LJLL - Master 2 **2017**

Problèmes inverses et dynamique des population

Examen. Durée : 3 heures.

12 janvier 2018 14h-17h.

Avertissement

Le sujet se compose de pages et de parties indépendantes. Les questions particulièrement difficiles ou non directement abordées en cours seront indiquées par un signe $\diamond$. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale. Les réponses doivent être détaillées et les calculs intermédiaires doivent être écrits. Le polycopié est autorisé.

Problèmes inverses autour de la dépolymérisation et de la fragmentation

---

Partie 1 : Equation de fragmentation-diffusion

Dans cette première partie, on considère l'équation stationnaire de fragmentation avec diffusion en taille qui suit :

$$\begin{cases} \lambda u + \frac{d}{dx}(\tau(x)u) - \frac{d^2}{dx^2}(D(x)u) = \alpha B(3x)u(3x) - B(x)u(x), & x \geqslant 0, \\ \\ u \geqslant 0, \qquad \tau(0)u(0) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(D(x)u(x))_{|x=0} = 0, \qquad \int\limits_0^\infty xu(x)dx = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Selon les questions, on fera des hypothèses spécifiques sur la constante α et les fonctions $\tau(x)$ et $D(x)$.
A partir de mesures de u, on souhaite reconstruire le taux de division $B(x)$. Pour cela, nous procéderons par étape, en décomposant le problème.

Pour $p \in (0,\infty)$, on note L^2_p l'espace $L^2(\Omega, x^p dx)$ muni du produit scalaire usuel, à savoir :

$$< u, v >_{L^2(x^p dx)} := \int\limits_0^\infty u(x)v(x)x^p dx.$$

On définit de même les espaces H_p^1 et H_p^2 avec leur norme et produit scalaire naturel : notant $\mathcal{D}'(0,\infty)$ l'espace des distributions sur $(0,\infty)$, on a

$$H_p^1 := \left\{ f \in \mathcal{D}'(0,\infty), \quad f L_p^2, \quad \frac{df}{dx} \in L_p^2 \right\}, \quad < u, v >_{H_p^1} := < u, v >_{L_p^2} + < \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} >_{L_p^2}$$

$$H_p^2 := \left\{ f \in L_p^2, \qquad \frac{df}{dx},\ d^2 f dx^2 \in L_p^2 \right\}, \quad < u, v >_{H_p^2} := < u, v >_{L_p^2} + < \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} >_{L_p^2} + < \frac{d^2u}{dx}, \frac{d^2v}{dx} >_{L_p^2}.$$

On définit également H_p^{-1} par

$$H_p^{-1} := \left\{ f \in \mathcal{D}'(0,\infty), \qquad f = g + h', \quad g, h \in L_p^2 \right\}$$

équipé de la norme

$$\|f\|_{H_p^{-1}} := \inf_{f=g+h'} \left(\|g\|_{L_p^2} + \|h\|_{L_p^2} \right).$$

On rappelle que si la dérivée d'une fonction est dans $L^2(\Omega, x^p dx)$, cette fonction elle-même est continue sur $(0,\infty)$ (plus précisément, admet un représentant continu).
On suppose τ continue et D continue et bornée.
On admet que B vérifie des hypothèses permettant l'existence et l'unicité d'un tel couple (λ, u), tel que $u \in H_p^2(\Omega)$. On admet également que $x^\mu u \in L^\infty(\Omega)$, $x^\mu \frac{du}{dx} \in L^\infty(\Omega)$ et $x^\mu \frac{d^2u}{dx^2} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $\mu \geqslant 0$.

Formalisation du problème

Question 1. Compréhension du modèle

a. De quel problème temporel le couple (λ, u) représente-t-il une solution propre (i.e. problème pour lequel λ est valeur propre et u vecteur propre) ? Ecrire cette équation temporelle satisfaite par un certain $v(t,x)$. Quelle solution particulière $v(t,x)$ à ce problème temporel peut-on construire à partir de (λ, u) ?
b. Si $\alpha = 9$: quel est le sens du terme $9B(3x)u(3x)$? Et si $\alpha = 3$?
c. Quels sont les sens des termes $-B(x)u(x)$ et du terme $\frac{d}{dx}(\tau(x)u)$?
◇ d. Comment interpréter le terme $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D(x)u)$?
e. Dans cette question, on suppose $\tau(x) = \tau x$ où $\tau > 0$ est une constante et $\alpha = 9$. En intégrant l'équation contre le poids x, et en procédant à des intégrations par parties (à justifier) et à des changements de variables adéquats, donner la valeur de λ en fonction de τ. Comment interpréter ces résultats ? Que dit-on de l'équation temporelle correspondante si $\tau = 0$?
f. Dans cette question, on suppose $\tau(x) = \tau > 0$ constant et $\alpha = 3$. En intégrant l'équation, et en procédant à un changement de variable adéquat, montrer que $\lambda = 0$. Comment interpréter ce résultat ? Que dit-on de l'équation temporelle correspondante ?

Corrigé de la question 1 :

a. Le problème temporel correspondant est

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau(x)v) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(D(x)v) = \alpha B(3x)v(t,3x) - B(x)v(t,x), \quad x \geqslant 0, \\ \\ v \geqslant 0, \qquad v(0) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} v(t,x) = 0. \end{cases}$$

on obtient une solution du problème temporel en posant $v(t,x) = e^{\lambda t}u(x)$.
b. Le terme $9B(3x)u(3x)$ représente les individus de taille $3x$ donnant naissance à 3 individus de taille x. Le terme $3B(3x)u(3x)$ représente le fait qu'un individu de taille $3x$ ne donne naissance qu'à un seul individu de taille x.
c. Le terme $-B(x)u(x)$ représente les individus de taille x se divisant en individus de taille $x/3$. Le terme $\tau\frac{d}{dx}u$ représente la croissance des individus au cours du temps ; le taux de croissance est ici τx, ce qui signifie que chaque individu a une croissance exponentielle au cours du temps $(X(t) = x_0 e^{\tau t})$.
d. Le terme $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D(x)u)$ est un terme de diffusion en taille : il représente un aléa dans la croissance ou la décroissance des cellules, moyenné au niveau de l'équation déterministe.
e. Toutes les intégrations et intégrations par parties ci-dessous sont possibles vues les hypothèses très fortes faites sur u et ses dérivées. De plus, vue la décroissance de u et ses dérivées en $+\infty$, il n'y a pas de terme de bord en $+\infty$. Il n'y en a pas non plus en 0 du fait de la multiplication par x. En intégrant l'équation contre le poids x, les deux termes de droite se compensent : l'interprétation physique de cela est que la fragmentation conserve la masse.
En intégrant par parties le terme $\int x\frac{\partial^2}{\partial x^2}udx = -\int \frac{\partial}{\partial x}udx$, on voit qu'il est nul : de même que la fragmentation, la diffusion conserve la masse.
Finalement, on obtient, en intégrant par parties le terme de transport :

$$0 = \lambda\int\limits_0^\infty xu(t,x)dx + \tau\int\limits_0^\infty x\frac{d}{dx}(xu)dx = (\lambda - \tau)\int\limits_0^\infty xu(t,x)dx,$$

donc $\lambda = \tau$. La croissance totale de la population se fait au même taux exponentiel (λ)que la croissance de chaque individu (τ). Si $\tau = 0$ on a $\lambda = 0$: l'équation est conservative.
f. En intégrant l'équation, et en utilisant les conditions au bord et la décroissance en l'infini, on obtient que $\lambda = 0$. Le fait que l'intégrale On dit que l'équation temporelle est conservative : en effet, la croissance comme la fragmentation conservent ici un nombre constant d'individus au cours du temps.

Question 2. Décomposition du problème inverse

Dans toute la suite, on suppose $\tau(x) = \tau > 0$ constant et $D(x) \equiv D > 0$ constant.
a. Réécrire l'équation (1) sous la forme

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{L}(h),$$

avec $h(x) = B(x)u(x)$, et donner les définitions (formelles à ce stade : sans définir d'espaces de départ et d'arrivée) de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{L}$.

b. Montrer que $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(x^p dx)$ dans $L^2(x^p dx)$ pour $p \in (0, \infty)$. Donner une majoration pour la norme de $\mathcal{L}$.
c. Montrer que $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire continu de $H^2(x^p dx)$ dans $L^2(x^p dx)$. Donner une majoration pour la norme de $\mathcal{F}$ dans ces espaces.
d. Si $u \in L^2(x^p dx)$, à quel sens et dans quel espace peut-on définir $\mathcal{F}(u)$?

a. L'équation (1) peut s'écrire $\mathcal{F}(u) = \mathcal{L}(h)$ avec $\mathcal{F}(u) = \lambda u + \frac{d}{dx}(\tau(x)u) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(D(x)u)$ et $\mathcal{L}(h) = \alpha h(3x) - h(x)$.
b. $\mathcal{L}$ est de façon évidente linéaire, la continuité s'obtient par changement de variable $y = 3x$: on a par l'inégalité triangulaire

$$\|\mathcal{L}(u)\|_{L^2(x^p dx)} \leqslant \alpha \|u(3\cdot)\|_{L^2(x^p dx)} + \|u\|_{L^2(x^p dx)} \leqslant (\alpha . 3^{-\frac{p+1}{2}} + 1)\|u\|_{L^2(x^p dx)}$$

c. Par définition même de la norme sur H^2 on a $|||\mathcal{F}(u)||| \leqslant \lambda + D + \tau$.
d. $\mathcal{F}(u)$ peut être défini au sens des distributions, ou encore dans l'espace $H^{-2}(\Omega, x^p dx)$ (dual de $H^2(\Omega, x^p dx)$ ou défini de façon similaire à H_p^{-1}).

Etude d'un opérateur de dérivation

On considère désormais le problème suivant, pour $R > 0$ fixé, $\tau = 1$, $D > 0$ des constantes fixées :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}u - D\frac{d^2}{dx^2}u = f, \qquad 0 < x < R, \\ &u(0) = 0, \qquad u'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

A partir de mesures de u, on souhaite reconstruire la fonction f.
On note $\Omega = (0, R)$, $\mathcal{Y} = L^2(\Omega), dx)$, $\mathcal{Z} = L^2(\Omega, dx)$, $\Psi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ l'opérateur $f \to u$ solution de l'équation (2).

Question 3. Etude du problème direct

Soit $f \in \mathcal{Z}$ et u solution de (2) au sens des distributions.
a. Montrer que $u'(x)$ est continue.
b. Donner une expression explicite nécessairement satisfaite par une solution u de (2). On notera cette formule (Int). En déduire une expression explicite de l'opérateur Ψ.
Indication : On procédera par intégrations successives de l'équation, et utilisation des conditions au bord.
c. Réciproquement, montrer que si u satisfait (Int), alors u est bien solution de (2).
d. En déduire que Ψ est bien défini, *i.e.* que pour toute fonction $f \in \mathcal{Y}$ il existe un unique $u \in \mathcal{Z}$ solution de (2). Montrer que de plus on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2}.$$

Donner une valeur possible pour C.
e. Conclure que $Im(\Psi) = \{u \in H^2, \quad u(0) = u'(0) = 0.\}$

Corrigé de la question 3 :

a. Soit $f \in \mathcal{Z}$. Si $u \in \mathcal{Y}$ est solution de (2), on a $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{D}f + \frac{1}{D}\frac{du}{dx} \in H^{-1}(\Omega, dx)$. Cela implique à son tour $u \in H^1(\Omega, dx)$, et $\frac{du}{dx} \in L^1(\Omega)$, donc par la même égalité $\frac{d^2}{dx^2}u \in L^2$, donc $u \in H^2(\Omega)$ et $u' \in H^1(\Omega)$ est continue.
b. On note que

$$u' - Du'' = -(Du'e^{-\frac{x}{D}})'e^{\frac{x}{D}} = f,$$

peut donc intégrer (2) contre le poids $e^{-\frac{x}{D}}$ entre 0 et x et on trouve, puisque $u'(0) = 0$,

$$-Du'(x) = e^{\frac{x}{D}} \int_0^x f(s)e^{-\frac{s}{D}}ds.$$

on en déduit par Cauchy Schwarz que $u' \in L^2(\Omega, x^p dx)$. On intègre à nouveau entre 0 et x et on obtient, puisque $u(0) = 0$,

$$-Du(x) = \int_0^x \int_0^y e^{\frac{y-s}{D}} f(s)dsdy, \qquad (Int)$$

Par Cauchy-Schwarz, on a $u \in L^2_p$.
c. Réciproquement, si u satisfait (Int), on voit immédiatement que $u(0) = u'(0) = 0$, et en dérivant deux fois (ce qui est possible car u défini par (Int) est dans H^2_p) on voit que u est solution de (2).
d. La relation (Int) est nécessaire d'après le point b., or elle définit un unique u : on a l'unicité. Le point c. donne l'existence.
Par Cauchy-Schwartz :

$$u^2(x) \leqslant \frac{1}{D^2}\|f\|^2_{L^2} \int_0^x \int_0^y e^{\frac{2(y-s)}{D}} dsdy \leqslant \|f\|^2_{L^2} \int_0^x e^{\frac{2y}{D}} \frac{1}{2D} dy,$$

et donc

$$\|u\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} \frac{e^{\frac{2R}{D}}}{4}.$$

On a montré que si $u = \Psi f$, alors $u \in H^2(\Omega)$ et par définition $u(0) = u'(R) = 0$.
e. Réciproquement, si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie $u(0) = u'(0) = 0$, il est évidemment solution de (2) avec $f := u' - Du'' \in L^2$, donc $u = \Psi f \in Im(\Psi)$.

Question 4. Propriétés de l'opérateur Ψ

a. Montrer que Ψ est linéaire et injectif.
b. Montrer que Ψ est compact.
c. Calculer l'opérateur adjoint $\Psi^* : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$
Indication : On pourra effectuer le produit scalaire de (2) *avec une fonction suffisamment régulière puis travailler par intégration par parties avant de conclure par densité.*

Corrigé de la question 4 :

a. La linéarité est immédiate (par linéarité de la dérivation), l'injectivité aussi grâce à la formule (Int) appliquée à $f = 0$.
b. Ψ est compacte par injection compacte de H^1 dans L^2.
c. Par le théorème de représentation de Riesz, Ψ^* est tel que que pour toutes fonctions $f \in \mathcal{Y}$, $g \in \mathcal{Z}$, on a

$$\langle \Psi f, g\rangle_{\mathcal{Z}} = \langle f, \Psi^* g\rangle_{\mathcal{Y}}$$

Soit $u = \Psi f$, on applique (2) et on obtient, en intégrant par parties (on sait que $u \in H^2$, on choisit $g \in H^2$)

$$\begin{aligned}
\langle u, g\rangle_{\mathcal{Z}} \quad &= \langle f, \Psi^* g\rangle_{L^2} = \langle \tfrac{du}{dx} - \tfrac{d^2u}{dx^2}, \Psi^* g\rangle_{L^2} \\
&= -\langle u, \tfrac{d}{dx}\Psi^* g\rangle_{L^2} + [u\Psi^* g]_{x=0}^{x=R} + D\langle \tfrac{du}{dx}, \tfrac{d}{dx}\big(\Psi^* g\big)\rangle + D[\tfrac{du}{dx}\Psi^* g]_{x=0}^{x=R} \\
&= -\langle u, \tfrac{d}{dx}\Psi^* g\rangle_{L^2} + [u\Psi^* g]_{x=0}^{x=R} - D\langle u, \tfrac{d^2}{dx^2}\Psi^* g(s)ds\rangle + [u\tfrac{d}{dx}(\Psi^* g)]_{x=0}^{x=R} + [\tfrac{du}{dx}\Psi^* g]_{x=0}^{x=R}
\end{aligned}$$

En identifiant le membre de gauche et le membre de droite, notant $v = \Psi^* g$, et par densité de H^2 dans L^2, on en déduit que $\Psi^* : g \to v$ où v est solution de l'équation

$$-\frac{d}{dx}v - D\frac{d^2}{dx^2}v = g, \qquad v(R) = v'(R) = 0.$$

Question 5. Décomposition en valeurs singulières

c. Donner la décomposition en valeurs singulières de Ψ
d. Comment décroissent les valeurs singulières. Que dit-on alors du problème inverse sous-jacent ?
e. $\diamond$ A partir de la décomposition en valeurs singulières, proposer une ou des méthodes de régularisation permettant d'approcher f sachant qu'on mesure u_ε avec $\|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon$. Pour $f \in Im(\Psi)$, quel ordre de grandeur optimal obtiendra-t-on pour l'estimation d'erreur ? Et pour $f \in Im(\Psi\Psi^*\Psi)$?

Corrigé de la question 5 :

Ψ étant compact injectif, le cours nous assure de l'existence de la décomposition en valeurs singulières. Reprenant les notations du cours, on cherche donc (e^j, f^j, σ_j) tel que $(\sigma_j > 0)_j$ soit une suite décroissante et

$$\Psi e^j = \sigma_j e^j, \qquad \Psi^* f^j = \sigma_j f^j.$$

Cherchons e, σ tels que $\Psi e = \sigma e$. On a donc l'équation

$$\sigma(e' - De'') = e, \qquad e(0) = e'(0) = 0.$$

L'équation caractéristique s'écrit donc

$$\sigma D X^2 - \sigma X + X = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{D}{\sigma}}}{2D}.$$

Supposons tout d'abord $\sigma \geqslant 4D$: alors $\lambda_\pm$ sont réelles et les solutions s'écrivent alors, pour deux constantes A et B :

$$e(x) = Ae^{\lambda_+ x} + Be^{\lambda_- x}$$

Utilisant la condition au bord, on obtient $A + B = 0$ donc $B = -A$ puis $A(\lambda_+ - \lambda_-) = 0$ donc $\lambda_+ = \lambda_-$ donc $\sigma = 4D$, mais cela implique $e(x) \equiv 0$: on a une contradiction.

Donc $\sigma < 4D$. On a alors de même, en notant $\omega = \frac{\sqrt{\frac{4D}{\sigma} - 1}}{2D}$,

$$e(x) = e^{\frac{x}{2D}} \big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\big),$$

appliquant la condition au bord on a $e(0) = 0$ donc $A = 0$, donc $e(x) = Be^{\frac{x}{2D}}\sin(\omega x)$, puis $e'(0) = 0$ donc $\omega \in \frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbb{Z}$. Par antisymétrie de sin, il suffit de prendre $\omega \in \frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbb{N}$, et on définit donc, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\omega_j = \frac{\pi}{2} + j\pi, \qquad \sigma_j = \frac{4D}{1 + 4D^2(\frac{pi}{2} + j\pi)^2}.$$

On calcule de même f_j et la constante B_j telle que $\|e^j\|_{\mathcal{Y}} = 1$.
La décroissance des σ_j se fait en $O(j^{-2})$, il s'agit donc d'un problème mal posé de degré 2.
c. On sait qu'on a

$$u = \Psi f = \sum_j \sigma_j \langle f, e^j\rangle e^j, \qquad f = \sum_j \sigma_j^{-1} \langle u, e^j \rangle e^j.$$

On peut utiliser une des méthodes du cours, par exemple la méthode par troncature, et définir

$$f_{\varepsilon,\alpha} = \sum_{j, \sigma_j \geqslant \alpha} \sigma_j^{-1} \langle u_\varepsilon, e^j\rangle e^j.$$

Si $f \in Im(\Psi)$, identifié (cf. poly formule (3.7)) à $\mathcal{Y}^{\frac{1}{2}}$, donc en appliquant par exemple la proposition 6 on a une convergence optimale en $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Si $f \in Im(\Psi)$, identifié (cf. poly formule (3.7)) à $\mathcal{Y}^{\frac{3}{2}}$, donc en appliquant par exemple la proposition 6 on a une convergence optimale en $O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})$.

Etude d'un opérateur de dilatation

On définit $\mathcal{L}(u) := 3u(3x) - u(x)$ (soit $\alpha = 3$ dans l'équation (1).)

Question 6. Inverse de $\mathcal{L}$

a. Montrer que $\mathcal{L}$ est un opérateur continu de $L^2(x^p dx)$ dans $L^2(x^p dx)$, et donner un majorant pour sa norme.
b. A l'aide du théorème de Lax-Milgram et de la formes bilinéaire sur $L^2(x^p dx)$ définie par

$$a_p(u, v) := \int_0^\infty \Big(3u(3x) - u(x)\Big) v(3x) x^p dx,$$

montrer que pour $p < 1$, pour tout $h \in L^2(x^p dx)$, il existe un unique $v \in L^2(x^p dx)$ tel que $v = \mathcal{L}(u)$. En déduire que $\mathcal{L}$ est inversible d'inverse continu. Donner une majoration pour la norme de $\mathcal{L}^{-1}$.
c. Faire de même qu'en a. sur $L^2(x^p dx)$ avec $p > 3$ en utilisant la forme bilinéaire

$$b_p(u,v) := \int_0^\infty \Big(-3u(3x) + u(x) \Big) v(x) x^p dx.$$

Corrigé de la question 6 :

a. $\mathcal{L}$ est évidemment linéaire, et on a de façon immédiate par l'inégalité triangulaire

$$\|\mathcal{L}(u)\|_{L^2_p} \leqslant 3\|u(3\cdot)\|_{L^2_p} + \|u\|_{L^2_p} = \|u\|_{L^2_p}(3^{\frac{1-p}{2}} + 1).$$

b. a_p est bilinéaire, on montre en même temps la positivité et la coercivité : par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} a_p(u,u) &= 3\|u(3\cdot)\|^2_{L^2_p} - \int u(x)u(3x)x^p dx \geqslant 3^{1-(p+1)}\|u\|^2_{L^2_p} - \|u\|_{L^2_p}\|u(3\cdot)\|_{L^2_p} \\ &\geqslant \|u\|^2_{L^2_p}(3^{-p} - 3^{-\frac{p+1}{2}}) = C_p\|u\|^2_{L^2_p}, \end{aligned}$$

et $C_p > 0$ *ssi* $p < 1$. Par Lax-Milgram, pour $p < 1$, pour tout $v \in L^2_p$ il existe donc un unique $u \in L^2_p$ tel que pour tout $f \in L^2_p$, $a_p(u,f) =< v, f >_p$, soit $3u(3x) - u(x) = v$. La norme de $\mathcal{L}^{-1}$ est majorée par C_p^{-1}.
c. De même on a

$$\begin{aligned} b_p(u,u) &= \|u\|^2_{L^2_p} - 3\int u(x)u(3x)x^p dx \geqslant \|u\|^2_{L^2_p} - 3\|u\|_{L^2_p}\|u(3\cdot)\|_{L^2_p} \\ &\geqslant \|u\|^2_{L^2_p}(1 - 3^{1-\frac{p+1}{2}}) = (1 - 3^{\frac{1-p}{2}})\|u\|^2_{L^2_p} = \tilde{C}_p\|u\|^2_{L^2_p}, \end{aligned}$$

et $\tilde{C}_p > 0$ *ssi* $p > 1$. La norme de $\mathcal{L}^{-1}$ est majorée par $\tilde{C}_p^{-1}$.

◇ **Question 7.**

a. Supposant $v \in L^2((1+x^4)dx)$, existe-t-il une solution h à l'équation $v = \mathcal{L}(h)$ telle que $h \in L^2((1+x^4)dx$?
b. Soit $h \in L^2((1+x^4)dx)$, et $v = \mathcal{L}(h)$. Montrer que $v \in L^2((1+x^4)dx)$. Supposant que l'on mesure v_ε tel que

$$\|v - v_\varepsilon\|_{L^2((1+x^4)dx)} \leqslant \varepsilon,$$

proposer, à partir de $\mathcal{L}_0^{-1}(h_\varepsilon)$, de $\mathcal{L}_4^{-1}(h_\varepsilon)$ et d'un seuil $a > 0$, un estimateur $h_{\varepsilon,a}$ de h tel que

$$\|h - h_{\varepsilon,a}\|_{L^2((1+x^4)dx)} \leqslant C_a\varepsilon,$$

pour une constante C_a à préciser en fonction des constantes trouvées aux questions 6.b. et 6.c.

Corrigé de la question 7 :

a. Pour $v \in L^2((1+x^4)dx)$, on a existence et unicité d'une solution h_1 dans $L^2(dx)$ et existence et unicité d'une solution h_2 dans $L^2(x^4dx)$. Mais on ne sait pas du tout si ces deux solutions coïncident. En fait, elles ne coïncideront que si v vérifie une certaine équation, ce qui ne sera donc le cas que sur un sous-espace spécifique de $L^2((1+x^4)dx)$.
b. $v \in L^2((1+x^4)dx)$, par la question 6.a. Si on mesure v_ε, on note $h_\varepsilon^{(0)}$ la solution de l'équation $v_\varepsilon = \mathcal{L}(h_\varepsilon^{(0)})$ dans $L^2(dx)$, et $h_\varepsilon^{(4)}$ la solution de l'équation $v_\varepsilon = \mathcal{L}(h_\varepsilon^{(4)})$ dans $L^2(x^4dx)$. On définit alors, pour $a>0$ fixé

$$h_{\varepsilon,a} := h_\varepsilon^{(0)})\mathbb{1}_{x\leqslant a} + h_\varepsilon^{(4)})\mathbb{1}_{x\geqslant a}.$$

On a de manière évidente $h_{\varepsilon,a} \in L^2((1+x^4)dx)$, et on écrit

$$\|h-h_{\varepsilon,a}\|^2_{L^2((1+x^4)dx)} \leqslant (1+a^4)\|h-h_\varepsilon^{(0)}\|^2_{L^2(dx)} + (1+\frac{1}{a^4})\|h-h_\varepsilon^{(4)}\|^2_{L^2(x^4dx)} \leqslant C_a\varepsilon$$

On utilise alors les questions 6.b. et 6.c. pour conclure

$$\|h-h_{\varepsilon,a}\|^2_{L^2((1+x^4)dx)} \leqslant C_a\varepsilon,$$

avec par exemple $C_a = (1+a^4)C_0^{-1}+(1+\frac{1}{a^4})\tilde{C}_4^{-1}$, où C_0 et $\tilde{C}_4$ sont les constantes vues respectivement en 6.b. et 6.c.

Estimation de la dérivée d'une fonction en statistique

On mesure un échantillon $(x_1,\cdots x_n)$ réalisation de variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ indépendantes identiquement distribuées, de loi $f(x) \in W^{4,\infty}(0,R)$. On souhaite estimer la dérivée seconde de u, $\frac{d^2u}{dx^2}$ à l'aide d'une suite régularisante $K_h(x) = \frac{1}{h}K(\frac{x}{h})$, où $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est le noyau gaussien. On propose l'estimateur suivant pour $v = \frac{d^2f}{dx^2}$, où $*$ désigne le produit de convolution :

$$\hat{v}_n := (\frac{\mathrm{d}^2}{dx^2}K_h) * \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x=x_i}\right),$$

et on note

$$MSE(x) := \mathbb{E}_{f^{\otimes n}}\left[(v(x)-\hat{v}_n(x))^2\right] = \int\cdots\int\left(v(x)-\hat{v}_n(x;x_1,\ldots,x_n)\right)^2\prod_{i=1}^n f(x_i)dx_i.$$

Question 8.

a. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} xK(x)dx = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2K(x)dx \neq 0$. Que vaut l'ordre du noyau m_0 (hypothèse (6.1) du cours) ?
b. Décomposer $MSE(x)$ en biais et variance, en utilisant la fonction intermédiaire $\hat{v}(x) := \frac{d^2}{dx^2}K_h * f$.
c. En utilisant le cours, proposer une estimation du biais dans L^∞ en fonction de h.
d. En raisonnant comme dans le cours, mais pour $\frac{d^2}{dx^2}K_h$ au lieu de K_h, proposer une estimation de la variance en fonction de n et de h.

e. Proposer une estimation pour $MSE(x)$ en fonction de n et h. Comment choisir h de façon optimale ? Quelle vitesse de convergence optimale obtient-on pour $\sqrt{MSE(x)}$? Comment pourrait-on l'améliorer ?
f. $\diamond$ En comparant heuristiquement l'estimation statistique et l'estimation déterministe, à quel degré de problème mal posé cela correspond-il ?

Corrigé de la question 8 :

a. K est une fonction paire, donc $xK(x)$ est une fonction impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xK(x)dx = 0$. C'est une fonction positive donc $x^2K(x) \geqslant 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2K(x)dx > 0$. Dans l'hypothèse (6.1) du cours on a donc $m_0 = 1$.
b. Comme dans le cours (p.121) :

$$MSE(x) = b^2(x) + \sigma^2(x),$$

avec

$$b^2(x) = v(x) - \hat{v}(x),$$
$$\sigma^2(x) = \mathbb{E}_f\left[(\hat{v}(x) - \hat{v}_n(x))^2\right].$$

c. Pour estimer $v - \hat{v} = v - K_h * v$, on utilise le lemme 5.(ii) avec $m_0 = 1$ et $p = \infty$ (et en substituant bien sûr K à ρ et h à α) : on obtient

$$\|v - \hat{v}\|_{L^\infty} \leqslant Ch^2\|v\|_{W^{2,\infty}} \leqslant Ch^2\|f\|_{W^{4,\infty}}$$

d. Pour estimer la variance : on procède exactement comme p. 122, mais en utilisant $\frac{d^2}{dx^2}K_h = \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{dx^2}K(\frac{x}{h})$, ce qui fait apparaître un facteur $\frac{1}{h^4}$ supplémentaire :

$$\sigma^2(x) \leqslant \frac{1}{nh^5}\|f\|_{L^\infty}\int(\frac{d^2}{dx^2}K(z))^2dz.$$

e. On a donc finalement, en regroupant les inégalités c. et d. :

$$MSE(x) \leqslant C(h^2 + \frac{1}{nh^5}),$$

où C dépend de K et de $\|f\|_{W^{4,\infty}}$. On choisira donc de façon optimale $h = O(n^{-\frac{1}{7}})$, et on converge à une vitesse optimale pour $\sqrt{MSE(x)}$ en $O(n^{-\frac{1}{7}})$. On pourrait l'améliorer en choisissant un noyau K avec un ordre m_0 plus grand, et en faisant des hypothèses supplémentaires sur la régularité de f.
f. En notant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a donc obtenu pour $m = 1$ une erreur en $O(\varepsilon^{-\frac{2}{7}})$. Pour un m général on aurait eu $h^{2m} + \frac{\varepsilon^2}{h^5}$, ce qui aurait donné une erreur en $O(\varepsilon^{\frac{m}{m+\frac{5}{2}}})$: il s'agit d'un problème mal posé d'ordre $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$. Le 2 correspond à l'ordre de problème mal posé de la dérivée seconde, et le $\frac{1}{2}$ à l'estimation de la densité.

Résolution du problème

On s'intéresse désormais au problème (1) avec $\lambda = 0$, $\tau(x) = 1$ et $\alpha = 3$.
On mesure u_ε tel que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \varepsilon$$

Question 9.

a. A l'aide d'une suite régularisante (noyau K de la question 7), proposer un estimateur pour $\mathcal{F}(u) := \frac{d}{dx}u - D\frac{d^2}{dx^2}u$. On note cet estimateur $f_{\varepsilon,\alpha}$, et on note $f = \mathcal{F}(u)$.
b. Montrer que

$$\|f_{\varepsilon,\alpha} - f\|_{L^2} \leqslant C(\varepsilon^p + \frac{\alpha^q}{\varepsilon^r})\|u\|_{H^m},$$

et préciser les valeurs de p, q, r en fonction de m et des hypothèses faites sur le noyau K.
c. En choisissant h de façon adéquate, montrer qu'on obtient

$$\|f_{\varepsilon,\alpha} - f\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^s$$

et donner la meilleure valeur possible pour s.
d. En utilisant la question 7, proposer un estimateur pour $h(x) = B(x)u(x)$ dans L^2. Quelle inégalité obtient-on en fonction de ε ?
e. Comment en déduire une estimation sur $B(x)$?

Partie 2 : Modèle de dépolymérisation-polymérisation

Dans cette seconde partie on considère l'équation de polymérisation-dépolymerisation suivante, avec $a > 0$ et $b > 0$ constants.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\big((ac(t) - b)u(t,x)\big) = 0, \qquad x > 0, \quad t \geqslant 0, \\ \\ \frac{dc}{dt}(t) = (b - ac(t))\int\limits_0^\infty u(t,x)dx, \\ \\ u(0,x) = u^{in}(x) \geqslant 0, \qquad c(0) = 0, \qquad \int\limits_0^X xu^{in}(x)dx = \rho_0. \end{cases} \tag{3}$$

Dans toute la suite, on suppose que $\rho_0 < \frac{b}{a}$.
On note $\mu_0(t) = \int\limits_0^\infty u(t,x)dx$ et $\mu_1(t) = \int\limits_0^\infty xu(t,x)dx$. A partir de mesures de μ_0 et/ou de μ_1, on souhaite estimer la condition initiale $u^{in}(x)$.
On suppose $u^{in} \in \mathcal{Y} = L^2(0,X)$, $\mathcal{Z} := L^2(0,T) \times L^2(0,T)$, et on suppose qu'on mesure $(\mu_0^\varepsilon, \mu_1^\varepsilon) \in \mathcal{Z}$ tels que

$$\|(\mu_0^\varepsilon, \mu_1^\varepsilon) - (\mu_0, \mu_1)\|^2_{\mathcal{Z}} = \|\mu_0^\varepsilon - \mu_0\|^2_{L^2(0,T)} + \|\mu_1^\varepsilon - \mu_1\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant \varepsilon^2,$$

Etude du problème direct

Question 10.

a. Interpréter les constantes a et b. Que peuvent par exemple représenter $c(t)$ et $u(t,x)$? La quantité μ_1 ? La quantité μ_0 ?
b. En intégrant l'équation (3), écrire le bilan de masse et en déduire un lien simple entre μ_1 et c. Exprimer l'équation satisfaite par μ_1 en fonction de μ_1 et μ_0.
c. Que dire de la vitesse $ac(t)-b$? Qu'en déduire sur les courbes caractéristiques ? Ecrire l'équation qu'elles satisfont. En déduire l'expression de $u(t,x)$ en fonction de $u^{in}(x)$.
d. Conclure que le système admet une solution dans $\mathcal{C}(0,T,L^2(0,X)$.

Corrigé de la question 10 :

a. $u(t,x)$ peut représenter la densité de polymères de taille continue x à l'instant t. a représente le taux de polymérisation, il est multiplié par $c(t)$ densité de monomères à l'instant t en raison de la loi d'action de masse. b représente le taux de dépolymérisation. La mesure μ_1 peut représenter une mesure de la masse polymérisée (par ex. par Thioflavine T sur les fibres amyloïdes). La mesure μ_0 correspondrait à une (hypothétique) mesure du nombre de polymères.
b. Le bilan de masse s'obtient en intégrant l'équation (3) par x : on obtient :

$$\frac{d}{dt}\mu_1(t) = -(b-ac(t))\int\limits_0^\infty u(t,x)dx = -(b-ac(t))\mu_0(t) = -\frac{dc}{dt},$$

donc $\mu_1(t)+c(t)=\rho_0$ en tout temps : le système d'équations conserve la masse. L'équation qui lie μ_0 et μ_1 s'écrit donc :

$$\frac{d\mu_1}{dt} = (a\rho_0 - b - a\mu_1)\mu_0(t).$$

c. La vitesse $ac(t)-b$ reste toujours négative : en effet, à $t=0$ elle est égale à $-b<0$. Cela entraîne que $c(t)$ croît au voisinage de 0. Elle ne peut jamais devenir positive car si elle l'était, c deviendrait décroissante, entraînant de nouveau $ac(t)-b<0$. Les courbes caractéristiques sont donc toujours décroissantes. Elles satisfont l'équation suivante :

$$\frac{dX}{dt}(t,x_0) = ac(t)-b, \qquad X(0,x_0)=x_0,$$

et donc $X(t,x_0) = x_0 + \int\limits_0^t (ac(s)-b)ds$. On note que les courbes caractéristiques sont toutes parallèles et décroissantes. On a donc

$$u\big(t, x + \int\limits_0^t (ac(s)-b)ds\big) = u^{in}(x), \qquad u(t,x) = u^{in}\big(x - \int\limits_0^t (ac(s)-b)ds\big).$$

d. Cette expression explicite montre que $u \in \mathcal{C}(0,T,L^2(0,X)$.

Première étude du problème inverse

Question 11.

a. Déduire de la question 10. c. une expression de μ_0 en fonction de u^{in}, μ_1 et des paramètres du système a, b et ρ_0.
b. Supposant μ_1 mesuré, en déduire une expression (implicite) de u^{in} en fonction de μ_0 et de $F(t) = bt - a\rho_0 t + a\int\limits_0^t \mu_1(s)ds$. Montrer que F est croissante. En déduire une condition suffisante de type $T \geqslant \tau$ pour que l'on puisse reconstruire u^{in} sur l'ensemble du domaine $(0, X)$. En faisant une analogie avec les problèmes inverses linéaires, quel est l'ordre du problème mal posé ?
c. $\diamond$ En dérivant l'expression obtenue en b., proposer une méthode de reconstruction de u^{in} à partir de la mesure bruitée de (μ_0, μ_1). Poser le problème dans un cadre L^2, avec les notations du cours.

Corrigé de la question 11 :

a. On a donc

$$\mu_0(t) = \int\limits_0^X u(t,x)dx = \int\limits_0^X u^{in}(x - \int\limits_0^t (ac(s) - b)ds)dx = \int\limits_{\int\limits_0^t (b-a(\rho_0-\mu_1(s))ds}^{X} u^{in}(x)dx$$

b. En dérivant l'expression obtenue ci-dessus on obtient, dans les notations indiquées :

$$u^{in}(z) = \frac{\mu_0'(F^{-1}(z))}{F'(F^{-1}(z))}$$

Pour que l'on puisse reconstruire u^{in} sur l'ensemble du domaine, comme F est croissante, il faut donc que $t \geqslant T$ où $F(T) = X$. Une condition suffisante est donc $t \geqslant \frac{X}{b-a\rho_0}$; une condition nécessaire et suffisante implicite est $t \geqslant F^{-1}(X)$. Il s'agit d'un problème mal posé (non linéaire) d'ordre 1.
c. On note $\mathcal{Y} := L^2(0, X)$, à partir de la formule

$$u^{in}(z) = \frac{\mu_0'(F^{-1}(z))}{F'(F^{-1}(z))} = u^{in}(z)$$

on définit tout d'abord la fonction $F_\varepsilon \in \mathcal{Z}$ par $F_\varepsilon(t) := (b - a\rho_0)t + a\int\limits_0^t \mu_1^\varepsilon(s)ds$. On remarque que $F_\varepsilon'(t) = b - a\rho_0 + a\mu_1^\varepsilon(t) \in \mathcal{Z}$ n'a pas besoin de régularisation, et que F_ε est monotone croissante, donc inversible, et son inverse appartient à $\mathcal{Z}$ pour $t \leqslant T_\varepsilon$ défini par $F_\varepsilon(T_\varepsilon) = X$.
On peut définir un estimateur, par exemple par

$$u^{in}_{\varepsilon,\alpha}(z) = \frac{\mu_{0,\varepsilon,\alpha}'(F_\varepsilon^{-1}(z))}{F_\varepsilon'(F_\varepsilon^{-1}(z))},$$

où $\mu_{0,\varepsilon,\alpha}'$ désigne la régularisation de μ_0^ε par toute méthode convenable de régularisation de la dérivée d'une fonction (Tikhonov, décomposition en valeurs singulières, suite régularisante...).

Etude dans le cadre de l'assimilation de données

Question 12. Cadre statique

a. En prenant comme espace d'état $\mathcal{Y}$ et comme espace d'observation $\mathcal{Z}$ les espaces définis ci-dessus, définir l'opérateur Ψ et écrire le problème inverse comme un problème statique (non linéaire).
b. Montrer que pour T suffisamment grand, Ψ est injectif (s'aider de la question 10.b).
c. Ecrire la méthode de Tikhonov classique dans ce cadre.
d. Expliquer pourquoi Ψ est non linéaire. Peut-on appliquer une méthode de descente de gradient ? (Il n'est pas demandé de faire un calcul explicite).

Corrigé de la question 12 :

a.On a $\Psi : u^{in} \to (\mu_0[u_{|u^{in}}], \mu_1[u_{|u^{in}}])$ où $u_{|u^{in}}$ est la solution de l'équation (3) avec comme condition initiale u^{in}. L'observation est $z_\varepsilon := (\mu_0^\varepsilon, \mu_1^\varepsilon)$. Le problème inverse est : supposant $\Psi u^{in} = z$ et mesurant $z_\varepsilon \in \mathcal{Z}$ tel que

$$\|z - z_\varepsilon\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,$$

comment construire un estimateur de $u^{in} \in \mathcal{Y}$?
b. on a montré à la question 10.b. une formule explicite pour u^{in} en fonction de μ_1 et μ_0, qui définit u^{in} pour $z \leqslant F(T)$. Pour $t \geqslant F^{-1}(X)$, ce qui est en particulier vrai pour $t \geqslant \frac{X}{b-a\rho_0}$, on définit donc u^{in} de façon unique sur $(0, X)$ à partir de (μ_0, μ_1) : Ψ est injectif.
c. La méthode de Tikhonov classique peut s'écrire aussi pour un problème non linéaire, comme suit :

$$J_\alpha(u^{in}) := \frac{1}{2}\left(\|\mu_0[u^{in}] - \mu_0^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T)} + \|\mu_1[u^{in}] - \mu_1^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T)} + \alpha^2\|u^{in}\|^2_{L^2(0,T)}\right)$$

d. Ψ est non linéaire en raison du terme $a\mu_1 \frac{\partial}{\partial x} u$ dans l'équation. On peut cependant appliquer une méthode de descente de gradient, cf. p.74 du cours. Il faut alors calculer la dérivée de Fréchet Ψ' de Ψ.

Question 13. Estimation 4D-Var

a. On note l'espace d'observation $\mathcal{Z} = \mathbb{R}_+^2$ et on définit l'opérateur d'observation $C : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ par

$$C : \quad u \to (\mu_0(u), \mu_1(u)) = (\int_0^\infty u(x)dx, \int_0^\infty xu(x)dx).$$

Montrer qu'il est linéaire continu. Quel est son adjoint C^* ?
b. $\diamond$ Réécrire le problème dans le formalisme 4D-Var, en ne prenant pas en compte de bruit de modèle. Ecrire l'estimateur 4D-Var. Que peut-on en dire ?

Corrigé de la question 13 :

a. L'opérateur d'observation est linéaire continu (par Cauchy-Schwarz). Son adjoint a été calculé dans le cours p. 109.
b. On note cette fois $\mathcal{Y} = L^2(0, X)$, $y = u$ solution du problème en temps continu (cf. équation (5.32) par exemple dans le cours)

$$\begin{cases} \dot{y}_{|\zeta}(t) = A(t)y_{|\zeta}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ y_{|\zeta}(0) = y_\diamond + \zeta, \end{cases} \tag{4}$$

avec $u^{in} = y_\diamond + \zeta$, $y(t) = u(t, \cdot)$, et ce qu'on cherche à estimer étant $\breve{u}^{in} = y_\diamond + \breve{\zeta}$.
On note l'espace d'observation $\mathcal{Z} = \mathbb{R}_+^2$ et l'opérateur d'observation $C : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ est défini à la question a.
On mesure

$$z^\varepsilon(t) = C(\breve{y}(t)) + \xi^\varepsilon(t)$$

`question à Philippe: j'ai cherché dans le cours quelle notation donner au bruit de mesure, je n'en ai pas trouvé, du coup ici je le note simplement` ξ^ε`, supposé petit.`
L'estimateur 4D-Var consiste à minimiser la fonctionnelle suivante (cf. par ex (5.54) dans le cours)

$$J(\zeta, t) := \frac{\alpha}{2}\|\zeta\|^2_{\mathcal{Y}} + \frac{\beta}{2}\int_0^t \left(|\mu_0^\varepsilon(s) - \mu_0[u_{|\zeta}](s)|^2 + |\mu_1^\varepsilon(s) - \mu_1[u_{|\zeta}](s)|^2 \right),$$

ce qui est comme attendu la méthode de Tikhonov vue ci-dessus avec $\beta = 1$.

Question 14. Définition de l'opérateur de la dynamique

a. $\diamond$ On suppose ici qu'on connaît de façon indépendante $c(t)$. Ecrire l'opérateur de la dynamique $A(t)$ sous forme d'un opérateur linéaire dépendant du temps. Quel est son domaine $D(A(t))$? Quel est son adjoint $A(t)^*$?
b. $\diamond$ Proposer un estimateur de Kalman.
c. $\diamond$ Comment pourrait-on prendre en compte un bruit sur la mesure $c(t)$?

Corrigé de la question 14 :

a.On intègre dans A la mesure de $c(t) = \rho_0 - \mu_1(t)$, dans un premier temps sans la considérer bruitée, dans un second temps en considérant un bruit de modèle : dans ce cadre on définit

$$A_L(t)(u) := \frac{d}{dx}[(b - ac(t))u].$$

$A_L(t)$ est alors un opérateur linéaire, mais dépendant du temps. Son domaine est

$$D(A) = H^1(0, X)$$

son adjoint est également calculé dans le cours p.

b. Pour définir le filtre de Kalman on peut suivre la partie 5.2.3 du cours dans le cas d'espèce, ce qui conduit à tout d'abord calculer C^* (donné directement dans le cours par la formule juste avant (5.63) p. 109, et objet de la question 13.a) et $A_L(t)^*$ (idem, donné par la première formule de la p.109, sauf que b dépend maintenant du temps) puis à écrire l'équation de Riccati correspondante. On peut aussi utiliser (5.60) et (5.61) à adapter dans le cas d'espèce... Tout ceci est en fait une légère adaptation de la partie 5.2.4 à partir du bas de la p.107 avec simplement un $b(t)$ au lieu de b. N'est-ce pas trop proche du cours ?
c. Pour le prendre en compte, il faudrait alors ajouter un bruit de modèle (partie 5.1.5. du cours) : on aurait

$$\begin{cases} \dot{y}_{|\zeta}(t) = A(t)y_{|\zeta}(t) + B(t)\nu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ y_{|\zeta}(0) = y_\diamond + \zeta, \end{cases} \tag{5}$$

avec $A_L(t)$ défini en prenant $\mu_1(t) := \int\limits_0^\infty x\check{y}(t)(x)dx$, avec $\check{y}(t) = y_{|\check{\zeta}}$ défini comme solution du problème exact (i.e. avec A_{NL}) avec comme condition initiale $\check{u^{in}} = y_\diamond + \check{\zeta}$.
Alors on définit $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Q}, \mathcal{Y}))$ par $\mathcal{Q} = \mathcal{Y}$, $\nu = y$, et en définissant ξ^ε le bruit de mesure, on a

$$B(t)\nu := \xi^\varepsilon(t)\frac{d}{dx}[a\nu]$$

La difficulté est qu'en fait $B(t)$ est linéaire mais n'est pas continu par rapport à la norme de $\mathcal{Y}$... `je ne suis pas sûre du tout que ces calculs mènent quelque part... du moins dans le cadre de l'exam!`

Question 15. Condition d'observabilité

On suppose maintenant $a = 0$: cela correspond au problème de dépolymérisation pure vu en cours.
a. Ecrire la condition d'observabilité correspondant au problème.
b. $\diamond$ Peut-elle être vérifiée si $\mathcal{Y} = L^2(0, X)$? Peut-on changer $\mathcal{Y}$ ou $\mathcal{Z}$ de façon à ce que cela soit possible ? Discuter.

a. La condition d'observabilité est du type : il existe τ tel que $\forall\, t \geqslant \tau$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int\limits_0^t |\mu_0(u)(s)|^2 + |\mu_1(u)(s)|^2 ds \geqslant \alpha\|u\|^2_{\mathcal{Y}}$$

b. cf. Article JTB