Examen : Probèmes inverses et dynamique des population

Cécile Della Valle

28 février 2019

1 Etude du problème direct

Question 1. Positivité, borne supérieure

a. Les constantes a et b sont les constantes de polymérisation et de dépolymérisation. Ce modèle est la limite du modèle de Becker-Döring, correspondant aux réactions chimiques entre des monomères C_1 et des polymères de taille $i > 2$ noté P_i :

$$\begin{cases} P_i \ + \ C_1 \xrightarrow{a} P_{i+1} \\ P_i \xrightarrow{b} P_{i-1} + \ C_1 \end{cases} \tag{1}$$

Quand le nombre de polymères tend vers $+\infty$, on peut poser $x = \epsilon i$, qui permet d'adimensionner les équations détaillées. Enfin, en faisant tendre ϵ vers 0, on retrouve le système (1).

Ainsi, la quantité $c(t)$ représente la concentration de monomères en fonction du temps, et $u(x,t)$ la concentration de polymère de taille x en fonction du temps.

Enfin, les quantités μ_0 et μ_1 représentent respectivement les moments d'ordre 0 et d'ordre 1 de la concentration des polymères au cours du temps.

b. Soit u solution classique du système (1), on pose le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X(t, x_0) = ac(t) - b = v(t) \\ X(0,t) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Ce problème admet une unique solution si v est de classe $C^1(\mathbb{R})$,. On dérive u le long de la courbe caractéristique définie par X. On pose $U(X(s)) = u(s, X(s, x_0))$ où l'on suppose que u est une solution classique du système (1). Lorsque l'on dérive U le long d'une courbe caractéristique on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U(X(s)) &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} \frac{\partial}{\partial x} u(s, X(s, x_0)) + \frac{\partial}{\partial t} u(s, X(s, x_0)) \\ &= v(s) \frac{\partial}{\partial x} u(s, X(s, x_0)) + \frac{\partial}{\partial t} u(s, X(s, x_0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La solution classique u est donc constante le long d'une courbe caractéristique et $u(s, X(s, x_0)) = u(0, x_0) = u^{in}(x_0)$.

De plus on peut obtenir une expression analytique explicite de cetet courbe :

$$X(t, x_0) = x_0 + \int_0^t v(s) ds$$

D'après cette expression pour tout $t > 0$ et $x = x_0 + X(0,t)$ alors $x \in \mathbb{R} = supp(u^{in})$. Le prolongement de u^{in} sur $\mathbb{R}$ nous assure que la quantité $u^{in}(x)$ est bien définie pour tout t et $x = x_0 + X(0,t)$.

Ainsi pour tout $t > 0$ et toute taille x, $u(t,x) = u^{in}(x - \int_0^t v(s) ds) \geq 0$.

Cette expression nous donne l'unique solution, et puisque u^{in} est continue alors u appartient à $L^1(\mathbb{R}^+, C_b(\mathbb{R}))$.

c. Intégrer (1) contre le poids x donne le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty} xu(t,x)dx &= -(ac(t)-b)\int_0^{+\infty} x\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)dx \\ &= -(ac(t)-b)[[xu(t,x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t,x)dx] \\ &= (ac(t)-b)\int_0^{+\infty} u(t,x)dx\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty} xu(t,x)dx + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = 0$$

Donc la quantité $\mu_1(t) + c(t) = \rho_0$ est constante au cours du temps. Cette relation correspond à la conservation de la masse.

d. Puisque :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = -(ac(t)-b)\mu_0(t)$$

Sachant que pour tout $t > 0$ et pour tout x on a $u(t,x) \geq 0$, on en déduit que de même $\mu_0(t) \geq 0$ et $\mu_1(t) \geq 0$ Or,

$$ac(t) - b = a(\rho_0 - \mu_1(t)) - b = a(\rho_0) - b - a\mu_1(t) < 0$$

Donc la fonction c est strictement croissante dès que $\mu_0(t) > 0$.Or, à $t = 0$, $c(0) = 0$, donc si $\mu_0(0) > 0$, pour tout $t > 0$, $c(t) > 0$.

e. On a d'une part pour tout $t \geq 0$, $c(t) + \mu_1(t) = \rho_0$, et d'autre part $c(t) \geq 0$ et $mu_1(t) \geq 0$.

Donc on obtient les deux inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq c(t) \leq \rho_0 \\ 0 \leq \mu_1(t) \leq \rho_0 \end{cases}$$

Question 2. Comportement asymptotique de la solution

a. A $t = 0$, $c(0) = 0$ donc $v(0) = ac(0) - b = -b < 0$. Or, on a démontré que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = -(ac(t)-b)\mu_0(t)$$

Démontrons par l'absurde que la vitesse v ne change pas de signe.

La vitesse v est continue (et même absoluement continue) puisque c'est une fonction intégrale d'une fonction de L^1.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, si v change de signe, alors il exite $t^* > 0$ tel que $v(t^*) = 0$, dans ce cas $\mu_1(t^*) = \rho_0 - b$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t^*) = 0$.

Si $\mu_0(t^*) > 0$ alors $\forall t < t^*$, $0 < \mu_0(t^*) < \mu_0(t)$ et on note $\mu_0(t^*) = \alpha$, et il vient :

$$\frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t} = \mu_0(t)|v(t)| \geq \alpha|v(t)|$$

Donc d'après le lemme de Grönwall :

$$|v(t)| \geq |v(0)|e^{-\alpha t}$$

Ceci contredit le fait que v s'annule en $t = t^*$. Donc nécessairement $\mu_0(t^*) = 0$, or, $x \to xy(x,t)$ et $x \to y(x,t)$ sont des fonctions positives de même support, donc $\mu_1(t^*) = 0 \implies \mu_0(t^*) = 0$.

En effet, le système est entièrement dépolymérisé et le système vérifie :

$\forall t > t^*$: $y(x,t) = y(x,t^*) = 0$.

Donc $v(t^*) = \mathrm{M} - b - \mu_1(t^*) = \mathrm{M} - b > 0$.

C'est une contradiction.

En utilisant maintenant l'hypothèse (2), on peut écrire en posant $\delta = -(\rho_0 a - b)$ et dans ce cas :

$$ac(t) - b \leq \delta < 0$$

Donc les courbes caractéristiques ont une pente v strictement négative.

b. Pour tout $t > 0$, $x \in [0, +\infty)$, on a :

$$u(x,t) = u^{in}(x - \int_0^t v(s)ds)$$

Donc pour $T = \dfrac{L}{\delta}$, et $t > T$, on a $x - \int_0^t v(s)ds > x + \delta t > L$. Or, la fonction u^{in} est de support sur $[0, L]$ donc pour $t > T$, $u(x,t) = 0$. On a naturellement comme borne supérieure $\dfrac{L}{\delta}$.

c. Par le même raisonnement, à $t > 0$ fixé, on suppose que $supp(u^{in}) = [l_1, l_2]$, alors d'après l'expression de u issue de la méthode des caractéristiques :

$$supp(u(t,x)) = [l_1 + \int_0^t v(s), l_2 + \int_0^t v(s)ds] \cap [0, L]$$

d. Pour $t > T$, la fonction $u(x, \cdot) = 0$, et on a $c(t) = \rho_0 - \mu_1(t) = \rho_0$. La fonction c converge en un temps fini vers une constante.

Question 3. Equations des moments

a. Pour $k > 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^{+\infty} x^k u(t,x)dx &= -(ac(t) - b) \int_0^{+\infty} x^k \frac{\partial}{\partial x} u(t,x)dx \\
&= -(ac(t) - b)[[x^k u(t,x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t,x)dx] \\
&= (ac(t) - b) \int_0^{+\infty} kx^{k-1} u(t,x)dx
\end{aligned}$$

Donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}}\mu_k = k(ac(t) - b)\mu_{k-1}$

b. Pour $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^{+\infty} u(t,x)dx &= -(ac(t) - b) \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(t,x)dx \\
&= -(ac(t) - b)[u(t,x)]_0^{+\infty} \\
&= (ac(t) - b)u(t,0)
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0 = (ac(t) - b)u(t,0)$.

2 Etude du problème inverse, premier cas : $c(t)$ connu, on mesure μ_0

Question 4. Formulation du problème inverse, cadre statique

a.

Soit $\mathscr{Y} = L^2(0, L)$ et $\mathscr{Z} = L^2(\mathbb{R}^+)$ deux espaces de Hilbert. On définit l'application Ψ :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{Y} & \to & \mathscr{Z} \\ u^{in} & \mapsto & t \to \int_0^L u(x,t)dx \end{array} \right. \tag{3}$$

Alors l'application Ψ appartient à $L(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$.

Définition 2.1

Le problème inverse que nous allons étudier se définit ainsi : étant donné $z \in \mathscr{Z}$, on cherche $u^{in} \in \mathscr{Y}$ tel que $\Psi u^{in} = z$.

b. Soit $u^{in} \in \mathscr{Y}$, et $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi u^{in}(t) &= \mu_0(t) \\
&= \int_0^L u(x,t)dx \\
&= \int_0^L u^{in}(x - a\int_0^t c(s)ds + bt)dx
\end{aligned}$$

c.

L'application Ψ est linéaire par linéarité de l'opérateur intégrale. De plus Ψ est positive dès que u^{in} l'est (d'après la question 1.b), par intégration d'une fonction positive.

Montrons que Ψ est continu en montrant que Ψ est borné.

Pour se faire, montrons d'apord qu'il existe $T > 0$ tel que :

$$a\int_0^T c(s)ds - bT = L$$

Soit la fonction Y_0 telle que :

$$Y_0 \ : \ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & -\int_0^t (ac(s) - b)ds \end{array} \right.$$

Puisque pour tout $t \geq 0$ on a $v(t) < 0$, alors cela implique $c(t) < \frac{b}{a}$ et alors $ac(t) - b < 0$, donc Y_0 est une fonction strictement croissante, de plus Y_0 est bijective puisque sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, comme montré à la question 2.a.. $Y_0(0) = 0$ donc Y_0 est positif pour tout $t \geq 0$, et il existe T tel que $Y_0(T) = L$.

Soit u l'unique solution du système (1) pour la condition initiale u^{in}.

On pose le changement de variable $x' = x - a\int_0^t c(s)ds + bt = x + Y_0(t)$ il vient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\|\Psi u^{in}\|^2_{\mathscr{X}} &= \int_0^\infty |u(x,t)|^2 dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^L |u^{in}(x + Y_0(t))|^2 dx \\
&= \int_0^\infty \int_{Y_0}^L |u^{in}(x')|^2 dx' \\
&\leq \int_0^T \int_{Y_0}^L |u^{in}(x')|^2 dx' \\
&\leq T\|u^{in}\|^2
\end{aligned}$$

avec $T = Y_0^{-1}(L) =$ constante.

On vient donc par cette inégalité de montrer la continuité de Ψ. De plus la norme de Ψ est majorée par $T = Y_0^{-1}(L)$.

d. Comme précédemment, on introduit la notation $Y_0(t) = -\int_0^t v(s)ds$ Soit u_1^{in}, u_2^{in} de $\mathscr{Y}$, calculons la quantité :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi u_1^{in}, \Psi u_2^i n\rangle_{\mathscr{X}} &= \int_{t=0}^{+\infty} (\int_{x_1=0}^L u_1(t,x_1)dx_1)(\int_{x_2=0}^L u_2(t,x_2)dx_2)dt \\
&= \int_{t=0}^T \int_{x_1=Y_0}^L \int_{x_2=0}^L u_1^{in}(x_1)u_2(t,x_2)dx_2dx_1dt \\
&= \int_{x_1=0}^L (u_1^{in}(x_1) \int_{t=0}^{Y_0^{-1}(x_1)} \int_{x_2=0}^L u_2(t,x_2)dx_2dt)dx_1 \\
&= \langle u_1^{in}, \Psi^*\Psi u_2^{in}\rangle_{\mathscr{Y}}
\end{aligned}$$

On définit donc l'adjoint :

$$\Psi^* \ : \ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{X} & \to & \mathscr{Y} \\ \mu_0 & \mapsto & x \to \int_0^{Y_0^{-1}(x)} \mu_0(t)dt \end{array} \right. \tag{4}$$

Question 5. Résolution "directe" du problème inverse

a. D'après la question 3.b., on a obtenu la relation, pour $\mu_0 \in \mathscr{X}$ et $u^{in} \in \mathscr{Y}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0 = (ac(t) - b)u^{in}(-\int_0^t v(s)ds)$$

Ce problème est mal posé d'ordre 1, en effet μ_0 est une fonction de L^2 et non de H^1.

b. On remarque que :

$$Y_0(t) = bt - a\int_0^t c(s)ds = -\int_0^t v(s)ds$$

Or reprend le même raisonnement qu'à la question 2.c., puisque pour tout $t \geq 0$ on a $v(t) < 0$, alors cela implique que Y_0 est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}^+$, elle est donc bijective. On peut donc écrire pour tout x :

$$u^{in}(x) = \frac{1}{v(Y_0^{-1}(x))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0(Y_0^{-1}(x))$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{v(Y_0^{-1}(x))}$ est négative elle est donc majorée par 0 et minorée par $-1/\delta$ d'après la question 2.a..

c. Pour définir le pseudo-inverse de Moore-Penrose, il faut que l'opérauteur Ψ soit borné, ce point est bien vérifié pour toute solution u du système (1) d'après la question 4.c.. L'image de Ψ sont les fonctions $H^1[0, +\infty)$ à support sur $[0, Y_0^{-1}(L)]$.

$$Im(\Psi) = \left\{\mu \in H^1[0, +\infty) \mid supp(\mu) \subset [0, Y_0^{-1}(L)]\right\}$$

On peut donc définir le pseudo inverse dont la valeur sur $Im(\Psi)$ vaut :

$$\Psi^\dagger \ : \left| \begin{array}{ccc} Im(\Psi) & \mapsto & \mathscr{Y} \\ \mu_0 & \mapsto & \dfrac{1}{v(Y_0^{-1}(x))}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0(Y_0^{-1}(x)) \end{array} \right. \tag{5}$$

et $D(\Psi^\dagger) = Im(\Psi) + Im(\Psi)^\perp$

Question 6. Résolution du problème inverse par la méthode de Tikhonov généralisée

a. Ce problème inverse revient à résoudre la question suivante : peut-on estimer $y = u^{in}$ la condition initiale par la mesure du moment d'ordre 0 d'une solution du système (1) ? Comme dans le cadre du cours (chapitre 2) sur l'exemple du problème inverse de l'intégrale, ce problème est mal posé d'ordre 1 pour la norme sur L^2 sur $\mathscr{X}$.

b.

On note à titre préliminaire :

$$\begin{cases} z_{\epsilon,\alpha}(t) = \Psi y_{\epsilon,\alpha}(t) \\ z'_{\epsilon,\alpha}(t) = -Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)) \\ z_{\epsilon,\alpha}(T) = \int_{Y_0(T)}^L y_{\epsilon,\alpha}(x)dx = 0 \end{cases}$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^T (Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))(\Psi y_{\epsilon,\alpha} - \alpha Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))dt &= \int_0^T (Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))\Psi y_{\epsilon,\alpha}(t)dt - \int_0^T \alpha(Y_0'(t)y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t)))^2dt \\ &= -\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)z_{\epsilon,\alpha}(t)dt - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt \\ &= -\frac{1}{2}[z_{\epsilon,\alpha}(t)^2]_0^T - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt \\ &= \frac{1}{2}z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 - \alpha\int_0^T z'_{\epsilon,\alpha}(t)^2dt \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int_0^T (Y_0'(t) y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t))) z_\epsilon(t) dt = - \int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t) z_\epsilon(t) dt$$

Donc :

$$\frac{1}{2} z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 - \alpha \int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t)^2 dt = - \int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t) z_\epsilon(t) dt$$

De plus, pour obtenir l'inégalité, on cherche à exprimer $z_{\epsilon,\alpha}'$ en fonction de $y_{\epsilon,\alpha}$ Posons le changement de variable $s = Y_0(t)$, et $ds = Y_0'(t) dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t)^2 dt &= \int_0^T Y_0'(t) y_{\epsilon,\alpha}(Y_0(t))^2 (Y_0'(t) dt) \\
&= \int_0^L Y_0'(Y_0^{-1}(s))\, y_{\epsilon,\alpha}(s)^2 ds \\
&\geq v_{min} \|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}^2
\end{aligned}$$

Puis, on cherche à exprimer $z_{\epsilon,\alpha}(0)$ en fonction de $y_{\epsilon,\alpha}$:

$$\begin{aligned}
z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 &= (\int_0^L y_{\epsilon,\alpha}(x) dx)^2 \\
&\leq (\int_0^L 1^2 dx)(\int_0^L y_{\epsilon,\alpha}(x)^2 dx) \\
&\leq L \|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}^2
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}^2 &= \int_0^L y_{\epsilon,\alpha}(x)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{v_{min}} \int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t)^2 dt \\
&\leq \frac{1}{\alpha v_{min}} (\frac{1}{2} z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 + \int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t) z_\epsilon(t) dt) \\
&\leq \frac{1}{\alpha v_{min}} (\frac{1}{2} z_{\epsilon,\alpha}(0)^2 + (\int_0^T z_{\epsilon,\alpha}'(t)^2 dt)^{1/2} (\int_0^T z_\epsilon(t)^2 dt)\,)^{1/2}) \\
&\leq \frac{1}{\alpha v_{min}} (\frac{L}{2} \|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}^2 + v_{max}^{1/2} \|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}} \|z_\epsilon\|_{\mathscr{X}})
\end{aligned}$$

Soit, pour $0 < 1 - \dfrac{L}{2\alpha v_{min}}$:

$$\|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}}^2 (1 - \frac{L}{2\alpha v_{min}}) \leq \frac{v_{max}^{1/2}}{\alpha v_{min}} \|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}} \|z_\epsilon\|_{\mathscr{X}})$$

Il vient donc :

$$\|y_{\epsilon,\alpha}\|_{\mathscr{Y}} \leq f(\alpha) \|z_\epsilon\|_{\mathscr{X}}$$

Avec $f(\alpha) = \dfrac{2 v_{max}^{1/2}}{2\alpha v_{min} - L}$

c.

Soit y_α solution de (7).

Alors comme $z \in H^1(0,T)$ et $y \in L^2(0,L)$, on a donc $\Psi y_\alpha \in H^1(0,T)$ par composition de l'intégrale d'une fonction de L^2 et le la fonction Y_0 de $C^2(0,T)$.

Donc $t \to Y_0'(t) y(Y_0(t))$ est également une fonction de $H^1(0,T)$ et on a presque partout :

$$-Y_0'(t) y_\alpha(Y_0(t)) - \alpha (Y_0'(t) y_\alpha(Y_0(t)))' = z'(t) \tag{6}$$

et $y_\alpha(L) = 0$.

Réciproquement, soit y_α solution de (8), on peut intégrer l'équation entre t et T, et sachant $y_\alpha(L) = 0$:

$$\begin{aligned}\int_t^T [-Y_0'(s)y_\alpha(Y_0(s)) - \alpha(Y_0'(s)y_\alpha(Y_0(s)))']ds &= \int_t^T (\int_{Y_0(s)}^L y_\alpha(x)dx)'ds - \alpha\int_t^T (Y_0'(s)y_\alpha(Y_0(s)))'ds \\ &= \Psi y_\alpha(T) - \Psi y_\alpha(t) - \alpha(Y_0'(T)y_\alpha(Y_0(T))) + \alpha(Y_0'(t)y_\alpha(Y_0(t))) \\ &= -\Psi y_\alpha(t) + \alpha(Y_0'(t)y_\alpha(Y_0(t)))\end{aligned}$$

Donc, avec $z(T) = 0$, on obtient y_α est solution de :

$$\Psi y_\alpha(t) - \alpha(Y_0'(t)y_\alpha(Y_0(t))) = z(t)$$

On pose alors $z_\alpha'(t) = -Y_0'(t)y_\alpha(Y_0(t))$, et on observe que $z_\alpha'(T) = 0$ et $z_\alpha(t) = -\int_{Y_0(t)}^L y_\alpha(x)dx$.
On remplace dans (6) $-Y_0'(t)y_\alpha(Y_0(t))$ par $z_\alpha'(t)$:

$$z_\alpha'(t) - \alpha(-z_\alpha'(t))' = z'(t)$$

On multiplie alors (8) par $z_\alpha'(t)$ et il vient :

$$z_\alpha'(t)^2 + \alpha z_\alpha'(t)z_\alpha'' = z_\alpha'(t)z'(t)$$

On intègre entre 0 et T :

$$\int_0^T z_\alpha'(t)^2dt - \alpha\frac{1}{2}z_\alpha'(0)^2 = \int_0^T z_\alpha'(t)z'(t)dt$$

Par le même raisonnement que la question précédente on calcule l'inégalité :

$$\begin{aligned}\|y_\alpha\|_{\mathscr{Y}}^2 &= \int_0^L y_\alpha(x)^2dx \\ &\leq \frac{1}{v_{min}}\int_0^T z_\alpha'(t)^2dt \\ &\leq \frac{1}{v_{min}}(\frac{\alpha}{2}z_\alpha'(0)^2 + \int_0^T z_\alpha'(t)z'(t)dt) \\ &\leq \frac{1}{v_{min}}(\frac{\alpha}{2}(-Y_0'(0))y_\alpha(0) + (\int_0^T z_\alpha'(t)^2dt)^{1/2}(\int_0^T z'(t)^2dt)\,)^{1/2}) \\ &\leq \frac{1}{v_{min}}(\|z_\alpha'\|_{\mathscr{Y}}\|z\|_{H^1}) \\ &\leq \frac{1}{v_{min}}(v_{max}^{1/2}\|y_\alpha\|_{\mathscr{Y}}\|z\|_{H^1})\end{aligned}$$

Donc :

$$\|y_\alpha\|_{\mathscr{Y}} \leq C_0\|z\|_{H^1}$$

avec $C_0 = \dfrac{v_{max}^{1/2}}{v_{min}}$.

d.

On soustrait à l'équation (6) l'égalité $\Psi y = z$:

$$\Psi(y_\alpha - y) - \alpha Y_0'(t)(y_\alpha - y)(Y_0(t)) = \alpha Y_0'(t)y(Y_0(t))$$

On dérive puisque $y \in H^1(0, L)$ on obtient pour presque tout t :

$$-Y_0'(t)(y_\alpha - y)(Y_0(t)) - \alpha(Y_0'(t)(y_\alpha - y)(Y_0(t)))' = \alpha(Y_0'(t)y(Y_0(t)))'$$

On obtient l'équivalence entre les deux solutions en imposant $(y_\alpha - y)(L) = 0$

On multiplie par $z_1'(t) = -Y_0'(t)(y_\alpha - y)(Y_0(t))$ et il vient :

$$z_1'(t)^2 + \alpha z_1'(t) z_1''(t) = \alpha z_1'(t)(Y_0'(t) y(Y_0(t)))'$$

Et par intégration :

$$\int_0^T z_1'(t)^2 dt - \alpha \frac{1}{2} z_1'(0)^2 = \int_0^T \alpha z_1'(t)(Y_0'(t) y(Y_0(t)))' dt$$

Soit

$$\int_0^T z_1'(t)^2 dt - \alpha \frac{1}{2} z_1'(0)^2 = \int_0^T \alpha z_1'(t)(Y_0''(t) y(Y_0(t)) - Y_0'(t)^2 y'(Y_0(t))) dt$$

$$\begin{aligned}
\|y_\alpha - y\|_{\mathscr{Y}}^2 &\leq \frac{1}{v_{min}} \int_0^T z_1'(t)^2 dt \\
&\leq \frac{1}{v_{min}} (\alpha \frac{1}{2} z_1'(0)^2 + \int_0^T \alpha z_1'(t)(w_{max} y(Y_0(t)) - Y_0'(t)^2 y'(Y_0(t)))) dt) \\
&\leq \frac{1}{v_{min}} (\alpha \frac{1}{2} z_1'(0)^2 + \alpha (\int_0^T z_1'(t)^2 dt)^{1/2} (\int_0^T (w_{max} y(Y_0(t)) - Y_0'(t)^2 y'(Y_0(t))))^2 dt)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{v_{min}} (\alpha \frac{1}{2} z_1'(0)^2 + \alpha (\int_0^T z_1'(t)^2 dt)^{1/2} (\int_0^T (w_{max} y(Y_0(t)))^2 + (Y_0'(t)^2 y'(Y_0(t)))^2 dt)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{v_{min}} (\frac{L^2 \alpha}{2} (-Y_0(0))(y_\alpha(0) - y(0)) + \alpha v_{max}^{1/2} \|y_\alpha - y\|_{\mathscr{Y}} [w_{max} \|y\|_Y + v_{max}^2 \|y'\|_{\mathscr{Y}}]) \\
&\leq \frac{1}{v_{min}} (\frac{L^2 \alpha}{2} v_{max} y(0) + \alpha v_{max}^{1/2} \|y_\alpha - y\|_{\mathscr{Y}}^2 [w_{max} + v_{max}^2] \|y\|_{H^1})
\end{aligned}$$

Or,

$$0 \leq y(0) = -\int_0^L y'(x) dx \leq L^{1/2} \|y\|_{H^1}$$

Ou or,

$$0 \leq y_\alpha - y(0) = -\int_0^L y_\alpha'(x) - y'(x) dx \leq L^{1/2} \|y_\alpha - y\|_{H^1}$$

Donc :

$$\|y_\alpha - y\|_{\mathscr{Y}} \leq (C_1 + C_2 \alpha) \|y\|_{H^1}$$

e.

Pour $0 < 1 - \dfrac{L}{2\alpha v_{min}}$:

$$\begin{aligned}
\|y_{\epsilon,\alpha} - y\|_{\mathscr{Y}} &\leq \|y_{\epsilon,\alpha} - y_\alpha\|_{\mathscr{Y}} + \|y_\alpha - y\|_{\mathscr{Y}} \\
&\leq f(\alpha) \|z_\epsilon\|_{\mathscr{Z}} + \|y_\alpha\|_{\mathscr{Y}} + (C_1 + \alpha C_2) \|y\|_{H^1} \\
&\leq f(\alpha) \|z_\epsilon\|_{\mathscr{Z}} + \|y_\alpha\|_{\mathscr{Y}} + (C_1 + \alpha C_2) \|y\|_{H^1} \\
&\leq f(\alpha) \|z_\epsilon - z\|_{\mathscr{Z}} + (C_0 + 1) \|z\|_{H^1} + (C_1 + \alpha C_2) \|y\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\|y_{\epsilon,\alpha} - y\|_{\mathscr{Y}} \leq f(\alpha) \epsilon + C_3 + C_4 \alpha$$

On note que cette inégalité est valable pour $\alpha > \dfrac{L}{2 v_{min}}$. Une étude plus approffondie du comportement de Y_0 pourrait nous permettre de conclure sous quelle condition cette condition est effectivement vérifiée. Dans ce cas, le choix optimal ext $\alpha^2 = 0(\epsilon)$.

3 Etude du problème inverse, second cas : $c(t)$ connu, on mesure μ_1

Question 7. Résolution du problème inverse par filtre de Kalman

a.

On définit la fonctionnelle moindre carrée à minimiser pour $c(t)$ connu, donc $v(t)$ connu :

$$J_t(u^{in}) = frac12\alpha\|u^{in}\|_{\mathscr{Y}} + frac12\gamma\int_0^t \|\mu_1(t) - \int_0^L xu(t,x)dx\|_{\mathscr{X}}$$

Pour obtenir le problème aux deux bouts, on introduit le Lagrangien lié à la dynamique de l'équation de transport :

$$L_t(u^{in}, q) = J_t(u^{in}) + \langle \partial_t u(t,x) - (ac(t) - b)\partial_x u(t,x), q(t,x)\rangle_{\mathscr{Y}}$$

On note $A(t) = -(ac(t) - b)\partial_x$ et $A(t)^*$ son adjoint. On introduit également les notations suivantes :

— C la fonction d'observation qui à $u(x,t) \to \int_0^L u(x,t)dx$;

— C^* l'adjoint de C pour la norme $\langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{X}}$;

— $S(t)$ le semi groupe C_0 généré par $A(t)$.

Au point selle optimal $(u^{\bar{i}}n, \bar{q})$ la dérivée de Fréchet en u^{in} s'annule :

$$\begin{aligned}\partial_u L_t(u - u^{in}, q)\cdot(\delta u) &= \partial_u J_t(u - u^{in})\cdot(\delta u) - \rangle A^*(t)q, \delta u\langle \\ &= -\gamma\int_0^t \langle S(t)^* C^*(\mu_1(t) - CS(t)u), \delta u\rangle_{\mathscr{X}} + \langle -\partial_t q - A^*(t)q, \delta u\rangle_{\mathscr{Y}}\end{aligned}$$

Soit la dynamique aux deux bouts pour les points optimaux $(\bar{u}, \bar{q})$:

$$\begin{cases}\partial_t\bar{u} - A(t)\bar{u} = 0 \\ \partial_t\bar{q} + A(t)^*\bar{q} = -\gamma S(t)^* C^*(\mu_1(t) - CS(t)\bar{u}) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}^{in} \\ \bar{q}(t) = 0\end{cases}$$

b.

On définit l'estimateur de Kalman $\hat{u}(t)$ comme l'optimum $\bar{u}$ solution de l'équation précédente pour t fixé et le critère correspondant J_t.

On a alors $\hat{y}(t) = \dfrac{1}{\alpha}\bar{q}(0)$

c.

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}_t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\bar{q}_t}{\mathrm{d}s}\bar{q}$$

4 Etude du problème inverse, second cas : $c(t)$ inconnu, on mesure μ_1

Question 8. 4D-Var

a.

On définit la fonctionnelle moindre carrée à minimiser pour $c(t)$ connu, donc $v(t)$ connu :

$$J_t(u^{in}) = frac12\alpha\|u^{in}\|_{\mathscr{Y}} + frac12\gamma\int_0^t \|\mu_1(t) - \int_0^L xu(t,x)dx\|_{\mathscr{X}}$$

Pour obtenir le problème aux deux bouts, on introduit le Lagrangien lié à la dynamique de l'équation de transport :

$$L_t(u^{in}, q) = J_t(u^{in}) + \langle \partial_t u(t,x) + A(u)u(t,x), q(t,x)\rangle_{\mathscr{Y}}$$

On introduit également les notations suivantes :

— $A(u)$ la dynamique non linéaire et $A(u)^*$ son adjoint ;
— C la fonction d'observation qui à $u(x,t) \to \int_0^L u(x,t)dx$;
— C^* l'adjoint de C pour la norme $\langle\ ,\ \rangle_{\mathscr{Z}}$.

Au point selle optimal $(\bar{u^i n}, \bar{q})$ la dérivée de Fréchet en u^{in} s'annule :

$$\begin{aligned}\partial_u L_t(u - u^{in}, q) \cdot (\delta u) &= \partial_u J_t(u - u^{in}) \cdot (\delta u) - \rangle A^*(u)q, \delta u\langle \\ &= -\gamma \int_0^t \langle C^*(u)(\mu_1(t) - C(u)u), \delta u\rangle_{\mathscr{Z}} + \langle -\partial_t q - A^*(u)q, \delta u\rangle_{\mathscr{Y}}\end{aligned}$$

Soit la dynamique aux deux bouts pour les points optimaux $(\bar{u}, \bar{q})$:

$$\begin{cases}\partial_t \bar{u} - A(\bar{u})\bar{u} = 0 \\ \partial_t \bar{q} + A(\bar{u})^* \bar{q} = -\gamma C^*(u)(\mu_1(t) - C(\bar{u})\bar{u}) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}^{in} \\ \bar{q}(t) = 0\end{cases}$$

b.

Pour résoudre ce problème de façon pratique, on peut procéder à une descente de gradient :

$$\begin{cases}u^{n+1} = u^n - \rho \nabla J_t(u^n) \\ \nabla J_t(u^n) = \alpha u^n - \gamma \bar{q}_t(0)\end{cases}$$

Le paramètre de relaxation pourra être choisi comme le rapport des valeurs propres extrêmes de la hessienne.