$v \in C^0$, $\epsilon \neq 0$

Cécile Della Valle

6 mars 2019

1 Introduction

Supposons v une fonction connue, négative strictement (ce qui correspond pqr exemple au cas dans Lifschitz-Slyozov où $0 < b - \mathrm{M}$), et supposons $\epsilon > 0$.

On suppose que v est bornée, et pout tout $t \in [0, \tau]$, $b \leq |v(t)| \leq v_\infty$ On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0, \tau] \\ y(L, t) = 0 & \forall t \in [0, \tau] \end{cases} \tag{1}$$

Puisque $v < 0$, pour faciliter la lecture, on pose $b(t) = -v(t) > 0$.

2 Approche par pénalisation de la forme variationnelle

2.1. Présentation du problème

On cherche la forme variationnelle $A(t)$ qui sera notre candidat du générateur infinitésimal de semi-groupe, on pose :

$$D(A(t)) = \left\{ y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R},\ u(0) = \sqrt{b(t)}m,\ u(L) = 0 \right\}$$

$\cap H^2$

Proposition 2.1

Soit $b \in C^1([0, \tau])$, convexe, tel que $\dot{b} > 0$ (on rappelle que $\forall t > 0$, $b(t) = |v(t)|$).

On munit $\mathscr{Y} = L^2([0, L] \times \mathbb{R})$ de la norme :

$$\|y\|^2_{\mathscr{Y}} = \int_0^L u^2 + \epsilon m^2$$

On définit la famille, $a(t, \cdot, \cdot) : D(A(t)) \times D(A(t)) \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A(t)) \times D(A(t))$$

$$a(t, y_1, y_2) = \epsilon \int_0^L \partial_x u_1 \partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1) u_2 + \epsilon \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} m_1 m_2 \tag{2}$$

▷ On cherche à définir l'opérateur $A(t)$ tel que :

$$\forall y \in D(A(t)) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t)\partial_x u + \epsilon \partial_{xx} u \\ \sqrt{b(t)}\partial_x u(0) - \dfrac{\dot{b}(t)}{b(t)} m \end{pmatrix}$$

Soit a_t une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A),\ a(t, y_1, y_2) \equiv -\langle A(t) y_1, y_2 \rangle_{\mathscr{Y}}$$

Il vient donc pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{Y}$:

$$
\begin{aligned}
\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle b(t)\partial_x u_1 + \epsilon\partial_{xx}u_1, u_2\rangle + \epsilon\langle\sqrt{b(t)}\partial_x u_1(0) - \frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1, m_2\rangle \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \int_0^L \epsilon(\partial_{xx}u_1)u_2 + \epsilon\sqrt{b(t)}\partial_x u_1(0)m_2 - \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + [\epsilon(\partial_x u_1)u_2]_0^L - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon[\sqrt{b(t)}m_2]\partial_x u_1(0) - \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.2. La coercivité de cette forme variationnelle dépend du signe de $\dot b$.

2.2. Pénalisation de la forme variationnelle

On définit la forme linéaire ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
a_\kappa(y_1, y_2, t) &= -\langle A_\kappa(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} \\
&= \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2 + \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)(u_2(0) - \sqrt{b}m_2)
\end{aligned}
$$

Et on munit $\mathscr{Y} = L^2([0, L] \times \mathbb{R})$ de la norme :

$$\|y\|_{\mathscr{Y}}^2 = \int_0^L u^2 + \cancel{\epsilon u(0)^2} + \epsilon m^2$$

je ne change pas la norme et $\mathscr{Y}$ reste $L^2 \times \mathbb{R}$ donc on n'a pas le droit de prendre $u(0)$.

<u>Etape 1 : Reconstruction du problème fort</u>

$$
\begin{aligned}
a_\kappa(y_1, y_2, t) &= \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2 + \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)(u_2(0) - \sqrt{b}m_2) \\
&= -\epsilon\int_0^L \partial_{xx}u_1 u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&+ \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)u_2(0) - \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)\sqrt{b}m_2 \\
&= -\int_0^L (\epsilon\partial_{xx}u_1 + b(t)\partial_x u_1)u_2 \\
&+ \epsilon(\partial_x u_1(0) + \kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1))u_2(0) \\
&- \epsilon(-\frac{\dot b(t)}{b(t)}m_1 + \kappa^{-1}\sqrt{b}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1))m_2
\end{aligned}
$$

On peut donc réécrire cette forme bilinéaire avec l'opérateur $A_\kappa(t)$:

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A_\kappa(t)),\ a_\kappa(t, y_1, y_2) \equiv -\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}}$$

et :

$$\forall y \in D(A_\kappa(t)) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot m \end{pmatrix} = A_\kappa(t)\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon\partial_{xx}u + b(t)\partial_x u \\ -\frac{\dot b(t)}{b(t)}m + \kappa^{-1}\sqrt{b}(u(0) - \sqrt{b}m) \end{pmatrix}$$

Le système fort s'écrit donc :

$$
\begin{cases}
\partial_t u - \epsilon \partial_{xx} u - b(t)\partial_x u = 0 & \forall (x,t) \in [0,L]\times[0,\tau] \\
u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,L] \\
\partial_t m + \dfrac{\dot b(t)}{b(t)} m + \kappa^{-1} b m = \kappa^{-1}\sqrt{b}\, u(0) & \forall t \in [0,\tau] \\
u(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau]
\end{cases}
\tag{3}
$$

QUESTION :
Comment retrouve-t-on l'équation :

$$\partial_x u(0) + \kappa^{-1} u(0) = \kappa^{-1}\sqrt{b} m$$

?

Dans le domaine $D(A_\kappa(t))$? oui je pense

$$D(A_\kappa(t) = \{(u,m) \in H^1_R([0,L]) \times \mathbb{R} | \ \partial_x u(0) + \kappa^{-1} u(0) = \kappa^{-1}\sqrt{b} m\}$$

$\hookrightarrow \cap H^2$

Etape 2 : Convergence de de la solution pénalisée

Soit y solution du problème $\dot y = A(t) y$ et y_κ solution de $y_\kappa = A_\kappa(t) y_\kappa$. On pose $\tilde y = y - y_\kappa$.
Calculons la quantité $A_\kappa(t) y$:

Là j'aurais tendance à essayer sur la formulat° variationelle

$$A_\kappa(t) y = \begin{pmatrix} \epsilon \partial_{xx} u + b(t)\partial_x u) \\ -\dfrac{\dot b(t)}{b(t)} m + \kappa^{-1}\sqrt{b}(u(0) - \sqrt{b} m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\dot b(t)}{b(t)} m \end{pmatrix}$$

Donc $\tilde y$ vérifie l'équation :

$$\dot{\tilde y} = A_\kappa(t)\tilde y + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\dot b(t)}{b(t)} m \end{pmatrix}$$

QUESTION :
Comment assurer que $\tilde y \to 0$?
Comment gérer le fait que y n'appartient pas à $D(A_\kappa(t))$ avec la définition qui fait intervenir m ?
Il me semble qu'on ne fait pas intervenir le fait que y_κ vérifie $\partial_x u(0) + \kappa^{-1} u(0) = \kappa^{-1}\sqrt{b} m$?

Voir page suivante

Etape 3 : Coercivité de l'opérateur

$$a_\kappa(y,y,t) = \epsilon \int_0^L (\partial_x u)^2 + b(t)\frac{1}{2} u(0)^2 + \epsilon \frac{\dot b(t)}{b(t)} m^2 + \epsilon\kappa^{-1}(u(0) - \sqrt{b} m)^2$$

La coercivité de a_κ est donc encore liée au signe de la dérivée de $\dot b$.

Soit $y \in \{H^1_R \times \mathbb{R} \mid u(0) = \sqrt{b} m\}$ tq

$\forall v \in \underbrace{\{H^1_R(0,L) \times \mathbb{R} \mid u(0) = \sqrt{b} m\}}_{V}$ $\dfrac{d}{dt}(y,v) = a(y,v,t)$

$\exists! y_K \in \underbrace{\{H^1_R(0,L) \times \mathbb{R}\}}_{V_K}$ tq $\forall v \in \{H^1_R(0,L) \times \mathbb{R}\}$ $\dfrac{d}{dt}(y_K, v) = a_K(y_K, v, t)$

mais $y \in V_K$ $\boxed{\forall v \in V \ \dfrac{d}{dt}(y,v) = a(y,v,t) = a_K(y,v,t)}$

plus petit que V_K donc il faut travailler à partir de la
c'est pas direct...

~~**Références**~~

Etape 3. On a tjs $D(A|H)$ mais par contre on a bien un espace V_K qui ne dépend plus de $\sqrt{b}$ tq

$$V_K \hookrightarrow Y \hookrightarrow V_K'$$

et $A_K(t) \in \mathcal{L}(V, V')$

et $A_K(t)$ n'est pas coercif mais $V-Y$ coercif

i.e. $\exists\ \alpha > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall v \in V\ \underbrace{\langle A_K(t) v, v \rangle_{V',V}}_{= a_K(v, v, t)} + \lambda \|v\|_Y \geq \alpha \|v\|^2$$

ce terme peut permettre de gérer $\frac{\dot{b}}{b}$ en supposant seulement que $\dot{b}$ est borné entre 2 valeurs.