Réunion du 01/02

Cécile Della Valle

7 février 2019

Soit $L > 0$ et $\tau > 0$, soit v une fonction continue, $v \in C^0([0,\tau])$, On souhaite démontrer l'existence d'une solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ 1_{v(t)>0}\, y(0,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ 1_{v(t)<0}\, y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{1}$$

<u>$v =$cste, $\epsilon = 0$</u>

On suppose dans un premier temps que v est une constante, et on suppose, sans perte de généralité, que cette constante est positive $v > 0$. De plus on suppose que la constante ϵ est nulle.

L'équation (1) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ y(0,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{2}$$

Soit $\mathscr{Y} = L^2([0,L])$ l'espace de Banach et l'opérateur A sur cet espace tel que :

$$\forall y \in D(A), \quad Ay = -v\partial_x y$$

On souhaite démontrer la propriété suivante :

Proposition 0.1

L'opérateur $A : D(A) \to \mathscr{Y}$ est générateur d'un semi-groupe C_0 de contraction dans $\mathscr{Y}$.

$\triangleright$ On souhaite appliquer le théorème de Hille-Yoshida, il nous faut donc démontrer que A possède les deux propriétés suivantes :

- (1) A est un opérateur fermé et $\bar{DA} = \mathscr{Y}$;
- (2) l'ensemble résolvant de A contient la demi-droite $]0; +\infty)$ et on a $\forall \lambda > 0$ $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(\mathscr{Y})} \leq 1/\lambda$

(1)

L'opérateur A est défini sur l'ensemble $D(A)$ des fonctions absoluement continues sur $[0,L]$ qui s'annulent en 0. On peut par exemple utilisee lemme suivant :

Lemme 0.2

Une fonction y de $\mathscr{Y}$ est absolument continue sur $[0,L]$ si et seulement si pour presque tout $x \in [0,L]$, y est dérivable en x de dérivée $y' \in L^2([0,L])$ et

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'$$

Sur cet ensemble, l'opérateur dérivation est fermée, densément défini.

(2)

Soit $y_1 \in \mathscr{Y}$ tel aue $(\lambda - A)y = y_1$, alors on a de façon équivalente :

$$\begin{cases} \lambda y - v y' = y_1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, cette équation possède une unique solution donnée par la formule de Duhamel :

$$y(x) = -\int_0^x e^{\lambda/v(x-x')} y_1(x')dx'$$

et on vérifie que $\|y\|_{\mathscr{Y}} \leq 1/\lambda \|y_1\|_{\mathscr{Y}}$.

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\mathscr{Y}}^2 &= \int_0^L |\int_0^x e^{\lambda/v(x-x')} y_1(x')dx'|^2 dx \\
&\leq (\int_0^L e^{2\lambda/vx} dx)(\int_0^L |\int_0^x e^{-2\lambda/vx'} y_1(x')dx'|^2 dx \\
&\leq \frac{v}{2\lambda}(e^{\frac{2L\lambda}{v}} - 1)(\int_0^L e^{-2\lambda/vx'} dx' \int_0^L |y_1(x')|^2 dx') \\
&\leq \frac{v}{2L\lambda}^2 (e^{\frac{2L\lambda}{v}} - 1)^2 \|y_1\|_{\mathscr{Y}} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \|y_1\|_{\mathscr{Y}}
\end{aligned}$$

□

On obtient donc l'existence de solution de (3).

$v \in C^0$, $\epsilon = 0$

On suppose cette fois que $v \in C^0$ et de plus que v ne change pas de signe. Sans perdre de généralité on suppose que $\forall t \in [0, \tau]$ on a $v(t) > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ y(0,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{3}$$