Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 02:

# Convexidad, vecindarios, búsqueda local: Hill Climbing y Búsqueda Tabú

*Pablo A. Trinidad Paz* - 419004279

Trabajo presentado como parte del curso de **Cómputo Evolutivo** impartido por el profesor **Mario Iván Jaen Márquez**.

Fecha de entrega: **22 de Febrero de 2019**.

# 1. Teoría

1. Sean $f_2, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) = x^2 - 2ex + e^2 - 2,$$
$$f_2(x) = x^6 - 6ex^5 + 15e^2x^4 - 20e^3x^3 + 15e^4x^2 - 6e^5x + e^6 - 6$$

   *a)* Demuestre que $f_1$ y $f_2$ son funciones convexas

   **Solución:**
   Una función $f$ es convexa si se cumple que:

$$\forall x, y \in Dom(f) \text{ y } \forall a \in [0,1]$$
$$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y).$$

   Además, se cumple que si la función es doblemente derivable (y de una sola variable) es convexa en un intervalo sí y solo sí su segunda derivada no es negativa.
   Para $f_1(x)$:

$$f_1'(x) = 2x - 2e$$
$$f_1''(x) = 2$$
$$\Rightarrow f_1''(x) > 0$$
$$\therefore\ f_1 \text{ es convexa} \quad \blacksquare$$

   Para $f_2(x)$:

$$f_2'(x) = 6x^5 - 30ex^4 + 60e^2x^3 - 60e^3x^2 + 30e^4x - 6e^5$$
$$f_2''(x) = 30x^4 - 120ex^3 + 180e^2x^2 - 120e^3x + 30e^4$$
$$f_2''(x) = 30(e-x)^4$$
$$\Rightarrow f_2''(x) > 0$$
$$\therefore\ f_2 \text{ es convexa} \quad \blacksquare$$

   *b)* Utilice el algoritmo del descenso por gradiente implementado para minimizarlas. Use $x_0 = 0$ como punto inicial y $\alpha$ arbitrario. ¿Qué valores de $\alpha$ hacen más eficiente el algoritmo para cada función?

   **Solución:**
   Para responder a la pregunta anterior se corrió el descenso por gradiente con múltiples valores de $\alpha$ y se determinó que el valor de $\alpha$ más eficiente sería aquel que lograra encontrar un óptimo en el menor número de iteraciones. Para saber si el valor óptimo obtenido a partir de dicha $\alpha$ era aceptable, se calculó la desviación estándar, promedio y media de los resultados de cada prueba.

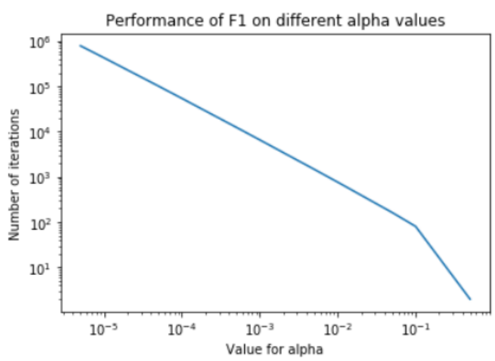
   Para ambas funciones, el gradiente corrió bajo los siguientes parámetros:

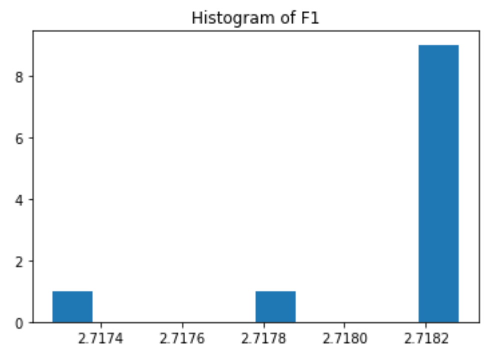
   - Precisión: $1 \times 10^{-8}$
   - Número máximo de iteraciones: $10^6$

**Resultados de $f_1$:**

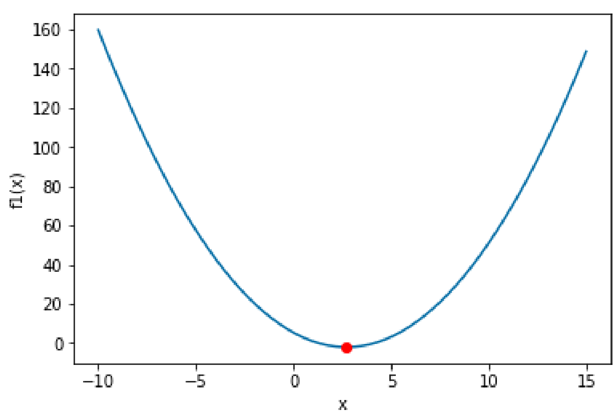
Valores de $\alpha$ para la función $f_1$

| $\alpha$ | **Número de iteraciones** | **Valor mínimo** |
|---|---|---|
| 0.000005 | 790773 | 2.7172818427188603 |
| 0.00001 | 430042 | 2.7177818402339007 |
| 0.00005 | 102100 | 2.7181818454738185 |
| 0.0001 | 54513 | 2.718231838600649 |
| 0.0005 | 12508 | 2.7182718417772485 |
| 0.001 | 6598 | 2.7182768441392824 |
| 0.005 | 1476 | 2.7182808470688657 |
| 0.01 | 769 | 2.71828134188752 |
| 0.05 | 164 | 2.7182817433322994 |
| 0.1 | 81 | 2.718281790036739 |
| 0.5 | 2 | 2.718281828459045 |



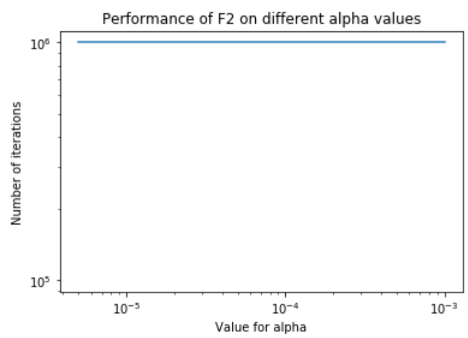

Con una desviación estándar $\sigma \approx 0.000303$, promedio $\mu \approx 2.7181303276$ y media $\approx 2.7182768441$ se puede concluir de forma segura que el valor óptimo de $\alpha$ para $f_1$ es **0.5** y que el mínimo se encuentra en $x = 2.718281828459045$.

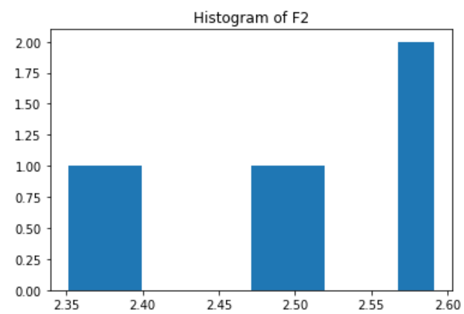


**Resultados de $f_2$:**

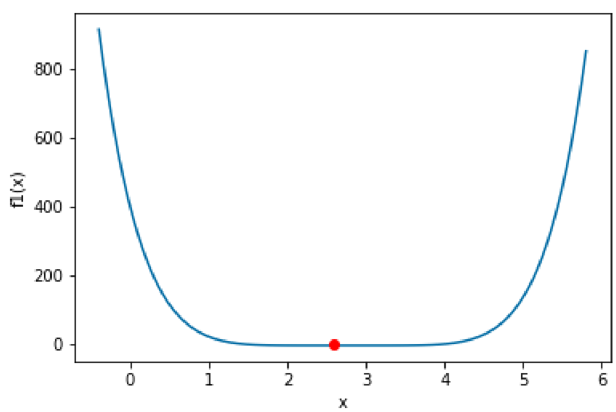
Valores de $\alpha$ para la función $f_2$

| $\alpha$ | **Número de iteraciones** | **Valor mínimo** |
|---|---|---|
| 0.000005 | 1000000 | 2.3511877960913052 |
| 0.00001 | 1000000 | 2.398706503240198 |
| 0.00005 | 1000000 | 2.4866593461920012 |
| 0.0001 | 1000000 | 2.51664267509827 |
| 0.0005 | 1000000 | 2.57213799938737 |
| 0.001 | 1000000 | 2.591415514678928 |




Con una desviación estándar $\sigma \approx 0.0868$, promedio $\mu \approx 2.4861249724$ y media $\approx 2.5016510106$ podemos escoger **el mínimo en** $x = 2.51664267509827$ aunque realmente se va a encontrar en el rango $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ la mayoría de los casos. Adicionalmente, y debido a la naturaleza de la función, todos los valores $\alpha$ agotaron el máximo número de iteraciones del descenso por gradiente por lo que no existe un valor óptimo de $\alpha$ pero podemos escoger el que nos generó el mínimo, es decir, $\alpha = 0.0001$.



## 2. Práctica