$v \in C^0$, $\epsilon \neq 0$

Cécile Della Valle

6 mars 2019

1 Introduction

Supposons v une fonction connue, négative strictement (ce qui correspond pqr exemple au cas dans Lifschitz-Slyozov où $0 < b - \mathrm{M}$), et supposons $\epsilon > 0$.

On suppose que v est bornée, et pout tout $t \in [0, \tau]$, $b \leq |v(t)| \leq v_\infty$ On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{1}$$

Puisque $v < 0$, pour faciliter la lecture, on pose $b(t) = -v(t) > 0$.

2 Approche par pénalisation de la forme variationnelle

2.1. Présentation du problème

On cherche la forme variationnelle $A(t)$ qui sera notre candidat du générateur infinitésimal de semi-groupe, on pose :

$$D(A(t)) = \left\{ y \mid y = (u,m) \in H^1([0,L]) \times \mathbb{R},\ u(0) = \sqrt{b(t)}m,\ u(L) = 0 \right\}$$

Proposition 2.1

Soit $b \in C^1([0,\tau])$, convexe, tel que $\dot{b} > 0$ (on rappelle que $\forall t > 0,\ b(t) = |v(t)|$).

On munit $\mathscr{Y} = L^2([0,L] \times \mathbb{R})$ de la norme :

$$\|y\|^2_{\mathscr{Y}} = \int_0^L u^2 + \epsilon m^2$$

On définit la famille, $a(t,\cdot,\cdot) : D(A(t)) \times D(A(t)) \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (y_1,y_2) \in D(A(t)) \times D(A(t))$$

$$a(t,y_1,y_2) = \epsilon \int_0^L \partial_x u_1 \partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)} m_1 m_2 \tag{2}$$

▷ On cherche à définir l'opérateur $A(t)$ tel que :

$$\forall y \in D(A(t)) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t)\partial_x u + \epsilon \partial_{xx} u \\ \sqrt{b(t)}\partial_x u(0) - \dfrac{\dot{b}(t)}{b(t)} m \end{pmatrix}$$

Soit a_t une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1,y_2) \in D(A),\ a(t,y_1,y_2) \equiv -\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}}$$

Il vient donc pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{Y}$:

$$
\begin{aligned}
\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle b(t)\partial_x u_1 + \epsilon\partial_{xx}u_1, u_2\rangle + \epsilon\langle\sqrt{b(t)}\partial_x u_1(0) - \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1, m_2\rangle \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \int_0^L \epsilon(\partial_{xx}u_1)u_2 + \epsilon\sqrt{b(t)}\partial_x u_1(0)m_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + [\epsilon(\partial_x u_1)u_2]_0^L - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon[\sqrt{b(t)}m_2]\partial_x u_1(0) - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.2. La coercivité de cette forme variationnelle dépend du signe de $\dot{b}$.

2.2. Pénalisation de la forme variationnelle

On définit la forme linéaire ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
a_\kappa(y_1, y_2, t) &= -\langle A_\kappa(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} \\
&= \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 + \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)(u_2(0) - \sqrt{b}m_2)
\end{aligned}
$$

Et on munit $\mathscr{Y} = L^2([0, L] \times \mathbb{R})$ de la norme :

$$
\|y\|_{\mathscr{Y}}^2 = \int_0^L u^2 + \epsilon u(0)^2 + \epsilon m^2
$$

<u>Etape 1 : Reconstruction du problème fort</u>

$$
\begin{aligned}
a_\kappa(y_1, y_2, t) &= \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 + \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)(u_2(0) - \sqrt{b}m_2) \\
&= -\epsilon\int_0^L \partial_{xx}u_1 u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\
&+ \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)u_2(0) - \epsilon\kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1)\sqrt{b}m_2 \\
&= -\int_0^L (\epsilon\partial_{xx}u_1 + b(t)\partial_x u_1)u_2 \\
&+ \epsilon(\partial_x u_1(0) + \kappa^{-1}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1))u_2(0) \\
&- \epsilon(-\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 + \kappa^{-1}\sqrt{b}(u_1(0) - \sqrt{b}m_1))m_2
\end{aligned}
$$

On peut donc réécrire cette forme bilinéaire avec l'opérateur $A_\kappa(t)$:

$$
\forall(y_1, y_2) \in D(A_\kappa(t)),\ a_\kappa(t, y_1, y_2) \equiv -\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}}
$$

et :

$$
\forall y \in D(A_\kappa(t)) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A_\kappa(t)\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon\partial_{xx}u + b(t)\partial_x u) \\ -\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m + \kappa^{-1}\sqrt{b}(u(0) - \sqrt{b}m) \end{pmatrix}
$$

Le système fort s'écrit donc :

$$\begin{cases} \partial_t u - \epsilon \partial_{xx} u - b(t)\partial_x u = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \partial_t m + \dfrac{\dot{b}(t)}{b(t)} m + \kappa^{-1} b m = \kappa^{-1}\sqrt{b} u(0) & \forall t \in [0,\tau] \\ u(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{3}$$

QUESTION :
Comment retrouve-t-on l'équation :

$$\partial_x u(0) + \kappa^{-1} u(0) = \kappa^{-1}\sqrt{b} m$$

?
Dans le domaine $D(A_\kappa(t))$?

$$D(A_\kappa(t) = \{(u,m) \in H^1_R([0,L]) \times \mathbb{R} | \ \partial_x u(0) + \kappa^{-1} u(0) = \kappa^{-1}\sqrt{b} m\}$$

Etape 2 : Convergence de de la solution pénalisée
Soit y solution du problème $\dot{y} = A(t)y$ et y_κ solution de $\dot{y_\kappa} = A_\kappa(t) y_\kappa$. On pose $\tilde{y} = y - y_\kappa$.
Calculons la quantité $A_\kappa(t)y$:

$$A_\kappa(t)y = \left(\begin{array}{c} \epsilon \partial_{xx} u + b(t)\partial_x u) \\ -\dfrac{\dot{b}(t)}{b(t)} m + \kappa^{-1}\sqrt{b}(u(0) - \sqrt{b} m) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\dfrac{\dot{b}(t)}{b(t)} m \end{array} \right)$$

Donc $\tilde{y}$ vérifie l'équation :

$$\dot{\tilde{y}} = A_\kappa(t)\tilde{y} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\dfrac{\dot{b}(t)}{b(t)} m \end{array} \right)$$

QUESTION :
Comment assurer que $\tilde{y} \to 0$?
Comment gérer le fait que y n'appartient pas à $D(A_\kappa(t))$ avec la définition qui fait intervenir m ?
Il me semble qu'on ne fait pas intervenir le fait que y_κ vérifie $\partial_x u(0) + \kappa^{-1} u(0) = \kappa^{-1}\sqrt{b} m$?

Etape 3 : Coercivité de l'opérateur

$$a_\kappa(y,y,t) = \epsilon \int_0^L (\partial_x u)^2 + b(t)\frac{1}{2} u(0)^2 + \epsilon \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} m^2 + \epsilon \kappa^{-1}(u(0) - \sqrt{b} m)^2$$

La coercivité de a_κ est donc encore liée au signe de la dérivée de $\dot{b}$.

Références