Matemática Financeira

por Marco Goulart

Janeiro de 2022

Neste documento você irá encontrar um breve resumo sobre os assuntos tratados em aula e um conjunto de exercícios, incluindo as respostas, para fixação do conteúdo. O texto não substitui as aulas e leitura da bibliografia recomendada.

As resoluções completas dos exercícios estão disponíveis em outro documento, e serão fornecidas posteriormente a aula.

Este curso foi elaborado com base no material desenvolvido pelo Professor Artur Santa Catarina, a quem sou imensamente grato pela disponibilização do material.

Sumário

1 Juros Simples e Compostos

A Matemática Financeira é um ramo da matemática aplicada e busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (*time value money*). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira, são: a taxa de juros, o capital e o tempo.

Devemos entender como juro, a remuneração de um capital aplicado a uma certa taxa, durante um determinado período. Em outras palavras, é o dinheiro pago pelo uso de dinheiro emprestado.
Portanto, Juro (J) = preço do crédito.

A existência de juro, decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

- Inflação: a diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período.
- Risco: os juros podem compensar os possíveis riscos do investimento.
- Aspectos intrínsecos da natureza humana: medo, ganância, busca por riqueza material

Normalmente o valor do capital é conhecido como principal (P). A taxa de juro (i), é a relação entre os Juros e o Principal, expressa em relação a uma unidade de tempo. Assim por exemplo, se os juros anuais correspondentes a uma dívida de R$2000,00 (Principal = P) forem R$200,00 (Juros = J), a taxa de juros anual (i) será 200/2000 = 0,10 = 10% ao ano. Indica-se: i = 10% a.a.

Costuma-se especificar taxas de juros anuais, trimestrais, semestrais, mensais etc., motivo pelo qual deve-se especificar sempre o período considerado.

Quando a taxa de juros incide no decorrer do tempo, sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples (Juros simples). Quando a taxa de juros incide sobre o capital atualizado com os juros do período (montante), dizemos que temos um sistema de capitalização composta (Juros compostos).

Na prática, o mercado financeiro utiliza apenas os juros compostos, de crescimento mais rápido (enquanto os juros simples crescem segundo uma função do $1^{\underline{o}}$ grau – crescimento linear, os juros compostos crescem muito mais rapidamente – segundo uma função exponencial).

1.1 Aplicação

A aplicação de juros (especialmente compostos) pode ser vista em diversas atividades em nosso dia a dia. Uma aplicação financeira em um banco, por exemplo, gera um rendimento ao longo do tempo. Para entender quanto teríamos após um determinado período podemos aplicar a fórmula de juros compostos e encontrar o valor acumulado no futuro.

As fórmulas que veremos podem ajudar a responder perguntas como: quanto vou conseguir acumular se eu poupar hoje X reais e colocar em uma aplicação financeira? Quanto vou ficar devendo se eu tomar X reais emprestados hoje para pagar em uma data futura; Que taxa de rendimento eu precisaria obter para atingir um determinado objetivo de poupança em um dado período? Quanto tempo eu precisaria ficar investido em uma determinada alternativa de investimento para atingir uma quantia de dinheiro desejada no futuro?

Para pessoas leigas ou com pouco conhecimento de matemática estas contas podem ser complexas. Devido a fatores como a baixa alfabetização financeira (ex: entendimento do conceito de juros compostos) há uma grande parcela da população brasileira com problemas relacionados a dívidas, golpes de piramides financeiras, ou investimentos pouco adequados ao perfil da pessoa.

Procurando auxiliar a grande parcela da população que desconhece o processo de cálculo de juros o Banco Central do Brasil desenvolveu o aplicativo "Calculadora do Cidadão" (`www.bcb.gov.br/acessoinformacao/calculadoradocidadao`). A calculadora traz um passo a passo para que o usuário encontre valores de: aplicação com depósitos regulares; financiamento com prestações fixas; valor futuro de capital; e correção de valores. Veremos todos esses assuntos em nossas aulas, mas já deixamos a dica do aplicativo para que você possa conhecer e compartilhar com pessoas que possam precisar.

1.2 Definição de Juros Simples

O regime de juro simples, é aquele no qual os juros incidem sempre sobre o capital inicial. Este sistema não é utilizado na prática nas operações comerciais, mas, a análise desse tema, como introdução à Matemática Financeira, é importante.

Considere o capital inicial P aplicado a juros simples de taxa i por período, durante n períodos. Lembrando que os juros simples incidem sempre sobre o capital inicial, podemos escrever a seguinte fórmula, facilmente demonstrável:

$$J = P \times i \times n$$

No final de n períodos, é claro que o capital será igual ao capital inicial adicionado aos juros produzidos no período. O capital inicial adicionado aos juros do período é denominado **montante** ou **valor futuro** (VF, F ou M). Logo, teríamos:

$$F = P + J = P + P \times i \times n = P \times (1 + i \times n)$$

Portanto:

$$F = P \times (1 + i \times n)$$

1.2.1 Exemplo

A quantia de $3.000,00 é aplicada a juros simples de 5% ao mês, durante cinco anos. Calcule o montante ao final dos cinco anos

Temos:

$$P = 3.000, i = 5\% = 5/100 = 0,05, n = 5\,anos = 5 \times 12 = 60\,meses$$

Portanto:

$$F = P \times (1 + i \times n)$$
$$F = 3.000 \times (1 + 0,05 \times 60)$$
$$F = 3.000 \times (1 + 3)$$
$$F = 12.000$$

1.3 Definição de Juros Compostos

O capital inicial (principal) pode crescer, como já sabemos, devido aos juros, segundo duas modalidades a saber: Juros simples - ao longo do tempo, somente o principal rende juros. Juros compostos - após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".
Fórmula para o cálculo de Juros compostos Considere o capital inicial (principal P) \$1000,00 aplicado a uma taxa mensal de juros compostos (i) de 10% (i = 10% a.m.). Vamos calcular os montantes (principal + juros), mês a mês:
Após o 1º mês, teremos: $F_1 = 1.000 \times 1,1 = 1.100 = 1.000 \times (1 + 0,1)^1$
Após o 2º mês, teremos: $F_2 = 1.100 \times 1,1 = 1.210 = 1.000 \times (1 + 0,1)^2$
Após o 3º mês, teremos: $F_3 = 1.210 \times 1,1 = 1.331 = 1.000 \times (1 + 0,1)^3$

Após o nº (enésimo) mês, sendo F o montante, teremos evidentemente:

$$F = 1.000 \times (1 + 0,1)^n$$

De uma forma genérica, teremos para um principal P, aplicado a uma taxa de juros compostos i durante o período n:

$$F = P \times (1 + i)^n$$

onde F = montante ou valor futuro, P = principal ou valor presente, i = taxa de juros e n = número de períodos que o principal "P"(capital inicial) foi aplicado.
NOTA: Na fórmula acima, as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 3 x 12 = 36 meses.

1.3.1 Exemplos

1 – Um capital é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal de 2% (2% a.m.). Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

Solução:

Sabemos que $F = P(1+i)^n$. Quando o capital inicial estiver duplicado, teremos $F = 2P$.
Substituindo, vemos que: $2P = P(1 + 0,02)^n$
(Obs: $0,02 = 2/100 = 2\%$) Simplificando, fica: $2 = 1,02^n$, que é uma equação exponencial simples.
Para resolução é preciso utilizar propriedade dos logaritmos. Teremos então:

$$n = \log_{1,02} 2 = \log 2/\log 1,02 = 0,30103/0,00860 = 35$$

Portanto, o capital estaria duplicado após 35 meses (observe que a taxa de juros do problema é mensal), o que equivale a 2 anos e 11 meses.

2 - Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos $1.000,00 a 2,5% ao mês?
Solução:

$$F = 1000(1 + 0,025)^{12} = \$1.344,89$$

3 - Quanto se deveria pagar hoje para se ter o direito de receber $10.000,00 daqui a 5 anos, a juros de 10% ao ano?
Solução:

$$10.000 = P \times (1 + 0,10)^5$$
$$P = \$6.209,21$$

4 - Calcular qual a taxa de juros a que devemos empregar o capital de $150.000,00 para render no final do período de 6 anos, o montante de $ 251.565,00?
Solução:

$$251.565 = 150.000 \times (1+i)^6$$
$$1,6771 = (1+i)^6$$
$$i = 9\%a.a.$$

5 - O capital de $37.500,00 é colocado no regime de capitalização composta à taxa de 9% ao trimestre. No fim de um certo prazo, o montante atingiu $62.891,25. Calcular o número de meses.

Solução:

$62.891,25 = 37.500 \times (1+0,09)^n$

$n = 6\,trimestres = 18\,meses$

1.4 Exercícios Propostos de Juros Simples

Em **negrito** estão destacados os exercícios que devem ser resolvidos na atividade.

1 - Calcular os juros simples produzidos por $40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a. , durante 125 dias.

Resposta: J = $5000,00

2 - Um empréstimo de $8.000,00 rendeu juros de $2.520,00 ao final de 7 meses. Qual a taxa de juros do empréstimo?

Resposta: i = 4,5% a.m.

3 - Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende $3.500,00 de juros em 75 dias?

Resposta: P = $116.666,67

4 - Por quanto tempo um capital de $11.500,00 foi aplicado para que rendesse $1.725,00 de juros, sabendo-se que a taxa de juros de mercado é de 4,5% a.m.?

Resposta: n = 3,3333... meses = 3 meses e 10 dias.

5 - Que capital produziu um montante de $20.000,00, em 8 anos, a uma taxa de juros

simples de 12% a.a.?

Resposta: P = \$10.204,08

6 - Calcule o montante resultante da aplicação de \$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

Resposta: F = \$72.960,42

7 - A que taxa mensal o capital de \$38.000,00 produzirá o montante de \$70.300,00 em 10 anos?

Resposta: i = 0,7083 % a.m.

8 - Um capital é aplicado a juros simples de 5% ao semestre (5 % a.s.), durante 45 dias. Após este prazo, foi gerado um montante de \$886.265,55. Qual foi o capital aplicado?

Resposta: P = \$875.324,00

9 - Que capital aplicado a 3% ao bimestre (3% a.b.), por um prazo de 75 dias, proporcionou um montante de \$650.000,00?

Resposta: P = \$626.506,02

10 - Um capital de \$5.380,00 aplicado por 3 meses e 18 dias, rendeu \$1839,96 de juros ao final do período. Qual a taxa mensal de juros simples?

Resposta: i = 9,5% a.m.

11 - Um capital P foi aplicado a juros simples de 15% ao bimestre (15% a.b.), por um prazo de 5 meses e 13 dias e, após este período, o investidor recebeu \$10.280,38. Qual o valor P do capital aplicado?

Resposta: P = \$ 7.304,00

12 - Obteve-se um empréstimo de \$10.000,00, para ser liquidado por \$14.675,00 no final de 8 meses e meio. Qual a taxa de juros anual cobrada nessa operação?

Resposta: i = 66% a.a.

13 - Em quanto tempo um capital aplicado a 48% a.a. dobra o seu valor?
Resposta: n = 2,088333... anos = 25 meses.

14 - Determinar o capital necessário para produzir um montante de $798.000,00 no final de um ano e meio, aplicado a uma taxa de 15% ao trimestre (15% a.t.).
Resposta: P = $420.000,00

15 - Determinar o montante correspondente a uma aplicação de $450.000,00 por 225 dias, à taxa de 5,6% ao mês (5,6% a.m.).
Resposta: F = $639.000,00

16 - Se possuo um título com valor nominal de $15.000,00 com vencimento daqui a 2 anos e a taxa de juros simples correntes é de 28% a.a. , qual o valor atual deste título nas seguintes datas:
a) hoje
b) daqui a um ano
c) 4 meses antes do vencimento.
Resposta:
a) valor atual do título hoje:
P = $9.615,38
b) valor atual do título daqui a um ano: P = $11.718,75
c) valor atual do título 4 meses antes do vencimento: P = $13.719,51

17 - João tomou emprestado $20.000,00 de Carlos para pagá-lo após 2 anos. A taxa acertada de juros simples foi de 30% a.a. . Quanto Carlos poderia aceitar, se 6 meses antes do vencimento da dívida, João quisesse resgatá-la e se nesta época o dinheiro valesse 25% a.a. ?
Resposta: P = $ 28.444,44

18 - João tomou emprestado certa quantia de Carlos à taxa de juros simples de 28,8% a.a.. Sabendo-se que João pagou $2.061,42 para Carlos, saldando a dívida 2 meses antes do seu vencimento e que nesta época a taxa corrente de mercado era de 25,2% a.a., quanto João tomou emprestado e qual era o prazo inicial se os juros previstos eram de $648,00?
Resposta: n = 18 meses

19 - João aplicou $10.000,00 à taxa de 30% a.a. pelo prazo de 9 meses. Dois meses antes da data de vencimento, João propôs a transferência da aplicação para Paulo. Quanto Paulo deverá pagar pelo título, se a taxa de juros simples do mercado for de 35% a.a. ?
Resposta: O valor justo que Paulo deverá pagar pelo título é $11.574,80.

20 - Quanto tempo deverá permanecer aplicado um capital para que o juro seja igual a duas vezes o capital, se a taxa de juros simples for igual a 10% a.a.?
Resposta: n = 20 anos.

1.5 Exercícios Propostos de Juros Compostos

Em **negrito** estão destacados os exercícios que devem ser resolvidos na atividade.

1 – Um capital de $200.000,00 é aplicado a juros compostos de 10% ao ano. Calcule o montante após 4 anos.
Resposta: $292820,00

2 – Um certo capital é aplicado em regime de juros compostos à uma taxa anual de 12%. Depois de quanto tempo este capital estará triplicado?
Resposta: aproximadamente 9,7 anos ou aproximadamente 9 anos e 9 meses.

3 - Aplicando-se $1.000,00 por um prazo de dois anos a uma taxa de 5% ao semestre, qual será o montante no fim do período?
Resposta: $ 1.215,51

4 - Um capital de $2.000.000,00 é aplicado durante um ano e três meses à taxa

de 2% a.m. Quais os juros gerados no período?

Resposta: $ 691.736,68

5 - Determinado capital aplicado a juros compostos durante 12 meses, rende uma quantia de juros igual ao valor aplicado. Qual a taxa mensal dessa aplicação?

Resposta: 5,94% a.m.

6 - Calcule o montante de $1.000,00 aplicados a 10% a.a. durante 50 dias.

Resposta: $1.013,89.

7 - Quanto deverá receber uma pessoa que empresta R$ 500,00 por 8 meses, a taxa de 10% ao mês?

Resposta: 1.071,79

8 - Determinar a taxa de juros correspondente a uma aplicação de R$200,00 por 6 meses e valor de resgate de 325,00.

Resposta: 8,43%

9 - Uma pessoa emprestou a um amigo a importância de R$1.000,00 a taxa de 120% ao ano, pelo prazo de 3,5 anos. Determinar o valor de resgate.

Resposta: 15.793,54

10 - Uma letra de cambio foi emitida por R$100,00 e resgatada por R$200,00. Sabendo-se que a taxa de rendimento, de 210% ao ano, calcular o prazo.

Resposta: 0,61 ou 221 aproximadamente.

11 - A que taxa de juros deverá ser aplicado um capital qualquer para que ao final de 24 meses, o montante seja triplo do valor aplicado?

Resposta: 4,68% a.m.

2 Relações de Equivalência

Vimos que a Matemática Financeira é um ramo da matemática aplicada que busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (*time value money*). E que as principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira, são: a taxa de juros, o capital e o tempo.

Uma maneira simples de entender este conceito é relaciona-lo com o aluguel de um bem tangível. Suponha que você tenha uma moto e um colega seu necessite de uma moto. Vocês entra em um acordo no qual ele pode usar a sua moto mediante o pagamento de um valor (aluguel). Este valor de aluguel leva em conta os riscos relacionados ao uso da moto pelo seu colega (ele pode sofrer um acidente), e o fato de que você não poderá usar a moto. O mesmo ocorre com o dinheiro, se você empresa dinheiro você não poderá consumir hoje, e corre o risco de não receber o dinheiro de volta. O "preço"do aluguel do dinheiro é a taxa de juro.

Percebemos então que \$100 hoje não é a mesma coisa do que \$100 daqui um ano, pois sofrem a influencia deste "preço do dinheiro", que são os juros **compostos**.

Agora vamos explorar um conjunto maior de situações, conhecidas como "relações de equivalência". Até então tratamos somente da situação de um valor no presente ou no futuro. Agora vamos nos aprofundar no processo de cálculo e entender como analisar a situação de uma série de pagamentos.

2.1 Aplicação

A resolução de determinados problemas é facilitada pela aplicação dos chamados "fatores de equivalência". Vamos entender este conceito através de um exemplo. Qual seria o valor que você esperaria obter no futuro ao emprestar \$1.000 hoje ao seu colega, com juros de 6%a.a., em um prazo de 4 anos? Lembre-se que estamos utilizando **juros compostos**.

Temos que achar F(ou VF) dado o P(ou VP):

P = 1.000; n = 4; i = 6%a.a.

$$F = P \times (1+i)^n$$
$$F = 1.000 \times (1+0,06)^4$$
$$F = 1.000 \times 2,2624$$
$$F = \$1.262$$

Suponha agora a situação inversa. Você quer achar um valor no presente, partindo de um valor no futuro. Imagine que você quer economizar para uma viagem que pretende realizar em 4 anos e sabe que precisará de \$1.262 para essa viagem. Então você encontra uma aplicação que rende 6%a.a. e quer saber quanto precisa depositar hoje nesta aplicação. Temos que achar P(ou VP) dado o F(ou VF):
F = 1.262; n = 4; i = 6%a.a.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$
$$P = \frac{1.262}{(1+0,06)^4}$$
$$P = \frac{1.262}{2,2624}$$
$$P = \$1.000$$

Como você deve ter percebido há uma parte da equação que é igual para os dois casos, é o fator $(1+i)^n$. Então para qualquer valor presente ou valor futuro que fosse capitalizado por 4 anos a uma taxa de juros de 6%a.a. poderíamos utilizar este mesmo fator, facilitando bastante o cálculo. Há uma notação internacional que facilita a visualização do fator, o primeiro exemplo seria demonstrado assim (achar F dado P):

$(1+i)^n$ - Tabelado - (F / P ; i ; n)
$(1+i)^n$ - Tabelado - (F / 1.000 ; 6% ; 4)

Existem tabelas que apresentam estes fatores já calculados, então para encontrar o resultado poderíamos buscar o fator na tabela e depois multiplicar os \$1.000 pelo fator encontrado. Na prática estas tabelas são utilizadas somente por pessoas que atuam de forma constante com este tipo de operação (ex: crediário), em geral os cálculos são feitos através de calculadora financeira ou planilha. Existem tabelas de fatores para as seguintes relações:

- Relação entre Valor Presente (P ou VP) e Valor Futuro (F ou VF)
- Relação entre Valor Presente (P ou VP) e Amortização (A) ou Pagamento (PGTO ou PMT)
- Relação entre Valor Futuro (F ou VF) e Amortização (A) ou Pagamento (PGTO ou PMT)

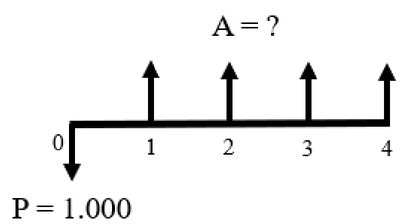
Como já aprendemos a relação entre valor presente e valor futuro, vamos analisar aqui somente os exemplos com séries uniformes, também conhecidas como séries de amortização ou pagamento.

2.2 Séries Uniformes e Exemplos

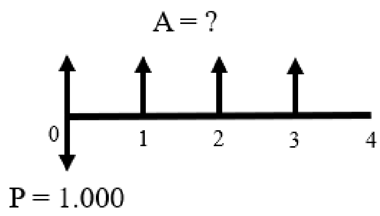
Voltando para o exemplo do empréstimo, suponha agora que você quer receber o valor emprestado em parcelas constantes ao longo de quatro anos, e não mais em uma única parcela ao final do quarto ano.

Por convenção o padrão é o recebimento ao final do período (série uniforme postecipada), mas também é possível considerar o fluxo de forma antecipada, ou seja, no início do período (série uniforme antecipada). Tanto em planilha eletrônica quanto na calculadora financeira é necessário informar quando se tratar de um fluxo antecipado.

Desenhando o fluxo da nova situação do empréstimo teríamos a seguinte figura:



Agora vamos ver como ficaria a figura do fluxo antecipado. Vale ressaltar que neste caso você estaria recebendo o primeiro pagamento no momento do empréstimo (período 0).



Observe que no fluxo antecipado continuamos com quatro períodos, mas o primeiro recebimento ocorre no mesmo momento da concessão do empréstimo. Um exemplo mais comum de ocorrência deste tipo de operação é a compra de um produto de forma parcelada, sendo a primeira parcela no ato da compra.

As contas de séries uniformes também podem ser feitas com o uso de fatores, mas para facilitar a compreensão apresentamos abaixo todas as fórmulas completas (séries postecipadas):

Achar F dado A:

$$F = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Achar P dado A:

$$P = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}$$

Achar A dado F:

$$A = F \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Achar A dado P:

$$A = P \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Existem diversas aplicações para as relações de equivalência: Qual será a parcela de um empréstimo que peguei? Quanto devo economizar para minha formatura? Quando vou conseguir acumular para aposentadoria se eu poupar uma determinada quantia? E assim por diante. Vamos resolver passo a passo algumas destas situações.

2.2.1 Qual a parcela do empréstimo?

Paulo está interessado em comprar uma moto cujo preço à vista é \$9.000. Se Paulo der uma entrada de \$3.000 e pagar o restante em 12 meses, qual será o valor da prestação se a taxa for de 3% ao mês?

Aqui temos um valor presente (o que peguei emprestado) e queremos achar uma parcela ou prestação. Observe que foi pago um valor de entrada entrada, portanto o valor financiado é de \$6.000 e não \$9.000

$$A = P \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$
$$A = 6.000 \times \frac{0,03 \times (1+0,03)^{12}}{(1+0,03)^{12} - 1}$$
$$A = 6.000 \times \frac{0,03 \times 1,4257}{1,4257 - 1}$$
$$A = 602,85$$

2.2.2 É melhor comprar a prazo ou à vista?

Uma televisão é anunciada nas Casas Bahia pelo valor de R\$ 2.500 à vista, ou em 5x sem juros (5x500). Você consulta sobre a possibilidade de parcelar em 10x, e o vendedor informa que neste caso seriam cobrados juros de 6,0% a.m. Considerando esta taxa, por quanto a loja "deveria" vender o produto à vista?

Essa é uma situação comum no Brasil na compra de eletroeletrônicos, as lojas indicam que o valor a prazo e à vista são o mesmo. Sabemos que esta situação não pode ser verdadeira devido ao valor do dinheiro no tempo, portanto o que as lojas estão fazendo é "forçar"o consumir a comprar o produto com um empréstimo, que já está embutido no preço "à vista".

Conhecendo a taxa de juros praticada pela empresa podemos calcular qual seria o valor esperado que o bem realmente deveria ser vendido na condição à vista. Para isso vamos considerar as cinco parcelas de \$500 como nossa série de pagamentos, e encontrar o valor presente desta série descontando a fluxo a taxa de 6,0%a.m.

$$P = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}$$

$$P = 500 \times \frac{(1+0,06)^5 - 1}{0,06 \times (1+0,06)^5}$$
$$P = \$2.106,18$$

Se a loja oferecesse o bem à vista nas mesmas condições de juros que ela prática, o seu preço deveria ser de $2.106, uma diferença de quase $400.

Na prática as grandes lojas não negociam essa condição, mas existem situações em que o lojista oferece algum desconto. Cabe ao cliente questionar e exercer sua cidadania financeira.

2.2.3 Quanto vou ter no futuro se eu poupar periodicamente?

José consegue separar R$ 5.000,00 para investir todo ano. Ele pretende fazer isto por 30 anos. A alternativa de investimento que escolheu rende 8% a.a. Quanto dinheiro terá ao final do período de acumulação?

Período de acumulação é um termo utilizado em finanças para indicar o tempo em que uma pessoa está acumulando recursos que irá desfrutar no futuro. Sabemos então que as parcelas são de $5.000 e se quer saber o montante obtido no futuro, ao final dos 30 anos.

$$F = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$F = 5.000 \times \frac{(1+0,08)^{30} - 1}{0,08}$$
$$F = \$566.416$$

Depois de poupar por 30 anos o montante acumulado será de $566.416, um valor considerável para uma aposentadoria mais tranquila.

2.3 Exercícios Propostos

Em **negrito** estão destacados os exercícios que devem ser resolvidos na atividade.

1 - A que taxa de juros deverá ser aplicado um capital qualquer para que, ao final de 24 meses, o montante seja o triplo do valor aplicado?

i = 4,68% a.m.

2 - Quanto se deve investir hoje a juros de 8% ao ano capitalizados trimestralmente, para se ter R$ 15.000,00 daqui a 12 anos?

P = 5.798,06

3 - Qual é o montante acumulado a partir do principal R$ 2.895,00 empregado a 3,5% ao mês durante 42 meses?

F = 12.278,44

4 - Qual é o valor atual de uma série uniforme de R$ 400,00 durante 12 meses, a juros de 2,5% ao mês?

P = 4.103,11

5 - Quanto deveremos depositar trimestralmente numa conta que rende 6% por trimestre, para termos R$22.800,00 daqui a 8 anos e 9 meses?

A = 204,60

6 - Uma dívida de R$ 1.000,00 deve ser paga em 12 parcelas mensais, a juros de 3% ao mês. Qual o valor da mensalidade?

A = 100,46

7 - Um artigo custa R$ 220,00 à vista. O pagamento a prazo implica num sinal de R$ 50,00 e quatro mensalidades de R$ 50,00. Qual é a taxa de juros cobrada? (atenção para o tipo de série!)

i = 6,83%

8 - A moto custa R$ 4.000. A proposta é de R$ 500 de entrada e o restante em 24 prestações mensais, a 5% a.m. De quanto será a prestação?

A = 253,65

9 - Quanto devo depositar hoje para retirar R$ 1.000 por mês durante 5 anos? A taxa é de 1% a.m. E para retirar indefinidamente?

a) 44.955,04

b) 100.000,00

10 - Qual o valor da prestação, para uma venda no valor de R$ 1000, em três pagamentos mensais e iguais, sendo o primeiro no ato da venda, a 2% a.m.?

A = 339,96

11 - Depositando R$ 1000 por mês, a partir de hoje e sempre em início de mês, por 24 meses, a 1% a.m., quanto terei acumulado ao final do 24o mês?

F = 27.243,20

12 - Pretendo, ao final deste mês, iniciar uma série de depósitos mensais por 5 anos para criar meu fundo de aposentadoria, numa aplicação que rende 1% ao mês. Ao final desses 5 anos, pretendo iniciar as retiradas de R$ 1.000,00 por mês por 20 anos. Quanto devo depositar mensalmente? E se eu pretender retirar R$ 1.000,00 mensais, indefinidamente, de quanto devem ser os depósitos?

a) 1.112,03

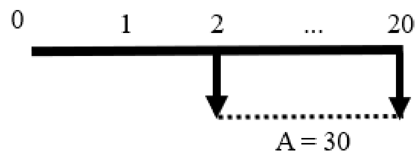
b) 1.224,44

13 - Estamos em 20 de Abril, em uma loja. O preço de uma mercadoria é de R$ 1000, podendo ser pago em 4 vezes, sem acréscimo, todo dia 20, pelo cartão de crédito da loja, a partir de 20 de Maio. O cliente propõe pagar à vista. Que desconto poderia ser dado pela loja, se ela trabalha com juros de 8% a.m.?

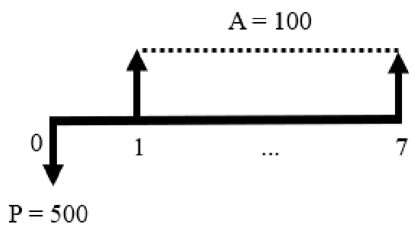
R: 171,96

14 - Calcule o valor indicado nos seguintes fluxos de caixa:

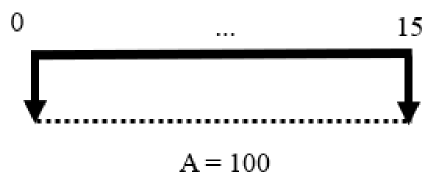
a) Achar P (i=10%) R: 228,13



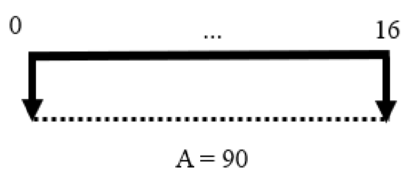
b) Achar i R: 9,2%



c) Achar F (em 15) i=10% R: 3954,47



d) Achar P (i=8%) R: 886,62



3 Taxas efetivas e troca de taxas

Até agora as taxas de juros foram utilizadas sem grandes questionamentos. No entanto, muitas vezes as taxas não são apresentadas da forma que as necessitamos para realizar os cálculos. As taxas podem ser apresentadas de forma a iludir quem tenha que arcar com custos decorrentes delas.

As taxas de juros devem apresentar periodicidade condizente com a capitalização que se está utilizando. Uma prestação mensal, por exemplo, deve ser calculada com base em uma taxa mensal. Quando falamos em capitalização estamos nos referindo ao processo de formação e incorporação de juros ao capital, conforme o exemplo que vimos no Capítulo 1.

As taxas são consideradas **equivalentes** se, quando aplicadas ao mesmo capital "P"durante o mesmo período de tempo, através de diferentes períodos de capitalização (ex: mensal e anual), produzem o mesmo montante final "F".

Quando pensamos em "juros simples"a equivalência de taxas é obtida pela multiplicação ou divisão da taxa. Por exemplo, 12%a.a. é equivalente a 1% ao mês (12%/12 meses = 1%). O cálculo de equivalência para juros compostos é um pouco mais elaborado, e será nosso foco neste capítulo. As vezes as taxas podem ser apresentada de forma **aparente**. Isso significa que ela é apresentada com uma periodicidade diferente de sua capitalização. Em geral este artificio é utilizado para ludibriar a outra parte, ou dar uma "aparência"de um custo menor. Quando temos uma taxa aparente precisamos transformá-la em uma **taxa efetiva**.

Taxa de juro **efetiva** é a taxa de juros expressa em um período igual ao da capitalização.

3.1 Aplicação

Vamos tratar exclusivamente da aplicação com base em juros compostos. A forma mais usual de uso de uma **taxa aparente** é aquela com objetivo de ludibriar o pagador dos juros.

Ao ir até uma loja para comprar um produto a prazo você pode se deparar com o seguinte anúncio: taxa de 30% ao ano com capitalização mensal. Como o período da taxa é diferente do período de capitalização sabemos que se trata de uma taxa aparente. Mas o que isso significa para o seu bolso?

Devemos encontrar a taxa efetiva referente a esta taxa aparente. Como se trata de uma conversão de taxa anual para mensal, basta dividir a taxa pelo número do período (1 ano tem 12 meses). Logo temos que a taxa efetiva é de 2,5% ao mês com capitalização mensal (30/12=2,5). Observe que fizemos o cálculo como se fossem juros simples, e ai está o "erro"da taxa aparente.
Agora vamos encontrar a taxa equivalente de 2,5% ao mês, para o período anual. Para fazer essa conta utilizamos a fórmula de equivalência de taxas:

$$(1+i)^n = (1+i)^n$$
$$(1+i_{a.a.})^{n_{a.a.}} = (1+i_{a.m.})^{n_{a.m.}}$$
$$(1+i_{a.a.})^1 = (1+0,025)^{12}$$

Observe que devo fazer a equivalência do n, ou seja, 1 ano é equivalente a 12 meses.

$$(1+i_{a.a.})^1 = 1,3448$$
$$i_{a.a.} = 1,3448 - 1$$
$$i_{a.a.} = 0,3448$$
$$i_{a.a.} = 34,48\%$$

Percebemos que a taxa **equivalente** a 2,5%a.m. é 34,48%a.a., e não 30%a.a. como apresentado pela loja na forma de uma taxa **aparente**. Podemos testar a equivalência das taxas fazendo a conta do "F". Vamos supor que o valor do produto é $1.000. Calculando com a taxa mensal temos:

$$F = 1.000 \times (1+0,025)^1 2$$
$$F = 1.000 \times 1,3448$$
$$F = 1.344,80$$

Agora vamos fazer a mesma conta utilizando a taxa anual equivalente de 34,48%a.a.:

$$F = 1.000 \times (1+0,3448)^1$$
$$F = 1.000 \times 1,3448$$
$$F = 1.344,80$$

Independente do período temos o mesmo valor no futuro, que é a definição de uma taxa equivalente. Se fizéssemos a conta utilizando a taxa **aparente** de 30%a.a. chegaríamos a um valor menor:

$$F = 1.000 \times (1 + 0,30)^1$$
$$F = 1.000 \times 1,30$$
$$F = 1.300$$

Ou seja, você teria a impressão de que estaria pagando menos pelo produto (1.300), quando na verdade estaria pagando 1.344,80.

Uma forma mais simples de realizar o cálculo de equivalência de taxas que fizemos no início deste exemplo é através da fórmula:

$$i_{quero} = (1 + i_{tenho})^{\frac{n_{tenho}}{n_{quero}}} - 1$$

Se queremos encontrar uma taxa equivalente anual para 2,5%a.m., então temos a taxa mensal e queremos a anual, logo:

$$i_{quero} = (1 + 0,025)^{\frac{12}{1}} - 1$$
$$i_{quero} = (1,025)^{12} - 1$$
$$i_{quero} = 1,3448 - 1$$
$$i_{a.a.} = 0,3448$$

O n é sempre a relação entre os períodos, no caso de ano (o que eu quero) e mês (o que eu tenho) é de 1 para 12.

3.2 Exemplos

Na hora de realizar um financiamento é comum serem cobradas outras taxas além do custo do dinheiro (juros), por exemplo: impostos, seguros, custos administrativos, análise de crédito, abertura de cadastro, etc. O custo efetivo total (CET) é uma taxa de juros **efetiva** que representa o custo total de uma operação financeira.

Exemplo: dado um empréstimo de R$1.000,00 para ser pago em 5 prestações mensais,

com juros de 12% ao ano. Considere ainda que sejam incluídos IOF de R$10,00 e tarifa de confecção de cadastro de R$50,00. Calcule a CET mensal desta operação.
O primeiro passo é encontrar a taxa equivalente mensal, pois as prestações são mensais. Temos uma taxa de 12%a.a. e queremos uma taxa mensal:

$$i_{quero} = (1 + i_{tenho})^{\dfrac{n_{tenho}}{n_{quero}}} - 1$$
$$i_{quero} = (1 + 0,12)^{\dfrac{1}{12}} - 1$$
$$i_{quero} = (1,12)^{0,0833} - 1$$
$$i_{quero} = 1,009488 - 1$$
$$i_{a.m.} = 0,0095$$
$$i_{a.m.} = 0,95\%$$

Note que o expoente é uma fração, pois buscamos uma taxa para um período menor do que aquele que temos.
Agora vamos calcular o valor da prestação considerando a taxa mensal equivalente encontrada. Temos um valor de empréstimo $P = R\$1.000,00$, uma taxa $i = 0,95\% a.m.$, um prazo $n = 5$ meses, e queremos encontrar o A, ou a série de pagamentos mensais:

$$A = P \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$
$$A = 1.000 \times \frac{0,0095 \times (1+0,0095)^5}{(1+0,0095)^5 - 1}$$
$$A = 205,73$$

Encontramos o valor da parcela (205,73). Mas como existem outros custos relacionados ao empréstimo, não estamos recebendo 1.000, e sim 940, que são os 1.000 menos o IOF e a tarifa de confecção de cadastro (1000-10-50=940).Para encontrar o CET vamos realizar uma nova conta com a fórmula de prestações (A dado P) mas desta vez consideraremos o valor de $P = 940$, $A = 205,73$ e vamos encontrar o i:

$$A = P \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$
$$205,73 = 1.000 \times \frac{i \times (1+i)^5}{(1+i)^5 - 1}$$

Este cálculo é mais complexo, por isso precisamos recorrer a uma calculadora financeira ou planilha eletrônica. Utilizando a função "TAXA"do Excel encontramos o valor de

$i = 3,08\%$.
Percebemos que a taxa CET de 3,08%a.m. que leva em consideração todos os custos da operação de crédito, é muito superior a taxa de juros de 0,95%a.m. anunciada.
Na prática as instituições financeiras devem sempre apresentar a taxa CET quando houverem outros custos envolvidos na operação, por isso fique atento a esta taxa quando fizer qualquer operação de crédito.

3.3 Exercícios Propostos

Em **negrito** estão destacados os exercícios que devem ser resolvidos na atividade.

3.3.1 Conversão de taxas e taxa aparente

1 - Calcular a taxa efetiva anual equivalente às seguintes taxa nominais ou aparentes:
a) 12% a.a. com capitalização mensal
b) 10% ao semestre com capitalização trimestral
c) 24% ao semestre com capitalização mensal;
d) 1% ao mês no regime de juros simples;
Respostas:
a) 12,68% a.a. b) 21,55% a.a. c) 60,1% a.a. d) 12% a.a.

3.3.2 Operações com Títulos

2 - Em 01/01/98, um investidor adquiriu em um Banco um título por R$ 100.000,00 para ser resgatado em 180 dias rendendo 2% a.m.. Em 01/03/98 um segundo investidor propõe ao primeiro a aquisição deste título. Quanto deve oferecer se a TMA for de 2,5% a.m.?
Resposta: P = 102.024,76

3 - Admita que uma empresa tenha emitido $ 3,5 milhões em commercial papers por 180 dias. A remuneração oferecida aos aplicadores é uma taxa de

desconto de 1,2% a.m. (7,2% a.s.). A empresa incorre, ainda, em despesas diversas equivalentes a 0,4% do valor da emissão. Calcular o valor líquido recebido pela empresa emitente e o custo efetivo mensal da operação. Obs. Commercial papers são uma forma de financiamento onde os juros e outros custos da operação são cobrados antecipadamente.

Resposta: \$3.234.000 e 1,3261% a.m.

4 - Uma empresa decidiu captar \$9 milhões por meio de comercial papers por 90 dias. A empresa oferece aos investidores uma taxa de desconto de 2,4% no trimestre. A empresa ainda incorre em custos na ordem de 0,5% do valor da captação. Apurar o valor de negociação total do título, o valor líquido obtido pela empresa e o custo efetivo total da operação.

Resposta: \$8.784.000, \$8.739.000 e 2,9866% ao trim.

5 - Um título de R\$ 100.000,00 rende 6,5% a.m. Se a empresa emissora quiser resgatar o título ao cabo de 3 meses e 10 dias, quanto deverá pagar?

Resposta: 123.357,44

6 - Para descontar duplicatas de 60 dias, um Banco cobra 6% a.m., mas de forma antecipada. Para descontar um valor de R\$100.000,00, qual seria a taxa anual efetiva? Desconsidere IOF e reciprocidades.

Resposta: 115,33% a.a.

7 - Se um fundo de investimentos com capitalização diária está rendendo 6% a.m., qual é a taxa efetiva anual?

Resposta: 105,29% a.a.

3.3.3 Relações de Equivalência

8 - Um financiamento com taxa de 12% a.m., capitalizada trimestralmente, terá que taxa efetiva anual?

Resposta: 242% a.a.

9 - Quanto se deve investir hoje a juros de 8% ao ano capitalizados trimestralmente, para se ter R$ 15.000,00 daqui a 12 anos?

Resposta: P = 5.798,00

10 - Quanto deveremos depositar trimestralmente numa conta que rende 6% por trimestre, para termos R$22.800,00 daqui a 8 anos e 9 meses?

Resposta: A= 204,60

11 - Uma dívida de R$ 1.000,00 deve ser paga em 12 parcelas mensais, a juros de 12% a.a. capitalizado ao mês. Qual o valor da mensalidade?

Resposta: A = 88,85

12 - Qual a taxa efetiva anual equivalente a 2% ao mês, capitalizados mensalmente?

Resposta: 26,82% a.a.

4 Inflação, Taxa Global e Taxa Real

A trajetória econômica passada de nosso país é de grande instabilidade, principalmente na referência que temos do dinheiro. As gerações da década de 80 em diante não deve ter muitas recordações dos movimentos de hiperinflação. Mas as gerações das décadas de 70 e anteriores tem tudo muito bem guardado na memória: corridas ao supermercado e posto de combustível, confisco da poupança bancária, aplicações na taxa overnight, instabilidade, hiperinflação (perda significativa do poder de compra).

Mas o que é inflação? Em alguns sinais de rua da cidade de Florianópolis pessoas vendem diversas mercadorias, como panos de prato. Geralmente o vendedor escreve um valor (ex: R$10) e abaixo do valor uma quantidade de panos de prato que ele está vendendo por aquele valor. É a inflação do pano de prato.

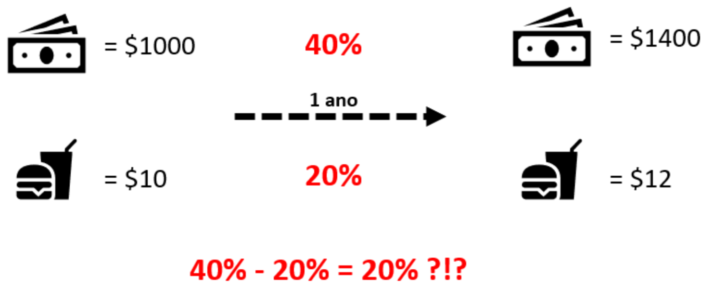
É curioso notar as variações na quantidade de panos de prato. Às vezes, de um mês para outro, a quantidade que você consegue comprar muda de 5 para 3 panos. Isso significa que o preço de cada pano variou de R$2 para R$3,33, uma variação de 66%! É mais ou menos isso que a geração de 1970 e anteriores passou. Pior, em alguns momentos essas variações ocorriam em um mesmo dia!

Isso significa que por muito tempo o brasileiro perdeu a referência do poder de compra do dinheiro, perdeu o interesse de observar as variações neste poder de compra, e esteve impossibilitado de lidar com situações que envolvem planejamento, crédito, e formação de poupança: se você tinha dinheiro então o melhor a fazer era comprar tudo o que podia, e comprar à vista porque não existia crédito. A esperança de segurança financeira era a aposentadoria do governo.

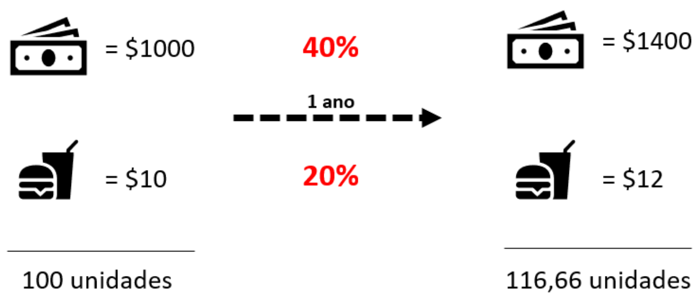
Atualmente a situação se estabilizou, após reformas iniciadas em 1994 o país entrou em uma nova condição de controle da inflação. Isso pode ser observado através de índices que medem a inflação, como o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), e o Índice Geral de Preços ao Mercado (IGPM). Cada índice possui uma metodologia própria que busca verificar qual a variação de preços de uma cesta de bens e serviços em um determinado período.

4.1 Aplicação

O principal objetivo de acompanhar a inflação é avaliar se há um ganho real em relação a inflação, ou seja, se um determinado incremento foi superior ao crescimento geral dos preços. Imagine que você tenha uma renda de \$1.000 e goste e gaste toda essa renda consumindo BigMac's. Atualmente o preço do BigMac é de \$10 então você pode consumir 100 unidades com essa renda. Após um ano essa renda aumentou 40%, e o preço do BigMac aumentou 20%.



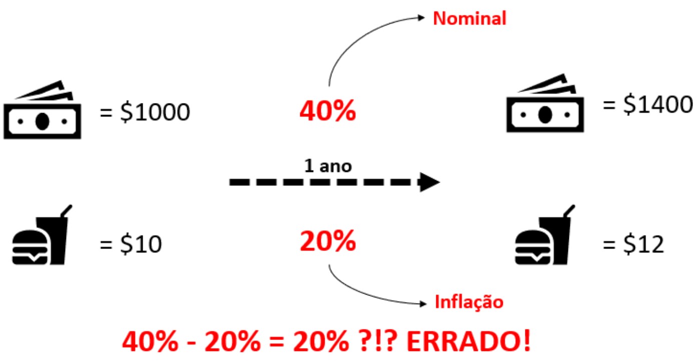
Um erro comum é dividirmos as duas variações percentuais e chegarmos a conclusão de que houve um ganho de 20%. Mas esta conta não representa a real variação do poder de compra.



Dividindo novamente a renda pelo preço do BigMac chegamos a uma nova capacidade de compra:116 unidades.

Logo, o ganho real não foi de 20%, mas de 16,6%. Apesar do seu salário ter aumentado em 40%, o fato dos preços terem subido 20% fez com que o seu novo poder de compra aumentasse em 16,6 unidades de BigMac.

Neste exemplo a taxa de 40% do crescimento da renda é uma **taxa global** (também chamada de nominal), ou seja, é uma taxa onde está "embutida"a inflação. A taxa de 20% de variação do preço do BigMac é a própria **inflação**. E a taxa de ganho de poder de compra (16,6%) é chamada de **taxa real**.



Não escolhemos o exemplo do BigMac por mera conveniência, na prática a revista The Economist acompanha a variação dos preços do BigMac em diversos países e faz a comparação da variação desses preços. Como o produto é padronizado acredita-se que esta seja uma boa medida para comparar a variação de preços entre países e a relação entre suas moedas (ex. Real vs. Dólar).

Concluindo nosso exemplo, chegamos as fórmulas para o cálculo correto de taxas nominais, reais e inflação.

Para encontrar uma Taxa Nominal (aquela que inclui a inflação):

$$TaxaNominal = [(1 + TaxaReal) \times (1 + TaxaInflacao)] - 1$$

Para encontrar uma Taxa Real (aquela que exclui a inflação):

$$TaxaReal = \frac{(1 + TaxaNominal)}{(1 + TaxaInflacao)} - 1$$

Para encontrar a Inflação (índice de correção dos valores)):

$$TaxaInflacao = \frac{(1 + TaxaNominal)}{(1 + TaxaReal)} - 1$$

Atenção: Observe que Taxa Nominal e Taxa Global são a mesma coisa.

4.2 Exemplos

Fazer contas com uma taxa real, nominal ou com inflação faz parte de nosso dia a dia. O aluguel de um imóvel em geral é reajustado pelo IGPM ou pelo IPCA. Quando você faz uma aplicação financeira deve estar interessado no retorno real da aplicação, ou seja, aquele que faz seu poder de compra aumentar. Uma empresa deve estar interessada em repassar a inflação de custos para os preços do seu produto ou serviço, do contrario teria uma redução no seu lucro.

4.2.1 Quanto estou ganhando acima da inflação?

Um aplicador teve um rendimento de 25% a.a., quando a inflação neste ano foi de 15%. Qual foi o rendimento real?
Solução:
Como o enunciado oferece uma taxa de inflação, e pede uma taxa real, concluímos que a taxa de 25% é uma taxa nominal ou global.

$$TaxaReal = \frac{(1 + TaxaNominal)}{(1 + TaxaInflacao)} - 1$$
$$TaxaReal = \frac{(1 + 0,25)}{(1 + 0,15)} - 1$$
$$TaxaReal = 0,0869$$
$$TaxaReal = 8,69\% a.a.$$

Observe que o ganho real do aplicador foi muito menor do que 25%. É muito comum cometer este erro na hora de investir recursos. Um exemplo é a grande quantidade de recursos aplicados em caderneta de poupança. Em situações de baixa taxa de juros e inflação crescente, em geral, a caderneta de poupança não oferece a manutenção do poder de compra, ou seja, o rendimento real é negativo.

4.2.2 Quanto devo reajustar o preço?

Qual deve ser a taxa global mensal a ser cobrada por um banco que quer 1% ao mês de juros além da inflação que é prevista em 2% ao mês?
Solução:
O banco quer ganhar além, ou acima, da inflação o valor de 1%, logo trata-se de uma taxa real. Queremos encontrar a taxa nominal:

$$TaxaNominal = [(1 + TaxaReal) \times (1 + TaxaInflacao)] - 1$$
$$TaxaNominal = [(1 + 0,01) \times (1 + 0,02)] - 1$$

$$TaxaNominal = 0,0302$$
$$TaxaNominal = 3,02\% a.m.$$

Utilizamos essa conta para encontrar uma taxa que irá oferecer um retorno superior a uma expectativa de inflação. Como calculada é mensal a diferença é muito pequena em relação a uma soma simples das taxas, mas se convertêssemos esta taxa mensal em uma taxa anual veríamos que a diferença aumentaria bastante.

4.3 Exercícios Propostos

Resolva todos os exercícios para a atividade.

1 - Um imóvel foi comprado em certa época por R$ 200.000,00 e vendido 3 anos mais tarde por R$300.000,00. Qual foi a taxa de juros real, sabendo-se que o índice de inflação nestes 3 anos foi de 8% a.a.?
Resposta: R = 5,99% a.a.

2 - Uma pessoa pagou a prestação da casa própria igual a R$ 1.400. Sabendo que a prestação anterior paga foi igual a R$ 1.200 e que a taxa de juros aplicada neste período é de 1%, pergunta-se qual foi a taxa de correção monetária?
Resposta: Inflação = 15,51% ao período.

3 - O banco quer emprestar ganhando 1,5% a.m. acima da inflação. Que taxa anual global deve cobrar para uma inflação estimada 17% a.a.?
Resposta: N = 39,89% a.a.

4 - Uma financeira está cobrando 7,5% a.m.. Se a inflação é de 2% a.m., quanto ela está cobrando de taxa real anual?
Resposta: R = 5,39% a.m. / 87,80% a.a.

5 - Uma empresa pediu um financiamento de R$ 10.000.000, o qual será pago em três parcelas anuais iguais sujeitas à correção monetária pelo IGPM e mais 8% a.a. de taxa

de juros. A empresa prevê uma correção monetária anual igual a 5% a.a. Qual seria o valor de cada uma das 3 parcelas a ser paga?
Resposta: A = R$ 4.264.014

6 - Um indivíduo com 45 anos de idade pretende fazer uma aposentadoria suplementar. Atualmente recebe honorários de R$ 100.000,00 por ano. Pretende aposentar-se dentro de 20 anos a partir de hoje, pleiteando receber uma aposentadoria suplementar equivalente hoje a R$100.000,00 anuais, durante 10 anos após a aposentadoria. A sua intenção é realizar depósitos em plano de previdência, o qual oferece uma taxa de juros de 3% a.a. além da inflação, prevista em 5% a.a. em média. Pergunta-se:
a) Quanto ele irá receber em cada um dos 10 anos? Resposta: R$ 265.329
b) Quanto ele terá de depositar anualmente no plano de previdência durante os 20 anos?
Resposta: R$ 38.006

5 Amortização de Dívidas

Em que consiste uma dívida? Quando tomamos um dinheiro emprestado ou compramos um produto a prazo não percebemos que existe uma lógica de processamento matemático por trás dessas operações.

Antes de iniciar a discussão é oportuno fazer a distinção entre financiamento e empréstimo:

- Empréstimo: contrato entre o cliente e a instituição financeira pelo qual ele recebe uma quantia que deverá ser devolvida ao banco em prazo determinado, acrescida dos juros acertados. Os recursos obtidos no empréstimo **não têm destinação específica**.

- Financiamento: contrato entre o cliente e a instituição financeira, mas **com destinação específica dos recursos tomados**, como, por exemplo, a aquisição de veículo ou de bem imóvel. Geralmente possui garantia: alienação fiduciária ou hipoteca.

Em geral o empréstimo está relacionado a itens de consumo e bem duráveis de menor valor (ex. geladeira). Já o financiamento costuma ser utilizado para aquisição de imóveis, automóveis e equipamentos. "Dívida"é uma palavra "genérica"para designar qualquer tipo de operação de crédito.

Em uma dívida o devedor é responsável pelo pagamento de uma parcela que inclui **juros** mais **amortização do principal** (abatimento da dívida). Os sistemas de amortização variam de acordo com a forma como ocorre o abatimento da dívida.

Existem dois sistemas principais: Sistema de Amortização Constante (SAC), e o Sistema de Amortização Francês (SAF) que também é chamado de sistema Price.

Para verificar qual a sequencia de parcelas para pagamento, e a proporção da parcela que corresponde a juros e amortização, é possível montar uma tabela de pagamentos período a período. Na sequencia apresentamos um exemplo de tabela com uso do SAC para um financiamento de 10.000, prazo de 4 anos e juros de 9%a.a.:

Período	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
t	SD t-1	AM	j	p	SD
0					10.000,00
1	10.000,00	2.500	900,00	3.400,00	7.500,00
2	7.500,00	2.500	675,00	3.175,00	5.000,00
3	5.000,00	2.500	450,00	2.950,00	2.500,00
4	2.500,00	2.500	225,00	2.725,00	-

5.1 Aplicação

Vamos aprofundar mais o processo de elaboração da tabela do sistema de amortização. Sintetizamos as principais características de cada um dos sistemas (SAF e SAC) na sequencia:

Sistema de Amortização Francês (SAF):

- Possui prestações constantes, utilizado geralmente no comércio na venda de bens de menor valor;
- Chamado sistema PRICE quando o período da prestação não coincide com o período da taxa (taxa nominal);
- Menor amortização no início da série de pagamentos;
- Maior prestação no final da série de pagamentos;
- $Prestacao(A) = P \times \dfrac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ (é uma série de pagamentos uniforme, conforme vimos no capítulo 2, onde "P"é o valor financiado);
- $Juros = TaxaJuros \times SaldoDevedor_{t-1}$;
- $Amortizacao = Prestacao - Juros$;
- $SaldoDevedor = SaldoDevedor_{t-1} - Amortizacao.$

No SAF as **prestações** são constantes, por isso começamos o cálculo da tabela a partir das prestações. Observe que trata-se de uma aplicação da fórmula de série uniforme de pagamentos.

Sistema de Amortização Constante (SAC):

- As prestações variam de período para período;
- Maior amortização no início da série de pagamentos;
- Menor prestação no final da série de pagamentos.
- $Amortizacao = \frac{P}{n}$;
- $Juros = TaxaJuros \times SaldoDevedor_{t-1}$;
- $Prestacao(A) = Juros + Amortizacao$;
- $SaldoDevedor = SaldoDevedor_{t-1} - Amortizacao$.

No SAC as **amortizações** são constantes, por isso começamos o cálculo da tabela a partir das amortizações.

5.2 Exemplos

Vamos desenvolver passo a passo a elaboração da tabela seguindo o mesmo exemplo já apresentado: Considere um financiamento de R$ 10.000, com prazo de 4 anos e taxa CET de 9% a.a.

Sistema de Amortização Francês (SAF):
Iniciamos a primeira linha da tabela com o Saldo Devedor, que é o recurso tomado emprestado no período atual (0).

Período t	Saldo Devedor SD t-1	Amortização AM	Juros j	Prestação p	Saldo Devedor SD
0					10.000,00

Precisamos encontrar os valores para o primeiro período, quando iniciam os pagamentos (fórmula de série uniforme de pagamentos):

$$Prestacao(A) = 10.000 \times \frac{0,09 \times (1+0,09)^4}{(1+0,09)^4 - 1}$$
$$Prestacao(A) = 3.086,69$$

Agora vamos encontrar o valor pago de juros no primeiro período, observe que o Saldo Devedor do período anterior é 10.000, que é o valor tomado no financiamento:

$$Juros = TaxaJuros \times SaldoDevedor_{t-1} \; Juros = 0,09 \times 10.000 \; Juros = 900$$

Agora podemos calcular a amortização, que é o valor de abatimento da dívida ou saldo devedor:

$$Amortizacao = Prestacao - Juros \; Amortizacao = 3.086,69 - 900$$
$$Amortizacao = 2.186,69$$

Para achar o novo Saldo Devedor basta diminuir a amortização encontrada pelo Saldo Devedor anterior. Já temos todos os valores necessários para montar a linha do primeiro período de nossa tabela:

Período t	Saldo Devedor SD t-1	Prestação p	Juros j	Amortização AM	Saldo Devedor SD
0					10.000,00
1	10.000,00	3.086,7	900,00	2.186,69	7.813,31

Seguindo o processo continuamente vamos chegar a um Saldo Devedor 0 no final do quarto período. A Tabela completa ficaria assim:

Período	Saldo Devedor	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
t	SD t-1	p	j	AM	SD
0					10.000,00
1	10.000,00	3.086,7	900,00	2.186,69	7.813,31
2	7.813,31	3.086,7	703,20	2.383,49	5.429,82
3	5.429,82	3.086,7	488,68	2.598,00	2.831,82
4	2.831,82	3.086,7	254,86	2.831,82	-

Sistema de Amortização Constante (SAC):

O procedimento de elaboração da tabela para o SAC é semelhante ao SAF, a principal diferença é que iniciamos os cálculos pela amortização, já que elas são constantes. Os cálculos para o primeiro período da tabela ficam assim:

$$Amortizacao = \frac{10.000}{4}$$
$$Amortizacao = 2.500$$

$$Juros = 0,09 \times 10.000$$
$$Juros = 900$$

$$Prestacao(A) = Juros + Amortizacao$$
$$Prestacao(A) = 900 + 2.500$$
$$Prestacao(A) = 3.400$$

$$SaldoDevedor = 10.000 - 2.500$$
$$SaldoDevedor = 7.500$$

A tabela completa é a mesma que apresentamos anteriormente. Note que no SAC a amortização e a prestação ficam maiores no primeiro período, fazendo com que o Saldo Devedor diminua mais em comparação ao SAF.

Comparando os dois sistemas pode ficar a impressão de que um é melhor que o outro. Analisando a tabela uma pessoa leiga pode chegar a conclusão de que o SAF é pior pois pagará mais juros. É importante destacar que do ponto vista matemático e levando em conta o valor do dinheiro no tempo os sistemas são financeiramente equivalentes. No entanto, como no SAC as amortizações são feitas mais rapidamente, e considerando que todo crédito possui um risco de não ser pago, este sistema tende a reduzir o risco para a instituição financeira.

5.3 Exercícios Propostos

Resolva todos os exercícios para a atividade.

1 - Construir o quadro de amortização do empréstimo de R$500.000, efetuado pelo prazo total de 8 anos, com 3 anos de carência, utilizando o método SAF. A taxa de juros cobrada pelo financiador é de 10% ao ano. Considere que as prestações seriam pagas anualmente. Qual o saldo devedor no ano 5?
OBS: Carência é o período de tempo entre a obtenção do empréstimo e o pagamento da primeira amortização. Normalmente durante este período de tempo o credor paga juros sobre o valor do empréstimo.
Resposta: R$328.012

2- a) Calcular os valores das parcelas de juros e amortização referentes à primeira prestação, de um empréstimo de R$ 853,20, a taxa de 3% ao mês, para ser liquidado em 10 prestações iguais.
Respotas:
J1= R$ 25,60
A1= R$ 74,43

b) Calcular o valor do saldo devedor existente no final do 6o mês (após pagamento da 6ª prestação). Resposta
SD6 = R$ 371,79

c) Calcular o valor da parcela de amortização correspondente a 5ª prestação
Resposta:

A5= R$ 83,77

d) Calcular o valor das amortizações acumuladas até o 4ª mês, ou seja, a soma das parcelas correspondente às quatro primeiras prestações.
Resposta: R$ 311,37

e) Calcular o valor dos juros acumulados entre o sexto e nono mês, ou seja, entre a sexta e a nona prestação. Nota: Ao mencionar "entre a sexta e a nona prestação"entende-se a sexta exclusive e a nona inclusive.
Resposta: R$ 25,38

3 - a) Calcular o saldo devedor de um empréstimo de R$10.000,00, feito em 24 prestações mensais e iguais, à taxa de 3,5% ao mês, após o pagamento da 13ª prestação.
Resposta:
SD13= R$ 5.605,52

b) Calcular o valor da parcela de amortização referente à 12ª prestação do empréstimo referido no exercício anterior.
Resposta:
A12= R$ 398,18

4 - Elaborar um plano de pagamentos, com base no sistema de Amortização Constante, correspondente a um empréstimo de R$ 1.000,00, á taxa de 3% ao mês, a ser liquidado em 10 prestações mensais.

5 - Um apartamento é vendido por R$ 150.000,00, sendo R$ 10.000,00 de entrada e o restante em 60 prestações mensais, à taxa de 2,5% ao mês, pelo Sistema de Amortização Constante. (Dica: usar progressão aritmética) Calcular:
a) o valor da 1ª e da última prestação;
Respostas:
P1 = R$ 5.833,33

P60 = R$ 2.391,67

b) o valor do decréscimo mensal das prestações;

Resposta: R$ 58,33

c) o valor das parcelas de juros referentes a 37ª e a 38ª prestação;

Respostas:

J37 = R$ 1.400,00

J38 = R$ 1.341,67

d) o total de juros a ser pagos até a liquidação do débito.

Respostas:

J1 + ... + J60 = R$ 106.750,00

6 - Um apartamento está sendo anunciado por R$450 mil à vista. A Caixa Econômica Federal disponibiliza duas alternativas de financiamento (SAC), uma com correção pela inflação, e outra com taxa fixa, sendo que o valor máximo financiado corresponde a 80% do imóvel:

- 3,5% a.a + IPCA
- 8,9% a.a. + TR

Monte os quadros de amortização de dívida e faça simulações, analisando as consequências para o comprador do imóvel. Considere estimativas de IPCA entre 3% e 6%, e TR entre 0% e 1,5%, e um prazo de 240 meses. Avalie ainda as diferenças nos valores de parcela para valores financiados diferentes (80%, 60% e 40% do valor do imóvel)

Esta questão deve ser resolvida em planilha (salvar em formato Excel, .xls ou .xlsx), a planilha deve ser submetida em conjunto com o arquivo PDF.

Referências

[1] Sebastião Vieira do Nascimento. *Engenharia Econômica*. Ciência Moderna, 1 edition, 2010.

[2] Nelson Casarotto Filho; Bruno Hartmut Kopittke. *Análise de investimentos*. Atlas, 11 edition, 2010.

MARCO GOULART, DR., CFP®

Para conhecer mais sobre finanças visite o blog do professor Marco Goulart em

`www.mgfinancas.com.br`