Examen : Probèmes inverses et dynamique des population

Cécile Della Valle

15 février 2019

1 Etude du problème direct

Question 1. Positivité, borne supérieure

a. Les constantes a et b sont les constantes de polymérisation et de dépolymérisation. Ce modèle est la limite du modèle de Becker-Döring, correspondant aux réactions chimiques entre des monomères C_1 et des polymères de taille $i > 2$ noté P_i :

$$\begin{cases} P_i \,+\, C_1 \xrightarrow{a} P_{i+1} \\ P_i \xrightarrow{b} P_{i-1} +\, C_0 \end{cases} \tag{1}$$

Quand le nombre de polymères tend vers $+\infty$, on peut poser $x = \epsilon i$, qui permet d'adimensionner les équations détaillées. Enfin, en faisant tendre ϵ vers 0, on retrouve le système (1).

Ainsi, la quantité $c(t)$ représente la concentration de monomères en fonction du temps, et $u(x,t)$ la concentration de polymère de taille x en fonction du temps.

Enfin, les quantités μ_0 et μ_1 représentent respectivement les moments d'ordre 0 et d'ordre 1 de la concentration des polymères au cours du temps.

b. Soit u solution classique du système (1), on pose le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X(t,x_0) = (\mathrm{M} - b) - c(t) = v(t) \\ X(0,t) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Ce problème admet une unique solution, de plus elle est de classe C^1. On dérive u le long de la courbe caractéristique définie par X. On pose $U(X(s)) = u(s, X(s,x_0))$ où l'on suppose que u est une solution classique du système (1). Lorsque l'on dérive U le long d'une courbe caractéristique on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U(X(s)) &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x} u(s,X(s,x_0)) + \frac{\partial}{\partial t} u(s,X(s,x_0)) \\ &= v(s)\frac{\partial}{\partial x} u(s,X(s,x_0)) + \frac{\partial}{\partial t} u(s,X(s,x_0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La solution classique u est donc constante le long d'une courbe caractéristique et $u(s, X(s,x_0)) = u(0,x_0) = u^{in}(x_0)$.

De plus on peut obtenir une expression analytique explicite de cetet courbe :

$$X(t,x_0) = x_0 + \int_0^t v(s)ds$$

D'après cette expression pour tout $t > 0$ et $x = x_0 + X(0,t)$ alors $x \in \mathbb{R} = supp(u^{in})$. Le prolongement de u^{in} sur $\mathbb{R}$ nous assure que la quantité $u^{in}(x)$ est bien définie pour tout t et $x = x_0 + X(0,t)$.

Ainsi pour tout $t > 0$ et toute taille x, $u(t,x) = u^{in}(x - \int_0^t v(s)ds) \geq 0$.

c. Intégrer (1) contre le poids x donne le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty} xu(t,x)dx &= -(ac(t)-b)\int_0^{+\infty} x\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)dx \\ &= -(ac(t)-b)[[xu(t,x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t,x)dx] \\ &= (ac(t)-b)\int_0^{+\infty} u(t,x)dx\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty} xu(t,x)dx + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = 0$$

Donc la quantité $\mu_1(t) + c(t) = \rho_0$ est constante au cours du temps. Cette relation correspond à la conservation de la masse.

d. Puisque :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = -(ac(t)-b)\mu_0(t)$$

Sachant que pour tout $t > 0$ et pour tout x on a $u(t,x) \geq 0$, on en déduit que de même $m_0(t) \geq 0$ et $\mu_1(t) \geq 0$ Or,

$$ac(t) - b = a(\rho_0 - \mu_1(t)) - b = a(\rho_0) - b - a\mu_1(t) < 0$$

Donc la fonction c est strictement croissante dès que $\mu_0(t) > 0$.Or, à $t = 0$, $c(0) = 0$, donc si $\mu_0(0) > 0$, pour tout $t > 0$, $c(t) > 0$.

e. On a d'une part pour tout $t \geq 0$, $c(t) + \mu_1(t) = \rho_0$, et d'autre part $c(t) \geq 0$ et $mu_1(t) \geq 0$.

Donc on obtient les deux inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq c(t) \leq \rho_0 \\ 0 \leq \mu_1(t) \leq rho_0 \end{cases}$$

Question 2. Comportement asymptotique de la solution

a. A $t = 0$, $c(0) = 0$ donc $v(0) = ac(0) - b = -b < 0$. Or, on a démontré que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = -(ac(t)-b)\mu_0(t)$$

Démontrons par l'absurde que la vitesse v ne change pas de signe.

La vitesse v est continue (et même absoluement continue) puisque c'est une fonction intégrale d'une fonction de L^1.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, si v change de signe, alors il exite $t^* > 0$ tel que $v(t^*) = 0$, dans ce cas $\mu_1(t^*) = \rho_0 - b$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t^*) = 0$.

Si $\mu_0(t^*) > 0$ alors $\forall t < t^*$, $0 < \mu_0(t^*) < \mu_0(t)$ et on note $\mu_0(t^*) = \alpha$, et il vient :

$$\frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t} = \mu_0(t)|v(t)| \geq \alpha|v(t)|$$

Donc d'après le lemme de Grönwall :

$$|v(t)| \geq |v(0)|e^{-\alpha t}$$

Ceci contredit le fait que v s'annule en $t = t^*$. Donc nécessairement $\mu_0(t^*) = 0$, or, $x \to xy(x,t)$ et $x \to y(x,t)$ sont des fonctions positives de même support, donc $\mu_1(t^*) = 0 \implies \mu_0(t^*) = 0$.

En effet, le système est entièrement dépolymérisé et le système vérifie :

$\forall t > t^*$: $y(x,t) = y(x,t^*) = 0$.

Donc $v(t^*) = \mathrm{M} - b - \mu_1(t^*) = \mathrm{M} - b > 0$.

C'est une contradiction.

En utilisant maintenant l'hypothèse (2), on peut écrire en posant $\delta = -(rho_0 a - b)$ et dans ce cas :

$$ac(t) - b \leq \delta < 0$$

Donc les courbes caractéristiques ont une pente v strictement négative.

b. Pour tout $t > 0$, $x \in [0, +\infty)$, on a :

$$u(x,t) = u^{in}(x - \int_0^t v(s)ds)$$

Donc pour $T = \frac{L}{\delta}$, et $t > T$, on a $x - \int_0^t v(s)ds > x + \delta t > L$. Or, la fonction u^{in} est de support sur $[0, L]$ donc pour $t > T$, $u(x,t) = 0$. On a naturellement comme borne supérieure $\frac{L}{\delta}$.

c. Par le même raisonnement, à $t > 0$ fixé, on suppose que $supp(u^{in}) = [l_1, l_2]$, alors d'après l'expression de u issue de la méthode des caractéristiques :

$$supp(u(t,x)) = [l_1 + \int_0^t v(s), l_2 + \int_0^t v(s)ds] \cap [0, L]$$

d. Pour $t > T$, la fonction $u(x, \cdot) = 0$, et on a $c(t) = \rho_0 - \mu_1(t) = \rho_0$. La fonction c converge en un temps fini vers une constante.

Question 3. Equations des moments

a. Pour $k > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty} x^k u(t,x)dx &= -(ac(t) - b)\int_0^{+\infty} x^k \frac{\partial}{\partial x}u(t,x)dx \\ &= -(ac(t) - b)[[x^k u(t,x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t,x)dx] \\ &= (ac(t) - b)\int_0^{+\infty} kx^{k-1}u(t,x)dx\end{aligned}$$

Donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}}\mu_k = k(ac(t) - b)\mu_{k-1}$

b. Pour $k = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty} u(t,x)dx &= -(ac(t) - b)\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}u(t,x)dx \\ &= -(ac(t) - b)[[u(t,x)]_0^{+\infty} \\ &= (ac(t) - b)u(t,0)\end{aligned}$$

Donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0 = (ac(t) - b)u(t,0)$.

2 Etude du problème inverse, premier cas : $c(t)$ connu, on mesure μ_0

Question 4. Formulation du problème inverse, cadre statique

a.

Soit $\mathscr{Y} = L^2(0, L)$ et $\mathscr{Z} = L^2(\mathbb{R}^+)$ deux espaces de Hilbert. On définit l'application Ψ :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{Y} & \rightarrow & \mathscr{Z} \\ u^{in} & \mapsto & t \rightarrow \int_0^L u(x,t)dx \end{array} \right. \tag{3}$$

Alors l'application Ψ appartient à $L(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$.

Définition 2.1

Le problème inverde que nous allons étudier se définit ainsi : étant donné $z \in \mathscr{Z}$, on cherche $u_\epsilon^{in} \in \mathscr{Y}$ tel que $\Psi u^{in} = z$.

b. Soit $u^{in} \in \mathscr{Y}$, et $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi u^{in}(t) &= \mu_0(t) \\
&= \int_0^L u(x,t)dx \\
&= \int_0^L u^{in}(x - a\int_0^t c(s)ds + bt)dx
\end{aligned}$$

c.
L'application Ψ est linéaire par linéarité de l'opérateur intégrale. De plus Ψ est positive dès que u^{in} l'est (d'après la question 1.b), par intégration d'une fonction positive.

Montrons que Ψ est continu en montrant que :

$$\forall (u_1^{in}, u_2^{in}) \in \mathscr{Y},\ \|\Psi u_1^{in} - \Psi u_2^{in}\|_{\mathscr{X}} \leq C\|u_1^{in} - u_2^{in}\|_{\mathscr{Y}}$$

Soit la fonction θ telle que :

$$\theta\ :\ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \int_0^t (ac(s)-b)ds \end{array} \right.$$

Puisque pour tout $t \geq 0$ on a $v(t) < 0$, alors cela implique aue $c(t) < \frac{b}{a}$ alors $ac(t) - b < 0$ et θ est une fonction strictement décroissante, de plus θ est bijective puisque sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, comme montré à la question 2.a..

De plus, $\theta(0) = 0$ donc θ est négatif pour tout $t \geq 0$, et il existe T tel que $\theta(T) = -L$.

On pose $u^{in} = u_1^{in} - u_2^{in}$, et u l'unique solution du système (1) pour la condition initiale u^{in}.

On pose le changement de variable $x' = x - a\int_0^t c(s)ds + bt) = x - \theta(t)$ il vient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\|\Psi u^{in}\|^2_{\mathscr{X}} &= \int_0^\infty |u(x,t)|^2 dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^L |u^in(x - \theta(t))|^2 dx \\
&= \int_0^\infty \int_{-\theta(t)}^L |u^{in}(x')|^2 dx' \\
&\leq int_0^T \int_{-\theta(t)}^L |u^{in}(x')|^2 dx' \\
&\leq T\|u^{in}\|^2
\end{aligned}$$

avec $T = \theta^{-1}(-L) =$ constante.

On vient donc par cette inégalité de montrer la continuité de Ψ. De plus la norme de Ψ est majorée par $T = \theta^{-1}(-L)$.

d. On introduit la notation $\theta(t) = \int_0^t v(s)ds$ Soit u_1^{in}, u_2^in de $\mathscr{Y}$, calculons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi u_1^{in}, \Psi u_2^in\rangle_{\mathscr{X}} &= \int_{t=0}^{+\infty} (\int_{x_1=0}^L u_1(t,x_1)dx_1)(\int_{x_2=0}^L u_2(t,x_2)dx_2)dt \\
&= \int_{t=0}^T \int_{x_1=-\theta(t)}^L \int_{x_2=0}^L u_1^{in}(x_1)u_2(t,x_2)dx_2dx_1dt \\
&= \int_{x_1=0}^L (u_1^{in}(x_1) \int_{t=0}^{\theta^{-1}(-x_1)} \int_{x_2=0}^L u_2(t,x_2)dx_2dt)dx_1 \\
&= \langle u_1^{in}, \Psi^* \Psi u_2^in\rangle_{\mathscr{Y}}
\end{aligned}$$

On définit donc l'adjoint :

$$\Psi^*\ :\ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{X} & \rightarrow & \mathscr{Y} \\ \mu_0 & \mapsto & x \rightarrow \int_0^{\theta(-x)} \mu_0(t)dt \end{array} \right. \tag{4}$$

Question 5. Résolution "directe" du problème inverse

a. D'après la question 3.b., on a obtenu la relation, pour $\mu_0 \in \mathscr{X}$ et $u^{in} \in \mathscr{Y}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0 = (ac(t) - b)u^{in}(-\int_0^t v(s)ds)$$

Ce problème est mal posé d'ordre 1, en effet μ_0 est une fonction de L^2 et non de H^1.

b. On remarque que :

$$Y_0(t) = bt - a\int_0^t c(s)ds = -\int_0^t v(s)ds = -\theta(t)$$

Or reprend le même raisonnement qu'à la question 2.c., puisque pour tout $t \geq 0$ on a $v(t) < 0$, alors cela implique que Y_0 est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}^+$, elle est donc bijective. On peut donc écrire pour tout x :

$$u^{in}(x) = \frac{1}{v(Y_0^{-1}(x))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0(Y_0^{-1}(x))$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{v(Y_0^{-1}(x))}$ est négative elle est donc majorée par 0 et minorée par $-1/\delta$ d'après la question 2.a..

c. Pour définir le pseudo-inverse de Moore-Penrose, il faut que l'opérauteur Ψ soit borné, ce point est bien vérifié pour toute solution u du système (1) d'après la question 4.c.. L'image de Ψ sont les fonctions $H^1[0, +\infty)$ à support sur $[0, Y_0^{-1}(L)]$.

$$Im(\Psi) = \left\{\mu \in H^1[0, +\infty) \mid supp(\mu) \subset [0, Y_0^{-1}(L)]\right\}$$

On peut donc définir le pseudo inverse par cette formule :

$$\Psi^\dagger \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{X} & \rightarrow & \mathscr{Y} \\ \mu_0 & \mapsto & \frac{1}{v(Y_0^{-1}(x))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0(Y_0^{-1}(x)) \end{array} \right. \tag{5}$$

et $D(\Psi^\dagger) = Im(\Psi) + Im(\Psi)^\perp$

Question 6. Résolution du problème inverse par la méthode de Tikhonov généralisée

a. Ce problème inverse revient à résoudre la question suivante : peut-on estimer $y = u^{in}$ la condition initiale par la mesure du moment d'ordre 0 d'une solution du système (1) ? Comme dans le cadre du cours (chapitre 2) sur l'exemple du problème inverse de l'intégrale, ce problème est mal posé d'ordre 1 pour la norme sur L^2 sur $\mathscr{X}$.

b.

On note à titre préliminaire :

$$\begin{cases} z_{\epsilon,\alpha}(t) = \Psi y_{\epsilon,\alpha}(t) \\ z'_{\epsilon,\alpha}(t) = -Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)) \\ z_{\epsilon,\alpha}(T) = \int_{Y_0(T)}^L y_{\epsilon,\alpha}(x)dx = 0 \end{cases}$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^T (Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))(\Psi y_{\epsilon,\alpha} - \alpha Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))dt &= \int_0^T (Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))\Psi y_{\epsilon,\alpha}(t)dt - \int_0^T \alpha(Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))^2 dt \\ &= -\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)z_{\epsilon,\alpha}(t)dt - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2 dt \\ &= -\frac{1}{2}[z_{\epsilon,\alpha}(t)^2]_0^T - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2}z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2 dt \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int_0^T (Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))z_\epsilon(t)dt = -\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)z_\epsilon(t)dt$$

Donc :

$$\frac{1}{2}z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt = -\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)z_\epsilon(t)dt$$

De plus, pour obtenir l'inégalité, posons le changement de variable $s = Y_0(t)$, et $ds = Y_0'(t)dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt &= \int_0^T Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t))^2(Y_0'(t)dt) \\ &= \int_0^L Y_0'(Y_0^{-1}(s))\, y_{\epsilon,\alpha}(s)^2ds\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|y_{\epsilon,\alpha}\|^2_{\mathscr{Y}} &= \int_0^L y_{\epsilon,\alpha}(x)^2dx \\ &\leq \frac{1}{v_{min}}\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt \\ &\leq \frac{1}{\alpha v_{min}}(\frac{1}{2}z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 + \int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)z_\epsilon(t)dt) \\ &\leq \frac{1}{\alpha v_{min}}(\frac{1}{2}z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 + (\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt \in_0^T z_\epsilon(t)^2dt)^{1/2}\,) \\ &\leq \frac{1}{\alpha v_{min}}(\frac{1}{2}\|y_{\epsilon,\alpha}\|^2_{\mathscr{Y}} + v_{max}\|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}\|z_\epsilon\|_{\mathscr{Z}})\end{aligned}$$

Soit, pour $0 < 1 - \dfrac{1}{2\alpha v_{min}}$:

$$\|y_{\epsilon,\alpha}\|^2_{\mathscr{Y}}(1 - \frac{1}{2\alpha v_{min}}) \leq \frac{v_{max}}{\alpha v_{min}}\|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}\|z_\epsilon\|_{\mathscr{Z}})$$

Il vient donc :

$$\|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}} \leq f(\alpha)\|z_\epsilon\|_{\mathscr{Z}}$$

Avec $f(\alpha) = \dfrac{2v_{max}}{2\alpha v_{min-1}}$