Réunion du 01/02

Cécile Della Valle

7 février 2019

1 Existence

Soit $L > 0$ et $\tau > 0$, soit v une fonction continue, $v \in C^0([0,\tau])$, On souhaite démontrer l'existence d'une solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L]\times[0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ 1_{v(t)>0}\, y(0,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ 1_{v(t)<0}\, y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{1}$$

1.1 $v =$cste, $\epsilon = 0$

On suppose dans un premier temps que v est une constante, et on suppose, sans perte de généralité, que cette constante est positive $v > 0$. De plus on suppose que la constante ϵ est nulle.
L'équation (1) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L]\times[0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ y(0,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{2}$$

Soit $\mathscr{Y} = L^2([0,L])$ l'espace de Banach et l'opérateur A sur $D(A)$ tel que :

$$\forall y \in D(A), \quad Ay = -v\partial_x y$$

On souhaite démontrer la propriété suivante :

Proposition 1.1

L'opérateur $A : D(A) \to \mathscr{Y}$ est générateur d'un semi-groupe C_0 de contraction dans $\mathscr{Y}$.

$\triangleright$ On souhaite appliquer le théorème de Lumer-Phillips, il nous faut donc démontrer que A possède les trois propriétés suivantes :

— (1) A est un opérateur fermé et $\bar{DA} = \mathscr{Y}$;
— (2) A est dissipatif ;
— (3) il existe λ_0 tel que $\lambda_0 - A : D(A) \to \mathscr{Y}$ est surjectif.

(1)
L'opérateur A est défini sur l'ensemble $D(A)$ des fonctions absoluement continues sur $[0,L]$ qui s'annulent en 0. On peut par exemple utilisee lemme suivant :

Lemme 1.2

Une fonction y de $\mathscr{Y}$ est absolument continue sur $[0,L]$ si et seulement si pour presque tout $x \in [0,L]$, y est dérivable en x de dérivée $y' \in L^2([0,L])$ et

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'$$

Sur cet ensemble, l'opérateur dérivation est fermée, densément défini.

(2)
Montrons que A est dissipatif. Soit $y \in \mathscr{Y}$, calculons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle v\partial_x y, y\rangle_{\mathscr{Y}} \\
&= v\int_0^L y(z)\partial_x y(z)d(z) \\
&= v[y(z)^2]_{z=0}^L - v\int_0^L y(z)\partial_x y(z)d(z)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} = -\frac{1}{2}vy(0)^2 \leq 0$$

Donc $\forall\ y \in \mathscr{Y}$, $\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} \leq 0$.

(3)
Soit $y_1 \in \mathscr{Y}$ et $\lambda > 0$.
On cherche une solution y tel que $(\lambda - A)y = y_1$.
Alors on a de façon équivalente que y est solution de :

$$\begin{cases} \lambda y - vy' = y_1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donc, pour tout $y_1 \in \mathscr{Y}$, cette équation possède une unique solution donnée par la formule de Duhamel :

$$y(x) = -\int_0^x e^{\lambda/v(x-x')}y_1(x')dx'$$

(On peut par ailleurs vérifier que $\|y\|_{\mathscr{Y}} \leq 1/\lambda\|y_1\|_{\mathscr{Y}}$).

Donc d'après (1),(2) et (3), on peut appliquer le théorème de Lumer-Phillips, et A est le générateur infinitésimal d'un semi-group C_0. On a donc l'existence d'une solution de (2).

□

1.2 $v \in C^0$, $\epsilon = 0$

On suppose cette fois que $v \in C^0$ et de plus que v ne change pas de signe. Sans perdre de généralité on suppose que $\forall t \in [0, \tau]$ on a $v(t) > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ y(0, t) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \tag{3}$$

Soit $\mathscr{Y} = L^2([0, L])$ l'espace de Banach et l'opérateur d'évolution $A(t)$ définit sur $D(A(t))$ tel que :

$$\forall y \in D(A(t)),\ \ A(t)y = -v(t)\partial_x y$$

Proposition 1.3

Pour $t > 0$, l'opérateur $A(t)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe C_0 sur $\mathscr{Y}$, noté S_t.

▷ Pour $t > 0$ fixé, on est ramené au cas de la proposition 1.1. □

Proposition 1.4

Il existe une unique solution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq \tau$, qui satisfait :

-
-
-

▷ On souhaite appliquer le théorème du chap.5 de Pazy.

Lemme 1.5

Pour tout $t > 0$, le semi-groupe C_0 généré par $A(t)$ est la translation :

$$\forall y \in D(A(t)), \quad S_t(s)y = y(x - \theta(s))\chi_{0<x-\theta(s)<L}$$

avec $\theta(s) = v(t)s$.

Vérifions les hypothèses.

(1) Montrons que $(A(t))_{t\in[0,\tau]}$ est stable.
D'après le théorème de Hille-Yoshida, la demi droite $(0; +\infty)$ est incluse dans l'ensemble résolvent de $A(t)$ pour tout $t > 0$.

□