

# Premier résultat sur la polymérisation

Cécile Della Valle

15 février 2019

## 1 Introduction

On souhaite étudier le problème d'observabilité suivant : sachant des mesures de moments de la solution de l'équation de Lifshitz-Slyozov, correspondant à la polymérisation et dépolymérisation de protéines, peut-on reconstituer la condition initiale ?

On s'intéresse dans une première partie à l'équation de Lifshitz-Slyozov. Sous l'hypothèse qu'une solution existe et qu'elle est unique, alors on obtient des propriétés sur la vitesse de réaction, définie comme la somme des vitesses de polymérisation et de dépolymérisation. Puisque, sous certaines hypothèses, la vitesse ne change pas de signe, il est intéressant d'étudier séparément les cas où elle est positive (polymérisation) et négative (dépolymérisation).

On se place ensuite dans le cas où la vitesse est positive. On suppose alors que cette vitesse est une fonction continue donnée. On en déduit la dynamique explicite de tous les moments par la mesure de tous les moments à un temps donné.

D'autre part, on étudie le cas où la vitesse est négative, elle est également une fonction continue donnée. On peut redémontrer dans ce cas les résultats d'A. Armiento [1].

## 2 Notation

- $y$  – fonction de la concentration des polymères en fonction de leur taille  $x$  ;
- $c$  – fonction de concentration du monomère ;
- $v(t)$  – vitesse totale de réaction (dépolymérisation et polymérisation) ;
- $\theta(t)$  – intégrale de la vitesse  $\theta(t) = \int_0^t v(s)ds$  ;
- $a$  – coefficient de polymérisation, par la suite on posera  $a = 1$  ;
- $b$  – coefficient de dépolymérisation ;
- $\mu_i$  – moment d'ordre  $i$  de la fonction  $y$ , soit  $\mu_i = \int_0^L x^i y(x, t) dx$ .

## 3 Objectif

On se propose d'étudier le système linéaire issu du modèle de Lifshitz-Slyosov où la vitesse de réaction totale, somme de la vitesse de polymérisation et dépolimérisation, ne dépend que du temps. Les coefficients de polymérisation  $a$  et de dépolymérisation  $b$  associés aux réactions sont constants et ne dépendent pas de la taille des polymères notée  $x$ .

Soit  $y$  la distribution en taille des polymères, par conservation de la masse, la vitesse se déduit de la mesure du moment d'ordre 1, noté  $\mu_1$ , des polymères.

Ainsi le modèle de Lifshitz-Slyosov s'écrit pour  $y(x, t)$  la concentration de polymères de taille  $x$  en temps  $t$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ y(x, 0) = y_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

où la vitesse  $v(t)$  est calculée par conservation de la masse totale  $M$ , des coefficients de polymérisation  $a$  et  $b$  :

$$v(t) = a(M - \int_0^\infty xy(x, t) dx) - b$$

et

$$\mu_1 = \int_0^\infty xy(x, t)dx$$

On note que le problème (1) est incomplet et qu'il peut être nécessaire d'imposer des conditions aux limites quand cette vitesse est positive ou négative, en fonction du domaine  $\Omega$  sur lequel on souhaite résoudre cette équation. Sans perdre de généralité, on pose que le coefficient de polymérisation est égal à 1, soit  $a = 1$ .

Soit  $L > 0$  et  $\tau > 0$ , l'objectif est de reconstruire  $y_0$  la condition initiale de l'équation (1) à partir de mesures de moments  $\Psi_n$  pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \Psi_n &: L^2([0, L]) \rightarrow L^2([0, \tau]) \\ y_0 &\mapsto t \mapsto \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \end{aligned} \quad (2)$$

Nous souhaitons étudier sous quelles conditions ce problème est dit observable.

## 4 Généralités

### 4.1 Définitions

Le modèle que nous allons étudier est le modèle de polymérisation-dépolymérisation suivant sur un compact  $\Omega = [0, L] \times [0, \tau]$ . Sans perdre de généralité, on pose que le coefficient de polymérisation est égal à 1, soit  $a = 1$ .

L'équation (1) complétée par des conditions aux limites liées au choix du domaine  $\Omega$  s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & x \in [0, L] \\ v(t) = M - \int_0^L xy(x, t)dx - b & t \in [0, \tau] \\ v(t)y(0, t)\mathbb{I}_{v(t)>0} = 0 \\ v(t)y(L, t)\mathbb{I}_{v(t)<0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Et on ajoute une hypothèse sur la condition initiale  $y_0$  :

Et on suppose que la condition initiale  $y_0$  est à support compact.

$$\exists l > 0, \text{ supp}(y_0) \subset [0, l] \quad (4)$$

#### Lemme 4.1

Dès lors que le support de  $y_0 \in C^0$  est un compact  $[0, l]$  de  $\mathbb{R}_+$ , alors quelque soit  $\tau > 0$ , il existe  $L > 0$  tel que le domaine  $[0, L] \times [0, \tau]$  vérifie la condition pour  $y_0$  :

$$\exists l > 0 \text{ t.q. } \forall t \leq \tau, \text{ supp}(y_0) \subset [0, l] \subset [0, L - \int_0^t v(s)ds]$$

**Remarque 4.2.** On note qu'ici nous avons défini  $y_0$  dans  $C^0$ , et la valeur de  $y_0$  n'est pas nécessairement nulle sur les bords de son domaine.

Cette hypothèse (4) et ce lemme 4.1 peuvent être étendu au cas où  $y_0$  appartient à  $L^2(0, l)$  et son support devient  $(0, l)$ .

▷ Il suffit de remarquer que  $\forall t : v(t) = M - b - \mu_1(t) < M - b$  puisque le moment d'ordre 1 est toujours positif. On pose donc  $L = l + \tau * (M - b)$ .  $\square$

Cette condition (4) signifie que le support de la fonction  $y(\cdot, t)$  est toujours inclus dans  $[0, L]$  et en particulier on a toujours l'égalité vérifiée :

$$\forall t \in [0, \tau], y(L, t) = 0$$

On peut donc remplacer la condition aux limites en  $x = L$  par  $y(L, t) = 0$ , et ce quelque soit le signe de la vitesse.

Pour la suite on définit deux types de solution du pb de Cauchy (3), une solution classique qui appartient à  $C^1([0, \tau] \times [0, L])$  et une solution faible qui appartient à  $C^1([0, \tau], L^2[0, L])$ .

### Définition 4.3

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in C^1([0, L])$ . On appelle  $y$  une solution classique du problème de Cauchy (3) sur un domaine  $\Omega$  ouvert de  $[0, L] \times [0, \tau]$  si c'est une fonction  $C^1$  de  $x$  et de  $t$  dans  $\Omega$  et si elle satisfait (3) point par point dans  $\Omega$ .

### Définition 4.4

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2([0, L])$ . On dit que  $y \in C^0([0, \tau], L^2[0, L])$  est solution du problème de Cauchy (3) si et seulement si pour tout  $t \in [0, \tau]$  et pour tout  $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$  telle que :

$$\begin{cases} -\int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) dx ds + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx - \int_0^L y_0(x) \phi(0, x) dx = 0 \\ v(t) = M - \int_0^L xy(x, t) dx - b \\ \phi(0, t) \mathbb{I}_{v(t) < 0} = 0 \\ \phi(L, t) \mathbb{I}_{v(t) > 0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

### Définition 4.5

Pour toute solution classique de l'équation (3), on définit la fonction  $\theta$  de la façon suivante :

$$\theta(t) = \int_0^t v(t') dt' \quad (6)$$

### Lemme 4.6

La fonction  $\theta$  associée à une solution classique de l'équation (3) est de classe  $C^2$ .

▷ Soit  $y$  une solution classique de l'équation (3). Alors en particulier  $y \in C^1(\Omega)$ . On pose  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t$  Donc la fonction  $t \rightarrow v(t)$  appartient à  $C^1(\Omega_t)$  et donc  $\theta$  appartient à  $C^2(\Omega_t)$   $\square$

## 4.2 Courbes caractéristiques

### Définition 4.7 (Courbes caractéristiques)

Soit une solution classique  $y$  de l'équation (3), on définit les courbes caractéristiques de  $y$  par  $X \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$  telles que :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s; x, t) = v(s) \\ X(t; x, t) = x \end{cases}$$

Alors  $y$  est constant le long de chacune de ces droites.

▷ Soit  $y$  solution classique de l'équation (3), alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s; x, t) = (M - b) - \int_0^L xy(x, t) ds \\ X(t; x, t) = x \end{cases} \quad (7)$$

admet une unique solution, de plus elle est de classe  $C^1$ . On dérive  $y$  le long de la courbe caractéristique définie par  $X$ . On pose  $Y(X(s)) = y(X(s), s)$  où l'on suppose que  $y$  est une solution classique de (3). Lorsque l'on dérive  $Y$  le long d'une courbe caractéristique on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} Y &= \frac{dX}{ds} \frac{\partial}{\partial x} y(X(s), s) + \frac{\partial}{\partial t} y(X(s), s) \\ &= v(s) \frac{\partial}{\partial x} y(X(s), s) + \frac{\partial}{\partial t} y(X(s), s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La solution classique  $y$  est donc constante le long d'une courbe et  $y(X(s), s) = y(X(0), 0)$ .  $\square$

**Remarque 4.8.** Pour que la méthode des caractéristiques définisse sans ambiguïté la valeur de la solution au point  $(x, t)$ , il faut qu'il n'y ait qu'une seule courbe qui passe par le point  $(x, t)$ . Pour  $t$  fixé,  $t \in [0, \tau]$ , la caractéristique associée passant par le point  $(\xi, 0)$  s'écrit :

$$\xi = x - \int_0^t v(s) ds$$

C'est le cas puisque  $v$  ne dépend pas de  $x$  et d'après Cauchy-Lipschitz il existe une unique trajectoire  $X$  solution de (7). On peut donc définir la fonction  $\theta$  par (6).

$$\forall \xi \in [0, l], \exists! (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \text{ t.q. } \xi = x - \theta(t)$$

.

## 5 Equations des moments et conséquences

### Lemme 5.1

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ ,  $l > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2([0, L])$ . Soit  $y$  solution classique de l'équation (3) et l'hypothèse (4) vérifiée.

On suppose que la solution  $(x, t) \rightarrow y(x, t)$  existe, qu'elle est unique. D'après la méthode des caractéristiques, cette solution peut s'écrire,  $\forall (x, y) \in [0, L] \times [0, \tau]$ ,

$$y(x, t) = y_0(x - \int_0^t v(s) ds)$$

alors  $\forall n \geq 0$ ,  $\forall t > 0$ , on a

$$\mu_n(t) = \int_0^L x^n y_0(x - \int_0^t v(s) ds) dx$$

▷ (lemme 5.1) Sous l'hypothèse d'existence et d'unicité du problème de Cauchy (3), la solution de l'équation (3) est constante le long d'une courbe caractéristique et s'écrit donc à partir de la fonction (6) :

$$y(x, t) = y_0(x - \theta(t))$$

□

On définit l'application de  $\Psi_n$  pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \Psi_n &: L^2([0, L]) \rightarrow L^2([0, \tau]) \\ y_0 &\mapsto t \mapsto \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \end{aligned} \quad (8)$$

Alors, toujours sous l'hypothèse (4), on peut également effectuée le changement de variable  $x = x' + \theta(t)$  et

$$\Psi_n(y_0)(t) = \int_0^L x^n y_0(x) dx = \int_{-\theta(t)}^{L-\theta(t)} (x' + \theta(t))^n y_0(x') dx'$$

$\Psi_n(y_0)$  est une fonction  $C^1$  comme composition de fonctions  $C^1$ . On peut donc calculer sa dérivée par rapport au temps  $t$  sur  $[0, \tau]$ . On montre par intégration par partie pour  $n > 0$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_n(y_0)}{dt} &= \frac{d\mu_n}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_0^L x^n \frac{\partial}{\partial t} y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_0^L x^n (-v(t)) y_0'(x - \theta(t)) dx \\
&= -v(t) [x^n y_0(x - \theta(t))]_0^L + v(t) n \int_0^L x^{n-1} y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= nv(t) \mu_{n-1}
\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse (4), la fonction  $y_0$  est nulle sur  $[L - \theta(t); L]$  et ce  $\forall t > 0$ . Donc :

$$\frac{d\Psi_n(y_0)}{dt} = v(t) n \mu_{n-1}$$

De plus pour  $n = 0$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_0(y_0)}{dt} &= \frac{d\mu_0}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^L y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} y_0(x - \theta(t)) dx \\
&= \int_0^L -v(t) y_0'(x - \theta(t)) dx \\
&= -v(t) [y_0(x - \theta(t))]_0^L \\
&= +v(t) y_0(\max(0, -\theta(t)))
\end{aligned}$$

Donc, pour une solution classique de (3), on a la relation :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = v(t) n \mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = v(t) y_0(\max(0, -\theta(t))) \end{cases} \quad (9)$$

### Proposition 5.2

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ ,  $l > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2([0, L])$ . Soit  $y$  solution classique de l'équation (3) et l'hypothèse (4) vérifiée.

Si  $M - b < 0$ ,

— alors  $\forall t \in [0, \tau]$ , on a  $v(t) < 0$ . De plus, si  $\tau > \frac{L}{b - M}$ , alors il existe  $t^* \in [0, \tau]$  tel que  $\mu_0(t^*) = 0$  et  $\mu_1(t^*) = 0$ .

Sinon,  $0 < M - b$ ,

— soit  $v(0) < 0$ , alors  $\forall t > 0$ , on a  $v(t) < 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ .

— soit  $v(0) > 0$  alors  $\forall t \in [0, \tau]$  on a  $v(t) > 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ .

▷ Soit l'unique solution classique  $y$  du problème de Cauchy (3), vérifiant l'hypothèse (4), alors la vitesse  $v$  de réaction s'écrit pour tout temps  $t \in [0, \tau]$  par définition :

$$v(t) = M - \int_0^L xy(x, t) dx - b$$

Si  $M - b < 0$  :

Sachant la définition de la vitesse  $v$ , on a l'implication :

$$v(t) = M - b - \mu_1(t) < 0 \iff M - b < \int_0^L xy(x, t)dx$$

Comme la fonction  $y_0$  est positive, la solution  $y$  l'est également. Cette hypothèse est donc toujours vérifiée

De plus,  $\forall t > 0$ ,  $v(t) > M - b$ , donc  $|\theta(t)| > t^* \times |M - b|$ . Donc pour  $t^* = \frac{L}{M-b} > 0$ , par hypothèse  $t^* \in [0, \tau]$ , et on a  $\mu_1(t^*) = \int_{-\theta(t^*)}^L xy_0(x)dx = 0$  et donc  $\mu_0(t^*) = 0$ .

Sinon, pour  $0 < M - b$  :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d\mu_1}{dt} = -v(t)\mu_0(t)$$

**v(0) < 0 :**

Sachant qu'à  $t = 0$  la vitesse  $v(0) < 0$ ,  $\mu_0 > 0$ .

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \int_0^L xy(x, t)dx \\ &= \int_0^L xy_0(x - \theta(t))dx \\ &= \int_{-\theta(t)}^L (x + \theta(t))y_0(x)dx \end{aligned}$$

La vitesse  $v$  est décroissante, négative, et ne change pas de signe tant que  $\mu_1 > M - b > 0$ . Donc

$$\mu_1 > M - b > 0 \implies \mu_1 \searrow$$

Donc  $\mu_1$  est une fonction décroissante strictement et minorée.

Supposons qu'il existe  $t^* > 0$  tel que  $\mu_1(t^*) = M - b$ , alors  $v(t^*) = 0$ ,  $\frac{dv}{dt}(t^*) = 0$ .

Si  $\mu_0(t^*) > 0$  alors  $\forall t < t^*$ ,  $0 < \mu_0(t^*) < \mu_0(t)$  et on note  $\mu_0(t^*) = \alpha$ , et il vient :

$$\frac{d|v|}{dt} = \mu_0(t)|v(t)| \geq \alpha|v(t)|$$

Donc d'après le lemme de Grönwall :

$$|v(t)| \geq |v(0)|e^{-\alpha t}$$

Ceci contredit le fait que  $v$  s'annule en  $t = t^*$ . Donc nécessairement  $\mu_0(t^*) = 0$ , or,  $x \rightarrow xy(x, t)$  et  $x \rightarrow y(x, t)$  sont des fonctions positives de même support, donc  $\mu_1(t^*) = 0 \implies \mu_0(t^*) = 0$ .

En effet, le système est entièrement dépolymérisé et le système vérifie :

$\forall t > t^*$  :

$$\text{— } \theta(t) = \theta(t^*) \geq L$$

$$\text{— } y(x, t) = y(x, t^*) = 0$$

$$\text{Donc } v(t^*) = M - b - \mu_1(t^*) = M - b > 0.$$

C'est une contradiction.

**v(0) > 0**

Alors  $\mu_0 > 0$  est une constante et

$$v(t) = (M - \mu_1(t)) - b = v(0)e^{-\mu_0 t}$$

On voit donc que la vitesse ne change jamais de signe sur  $[0, \tau]$ . Cette formule explicite garantie de plus que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ . □

**Remarque 5.3.** Pour l'instant, nous avons étudié le système complet (3). Ce problème de Cauchy introduisait une équation non linéaire en  $y$ , la vitesse était explicitement liée à la solution :

$$v(t) = M - b - \int_0^L xy(x, t)dx = f(y)(t)$$

Pour la suite, nous allons supposer que  $v$  est en fait une fonction connue de  $C^0$ . Puis nous allons faire des hypothèses sur la vitesse  $v$  afin de démontrer l'existence et l'unicité, dans le cas de la polymérisation, puis de la dépolymérisation.

## 6 Polymérisation

Pour la suite, on considère que la vitesse  $v$  est une fonction continue positive  $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$ . On s'intéresse alors à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) \\ v(t)y(0, t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

### 6.1 Existence et unicité

Afin de démontrer l'existence et l'unicité, on admet la définition de solution donnée par la définition 4.4, cette fois-ci avec une vitesse de réaction  $v$  continue positive, donc connue et mesurée qui ne dépend plus de  $y$ . Ce problème correspond physiquement à l'étude de la polymérisation.

#### Définition 6.1

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ ,  $l > 0$  et  $L > 0$ .  
 Soit  $y_0 \in L^2([0, L])$  tel que  $\text{supp}(y_0) \subset [0, l]$ .  
 Soit  $L = l + \tau * (M - b)$ , et  $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$ .  
 Supposons que  $\forall t \in [0, \tau]$ ,  $v(t) > 0$ .  
 On dit que  $y \in C^0([0, \tau], L^2[0, L])$  est solution du problème de Cauchy (10) si et seulement si pour tout  $t \in [0, \tau]$  et pour tout  $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$  telle que :

$$\begin{cases} - \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx - \int_0^L y_0(x) \phi(x, 0) dx = 0 \\ \phi(L, t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

**Remarque 6.2.** Les hypothèses  $l > 0$ ,  $y_0 \in L^2([0, L])$  tel que  $\text{supp}(y_0) \subset [0, l]$  et  $L = l + \tau * (M - b)$  n'interviennent pas dans la démonstration. Elles ne sont reprises que par cohérence avec l'hypothèse (4).

**Remarque 6.3.** La vitesse mesurée n'est en fait pas une fonction continue quelconque. En effet elle vérifie au moins :

$$\|v\|_{L^\infty} < M - b$$

Cependant cette hypothèse n'est pas nécessaire pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

#### Théorème 6.4

Soit  $\tau > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2(0, L)$  et  $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$ . Alors le problème de Cauchy (10) admet une unique solution  $y \in C^0([0, \tau], L^2(0, L))$  au sens de la définition 6.1.

▷ La démonstration copie celle de Jean-Michel Coron dans son livre [2] pour le théorème 2.4 page 27, la différence est que la vitesse n'est pas constante  $v = 1$ . Cependant on peut s'y ramener facilement par un changement de variable. Cette démonstration est également la démonstration utilisée dans le rapport de Lucas Brivadis [3].

On commence par démontrer l'unicité : soit  $y_1$  et  $y_2$  solution du problème de Cauchy au sens de la définition 6.1. Alors on pose  $y = y_1 - y_2$  et pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $y \in C^0([0, T], L^2(0, L))$ . Et pour toute fonction  $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$  telle que  $\phi(L, \cdot) = 0$  :

$$- \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx = 0 \quad (12)$$

Pour  $t^*$  fixé, on définit une suite de fonction  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $C^1(\mathbb{R}^+)$ , espace fonctionnel dense dans  $L^2(0, L)$ , telle que :

$$\begin{cases} f_n = 0 \text{ sur } [L, \infty), & \forall n \\ f_n|_{(0, L)} \rightarrow y(\cdot, t) \text{ dans } L^2(0, L) & \text{pour } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $f_n|_{(0,L)}$  converge fortement dans  $L^2$  vers  $y(\cdot, t)$  (on remarque qu'en fait une convergence faible serait suffisante).

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose alors  $\phi_n \in C^1([0, t] \times [0, L])$  :

$$\phi_n(x, t) = f_n(x + \int_t^{t^*} v(s) ds), \quad \forall (x, t) \in [0, t^*] \times [0, L].$$

Par hypothèse,  $v(t) \geq 0$  sur  $[0, t^*]$  alors  $\phi_n$  vérifie la condition  $\phi(\cdot, L) = 0$ .

De plus on constate que :

$$\partial_t \phi_n = -v(t) \partial_x \phi_n$$

Alors, en posant  $\phi = \phi_n$  dans (12) il vient :

$$\int_0^L y(x, t^*) \phi_n(x, t^*) dx = 0$$

or  $\phi_n(x, t^*) = f_n(x)$  et pour  $n \rightarrow \infty$  :

$$\int_0^L |y(x, t^*)|^2 dx = 0$$

On a donc montré que pour tout  $t^*$  de  $[0, \tau]$  on a  $y(\cdot, t^*) = 0$ .

Pour démontrer l'existence, on remplace dans l'expression (10) la solution issue de la méthode des caractéristiques qui dépend de la fonction  $\theta$  définie par (6) :

$$y(x, t) = y_0(x - \int_0^t v(s) ds) = y_0(x - \theta(t)) \quad (13)$$

□

## 6.2 Propriétés des moments

Dans cette partie, on revient sur l'hypothèse de  $v$  une fonction continue connue. En effet, le résultat suivant reste a fortiori valable pour  $v$  connu puisqu'il repose essentiellement sur l'écriture de la solution du problème de Cauchy (10) sous la forme  $y(x, t) = y_0(x - \theta(t))$ .

### Proposition 6.5

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ ,  $l > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2([0, L])$ .

L'hypothèse (4) est vérifiée pour  $y_0$  et  $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$

Soit  $y$  solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) & x \in [0, L] \\ v(t) = M - \int_0^L xy(x, t) dx - b & t \in [0, \tau] \\ y(0, t) = 0 & t \in [0, \tau] \end{cases} \quad (14)$$

Alors le moment d'ordre 0 noté  $\mu_0$  est une constante :

$$\Psi_0 y_0(t) = \mu_0 = \int_0^L y(x, t) dx$$

et de plus les moments d'ordre  $n$  d'une solution de (10) défini par :

$$\Psi_n y_0(t) = \int_0^L x^n y(x, t) dx$$

peuvent s'écrire sous la forme d'une fonction qui ne dépend que des moments d'ordre inférieur en  $t = 0$  :

$$\Psi_n y_0 = f_n(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n-1,0}, t)$$

avec  $f_n$  une fonction donc la formule analytique est connue.



**Remarque 6.6.** On aurait pu imposer une condition de type :

$$\exists t^* \ t.q. \ \forall t \geq t^* \ v(t) > \mu \geq 0$$

Et par la suite poser  $t^* = 0$ . La proposition 6.5 reste vraie pour un  $t^*$  quelconque par le changement de variable suivant  $T : (x, t) \rightarrow (x, t^*)$  sachant que  $T$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

Ainsi la proposition 6.5 nous indique qu'en cas de polymérisation, la connaissance du moment à un temps  $t^*$  donné donne accès à toute l'information.

Si la solution classique  $y$  existe, alors elle est constante le long d'une caractéristique et elle s'écrit sous la forme  $y(x, t) = y_0(x - \theta(t))$  avec  $y_0$  vérifiant l'hypothèse (4), alors ses moments vérifient l'équation suivante pour une vitesse de polymérisation positive :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = v(t)n\mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Nous allons donc pouvoir démontrer la proposition 6.5.

▷ (proposition 6.5)

On se propose de résoudre pour  $t > 0$  :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = n(M - \mu_1 - b)\mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Nous allons démontrer la proposition par récurrence.

$n = 1$  :

Le moment d'ordre 0 est une constante puisque

$$\frac{d\mu_0}{dt} = 0$$

Alors pour  $n = 1$  :

$$\frac{d\mu_1}{dt} = (M - \mu_1 - b)\mu_0$$

Réolvons (16) pour  $n = 1$  par la variations de la constante. On cherche une solution de la forme  $\mu_1(t) = C(t)e^{-\mu_0 t}$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= C'(t)e^{-\mu_0 t} - \mu_0 C(t)e^{-\mu_0 t} \\ &= (M - b)\mu_0 - \mu_0 C(t)e^{-\mu_0 t} \end{aligned}$$

Donc  $C'(t)e^{-\mu_0 t} = (M - b)\mu_0$  et

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^t (M - b)\mu_0 e^{\mu_0 s} ds + C_0 \\ &= (M - b)[e^{\mu_0 s}]_0^t + C_0 \\ &= (M - b)(e^{\mu_0 t} - 1) + C_0 \end{aligned}$$

Donc

$$\mu_1(t) = (M - b)(1 - e^{-\mu_0 t}) + C_0 e^{-\mu_0 t}$$

Soit  $\mu_1(0) = \mu_{1,0} = \int_0^L xy_0(x)dx$  la condition initiale.

Alors,

$$\begin{cases} \mu_1(t) = (M - b) - (M - \mu_{1,0} - b)e^{-\mu_0 t} \\ v(t) = (M - \mu_1(t)) - b = v(0)e^{-\mu_0 t} \\ \theta(t) = \int_0^t v(s)ds = \frac{v(0)}{\mu_0}(1 - e^{-\mu_0 t}) \end{cases} \quad (17)$$

On a donc bien démontré que le moment  $\mu_1$  pouvait s'écrire sous la forme :

$$\mu_1(t) = f_1(\mu_0, \mu_{0,1}, t)$$

$n \Rightarrow n+1$  :

On suppose que tous les  $\mu_p$  sont connus pour tout  $p \leq n$ . Il existe donc une  $f_p$  telle que  $\mu_p = f_p(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}, t)$

Pour  $n+1$ , on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{n+1}}{dt} &= (n+1)(M - \mu_1(t) - b)\mu_n(t) \\ &= (n+1)(M - f_1(\mu_0, \mu_{1,0}, t) - b)f_n(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n,0}, t) \\ &= F_{n+1}(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n,0}, t) \end{aligned}$$

On pose donc  $f_{n+1} = \int_0^t F_{n+1}(\mu_0, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{n,0}, s) ds + \mu_{n+1,0}$ .

□

**Remarque 6.7.** Contrairement au problème de dépolymérisation seule où la vitesse de dépolymérisation  $v(t)$  est une constante égale au coefficient de dépolymérisation  $b$ , on ne peut pas exprimer la dérivée  $(n+1)$ -ième de  $\mu_n$  en fonction de  $y_0$ . En effet, par dérivation successive on obtient seulement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mu_{n+1}}{dt^2} &= (n+1)(M - \mu_1 - b) \frac{d\mu_n}{dt} - (n+1)\mu_n \frac{d\mu_1}{dt} \\ &= (n+1)n(M - \mu_1 - b)^2\mu_{n-1} - (n+1)(M - \mu_1 - b)\mu_n\mu_0 \end{aligned}$$

Donc, si la vitesse est positive,  $\mu_0$  est une constante, on remarque alors que  $t \rightarrow \mu_1(t)$  est une fonction croissante majorée par  $M - b$ . Cette inégalité entraîne que la vitesse est toujours positive et correspond physiquement à la polymérisation. On notera que la masse  $M$  doit être suffisamment grande et supérieure au coefficient de dépolymérisation normalisé.

D'après la proposition 6.5, dès lors que l'on connaît tous les moments au temps  $t = 0$ , et de plus que  $\mu_{1,0} < M - b$  alors on peut déterminer tous les moments d'ordre supérieur à tout temps.

#### Proposition 6.8

Soit  $y$  une solution classique du problème de Cauchy (3) sous l'hypothèse (4), alors si  $v(0) > 0$  alors  $\forall t \in [0, \tau]$ , on a  $v(t) > 0$ . De plus, s'il existe un temps  $t^* < \tau$  tel que  $v(t^*) > 0$  alors de même  $\forall t \in [0, \tau]$ , on a  $v(t) > 0$ .

▷ Si  $v(0) > 0$ , alors  $\mu_0 > 0$  est une constante et

$$v(t) = (M - \mu_1(t)) - b = v(0)e^{-\mu_0 t}$$

On voit donc que la vitesse ne change jamais de signe sur  $[0, \tau]$ .

□

### 6.3 Résolution du problème inverse (pistes)

D'après la proposition 6.5, le problème inverse, posé en introduction, qui consiste à estimer  $y_0$  la condition initiale du problème de Cauchy (10) connaissant la fonction  $t \rightarrow v(t)$  vitesse de réaction et les moments  $\mu_n = \Psi_n y_0$  à un instant donné, est équivalent au problème de Hausdorff rappelé ci-dessous.

#### Définition 6.9 (Problème de Hausdorff)

Soit  $I = [0, 1]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $c_0 = 1$ . Le problème de Hausdorff consiste à démontrer l'existence et l'unicité d'une mesure borélienne positive  $\mu$  positive portée par  $I$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \int_I x^n d\mu(x)$$

Par analogie avec la démonstration du problème de Hausdorff pour lequel deux variables aléatoires bornées qui ont les mêmes moments sont de mêmes lois.

**Proposition 6.10**

Deux fonctions continues de  $I = [0, L]$  qui pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ont les mêmes moments sont égales.

▷ Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux fonctions de  $C^0([0, L])$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^L x^n y_1(x) dx = \int_0^L x^n y_2(x) dx$$

On pose  $y = y_1 - y_2$  donc tous les moments sont nuls. Montrons que  $y$  est la fonction nulle de  $I$ . D'après le théorème de Weierstrass, puisque  $y$  est continu, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  et une fonction polynomiale  $P_N$  de degré  $N$  tel que pour tout  $x \in I$  :

$$|y(x) - P_N(x)| < \epsilon$$

Donc,

$$\int_0^L |y(x) - P_N(x)|^2 dx < L\epsilon^2$$

Or,

$$\int_0^L |y(x) - P_N(x)|^2 dx = \int_0^L |y(x)|^2 dx + \int_0^L |P_N(x)|^2 dx + \int_0^L y(x)P_N(x) dx$$

Puisque tous les moments d'ordre  $n$  inférieur ou égal à  $N$  sont nuls, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \alpha = \sqrt{\epsilon/L}, \exists N \text{ t.q. } \int_0^L |y(x)|^2 dx + \int_0^L |P_N(x)|^2 dx < \epsilon$$

Donc  $y = 0$  sur  $I = [0, L]$  et  $y_1 = y_2$ . □

**Proposition 6.11**

Soit  $\tau > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in C^0([0, L])$  et  $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^+)$ . Supposons l'hypothèse (4) vérifiée. Alors il existe au moins deux conditions initiales non identiques telles que leurs moments d'ordre 0 et d'ordre 1 sont égaux.

**Remarque 6.12.** On pourrait élargir le résultat pour un nombre fini de moments. En effet, dans la démonstration de la proposition 6.10, on voit qu'il suffit de choisir un polynôme dans un espace orthogonal à  $\mathbb{P}_N$  pour que tous ses moments d'ordres inférieur à  $N$  soit nul. Un tel polynôme existe bien, on peut par exemple choisir un polynôme de Legendre. La dynamique donnée par l'équation (10) sous l'hypothèse (4) assure alors que ces moments resteront égaux au cours du temps.

▷ Démontrons la proposition en trouvant un contre exemple. On suppose que  $l = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $M = 2$  et  $b = 1$ .

Soit  $f_0$  une fonction continue de l'intervalle  $[0, 2]$  telle que :

- $y_0$  est nulle sur  $[1, 2]$  ;
- pour tout  $x$  on a  $y_0(x) > 6x(1 - x)$  ;
- la fonction est continue en  $x = 1$  soit  $y_0(1) = 0$

Il existe une infinité de solution qui vérifie ces deux points. On peut par exemple choisir :

$$f_0(x) = \begin{cases} 4(1-x)(1+x) & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$f_0$  est bien continue, elle vérifie l'hypothèse (4).

On considère les polynômes de Legendre de degré 2 et 3 sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\begin{cases} P_2(2x+1) = 6x^2 - 6x + 1 \\ P_3(2x+1) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \end{cases}$$

Ces polynomes sont orthogonaux aux polynômes de degré inférieur et, par construction :

$$\int_0^1 P_2(2x+1) dx = \int_0^1 x P_2(2x+1) dx = 0$$

$$\int_0^1 P_3(2x+1)dx = \int_0^1 xP_3(2x+1)dx = 0$$

Posons maintenant :

$$g_0(x) = \begin{cases} f_0(x) - P_2(2x+1) + P_3(2x+1) & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

On vérifie que  $g_0$  appartient à  $C^0([0, L])$  à valeur dans  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $f$  et  $g$  les solutions de l'équation (10) associée respectivement aux conditions initiales  $f_0$  et  $g_0$ . On a alors :

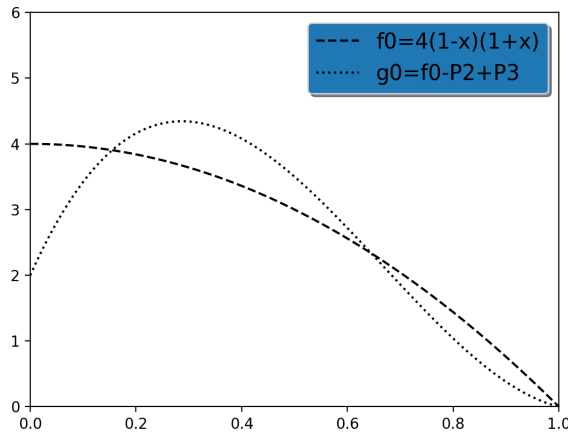
$$\begin{aligned} \Psi_0 g_0(0) &= \int_0^2 g_0(x)dx \\ &= \int_0^1 f_0(x) - P_2(2x+1) + P_3(2x+1)dx \\ &= \int_0^1 f_0(x) \\ &= \Psi_0 f_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 g_0(0) &= \int_0^2 xg_0(x)dx \\ &= \int_0^1 xf_0(x) - xP_2(2x+1) + xP_3(2x+1)dx \\ &= \int_0^1 xf_0(x) \\ &= \Psi_1 f_0(0) \end{aligned}$$

D'après la proposition 6.5 on a donc l'égalité des moments d'ordre 0 et 1 pour tout  $t$  :

$$\forall t \in [0, 1], \Psi_0 f_0(t) = \Psi_0 g_0(t), \Psi_1 f_0(t) = \Psi_1 g_0(t)$$

On vient de montrer qu'il existe au moins deux conditions initiales non identiques  $f_0$  et  $g_0$  telles que leurs moments d'ordre 0 et d'ordre 1 sont égaux.



□

A écrire à partir du cours de Driss Boutat envoyé par Philippe le 18 janvier.

## 7 Dépolymérisation - $v(t) < 0$

Pour la suite, on considère que la vitesse  $v$  est une fonction continue négative de  $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^-)$ . On s'intéresse alors à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) \\ v(t)y(L, t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

## 7.1 Existence et unicité

Nous allons reprendre la démonstration développée pour  $v > 0$ . La principale différence tient à la condition aux limites. En effet, la condition n'est imposée qu'en  $x = L$ .

### Définition 7.1

Soit  $\tau > 0$ ,  $M$  et  $b$  deux constantes de  $\mathbb{R}^+$ , et  $L > 0$ .

Soit  $y_0 \in L^2([0, L])$ .

Soit  $v \in C^0([0, \tau])$ .

Supposons que  $\forall t \in [0, \tau]$ ,  $v(t) < 0$ .

On dit que  $y \in C^0([0, \tau], L^2[0, L])$  est solution du problème de Cauchy (18) si et seulement si pour tout  $t \in [0, \tau]$  et pour tout  $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$  telle que :

$$\begin{cases} - \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx - \int_0^L y_0(x) \phi(x, 0) dx = 0 \\ \phi(0, t) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

### Théorème 7.2

Soit  $\tau > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2(0, L)$  et  $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^-)$ . Alors le problème de Cauchy (18) admet une unique solution  $y \in C^0([0, \tau], L^2(0, L))$  au sens de la définition 7.1.

▷ Comme pour la polymérisation, on commence par démontrer l'unicité : soit  $y_1$  et  $y_2$  solution du problème de Cauchy au sens de la définition 7.1. Alors on pose  $y = y_1 - y_2$  et pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $y \in C^0([0, T], L^2(0, L))$ . Et pour toute fonction  $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$  telle que  $\phi(0, \cdot) = 0$  :

$$- \int_0^t \int_0^L (\partial_t \phi + v(t) \partial_x \phi) y(x, t) dx dt + \int_0^L y(x, t) \phi(x, t) dx = 0 \quad (20)$$

Pour  $t^*$  fixé, on définit une suite de fonction  $(f_n)_{n \in (N)}$  de  $C^1(\mathbb{R})$ , espace fonctionnel dense dans  $L^2(0, L)$ , telle que :

$$\begin{cases} f_n = 0 \text{ sur } (-\infty; 0], & \forall n \\ f_n|_{(0, L)} \rightarrow y(\cdot, t) \in L^2(0, L) & \text{pour } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Pour  $n \in (N)$  on pose alors  $\phi_n \in C^1([0, t] \times [0, L])$  :

$$\phi_n(x, t) = f_n(x + \int_t^{t^*} v(s) ds), \quad \forall (x, t) \in [0, t^*] \times [0, L].$$

Par hypothèse,  $v(t) \leq 0$  sur  $[0, t^*]$  alors  $\phi_n$  vérifie la condition  $\phi(\cdot, 0) = 0$ . De plus on constate que :

$$\partial_t \phi_n = -v(t) \partial_x \phi_n$$

Alors, en posant  $\phi = \phi_n$  dans (20) il vient :

$$\int_0^L y(x, t^*) \phi_n(x, t^*) dx = 0$$

or  $\phi_n(x, t^*) = f_n(x)$  et pour  $n \rightarrow \infty$  :

$$\int_0^L y(x, t^*)^2 dx = 0$$

On a donc montré que pour tout  $t^*$  de  $[0, \tau]$  on a  $y(\cdot, t^*) = 0$ .

□

## 7.2 Problème inverse

On considère l'équation (3) sous la condition (4), alors d'après la propriété 15, la dépolymérisation correspond au cas où  $b > M$  (ou  $\tau < t^*$ ).

Dans ce cas, l'équation des moments (9) d'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_n}{dt} = v(t)n\mu_{n-1} & n > 0 \\ \frac{d\mu_0}{dt} = v(t)y_0(-\theta(t)) \end{cases} \quad (21)$$

### Proposition 7.3

Soit  $\tau > 0$ ,  $L > 0$ ,  $y_0 \in L^2(0, L)$  et  $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R})$ .

Soit  $y$  une solution classique de (18) sur  $[0, L] \times [0, \tau]$ .

Alors si la vitesse  $v$  est strictement négative, la condition initiale peut s'écrire de façon explicite en fonction de l'opérateur de moment  $\Psi_n$  :

$$y_0(x) = \frac{1}{n!v(-\theta^{-1}(x))^{n+1}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\Psi_n(-\theta^{-1}(x))) \quad (22)$$

▷ L'équation des moments (9) est toujours valable, et  $\max(0, \theta(t)) = \theta(t)$ . On en déduit donc que pour  $n > 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_n y_0}{dt} &= \frac{d\mu_n}{dt} \\ &= v(t)n\mu_{n-1}(t) \\ &= v(t)^n n! \mu_0(t) \\ &= v(t)^{n+1} n! y_0(-\theta(t)) \end{aligned}$$

□

## 7.3 Suite régularisante

to be continued.

## 7.4 Observabilité

On suppose que la solution  $y$  de l'équation (18). Alors  $y$  est à support compact inclus dans  $[0, L] \times [0, \tau]$ .

On rappelle la définition des opérateurs de mesures  $\Psi_n$  pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \Psi_n : L^2([0, L]) &\rightarrow L^2([0, \tau]) \\ y_0 &\mapsto t \rightarrow \int_0^L x^n y_0(x - \theta(t)) dx \end{aligned} \quad (23)$$

On note les espaces vectoriels normés,  $\mathcal{Y} = L^2(0, L)$ ,  $\mathcal{Z} = L^2(0, \tau)$ , alors  $\Psi_n$  appartient à  $L^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ .

### Définition 7.4

Le système (18) est dit observable pour la mesure  $\Psi_n$  au temps  $\tau$  s'il existe une constante  $k_n$  telle que :

$$\forall y_0 \in \mathcal{Y}, \quad \|\Psi_n(y_0)\|_{\mathcal{Z}}^2 \geq k_n \|y_0\|_{\mathcal{Y}}^2 \quad (24)$$

### Proposition 7.5

Le système (18) n'est pas observable pour la mesure  $\Psi_n$  au temps  $\tau$ .

▷ On s'appuie sur la preuve de [3]

Pour  $y$  solution de (18), cette inégalité n'est pas toujours vérifiée et le système n'est pas exactement observable.

Pour la démonstration, on peut exhiber un contre exemple sous la forme d'une suite  $(y_0^m)_{m \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\begin{cases} \|y_0^m\|_{L^2}^2 \not\rightarrow 0 \\ \|\Psi_n(y_0^m)\|_{L^2}^2 \rightarrow 0 \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\Psi_n(y_0^m)\|_{L^2}^2 &= \int_0^\tau \left| \int_0^l x^n y^m(x, t) dx \right|^2 dt \\ &\leq l^{2n} \int_0^\tau \left( \int_0^l y^m(x, t) dx \right)^2 dt \\ &\leq l^{2n} \int_0^\tau \left( \int_{bt}^l y_0^m(\xi) d\xi \right)^2 dt \\ &\leq l^{2n} \int_0^\tau \left( \int_0^l y_0^m(\xi) d\xi \right)^2 dt \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une fonction  $y_0$  telle que :

$$\begin{cases} \int_0^l (y_0^m(x))^2 dx \not\rightarrow 0 \\ \int_0^l y_0^m(\xi) d\xi \rightarrow 0 \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty$$

C'est le cas par exemple de la fonction :

$$\begin{cases} 2n^3 & 0 < x < \frac{1}{2n^2} \\ 2n - 2n^3 x & \frac{1}{2n^2} < x < \frac{1}{n^2} \\ 0 & \frac{1}{n^2} < x < l \end{cases}$$

□

Cependant, si l'observabilité n'est pas exacte dans  $L^2$ , elle l'est en revanche pour l'espace de Sobolev  $H^{n+1}$ .

En effet on considère maintenant lque  $\Psi_n$  appartient à  $H^{n+1}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$  avec  $\mathcal{X} = H^{n+1}(0, \tau)$ . On munit  $\mathcal{X}$  de la semi-norme pour tout  $n > 0$  :

$$\|f\|_{H^{n+1}} = \int_0^\tau \left| \frac{d^{n+1}f}{dt^{n+1}} \right|^2 dt \quad (25)$$

### Proposition 7.6

Le système (18) est observable pour la mesure  $\Psi_n$  avec  $\mathcal{X} = H^{n+1}(0, \tau)$  munie de la semi-norme (25) au temps  $\tau$  si  $-\theta(\tau) > L$ .

▷ L'équation (22) est vérifiée :

$$y_0(x) = \frac{1}{n!v(-\theta^{-1}(x))^{n+1}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (\Psi_n y_0(-\theta^{-1}(x)))$$

On doit à présent distinguer deux cas :

$$0 < b - M$$

On pose alors  $1/k_n = n!|M - b|^{n+1}$ .

Comme  $x \rightarrow \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (\Psi_n y_0(-\theta^{-1}(x)))$  est défini sur  $[0, L]$ , on peut intégrer et on obtient alors :

$$\int_0^L y_0(x) dx \leq 1/k_n \int_0^L \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (\Psi_n y_0(-\theta^{-1}(x))) dx$$

Pour  $-\theta(\tau) > L$  on peut effectuer un changement de variable et retrouver :

$$\int_0^L y_0(x)dx \leq 1/k_n \int_0^\tau \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\Psi_n y_0(t))dt$$

Soit l'inégalité d'observabilité :

$$\|\Psi_n(y_0)\|_{\mathcal{Y}}^2 \geq k_n \|y_0\|_{\mathcal{Y}}^2$$

$$0 < M - b$$

On rappelle les résultats de la propriété 5.2 :

$\forall t > 0$ , on a  $v(t) < 0$  et

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1(t) = M - b \end{cases}$$

S'il existe  $t^*$  tel que  $-\theta(t^*) > L$  alors  $\mu_1(t^*) = 0$  ce qui est une contradiction avec la limite établie précédemment.

On note alors  $l_1 = \int_0^{+\infty} v(t)dt < L$ .

Et on obtient :

$$\int_0^{l_1} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\Psi_n y_0(-\theta^{-1}(x)))dx < \int_0^L y_0(x)dx$$

On obtient donc l'inégalité d'observabilité uniquement sur le segment  $[0, l_1]$ .

□

## 8 Analyse numérique pour la dépolymérisation

Pour tous les développements qui suivent, on considère que  $b > M$ . Dans ce cas le système dépolymérise et  $v(t) < 0$  pour tout  $t > 0$ .

On rappelle le système (18) auquel on s'intéresse :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + v(t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 & (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau] \\ y(x, 0) = y_0(x) \\ v(t)y(L, t) = 0 \end{cases}$$

### 8.1 Discrétisation

Pour implémenter numériquement la résolution, on choisit d'approcher la solution  $y$  par sa valeur sur les points d'un maillage régulier  $(x_i)_{i \in [0, N_X]}$  de l'intervalle  $[0, L]$  avec le pas d'espace  $\text{deltax} = x_{i+1} - x_i$  pour  $i$  dans  $[0, N_X - 1]$ . On introduit donc une approximation par morceaux de la solution :

$$Y(t) = (y_{i=0}(t), y_{i=1}(t), \dots, y_{i=N_X}(t)) \in \mathbb{C}^{N_X}$$

Puisque le système ne fait que dépolymériser, c'est à dire transporter l'information vers les  $x$  petits, on considère qu'il existe  $L > 0$  tel que quelque soit  $t > 0$  et  $x > L$  la concentration de polymère est nulle et solution  $y(x, t) = 0$ . On discrétise également le temps en une partition de  $N_T$  points de durée  $\delta t_j = t_{j+1} - t_j$  pour  $j$  dans  $[0, N_T - 1]$ . La fonction  $y \in L^2$  est ainsi approximée par  $\tilde{y}$  définie par :

$$\tilde{y}(x, t) = y(x_i, t_j) = y_i^j \quad \forall (x, t) \in [x_i; x_{i+1}) \times [t_j; t_{j+1})$$

De plus on admet la notation :

$$Y(t_j) = Y^j \quad \forall j \in [0, N_T]$$

De même la vitesse peut être discrétisée et on note pour tout  $j$  :

$$v(t_j) = v_j$$



Pour résoudre ce qui suit, on ne considère pas que les  $\delta t_j$  sont réguliers, contrairement à la discrétisation spatiale.

Au contraire, on considère que  $\delta t_j = \frac{\delta x}{v_j}$ . Ainsi il est possible d'adopter un schéma explicite décentré gauche stable, puisqu'il s'agit d'une interpolation de la solution sur les caractéristiques, pour l'opérateur de dérivation, soit :

$$v(t)\partial_x y = v_j \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{\delta x}$$

Soit  $F_j = F(v(t_j))$  pour  $J \leq 0$  l'opérateur discret tel que :

$$\begin{cases} F_0 = \mathbb{I} \\ Y^{j+1} = F_j Y^{j-1} \end{cases}$$

Pour un schéma explicite en temps,  $F_j$  s'écrit :

$$F_j = \begin{pmatrix} \alpha_j = \frac{\delta t_j v_j}{\delta x} & & & \\ & 1 - \alpha_j & \alpha_j & 0 & 0 \\ & 0 & 1 - \alpha_j & \alpha_j & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \alpha_j \\ & 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha_j \end{pmatrix}$$

On définit de plus l'opérateur  $S_j$  :

$$S_j = F_j \circ F_{j-1} \circ \dots \circ F_1 \circ F_0$$

Et on observe que :

$$Y^j = S_j Y^0$$

Pour les observations, on choisit pour l'opérateur intégrale une méthode des trapèzes :

$$z(t_j) = z_j = C Y^j$$

Avec :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{2} x_0 & \frac{\delta x}{2} x_0^2 \\ \delta x x_1 & \delta x x_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta x x_{NX-2} & \delta x x_{NX-2}^2 \\ \frac{\delta x}{2} x_{NX-1} & \frac{\delta x}{2} x_{NX-1}^2 \end{pmatrix}$$

## 8.2 Filtre de Kalman

Grâce aux notations introduites ci-dessus, on peut définir le critère discret  $J$  que l'on souhaite discrétiser :

$$\begin{aligned} J(\zeta, N_T) &= \frac{1}{2} \alpha \|\zeta\|_{N_\diamond, \mathcal{Y}}^2 + \frac{1}{2} \gamma \sum_{j=0}^{NTT} \delta t_j \|z_j - C S_j(y_\diamond + \zeta)\|_{M_j, \mathcal{Z}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \alpha \zeta^T N_\diamond \zeta + \frac{1}{2} \gamma \sum_{j=0}^{NTT} \delta t_j (z_j - C S_j(y_\diamond + \zeta))^T M_j (z_j - C S_j(y_\diamond + \zeta)) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \zeta^T N_\diamond \zeta + \frac{1}{2} \gamma \sum_{j=0}^{NTT} \delta t (C S_j \zeta)^T M_j C S_j \zeta - 2(z_j - C S_j y_\diamond)^T M_j C S_j \zeta + cste \\ &= 1/2 \zeta^T A_{N_T} \zeta - b_{N_T}^T \zeta \end{aligned}$$

Le minimiseur de  $J$  noté  $\hat{\zeta}$  vérifie la propriété :

$$d_\zeta J \hat{\zeta}, N_T = 0$$

Soit :

$$\hat{\zeta} = A_{N_T}^{-1} b_{N_T}$$

Dans un premier temps, on construit la suite  $\zeta_{|n}$  qui vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} A_n = (\alpha N_\diamond + \gamma \sum_{j=0}^n \delta t_j S_j^T C^T M_j C S_j) \\ b_n = \gamma \sum_{j=0}^n \delta t_j S_j^T C^T M_j (z(t_j) - C G^j y_\diamond) \\ \hat{\zeta}_{|n} = \operatorname{argmin} J(\cdot, n) \\ A_n \hat{\zeta}_{|n} = b_n \end{cases} \quad (26)$$

Soit la matrice de norme  $\tilde{M}_n = \gamma \delta t_n M_n$ .

On utilise le lemme d'inversion matricielle pour trouver une relation de récurrence entre  $A_n$  et  $A_{n-1}$  et il vient :

$$\zeta_{|n} = \zeta_{|n-1} + A_n^{-1} S_n^T C^T \tilde{M}_n (z_n - C S_n (y_\diamond + \zeta_{|n-1}))$$

Dans un deuxième temps, on construit la suite donnée par le filtre de Kalman  $y_{n|n}$  telle que :

$$\begin{cases} y_{0|n} = y_\diamond + \zeta_{|n} \\ y_{n|n} = S_n y_{0|n} \end{cases}$$

La relation de récurrence entre  $y_{n|n}$  et  $y_{n-1|n-1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} y_{n|n} &= S_n (y_\diamond + \zeta_{|n}) \\ &= S_n (y_\diamond + \zeta_{|n-1}) + S_n A_n^{-1} S_n^T C^T \tilde{M}_n (z_n - C S_n y_{0|n-1}) \\ &= F_n y_{n-1|n-1} + (S_n A_n^{-1} S_n^T C^T \tilde{M}_n (z_n - C F_n (S_{n-1} y_{0|n-1}))) \\ &= F_n y_{n-1|n-1} + P_n C^T \tilde{M}_n (z(t_n) - C F_n y_{n-1|n-1}) \end{aligned}$$

De part cette expression on peut reconstruire en deux étapes la dynamique de l'estimateur de Kalman discret  $\hat{y}_n = y_{n|n}$  :

$$\begin{cases} \text{Initialisation :} \\ P_0^- = P_\diamond = \mathbb{I} \\ \hat{y}_0^- = y_\diamond \\ \text{Correction :} \\ K_n = P_n^- C^T (\tilde{M}_n^{-1} + C^T P_n^- C)^{-1} \\ P_n^+ = (\mathbb{I} - K_n C) P_n^- (\mathbb{I} - K_n C)^T + K_n \tilde{M}_n^{-1} K_n^T \\ \hat{y}_n^+ = \hat{y}_n^- + P_n^+ C^T \tilde{M}_n (z_n - C \hat{y}_n^-) \\ \text{Prediction :} \\ P_{n+1}^- = F_n P_n^+ F_n^T \hat{y}_{n+1}^- = F_n \hat{y}_n^+ \end{cases}$$

## 9 Conclusion

To be continued.

## Références

- [1] Aurora Armiento Marie Doumic Philippe Moireau Human Rezaei. Estimation from moments measurements for amyloid depolymerisation. *Journal of Theoretical Biology*, December 2015.
- [2] Jean Michel Coron. *Control and Nonlinearity*, volume 136. Mathematical Surveys and Monographs, 2007.
- [3] Lucas Brivadis. *Algorithme d'estimation pour une EDP hyperbolique décrivant un procédé de cristallisation*. Ecole Centrale Lyon.