# To be determined

Cécile Della Valle

26 février 2019

## 1 Introduction

Soit $\tau > 0$, soit $v$ une fonction continue, $v \in C^0([0,\tau])$ strictement négative. On souhaite démontrer l'existence d'une solution dans $C^0([0,\tau],\mathscr{Y})$ du problème de Cauchy par la théorie des semi-groupes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{1}$$

Dans une première partie, on s'intéresse aux cas particuliers ($v$ est une fonction constante négative, et $\epsilon$ est nul), pour progressivement revenir sur ces hypothèses.

On s'intéresse ensuite au problème d'observabilité lié à la mesure d'un moment d'ordre $n$ d'une solution $y$ :

$$C_n \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{Y} & \rightarrow & \mathscr{Z} \\ y_0 & \mapsto & t \rightarrow \int_0^L x^n y(x,t)dx \end{array} \right. \tag{2}$$

Par la suite on supposera $n$ fixé et on notera simplement $C$ l'observateur.

Dans une deuxième partie, on cherche démontrer l'existence et l'unicité de solutions de l'équation de Riccati associée à l'observateur $C$ de moments de la solution. Ce problème mal posé sera régularisé par une méthode de Tikhonov.

Enfin la dernière partie portera sur l'étude de la résolution numérique du filtre de Kalman.

## 2 Existence de solution pour le problème direct

### 2.1. $v$ =cste, $\epsilon = 0$

On suppose dans un premier temps que $v$ est une constante, et on suppose, sans perte de généralité, que cette constante est négative $v < 0$. De plus on suppose que la constante $\epsilon$ est nulle.

L'équation (1) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{3}$$

Soit $\mathscr{Y} = L^2([0,L])$ l'espace de Banach et l'opérateur $A$ sur $D(A)$ tel que :

$$\forall y \in D(A), \quad Ay = -v\partial_x y \tag{4}$$

$$D(A) = \left\{y \mid \partial_x y \in L^2([0,L]),\ y(L) = 0|\right\} = H^1_R([0,L])$$

**Proposition 2.1**

*L'opérateur $A : D(A) \to \mathscr{Y}$ défini par (4) est générateur d'un semi-groupe $C_0$ de contraction dans $\mathscr{Y}$.*

▷ On souhaite appliquer le théorème de Lumer-Phillips, il nous faut donc démontrer que $A$ possède les trois propriétés suivantes :

— $(i)$ $A$ est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = \mathscr{Y}$ ;
— $(ii)$ $A$ est dissipatif ;
— $(iii)$ il existe $\lambda_0$ tel que $\lambda_0 - A : D(A) \to \mathscr{Y}$ est surjectif.

$(i)$
L'opérateur A est défini sur l'ensemble $D(A)$ des fonctions de $H^1$ sur $[0,L]$ qui s'annulent en $L$. Sur cet ensemble, l'opérateur dérivation est fermée, densément défini. (REF ? ?)

$(ii)$
Montrons que $A$ est dissipatif. Soit $y \in D(A) \subset \mathscr{Y}$, calculons la quantité :

$$\begin{aligned} \langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle v\partial_x y, y\rangle_{\mathscr{Y}} \\ &= v\int_0^L y(z)\partial_x y(z) d(z) \\ &= v[y(z)^2]_{z=0}^L - v\int_0^\infty y(z)\partial_x y(z) d(z) \end{aligned}$$

Soit :

$$\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} = -\frac{1}{2}vy(0)^2 \leq 0$$

Donc $\forall\ y \in \mathscr{Y}$, $\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} \leq 0$.

$(iii)$
Soit $y_1 \in \mathscr{Y}$ et $\lambda > 0$.
On cherche une solution $y$ tel que $(\lambda - A)y = y_1$.
Alors on a de façon équivalente que $y$ est solution de :

$$\begin{cases} \lambda y - vy' = y_1 \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

donc, pour tout $y_1 \in \mathscr{Y}$, cette équation possède une unique solution donnée par la formule de Duhamel :

$$y(x) = \int_x^L e^{\lambda/v(x-x')} y_1(x') dx'$$

(On peut par ailleurs vérifier que $\|y\|_{\mathscr{Y}} \leq 1/\lambda \|y_1\|_{\mathscr{Y}}$).

Donc d'après $(i)$,$(ii)$ et $(iii)$, on peut appliquer le théorème de Lumer-Phillips, et $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-group $C_0$. On a donc l'existence d'une solution de (3) dans $C^0([0,\tau], L^2([0,L])$.

□

Dans ce cas simple, on peut donner une formule explicite de l'opérateur de semi-group $C_0$ :

**Lemme 2.2**

*Pour tout $t \in [0.\tau]$, le semi-groupe $C_0$ généré par $A$ l'opérateur infinitésimal associé à l'équation (3) est la translation :*

$$\forall y \in D(A(t)), \quad S(s)y = y(x - vs)\chi_{0 \leq x - vs \leq L}$$

**Théorème 2.3 (*Existence et unicité*)**

*Soit soit $\tau > 0$ et $v < 0$, soit $\mathscr{Y}$ un espace de Banach, et le de générateur infinitésimal du semi-groupe $C_0$ sur $\mathscr{Y}$ défini par (4). Alors le problème de Cauchy (3) a une unique solution dans $C^0([0, tau], \mathscr{Y})$ qui s'écrit :*

$$\forall s \in [0, \tau] \quad y(s) = S(s) y_0$$

*où $S$ est le semi-groupe d'évolution donné par lemme 2.2.*

## 2.2. $v \in C^0$, $\epsilon = 0$

On suppose cette fois que $v \in C^0$ est une fonction donnée, et de plus que $v$ ne s'annule pas. Sans perdre de généralité on suppose que $\forall t \in [0, \tau]$ on a $v(t) < 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ y(L,0) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{5}$$

Soit $\mathscr{Y} = L^2([0,\infty))$ l'espace de Banach et l'opérateur d'évolution $A(t)$ définit sur $D(A(t))$ tel que :

$$\forall y \in D(A(t)), \quad A(t)y = -v(t)\partial_x y \tag{6}$$

Avec

$$\forall t \in [0,\tau], \ D(A(t)) = \big\{ y \mid \partial_x y \in L^2([0,L]), \ y(L) = 0| \big\} = H^1_R$$

**Proposition 2.4**

*Soit $\mathscr{Y}$ un espace de Banach, pour $t > 0$, l'opérateur $A(t)$ est le générateur infinitésimal de semi-groupe $C_0$, noté $S_t$.*

▷ Pour $t > 0$ fixé, on est ramené au cas de la proposition 2.1. □

**Proposition 2.5**

*Soit soit $\tau > 0$, soit $v \in C^0([0,\tau])$ telle que $\forall t \in [0,\tau]$ on a $v(t) < 0$. Soit $\mathscr{Y}$ un espace de Banach, la famille $(A(t))_{t \in [0,\tau]}$ définie par (6) de générateurs infinitésimals de semi-groupes $C_0$ sur $\mathscr{Y}$ est stable.*

▷ Rappelons les conditions nécessaires pour que $(A(t))_{t\in[0,\tau]}$ soit une famille stable : il existe $M > 1$ et $\omega > 0$ tels que pout tout $t \in [0,\tau]$

$$\begin{cases} (i) \ \ ]\omega; +\infty[ \subset \rho(A(t)) \\ (ii) \ \ \| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda : A(t_j))\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k} \quad \forall \, t_0 < .. < t_j < .. < t_k \end{cases}$$

La condition $(i)$ est immédiatement vérifée. En effet, puisque pour tout $t > 0$ chaque générateur infinitésimal $A(t)$ vérifie $\mathbb{R}^{+*} \subset \rho(A(t))$ (en particulier, dans notre cas puisque pour tout $t > 0$, pour tout $\lambda > 0$, on a que $\lambda - A$ est un opérateur surjectif, donc $\mathbb{R} \subset \rho(A(t))$).

Pour la condition $(ii)$ calculons explicitement la norme d'un opérateur $R(\lambda : A(t_j))$ :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A(t_j))y_1\|^2 &= \int_0^L |\int_x^L e^{\lambda/v(t_j)(x-x')} y_1(x')dx'|^2 dx \\
&\leq \int_0^L (\int_x^L e^{2\lambda/v(t_j)(x-x')}dx')(\int_x^L y_1(x')^2 dx')dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \int_0^L (\int_x^L e^{2\lambda/v(t_j)(x-x')}dx')dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \int_0^L \frac{-v(t_j)}{2\lambda}[e^{2\lambda/v(t_j)(x-x')}]_x^L dx \\
&\leq \|y_1\|^2 \frac{-v(t_j)}{2\lambda} \int_0^L (e^{2\lambda/v(t_j)(x-L)} - e^{2\lambda/v(t_j)x})dx \\
&\leq \|y_1\|^2 |\frac{v(t_j)}{2\lambda}|^2 (2e^{2\lambda/v(t_j)L} - 1)
\end{aligned}$$

Sachant que $v$ est une fonction continue donnée, on pose $V = \|v\|_\infty$ et on choisit les constantes de stabilité :

$$\begin{cases} M = 1 \\ \omega = \frac{2}{V} e^{-\lambda/v(t_j)L} \end{cases} \tag{7}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A(t_j))\| &\leq \frac{V}{2\lambda} e^{\lambda/v(t_j)L} \\
&\leq \frac{V e^{\lambda/v(t_j)L}\omega}{2\lambda\omega} \\
&\leq M \frac{1}{|\lambda - \omega|}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $j > 0$ on a l'inégalité :

$$\|R(\lambda : A(t_j))\|^2 \leq M \frac{1}{|\lambda - \omega|} \tag{8}$$

Ce qui donne l'inégalité $(ii)$. □

**Proposition 2.6**

*Soit soit $\tau > 0$, soit $v \in C^0([0, \tau])$ telle que $\forall t \in [0, \tau]$ on a $v(t) < 0$. Soit $\mathscr{Y}$ un espace de Banach, la famille $(A(t))_{t \in [0,\tau]}$ définie par (6) de générateurs infinitésimals de semi-groupes $C_0$ sur $\mathscr{Y}$. Il existe une unique solution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq \tau$, qui satisfait :*
- *$\|U(t, s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq \tau$ ;*
- *$\partial_t^+ U(t, s)v|_{t=s} = A(sv)$ pour $v \in \mathscr{Y}$, $0 \leq s \leq \tau$ ;*
- *$\partial_s U(t, s)v = -U(t, s)A(s)v$ pour $v \in \mathscr{Y}$, $0 \leq s \leq t \leq \tau$.*

▷ On souhaite appliquer le théorème du chap.5 de Pazy. On rappelle les hypothèses que doit vérifier la famille $(A(t))_{t \in [0,\tau]}$ pour appliquer le théorème 3.1 page 135 livre de Pazy [1].
- $(i)$ $(A(t))$ est une famille d'opérateurs stables pour les constantes $M$ et $\omega$ ;
- $(ii)$ $\mathscr{H}$ est $A(t)$-admissible pour $t \in [0, \tau]$ et la famille $(\tilde{A}(t))$ de $A(t)$ dans $\mathscr{H}$ est une famille stable de $\mathscr{H}$ pour les constantes $\tilde{M}$ et $\tilde{\omega}$ ;
- $(iii)$ Pour tout $t \in [0, \tau]$, $\mathscr{H} \subset D(A(t))$, $A(t)$ est un opérateur borné de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{Y}$ et $t \to A(t)$ est continue pour la norme des opéraeurs bornés $\|\|_{\mathscr{H} \to \mathscr{Y}}$.

La condition $(i)$ a été démontrée par la proposition 2.5.

Démontrons maintenant la condition $(ii)$. On pose :

$$\mathscr{H} = \{y \mid y \in H^1([0, L]),\ y(L) = 0\}$$

et la norme associée à cet espace $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ est définie de la façon suivante :

$$\forall y \in \mathscr{H},\ \|y\|_{\mathscr{H}} = \|y\|_{\mathscr{Y}} + \|y'\|_{\mathscr{Y}}$$

Et de plus on définit la norme des applications bornées de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{Y}$ :

$$\forall A \in B(\mathscr{H},\mathscr{Y}),\ \|A\|_{\mathscr{H}\to\mathscr{Y}} = \sup_{y\in\mathscr{H}} \frac{\|Ay\|_{\mathscr{H}}}{\|y\|_{\mathscr{H}}}$$

Alors $\mathscr{H}$ est fermé dans $\mathscr{Y}$ pour la norme $\|\|_{\mathscr{H}}$. On a de plus une formule explicite pour tout $t \in [0,\tau]$ :

**Lemme 2.7**

*Pour tout $t \in [0,\tau]$, le semi-groupe $C_0$ généré par $(A(t) = -v(t)\partial_x\ )_{t\in[0,\tau]}$ avec $v \in C^0([0,\tau])$ est la translation :*

$$\forall y \in D(A(t)),\ \ U_t(s)y = y(x - v(t)s)\chi_{0\leq x-v(t)s\leq L}$$

Donc $\mathscr{H}$ sous-espace de $\mathscr{Y}$ est $A(t)$-admissible puisque $\mathscr{H}$ est un espace invariant par la translation $U_t$ et la restrinction de $U_t$ à $\mathscr{H}$ est un semi-groupe $C^0$ de $\mathscr{H}$.

Enfin, chaque opérateur $A(t)$ est borné sur $\mathscr{H}$ ce qui achève la démonstration puisque $(iii)$ est également vérifiée. □

**Théorème 2.8**

*Soit soit $\tau > 0$, soit $v \in C^0([0,\tau])$ telle que $\forall t \in [0,\tau]$ on a $v(t) < 0$. Soit $\mathscr{Y}$ un espace de Banach, la famille $(A(t))_{t\in[0,\tau]}$ définie par (6) de générateurs infinitésimals de semi-groupes $C_0$ sur $\mathscr{Y}$. Alors le problème de Cauchy (5) a une unique solution dans $C^0([0,tau],\mathscr{Y})$ qui s'écrit :*

$$\forall t \in [0,\tau]\ \ y(t) = U(t,0)y_0$$

*où $U$ est le semi-groupe d'évolution donné par 2.6.*

## 2.3. $v =$ cste, $\epsilon \neq 0$

Supposons $v =$ cste et $v < 0$, supposons $\epsilon > 0$. On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + v\dfrac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L]\times[0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{9}$$

Puisque $v < 0$, pour faciliter la lecture, on pose $b = -v > 0$.

On remarque que la principale difficulté par rapport à ce qui a été développé précédemment est la condition au bord en $x = 0$. Pour gérer cette condition, on introduit l'espace :

$$D(A(t)) = \big\{y \mid y = (u,m) \in H^1([0,L])\times\mathbb{R},\ u(0) = m,\ u(L) = 0\big\}$$

Et $\mathscr{Y} = L^2(0,L)\times\mathbb{R}$ avec la normne associée (on rappelle que $\forall t > 0,\ b = |v|$) :

$$\|y\|^2_{\mathscr{Y}} = \int_0^L u^2 + \frac{\epsilon}{b}m^2$$

On cherche à définir l'opérateur $A$ tel que :

$$\forall y \in D(A) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\partial_x u + \epsilon\partial_{xx}u \\ b\partial_x u(0) \end{pmatrix}$$

Soit $a$ une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1,y_2) \in D(A),\ a(y_1,y_2) \equiv -\langle Ay_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}}$$

Il vient donc pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\langle Ay_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle b\partial_x u_1 + \epsilon\partial_{xx}u_1, u_2\rangle + \frac{\epsilon}{b}\langle b\partial_x u_1(0), m_2\rangle \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 + \int_0^L \epsilon(\partial_{xx}u_1)u_2 + \frac{\epsilon}{b}b\partial_x u_1(0)m_2 \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 + [\epsilon(\partial_x u_1)u_2]_0^L - \int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)m_2 \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon m_2\partial_x u_1(0) - \int_0^L \epsilon\partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)m_2 \\
&= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon\partial_x u_1\partial_x u_2
\end{aligned}$$

**Proposition 2.9**

*L'opérateur $A : D(A) \to \mathscr{Y}$ défini par :*

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A),\ \langle Ay_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} = \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon\partial_x u_1\partial_x u_2 \tag{10}$$

*est générateur d'un semi-groupe $C_0$ de contraction dans $\mathscr{Y}$.*

$\triangleright$ On souhaite appliquer le théorème de Lumer-Philipps, on reprend les étapes de la preuve de la propriété 2.1.

$(i)$ L'opérateur A est défini sur l'ensemble $D(A)$ des fonctions $H^1[0, L] \cap \mathscr{Y}$.

$(ii)$ Montrons que $A$ est dissipatif. Soit $y \in \mathscr{Y}$, calculons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} &= \int_0^L b(\partial_x u)u - \epsilon\int_0^L (\partial_x u)^2 \\
&= \int_0^L \frac{b}{2}\partial_x u^2 - \epsilon\int_0^L (\partial_x u)^2 \\
&= \frac{b}{2}[u^2]_0^L - \epsilon\int_0^L (\partial_x u)^2 \\
&= -\frac{b}{2}u(0)^2 - \int_0^L \epsilon(\partial_x u)^2
\end{aligned}$$

Soit :

$$\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} = -\frac{b}{2}m^2 - \epsilon\int_0^L (\partial_x u)^2$$

Donc $\forall\, y \in \mathscr{Y}$, $\langle Ay, y\rangle_{\mathscr{Y}} \leq 0$.

$(iii)$
Soit $y_1 = (u_1, m_1) \in \mathscr{Y}$ et $\lambda > 0$.
On cherche une solution $y$ tel que $(\lambda - A)y = y_1$.
Alors pour tout $y_2 = (u_2, m_2)$, $y$ est solution de :

$$\langle \lambda y - Ay, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} \tag{11}$$

Soit :

$$\lambda(\int_0^L uu_2 + \frac{\epsilon}{b}mm_2) - \int_0^L b(\partial_x u)u_2 + \int_0^L \epsilon\partial_x u\partial_x u_2 = \int_0^L u_1u_2 + \frac{\epsilon}{b}m_1m_2$$

On choisit $u_2 \in H_0^1([0, L])$, donc $m_2 = 0$, et on cherche $u$ solution du problème variationnel :

$$\forall u_2 \in H_0^1([0, L]),\ \lambda\int_0^L uu_2 - \int_0^L b(\partial_x u)u_2 + \int_0^L \epsilon\partial_x u\partial_x u_2 = \int_0^L u_1u_2$$

On montre que

$$\tilde{a}(u, u_2) = \lambda \int_0^L u u_2 - \int_0^L b(\partial_x u) u_2 + \int_0^L \epsilon \partial_x u \partial_x u_2$$

est bilinéaire, continue, coercive sur $H_0^1$. Et $L(u_2) = \int_0^L u_1 u_2$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1$. Donc d'après le théorème de Lax-Milgram il existe une unique fonction $u_0$ de $H_0^1(0, L)$ solution.

Alors pour $m_2 \neq 0$, il vient par ailleurs :

$$\lambda \frac{\epsilon}{b} m m_2 = \frac{\epsilon}{b} m_1 m_2$$

Ce qui définit un unique $m$ pour $\lambda \neq 0$.

On pose alors $y = (u_0 + m_1/\lambda, m_1/\lambda)$ qui nous donne l'unique élément de $\mathscr{Y}$ tel que (11) soit vérifiée. donc, pour tout $y_1 \in \mathscr{Y}$, cette équation possède une unique solution

Donc d'après $(i)$,$(ii)$ et $(ii)$, on peut appliquer le théorème de Lumer-Phillips, et $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-group $C_0$. On a donc l'existence d'une solution de (9) dans $L^2([0, +\infty) \times [0, \tau])$.

□

**Remarque 2.10.** Le caractère dissipatif peut être démontré par une égalité d'énergie. En effet, on multiplie par $y$ la solution forte de l'équation (1) et on intègre entre 0 et $L$, et il vient :

$$\int_0^L y \partial_t y + \int_0^L -b y \partial_x y + \int_0^L -\epsilon \partial_{xx} y = 0 \tag{12}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^L -b y \partial_x y &= \frac{-b}{2} \int_0^L \partial_x y^2 \\
&= \frac{b}{2} y(0, \cdot)^2
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\int_0^L -\epsilon \partial_{xx} y &= -\epsilon [y \partial_x y]_0^L + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \\
&= +\epsilon y(0, \cdot) \partial_x y|_{x=0} + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \\
&= (\epsilon / -b) y(0, \cdot) \partial_t y|_{x=0} + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 \\
&= (\epsilon / 2b) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(0, \cdot)^2 + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2
\end{aligned}$$

Alors l'équation (12) devient :

$$\int_0^L \frac{1}{2} \partial_t y^2 + \frac{b}{2} y(0, \cdot)^2 + (\epsilon / 2b) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(0, \cdot)^2 + \epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 = 0$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\int_0^L y^2 + (\epsilon / b) y(0, \cdot)^2] = -2\epsilon \int_0^L (\partial_x y)^2 - b y(0, \cdot)^2 \tag{13}$$

On constate donc que la solution $y$ de (9) est également solution d'une équation de dissipation d'énergie.

**Théorème 2.11 (*Existence et unicité*)**

*Soit soit $\tau > 0$ et $v < 0$, soit $\mathscr{Y}$ un espace de Banach, et le de générateur infinitésimal du semi-groupe $C_0$ sur $\mathscr{Y}$ défini par (10). Alors le problème de Cauchy (9) a une unique solution dans $C^0([0, tau], \mathscr{Y})$ qui s'écrit :*

$$\forall s \in [0, \tau] \;\; y(s) = S(s) y_0$$

*où $S$ est le semi-groupe d'évolution donné par 2.2.*

## 2.4. $v \in C^0$, $\epsilon \neq 0$

Supposons $v$ une fonction connue, négative strictement (ce qui correspond pqr exemple au cas dans Lifschitz-Slyozov où $0 < b - \mathrm{M}$ ), et supposons $\epsilon > 0$.

On suppose que $v$ est bornée, et pout tout $t \in [0, \tau]$, $b \leq |v(t)| \leq v_\infty$ On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t)\frac{\partial y}{\partial x} - \epsilon\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\tau] \\ y(x,0) = y_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ \frac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} + v(t)\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 & \forall t \in [0,\tau] \\ y(L,t) = 0 & \forall t \in [0,\tau] \end{cases} \tag{14}$$

Puisque $v < 0$, pour faciliter la lecture, on pose $b(t) = -v(t) > 0$.

Par analogie avec ce qui a été fait dans la section précédente, on pose :

$$D(A(t)) = \left\{ y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R},\ u(0) = \sqrt{b(t)}m,\ u(L) = 0 \right\}$$

Et $\mathscr{Y} = L^2(0, L) \times \mathbb{R}$ avec la normne associée (on rappelle que $\forall t > 0,\ b(t) = |v(t)|$) :

$$\|y\|_{\mathscr{Y}}^2 = \int_0^L u^2 + \epsilon m^2$$

On cherche à définir l'opérateur $A(t)$ tel que :

$$\forall y \in D(A(t)) \subset \mathscr{Y},\ \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t)\partial_x u + \epsilon\partial_{xx}u \\ \sqrt{b(t)}\partial_x u(0) - \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m \end{pmatrix}$$

Soit $a_t$ une forme bilinéaire telle que :

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A),\ a(t, y_1, y_2) \equiv -\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}}$$

Il vient donc pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{Y}$ :

$$\begin{aligned} \langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} &= \langle b(t)\partial_x u_1 + \epsilon\partial_{xx}u_1, u_2\rangle + \epsilon\langle\sqrt{b(t)}\partial_x u_1(0) - \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1, m_2\rangle \\ &= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \int_0^L \epsilon(\partial_{xx}u_1)u_2 + \epsilon\sqrt{b(t)}\partial_x u_1(0)m_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\ &= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + [\epsilon(\partial_x u_1)u_2]_0^L - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon[\sqrt{b(t)}m_2]\partial_x u_1(0) - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\ &= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 + \epsilon\partial_x u_1(0)u_2(0) - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \\ &= \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 - \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \end{aligned}$$

**Lemme 2.12**

*Soit $b \in C^1([0,\tau])$, tel que $\dot{(b)} > 0$. On définit la famille, $a(t,\cdot,\cdot) : D(A(t)) \times D(A(t)) \to \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (y_1, y_2) \in D(A(t)) \times D(A(t))$$

$$a(t, y_1, y_2) = \epsilon\int_0^L \partial_x u_1\partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \tag{15}$$

*Alors, pour tout $t > 0$, la forme bilinéaire $a(t,\cdot,\cdot)$ est coercive sur $D(A(t))$.*

$\triangleright$ Soient $y = (u, m)$ dans $D(A(t)) \subset \mathscr{Y}$, calculons la quantité :

$$
\begin{aligned}
a(t, y, y) &= \int_0^L \epsilon(\partial_x u)^2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u)u + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m^2 \\
&= \int_0^L \epsilon(\partial_x u)^2 - \int_0^L b(t)\frac{1}{2}(\partial_x u^2) + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m^2 \\
&= \int_0^L \epsilon(\partial_x u)^2 - b(t)\frac{1}{2}[u^2]_0^L + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m^2 \\
&= \int_0^L \epsilon(\partial_x u)^2 + \sqrt{b(t)}\frac{1}{2}m^2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m^2
\end{aligned}
$$

On obtient donc pour $\dot{b} > 0$ qu íl existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

$$|a(t, y, y)| \geq C_0(\int_0^L (\partial_x u)^2 + \epsilon m^2)$$

Or, $u \in H^1(0, L)$ et par inégalité de Poincarré puisque $u$ s'annule sur le pord $x = L$ Alors il existe une constante $C_1$ telle que :

$$\int_0^L u(x)^2 \leq C_1(\int_0^L (\partial_x u)^2 + u(0)^2)$$

Et donc $a$ est bien coercive :

$$|a(t, y, y)| \geq C_2 \|y\|_{\mathscr{Y}}$$

$\square$

**Proposition 2.13**

*Soit $b \in C^1([0, \tau])$, tel que $\dot{(b)} > 0$. La famille d'opérateurs définie par :*

$$\langle A(t)y_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} = \epsilon \int_0^L \partial_x u_1 \partial_x u_2 - \int_0^L b(t)(\partial_x u_1)u_2 + \epsilon\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}m_1 m_2 \tag{16}$$

*définie sur*

$$D(A(t)) \left\{ y \mid y = (u, m) \in H^1([0, L]) \times \mathbb{R},\ u(0) = \sqrt{b(t)}m,\ u(L) = 0 \right\}$$

*est une famille de générateurs infinitésimal d'un semi-groupe $C_0$ de contraction dans $\mathscr{Y}$.*

# 3 Existence Riccati et estimateur de Kalman

## 3.1. $v=$ cste, $\epsilon \neq 0$

Approche variationnelle, on souhaite minimiser la fonctionnelle :

$$\min_{\xi} = J(\xi,t) = \frac{\alpha}{2}\|\xi\|_{\mathscr{Y}} + \frac{\gamma}{2}\int_0^t (\|z(s) - C(s)y_{|\xi}\|_{\mathscr{Z}})ds \tag{17}$$

On définit l'observateur de Kalman sur pour tout temps sur l'intervalle d'observation $[0,\tau]$ comme l'optimum de la fonctionnelle (17).

$$\forall t>0,\ t\in(0,\tau],\ \ \hat{y}(t) = \bar{y}_{|t}(t)$$

*On cherche l'équation vérifiée par $\hat{y}$ et $P$ et $\bar{q}_{|t}$ tel que $\hat{y}$ soit l'estimateur associé au modèle et aux mesures et qu'on ait la relation pour $0<s<t$, $\hat{y}(s) + P(s)\bar{q}_{|t} = \bar{y}_{|t}(s)$*

Soit $q$ l'adjoint au Lagrangien (qui vérifie la condition d'optimalité du point selle) :

$$\mathscr{L}(y,q) = J(\xi,t) + \int_0^t \langle \dot{y} - Ay, q\rangle_{\mathscr{Y}}$$

Alors au point optimal $q$, pour tout $\delta y$ de $\mathscr{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\langle \partial_y \mathscr{L}, \delta y\rangle_{\mathscr{Y}} &= 0\\
&= \int_0^t \langle z(s) - Cy(s), C\delta y(s)\rangle_{\mathscr{Z}} ds - \int_0^t \langle \dot{q}(s), \delta y(s)\rangle_{\mathscr{Y}} ds - \int_0^t \langle A\delta y(s), q(s)\rangle_{\mathscr{Y}} ds\\
&= \int_0^t \langle C^*(z(s) - Cy(s)) - \dot{q}(s) - A^*q(s), \delta y(s)\rangle_{\mathscr{Y}} ds
\end{aligned}$$

Soit l'équation adjointe associée au Lagrangien pour la fonctionnelle $J(\xi,t)$ :

$$\begin{cases} \dot{q}_{\xi,t} + A^* q_{\xi,t} = -C^*(z - Cy_\xi)\\ q_{\xi,t}(t) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

**Remarque 3.1.** Le changement de produit vectoriel, de norme, n'induit pas de différence dans l'équation vérifiée par l'adjoint au sens du multiplicateur de Lagrande. De même, l'équation de Riccati n'est pas modifiée.

<u>Dynamique</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}t} = A\hat{y}(t) + P(t)C^*(z(t) - C(t)\hat{y}(t))\\ y(0) = y_\diamond \end{cases} \tag{19}$$

<u>Riccati</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P(t)A^* + AP(t) - P(t)C^*CP(t)\\ P(0) = P_\diamond \end{cases} \tag{20}$$

On cherche une expression explicite pour l'adjoint de l'opérateur $A$ sur $\mathscr{Y}$ tel que :

$$\begin{cases} D(A) = \{y \mid y = (u,m) \in H^1([0,L]) \times \mathbb{R},\ u(0) = m,\ u(L) = 0\}\\[2ex] \forall y \in D(A^*),\ \begin{pmatrix} \dot{u}\\ \dot{m}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\partial_x u + \epsilon\partial_{xx}u\\ b\partial_x u(0)\end{pmatrix} \end{cases} \tag{21}$$

Donc pour tout $y_1$ et $y_2$ de $D(A)$ on calcule la quantité suivante :

$$
\begin{aligned}
\langle Ay_1, y_2\rangle_{\mathscr{Y}} &= \int_0^L b(\partial_x u_1)u_2 - \int_0^L \epsilon(\partial_x u_1)(\partial_x u_2) \\
&= [bu_1u_2]_0^L - \int_0^L bu_1(\partial_x u_2) - [\epsilon u_1(\partial_x u_2)]_0^L + \int_0^L \epsilon u_1(\partial_x x u_2) \\
&= -bm_1m_2 - \int_0^L bu_1(\partial_x u_2) + \epsilon m_1 \partial_x u_2(0) + \int_0^L \epsilon u_1(\partial_x x u_2) \\
&= \int_0^L u_1[-b\partial_x u_2 + \epsilon \partial_x x u_2] + \frac{\epsilon}{b} m_1[-\frac{b^2}{\epsilon} m_2 + b\partial_x u_2(0)] \\
&= \langle y_1, A^* y_2\rangle_{\mathscr{Y}}
\end{aligned}
$$

On en déduit l'adjoint $A^*$ sur $\mathscr{Y}$ associé à la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$ :

$$
\begin{cases}
D(A^*) = \big\{y \mid y = (u,m) \in H^1([0,L]) \times \mathbb{R},\ u(0) = m,\ u(L) = 0\big\} \\
\forall y \in D(A^*), \quad A^* \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\partial_x u + \epsilon \partial_x x u \\ -\dfrac{b^2}{\epsilon} m + b\partial_x u(0) \end{pmatrix}
\end{cases} \tag{22}
$$

On cherche une expression explicite pour l'adjoint $C^*$ de l'opérateur de mesure $C$.
Donc pour tout $y_1$ de $\mathscr{Y}$ et $z_2$ de $\mathscr{Z}$, on calcule la quantité suivante :

$$
\begin{aligned}
\langle Cy_1, z_2\rangle_{\mathscr{Z}} &= \int_0^L z_2 x^n u_1(x)dx \\
&= \int_0^L (x^n z_2)u_1(x)dx + \frac{\epsilon}{b} m_1 \times 0 \\
&= \langle y_1, (x^n z_2, 0)\rangle_{\mathscr{Y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
D(C^*) = \mathscr{Z} \\
\forall z \in D(C^*), \quad C^* z = \begin{pmatrix} x^n z \\ 0 \end{pmatrix}
\end{cases} \tag{23}
$$

#### 3.1.1 Opérateur à noyau

# 4 Discrétisation

## 5 Analyse numérique

# Références

[1] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences 44 - Springer Verlag.