y_0(\max(0, -\theta(t)))
\end{aligned}$$

Donc, pour une solution classique de (3), on a la relation :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = v(t) n \mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = v(t) y_0(\max(0, -\theta(t))) \end{cases} \quad (7)$$

Proposition 5.2

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $l > 0, L > 0$, $y_0 \in L^2([0, L])$. Soit y solution classique de l'équation (3) et l'hypothèse (4) vérifiée.

Si $M - dep < 0$,

— alors $\forall t \in [0, \tau]$, on a $v(t) < 0$.

Sinon,

— soit $v(0) < 0$ alors pour τ suffisamment grand, il existe $t^* < \tau$ tel que $v(t^*) = 0$,

— soit $v(0) > 0$ alors de même $\forall t \in [0, \tau]$ on a $v(t) > 0$.

▷ Soit l'unique solution classique y du problème de Cauchy (3), alors la vitesse v de réaction s'écrit pour tout temps $t \in [0, \tau]$ par définition :

$$v(t) = M - \int_0^L xy(x, t) dx - d$$

Sachant la définition de la vitesse v , on a l'implication :

$$v(t) = M - d - \mu_1(t) < 0 \iff M - d < \int_0^L xy(x, t) dx$$

Si $M - d < 0$, on remarque que la condition est toujours vérifiée, et dans ce cas on est dans un régime de dépolymérisation, la vitesse est toujours négative.

Sinon, pour $M - dep > 0$ on a :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d\mu_1}{dt} = -v(t)\mu_0$$

Montrons que la proposition est valable pour une vitesse négative $v(0) < 0$, ie en cas de dépolymérisation.

Démonstration par l'absurde, on suppose qu'il n'existe pas de t^* tel que la vitesse s'annule. Sachant qu'à $t = 0$ la vitesse v est négative, c'est donc une fonction croissante de $[0, \tau]$. La vitesse v ne change pas de signe (par hypothèse) donc μ_1 est décroissante. ($x \rightarrow xy(x, t)$ et $x \rightarrow y(x, t)$ sont des fonctions positives de même support). De plus, la fonction θ est négative et :

$$\begin{aligned}
\mu_1(t) &= \int_0^L xy(x, t) dx \\
&= \int_0^L xy_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_{\max(0, -\theta(t))}^L (x + \theta(t)) y_0(x) dx
\end{aligned}$$

Donc pour τ suffisamment grand $\mu_1 \rightarrow 0$ ce qui contredit $M - d < \mu_1$. L'hypothèse est fausse et il existe t^* tel que $v(t^*) = 0$.

La dernière assertion de la proposition, si $v(0) > 0$ alors de même $\forall t \in [0, \tau]$, on a $v(t) > 0$, est démontrée ultérieurement dans la preuve de la proposition 6.8. \square

Remarque 5.3. Pour l'instant, nous avons étudié le système complet (3). Ce problème de Cauchy introduisait une équation non linéaire en y , la vitesse était explicitement liée à la solution :

$$v(t) = M - d - \int_0^L xy(x, t)dx = f(y)(t)$$

Pour la suite, nous allons supposer que v est en fait une fonction connue de C^0 . Puis nous allons faire des hypothèses sur la vitesse v afin de démontrer l'existence et l'unicité, dans le cas de la polymérisation, puis de la dépolymérisation.

6 Polymérisation

Pour la suite, on considère que la vitesse v est une fonction continue positive $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$. On s'intéresse alors à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) \\ v(t)y(0, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

6.1 Existence et unicité

Afin de démontrer l'existence et l'unicité, on adapte la définition de solution donnée par la définition 4.3, cette fois-ci avec une vitesse de réaction v continue positive, donc connue et mesurée qui ne dépend plus de y . Ce problème correspond physiquement à l'étude de la polymérisation.

Définition 6.1

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $l > 0$ et $L > 0$.
 Soit $y_0 \in L^2([0, L])$ tel que $\text{supp}(y_0) \subset [0, l]$.
 Soit $L = l + \tau * (M - d)$, et $v \in C^0([0, \tau])$.
 Supposons que $\forall t \in [0, \tau]$, $v(t) > 0$.
 On dit que $y \in C^0([0, \tau], L^2[0, L])$ est solution du problème de Cauchy (8) si et seulement si pour tout $t \in [0, \tau]$ et pour tout $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ telle que :

$$\begin{cases} - \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx - \int_0^L y_0(x) \phi(x, 0) dx = 0 \\ \phi(L, t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Remarque 6.2. Les hypothèses $l > 0$, $y_0 \in L^2([0, L])$ tel que $\text{supp}(y_0) \subset [0, l]$ et $L = l + \tau * (M - d)$ n'interviennent pas dans la démonstration. Elles ne sont reprises que par cohérence avec l'hypothèse (4).

Remarque 6.3. La vitesse mesurée n'est en fait pas une fonction continue quelconque. En effet elle vérifie au moins :

$$\|v\|_{L^\infty} < M - d$$

Cependant cette hypothèse n'est pas nécessaire pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 6.4

Soit $\tau > 0$, $L > 0$, $y_0 \in L^2(0, L)$ et $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$. Alors le problème de Cauchy (8) admet une unique solution $y \in C^0([0, \tau], L^2(0, L))$ au sens de la définition 6.1.

▷ La démonstration copie celle de Jean-Michel Coron dans son livre [2] pour le théorème 2.4 page 27, la différence est que la vitesse n'est pas constante $v = 1$. Cependant on peut s'y ramener facilement par un changement de variable. Cette démonstration est également la démonstration utilisée dans le rapport de Lucas Brivadis [3].

On commence par démontrer l'unicité : soit y_1 et y_2 solution du problème de Cauchy au sens de la définition 6.1. Alors on pose $y = y_1 - y_2$ et pour tout $t \in [0, \tau]$, $y \in C^0([0, T], L^2(0, L))$. Et pour toute fonction $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ telle que $\phi(L, \cdot) = 0$:

$$-\int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx = 0 \quad (10)$$

Pour t^* fixé, on définit une suite de fonction $(f_n)_{n \in (N)}$ de $C^1(\mathbb{R}^+)$, espace fonctionnel dense dans $L^2(0, L)$, telle que :

$$\begin{cases} f_n = 0 \text{ sur } [L, \infty), & \forall n \\ f_n|_{(0, L)} \rightarrow y(\cdot, t) \in L^2(0, L) & \text{pour } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Pour $n \in (N)$ on pose alors $\phi_n \in C^1([0, t] \times [0, L])$:

$$\phi_n(x, t) = f_n(x + \int_t^{t^*} v(s) ds), \quad \forall (x, t) \in [0, t^*] \times [0, L].$$

Par hypothèse, $v(t) \geq 0$ sur $[0, t^*]$ alors ϕ_n vérifie la condition $\phi(\cdot, L) = 0$.

De plus on constate que :

$$\partial_t \phi_n = -v(t) \partial_x \phi_n$$

Alors, en posant $\phi = \phi_n$ dans (10) il vient :

$$\int_0^L y(x, t^*) \phi_n(x, t^*) dx = 0$$

or $\phi_n(x, t^*) = f_n(x)$ et pour $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^L |y(x, t^*)|^2 dx = 0$$

On a donc montré que pour tout t^* de $[0, \tau]$ on a $y(\cdot, t^*) = 0$.

Pour démontrer l'existence, on remplace dans l'expression (8) la solution :

$$y(x, t) = y_0(x - \int_0^t v(s) ds) = y_0(x - \theta(t)) \quad (11)$$

□

6.2 Propriétés des moments

Dans cette partie, on revient sur l'hypothèse de v une fonction continue connue. En effet, le résultat suivant reste a fortiori valable pour v connu puisqu'il repose essentiellement sur l'écriture de la solution du pb de Cauchy (8) sous la forme $y(x, t) = y_0(x - \theta(t))$.

Proposition 6.5

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $l > 0$, $L > 0$, $y_0 \in L^2([0, L])$ et l'hypothèse (4) vérifiée.

On rappelle l'hypothèse (4) : $\exists l > 0$ t.q. $\text{supp}(y_0) \subset [0, l] \subset [0, L - \int_{t^*}^t v(s) ds]$;

Soit y solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & x \in [0, L] \\ v(t) = M - \int_0^L y(x, t) dx - d & t \in [0, \tau] \\ y(0, t) = 0 & t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (12)$$

Alors le moment d'ordre 0 noté μ_0 est une constante :

$$\Psi_0 y_0(t) = \mu_0 = \int_0^L y(x, t) dx$$

et de plus les moments d'ordre n d'une solution de (8) défini par :

$$\Psi_n y_0(t) = \int_0^L x^n y(x, t) dx$$

peuvent s'écrire sous la forme d'une fonction qui ne dépend que des moments d'ordre inférieur en $t = 0$:

$$\Psi_n y_0 = f_n(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n-1,0}, t)$$

avec f_n une fonction donc la formule analytique est connue.

Remarque 6.6. On aurait pu imposer une condition de type :

$$\exists t^* \text{ t.q. } \forall t \geq t^* \ v(t) > \mu \geq 0$$

Et par la suite poser $t^* = 0$. La proposition 6.5 reste vraie pour un t^* quelconque par le changement de variable suivant $T : (x, t) \rightarrow (x, t^*)$ sachant que T est un C^∞ -difféomorphisme.

Ainsi la proposition 6.5 nous indique qu'en cas de polymérisation, la connaissance du moment à un temps t^* donné donne accès à toute l'information.

Si la solution classique y existe, alors elle est constante le long d'une caractéristique et elle s'écrit sous la forme $y(x, t) = y_0(x - \theta(t))$ avec y_0 vérifiant l'hypothèse (4), alors ses moments vérifient l'équation suivante pour une vitesse de polymérisation positive :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = v(t)n\mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Nous allons donc pouvoir démontrer la proposition 6.5.

▷ (proposition 6.5)

On se propose de résoudre pour $t > 0$:

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = n(M - \mu_1 - d)\mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Nous allons démontrer la proposition par récurrence.

$n = 1$:

Le moment d'ordre 0 est une constante puisque

$$\frac{d\mu_0}{dt} = 0$$

Alors pour $n = 1$:

$$\frac{d\mu_1}{dt} = (M - \mu_1 - d)\mu_0$$

Résolvons (14) pour $n = 1$ par la variations de la constante. On cherche une solution de la forme $\mu_{+1}(t) = C(t)e^{-\mu_0 t}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= C'(t)e^{-\mu_0 t} - \mu_0 C(t)e^{-\mu_0 t} \\ &= (M - d)\mu_0 - \mu_0 C(t)e^{-\mu_0 t} \end{aligned}$$

Donc $C'(t)e^{-\mu_0 t} = (M - d)\mu_0$ et

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^t (M - d)\mu_0 e^{\mu_0 s} ds + C_0 \\ &= (M - d)[e^{\mu_0 s}]_0^t + C_0 \\ &= (M - d)(e^{\mu_0 t} - 1) + C_0 \end{aligned}$$

Donc

$$\mu_1(t) = (M - d)(1 - e^{-\mu_0 t}) + C_0 e^{-\mu_0 t}$$

Soit $\mu_1(0) = \mu_{1,0} = \int_0^L xy_0(x)dx$ la condition initiale.

Alors,

$$\begin{cases} \mu_1(t) = (M - d) - (M - \mu_{1,0} - d)e^{-\mu_0 t} \\ v(t) = (M - \mu_1(t)) - d = v(0)e^{-\mu_0 t} \\ \theta(t) = \int_0^t v(s)ds = \frac{v(0)}{\mu_0}(1 - e^{-\mu_0 t}) \end{cases} \quad (15)$$

On a donc bien démontré que le moment μ_1 pouvait s'écrire sous la forme :

$$\mu_1(t) = f_1(\mu_0, \mu_{0,1}, t)$$

$n \Rightarrow n + 1$:

On suppose que tous les μ_p sont connus pour tout $p \leq n$. Il existe donc une f_p telle que $\mu_p = f_p(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}, t)$

Pour $n + 1$, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{n+1}}{dt} &= (n + 1)(M - \mu_1(t) - d)\mu_n(t) \\ &= (n + 1)(M - f_1(\mu_0, \mu_{1,0}, t) - d)f_n(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n,0}, t) \\ &= F_{n+1}(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n,0}, t) \end{aligned}$$

On pose donc $f_{n+1} = \int_0^t F_{n+1}(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n,0}, s)ds + \mu_{n+1,0}$.

□

Remarque 6.7. Contrairement au problème de dépolymérisation seule où la vitesse de dépolymérisation $v(t)$ est une constante égale au coefficient de dépolymérisation d , on ne peut pas exprimer la dérivée $(n+1)$ -ième de μ_n en fonction de y_0 . En effet, par dérivation successive on obtient seulement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mu_{n+1}}{dt^2} &= (n + 1)(M - \mu_1 - d)\frac{d\mu_n}{dt} - (n + 1)\mu_n \frac{d\mu_1}{dt} \\ &= (n + 1)n(M - \mu_1 - d)^2\mu_{n-1} - (n + 1)(M - \mu_1 - d)\mu_n\mu_0 \end{aligned}$$

Donc, si la vitesse est positive, μ_0 est une constante, on remarque alors que $t \rightarrow \mu_1(t)$ est une fonction croissante majorée par $M - d$. Cette inégalité entraîne que la vitesse est toujours positive et correspond physiquement à la polymérisation. On notera que la masse M doit être suffisamment grande et supérieure au coefficient de dépolymérisation normalisé.

D'après la proposition 6.5, dès lors que l'on connaît tous les moments au temps $t = 0$, et de plus que $\mu_{1,0} < M - d$ alors on peut déterminer tous les moments d'ordre supérieur à tout temps.

Proposition 6.8

Soit y une solution classique du problème de Cauchy (3) sous l'hypothèse (4), alors si $v(0) > 0$ alors $\forall t \in [0, \tau]$, on a $v(t) > 0$. De plus, s'il existe un temps $t^* < \tau$ tel que $v(t^*) > 0$ alors de même $\forall t \in [0, \tau]$, on a $v(t) > 0$.

▷ Si $v(0) > 0$, alors $\mu_0 > 0$ est une constante et

$$v(t) = (M - \mu_1(t)) - d = v(0)e^{-\mu_0 t}$$

On voit donc que la vitesse ne change jamais de signe sur $[0, \tau]$.

□

6.3 Résolution du problème inverse (pistes)

A écrire à partir du cours de Driss Boutat envoyé par Philippe le 18 janvier.

7 Dépolymérisation - $v(t) < 0$

Pour la suite, on considère que la vitesse v est une fonction continue négative de $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^-)$. On s'intéresse alors à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) \\ v(t)y(L, t) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

7.1 Existence et unicité

Nous allons reprendre la démonstration développée pour $v > 0$. La principale différence tient à la condition aux limites. En effet, la condition n'est imposée qu'en $x = L$.

Définition 7.1

Soit $\tau > 0$, M et d deux constantes de \mathbb{R}^+ , $l > 0$ et $L > 0$.
 Soit $y_0 \in L^2([0, L])$ tel que $\text{supp}(y_0) \subset [0, l]$.
 Soit $v \in C^0([0, \tau])$.
 Supposons que $\forall t \in [0, \tau]$, $v(t) < 0$.
 On dit que $y \in C^0([0, \tau], L^2[0, L])$ est solution du problème de Cauchy (16) si et seulement si pour tout $t \in [0, \tau]$ et pour tout $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ telle que :

$$\begin{cases} - \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx - \int_0^L y_0(x) \phi(x, 0) dx = 0 \\ \phi(0, t) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Théorème 7.2

Soit $\tau > 0$, $L > 0$, $y_0 \in L^2(0, L)$ et $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^-)$. Alors le problème de Cauchy (16) admet une unique solution $y \in C^0([0, \tau], L^2(0, L))$ au sens de la définition 7.1.

▷ Comme pour la polymérisation, on commence par démontrer l'unicité : soit y_1 et y_2 solution du problème de Cauchy au sens de la définition 7.1. Alors on pose $y = y_1 - y_2$ et pour tout $t \in [0, \tau]$, $y \in C^0([0, T], L^2(0, L))$. Et pour toute fonction $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ telle que $\phi(0, \cdot) = 0$:

$$- \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx = 0 \quad (18)$$

Pour t^* fixé, on définit une suite de fonction $(f_n)_{n \in (N)}$ de $C^1(\mathbb{R})$, espace fonctionnel dense dans $L^2(0, L)$, telle que :

$$\begin{cases} f_n = 0 \text{ sur } (-\infty; 0], & \forall n \\ f_n|_{(0, L)} \rightarrow y(\cdot, t) \in L^2(0, L) & \text{pour } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Pour $n \in (N)$ on pose alors $\phi_n \in C^1([0, t] \times [0, L])$:

$$\phi_n(x, t) = f_n(x + \int_t^{t^*} v(s) ds), \quad \forall (x, t) \in [0, t^*] \times [0, L].$$

Par hypothèse, $v(t) \leq 0$ sur $[0, t^*]$ alors ϕ_n vérifie la condition $\phi(\cdot, 0) = 0$. De plus on constate que :

$$\partial_t \phi_n = -v(t) \partial_x \phi_n$$

Alors, en posant $\phi = \phi_n$ dans (18) il vient :

$$\int_0^L y(x, t^*) \phi_n(x, t^*) dx = 0$$

or $\phi_n(x, t^*) = f_n(x)$ et pour $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^L y(x, t^*)^2 dx = 0$$

On a donc montré que pour tout t^* de $[0, \tau]$ on a $y(\cdot, t^*) = 0$. □

7.2 Problème inverse

On considère l'équation (3) sous la condition (4), alors d'après la propriété 13, la dépolymérisation correspond au cas où $d > M$ (ou $\tau < t^*$).

Dans ce cas, l'équation des moments (7) d'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = v(t)n\mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = v(t)y_0(-\theta(t)) \end{cases} \quad (19)$$

Proposition 7.3

Soit $\tau > 0$, $L > 0$, $y_0 \in L^2(0, L)$ et $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R})$.

Soit y une solution classique de (16) sur $[0, L] \times [0, \tau]$.

Alors si la vitesse v est strictement négative, la condition initiale peut s'écrire de façon explicite en fonction de l'opérateur de moment Ψ_n :

$$y_0(x) = \frac{1}{n!v(-\theta^{-1}(x))^{n+1}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (\Psi_n(-\theta^{-1}(x))) \quad (20)$$

▷ L'équation des moments (7) est toujours valable, et $\max(0, \theta(t)) = \theta(t)$. On en déduit donc que pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_n y_0}{dt} &= \frac{d\mu_n}{dt} \\ &= v(t)n\mu_{n-1}(t) \\ &= v(t)^n n! \mu_0(t) \\ &= v(t)^{n+1} n! y_0(-\theta(t)) \end{aligned}$$

□

7.3 Suite régularisante

to be continued.

7.4 Observabilité

On suppose que la solution y de l'équation (16). Alors y est à support compact inclus dans $[0, L] \times [0, \tau]$.

On rappelle la définition des opérateurs de mesures Ψ_n pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_n : L^2([0, L]) &\rightarrow L^2([0, \tau]) \\ y_0 &\mapsto t \rightarrow \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \end{aligned} \quad (21)$$

On note les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y} = L^2(0, L)$, $\mathcal{Z} = L^2(0, \tau)$, alors Ψ_n appartient à $L^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.

Définition 7.4

Le système (16) est dit observable pour la mesure Ψ_n au temps τ s'il existe une constante k_n

telle que :

$$\forall y_0 \in \mathcal{Y}, \quad \|\Psi_n(y_0)\|_{\mathcal{Z}}^2 \geq k_n \|y_0\|_{\mathcal{Y}}^2 \quad (22)$$

Proposition 7.5

Le système (16) n'est pas observable pour la mesure Ψ_n au temps τ .

▷ On s'appuie sur la preuve de [3]

Pour y solution de (16), cette inégalité n'est pas toujours vérifiée et le système n'est pas exactement observable.

Pour la démonstration, on peut exhiber un contre exemple sous la forme d'une suite $(y_0^m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \|y_0^m\|_{L^2}^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\ \|\Psi_n(y_0^m)\|_{L^2}^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\Psi_n(y_0^m)\|_{L^2}^2 &= \int_0^\tau \left| \int_0^l x^n y^m(x, t) dx \right|^2 dt \\ &\leq l^{2n} \int_0^\tau \left(\int_0^l y^m(x, t) dx \right)^2 dt \\ &\leq l^{2n} \int_0^\tau \left(\int_{bt}^l y_0^m(\xi) d\xi \right)^2 dt \\ &\leq l^{2n} \int_0^\tau \left(\int_0^l y_0^m(\xi) d\xi \right)^2 dt \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une fonction y_0 telle que :

$$\begin{cases} \int_0^l (y_0^m(x))^2 dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_0^l y_0^m(\xi) d\xi \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

C'est le cas par exemple de la fonction :

$$\begin{cases} 2n^3 & 0 < x < \frac{1}{2n^2} \\ 2n - 2n^3 x & \frac{1}{2n^2} < x < \frac{1}{n^2} \\ 0 & \frac{1}{n^2} < x < l \end{cases}$$

□

Cependant, si l'observabilité n'est pas exacte dans L^2 , elle l'est en revanche pour l'espace de Sobolev H^{n+1} .

En effet on considère maintenant lue Ψ_n appartient à $H^{n+1}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ avec $\mathcal{Z} = H^{n+1}(0, \tau)$. On munit \mathcal{Z} de la semi-norme pour tout $n > 0$:

$$\|f\|_{H^{n+1}} = \int_0^\tau \left| \frac{d^{n+1}f}{dt^{n+1}} \right|^2 dt \quad (23)$$

Proposition 7.6

Le système (16) est observable pour la mesure Ψ_n avec $\mathcal{Z} = H^{n+1}(0, \tau)$ munie de la semi-norme (23) au temps τ si $-\theta(\tau) > L$.

▷ L'équation (20) est vérifiée :

$$y_0(x) = \frac{1}{n!v(-\theta^{-1}(x))^{n+1}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (\Psi_n y_0(-\theta^{-1}(x)))$$

On pose alors $1/k_n = n!\|v\|_{L^\infty}^{n+1}$. Alors :

$$\int_0^L y_0(x)dx \leq 1/k_n \int_0^L \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\Psi_n y_0(-\theta^{-1}(x)))dx$$

Pour $-\theta(\tau) > L$ on peut effectuer un changement de variable et retrouver :

$$\int_0^L y_0(x)dx \leq 1/k_n \int_0^\tau \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\Psi_n y_0(t))dt$$

Soit l'inégalité d'observabilité :

$$\|\Psi_n(y_0)\|_{\mathcal{Z}}^2 \geq k_n \|y_0\|_{\mathcal{Y}}^2$$

□

8 Conclusion

To be continued.

Références

- [1] Aurora Armiento Marie Doumic Philippe Moireau Human Rezaei. Estimation from moments measurements for amyloid depolymerisation. *Journal of Theoretical Biology*, December 2015.
- [2] Jean Michel Coron. *Control and Nonlinearity*, volume 136. Mathematical Surveys and Monographs, 2007.
- [3] Lucas Brivadis. *Algorithme d'estimation pour une EDP hyperbolique décrivant un procédé de cristallisation*. Ecole Centrale Lyon.