LJLL - Master 2
2018-2019

Problèmes inverses et dynamique des population

Examen. Durée : 3 heures.

18 janvier 2019 14h-17h.

Avertissement

Le sujet se compose de 5 pages et de 8 questions. Les questions particulièrement difficiles ou non directement abordées en cours seront indiquées par un signe $\diamond$. Les réponses doivent être détaillées et les calculs intermédiaires doivent être écrits. Le polycopié est autorisé.

Modèle de dépolymérisation-polymérisation

On considère l'équation de polymérisation-dépolymerisation suivante, avec $a > 0$ et $b > 0$ constants.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\big((ac(t)-b)u(t,x)\big) = 0, \qquad x \in (0,L), \quad t \geqslant 0, \\ \\ \frac{dc}{dt}(t) = (b - ac(t)) \int\limits_0^\infty u(t,x)dx, \\ \\ u(t,0)\mathbb{1}_{ac(t)-b>0} = 0, \qquad\qquad u(t,L)\mathbb{1}_{ac(t)-b<0} = 0, \\ \\ u(0,x) = u^{in}(x) \geqslant 0, \qquad c(0) = 0, \qquad \int\limits_0^L xu^{in}(x)dx = \rho_0, \qquad Supp(u^{in}) \subset (0,L). \end{cases} \tag{1}$$

Dans toute la suite, on suppose

$$\rho_0 < \frac{b}{a}, \qquad u^{in} \in \mathcal{C}_b([0,L]). \tag{2}$$

On note μ_k le moment d'ordre k de la solution à l'instant t, c'est-à-dire :

$$\mu_k(t) = \int\limits_0^L x^k u(t,x)dx, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Soit $u^{in} \in L^1([0,L])$; on suppose connue l'existence et l'unicité d'une solution positive $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1([0,L]))$.

Problématique générale : *A partir de mesures de certains des μ_k, on souhaite estimer la condition initiale $u^{in}(x)$.*

On rappelle que l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u = 0, \qquad u(0,x) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

avec $v(t,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, *admet pour solution* $u(t,x) = u^{in}(Y(t,x))$ *ou de façon équivalente* $u(t, X(t,x)) = u^{in}(x)$ *avec* $X(t,x)$ *la courbe caractéristique et son inverse* $Y(t,y)$ *définies par*

$$\frac{dY(t,y)}{dt} = -v(t, Y(t,y)), \quad Y(0,y) = y \qquad \frac{dX(t,x)}{dt} = v(t,x), \quad X(0,x) = x.$$

I. Etude du problème direct

Question 1. Positivité, borne supérieure.

a. Interpréter les constantes a et b. A partir de quelles réactions chimiques et en faisant tendre quelle grandeur vers l'infini dans ces réactions peut-on obtenir le système (1) ? Que représentent $c(t)$ et $u(t,x)$? Que représentent physiquement les quantité μ_1 et μ_0 ?
b. Ecrire les équations satisfaites par les courbes caractéristiques - on notera $X(t, x_0)$ la courbe caractéristique partant de x_0 à $t = 0$, et $Y(t,y)$ la courbe caractéristique inverse (telle que $Y(t, X(t,x)) = x$). Que peut-on dire de ces courbes ? En prolongeant $u^{in}(x)$ par zéro sur $\mathbb{R}$ entier, exprimer la solution $u(t,x)$ pour $(x \in (0, L)$ en fonction des courbes caractéristiques. En déduire que pour tout temps t et pour toute taille x on a $u(t,x) \geqslant 0$.
c. En intégrant l'équation (1) contre le poids x, montrer que $c(t)+\mu_1(t) = \rho_0$. Comment appelle-t-on cette relation et qu'exprime-t-elle physiquement ?
d. En utilisant l'équation satisfaite par $c(t)$, exprimer c en fonction de a, b et de $\mu_0(t)$. En déduire que pour tout temps $t > 0$, on a $c(t) > 0$.
e. Déduire des questions précédentes que $0 \leqslant c(t) \leqslant \rho_0$, et de même $0 \leqslant \mu_1(t) \leqslant \rho_0$ pour tout temps.

Question 2. Comportement asymptotique de la solution.

a. Sans utiliser l'hypothèse (2), Montrer qu'en tout temps la vitesse $ac(t) - b$ est toujours négative. En utilisant (2), montrer que de plus on a $ac(t) - b < -\delta$ avec $\delta > 0$, et donner une valeur possible de δ. Qu'en déduire sur les courbes caractéristiques ?
b. Déduire de la question a. qu'il existe $T > 0$ tel que pour $t \geqslant T$, $u(t,x)$ est identiquement nul. Donner une borne supérieure pour T.
c. à t fixé, quels sont les points où u est non nul ? Si $Supp(u^{in}) = [\ell_1, \ell_2]$ donner une expression de $Supp(u(t,\cdot))$.
d. Quel est le comportement asymptotique de $c(t)$?

Question 3. Equations des moments.

a. En intégrant l'équation (1) contre le poids x^k, écrire l'équation liant μ_k à μ_{k-1} pour $k \geqslant 1$. Par la suite, on notera ces équations $(M)_k$.
b. En intégrant l'équation (1), donner l'équation liant μ_0 à $u(t,0)$. Par la suite, on notera cette équation $(M)_0$.

II. Etude du problème inverse, premier cas : $c(t)$ connu, on mesure μ_0

Dans cette partie, on suppose $c(t)$ continue et continûment dérivable, positive et connue de façon exacte par ailleurs, telle que $c(t) < \frac{b}{a}$ pour tout temps, et on mesure μ_0 avec une mesure bruitée μ_0^ε telle que

$$\|\mu_0 - \mu_0^\varepsilon\|_{L^2(0,T)} \leqslant \varepsilon.$$

Le temps $T > 0$ est tel que $\mu_0(t \geqslant T) = 0$. On souhaite reconstruire la condition initiale u^{in}.

Question 4. Formulation du problème inverse, cadre statique.

a. Définir le problème inverse à étudier dans le cadre général (hilbertien) du cours (ch.2. du polycopié) : donner les espaces $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, et l'opérateur Ψ.
b. Ecrire l'opérateur Ψ en fonction de $c(t)$, a et b, en utilisant la question 1.b.
c. Montrer que Ψ est linéaire, continu de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$, positif. Donner une majoration pour la norme d'opérateur de Ψ.
d. Calculer Ψ^*.

Question 5. Résolution "directe" du problème inverse.

a. En utilisant la question 4.c. (ou encore la question 1.b. et la question 3.b....), écrire l'équation liant u^{in} à $\frac{d\mu_0}{dt}$, en fonction de a, b et $c(t)$. Cette équation suffit-elle à définir μ_0 ?
b. On définit $Y_0(t) = bt - a\int_0^t c(s)ds$. En utilisant (par exemple) la question 2.a., montrer que Y_0 est inversible ; donner une expression de $u^{in}(x)$ du type

$$u^{in}(x) = f(x)\frac{d\mu_0}{dt}(g(x)), \qquad x \in (0, L), \tag{4}$$

et donner les expressions de f et g en fonction de l'inverse de Y_0 qu'on notera Y_0^{-1}, et de μ_0, a, c et b. Montrer que f est continu borné, donner une borne supérieure et une borne inférieure.
c. $\diamond$ Cette équation définit-elle $\Psi^\dagger$? Quel est alors $D(\Psi^\dagger)$?

Question 6. Résolution du problème inverse par méthode de Tikhonov généralisée.

Dans cette question, on définit $\Psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ par

$$\Psi y(t) := \int_{Y_0(t)}^{L} y(x)dx \tag{5}$$

avec $\mathcal{Y} = L^2(0, L)$, $\mathcal{Z} = L^2(0, L)$ et $Y_0 \in \mathcal{C}^2([0, T]; [0, L])$ strictement croissante vérifiant $Y_0(0) = 0$, $Y_0(T) = L$ et $0 < v_{min} \leqslant Y_0'(t) \leqslant v_{max}$, $|Y_0''(t)| \leqslant w_{max}$. Comme toujours, on suppose qu'on mesure z_ε tel que

$$\|z_\varepsilon - z\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \varepsilon,$$

et on souhaite estimer y tel que $\Psi y = z$.
a. Relier cette formulation à la problématique générale de l'examen. De façon heuristique, que devrait être le "degree of ill-posedness" du problème inverse étudié ? Justifier avec le cours.

b. On propose de résoudre le problème régularisé suivant :

$$\Psi y_{\varepsilon,\alpha}(t) - \alpha Y_0'(t) y_{\varepsilon,\alpha}\big(Y_0(t)\big) = z_\varepsilon(t) \tag{6}$$

En multipliant l'équation (6) par $Y_0'(t) y_{\varepsilon,\alpha}\big(Y_0(t)\big)$ et en intégrant, montrer que

$$\frac{1}{2} z_{\varepsilon,\alpha}^2(0) + \alpha \int_0^T z_{\varepsilon,\alpha}'(t)^2 dt = -\int_0^T z_{\varepsilon,\alpha}'(t) z_\varepsilon(t) dt,$$

où on note $z_{\varepsilon,\alpha}(t) = \int\limits_{Y_0(t)}^{L} y_{\varepsilon,\alpha}(x)dx = \Psi y_{\varepsilon,\alpha}$. En déduire par un changement de variable que

$$\|y_{\varepsilon,\alpha}\|_{\mathcal{Y}} \leqslant \frac{C_1}{\alpha} \|z_\varepsilon\|_{\mathcal{Z}},$$

et donner une valeur possible de C_1 en fonction des paramètres du problème.
c. On suppose $z \in H^1(0,T)$ et $z(T) = 0$, on définit y_α comme solution de l'équation

$$\Psi y_\alpha(t) - \alpha Y_0'(t) y_\alpha\big(Y_0(t)\big) = z(t). \tag{7}$$

Montrer que (7) est équivalente à l'équation (8) :

$$Y_0'(t) y_\alpha\big(Y_0(t)\big) - \alpha \Big(Y_0'(t) y_\alpha\big(Y_0(t)\big)\Big)' = z'(t), \qquad y_\alpha(L) = 0. \tag{8}$$

En multipliant l'équation (8) par $Y_0'(t) y_\alpha\big(Y_0(t)\big)$ montrer que

$$z_\alpha'^2(t) - \alpha z_\alpha'(t) z_\alpha''(t) = z_\alpha'(t) z'(t), \qquad z_\alpha'(L) = 0,$$

où on note $z_\alpha(t) = \int\limits_{Y_0(t)}^{L} y_\alpha(x)dx = \Psi y_\alpha$. En intégrant, en déduire

$$\|y_\alpha\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C_2 \|z\|_{H^1(0,T)},$$

et donner une valeur possible de C_2 en fonction des paramètres du problème.
d. On suppose $z = \Psi y$ avec $y \in H^1(0,T)$. Ecrire l'équation satisfaite par $y_\alpha - y$ sous la forme (8), quel est le second membre ? En déduire ainsi que de l'inégalité c. que

$$\|y_\alpha - y\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C_3 \alpha \|y\|_{H^1},$$

et donner une valeur possible de C_3 en fonction des paramètres du problème.
e. A partir des résultats précédents, proposer une estimation de $\|y_{\varepsilon,\alpha} - y\|_{\mathcal{Y}}$ en fonction de α et ε. Quelle est la valeur optimale de α, et en ce cas quelle estimation en fonction de ε obtient-on ? Comment appelle-t-on ce type de méthode et pourquoi ?
e. On écrit comme d'habitude

$$\begin{aligned} \|y_{\varepsilon,\alpha} - y\|_{\mathcal{Y}} &\leqslant \|y_{\varepsilon,\alpha} - y_\alpha\|_{\mathcal{Y}} + \|y_\alpha - y\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leqslant \tfrac{C_1}{\alpha} \|z - z_\varepsilon\|_{\mathcal{Z}} + C_3 \alpha \|y\|_{H^1}, \end{aligned}$$

donc l'ordre de grandeur pour un choix optimal d'α est $\alpha^2 = O(\varepsilon)$ soit $\alpha = O(\sqrt{\varepsilon})$, auquel cas l'erreur est de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$. On dit qu'il s'agit d'une méthode a priori car on choisit α indépendamment de la mesure z_ε.

III. Etude du problème inverse, second cas : $c(t)$ connu, on mesure μ_1

Question 7. Résolution du problème inverse par filtre de Kalman.

a. Ecrire la fonctionnelle moindre carrés à minimiser dans le cas $c(t)$ connu et où on mesure μ_1 et sans erreur de modèle. Ecrire le système aux deux bouts associé à la minimisation de cette fonctionnelle. *Indication : on pourra pour alléger les notations réécrire la dynamique à l'aide d'un opérateur non borné fonction du temps $A(t)$*
b. Est il possible d'écrire un estimateur de Kalman équivalent. On admettra les résultats d'existence nécessaires, et on procédera à des justifications formelles.
c. $\diamond$ En dérivant l'expression obtenue en b., proposer une méthode de reconstruction de u^{in} à partir de la mesure bruitée de (μ_0, μ_1). Poser le problème dans un cadre L^2, avec les notations du cours.

Etude du problème inverse, troisième cas : $c(t)$ inconnu, on mesure μ_1

Question 8. 4D-Var.

a. Ecrire formellement le système non linéaire en fonction d'une variable d'état $y = (u, c)$ et d'un opérateur non-linéaire $A(y)$. Donner formellement l'opérateur d'observation sur ce système. Ecrire la fonctionnelle moindre carrés à minimiser dans le cas $c(t)$ connu et où on mesure μ_1 et sans erreur de modèle. Ecrire le système aux deux bouts associé à la minimisation de cette fonctionnelle.
b. Proposer une stratégie pratique de résolution à partir d'un paramètre de relaxation dont il resterait à déterminer la valeur assurant la convergence.