Cómputo evolutivo 2019-2

Facultad de Ciencias, UNAM

Tarea 2: Convexidad, vecindarios, búsqueda local: hill climbing y búsqueda tabu

Fecha de entrega: viernes 22 de febrero de 2019

Google Classroom: t3stmkm

Parte teórica

1. Sean $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) = x^2 - 2ex + e^2 - 2,$$
$$f_2(x) = x^6 - 6ex^5 + 15e^2x^4 - 20e^3x^3 + 15e^4x^2 - 6e^5x + e^6 - 6,$$

   para toda $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestre que f_1 y f_2 son funciones convexas

   (b) Utilice el algoritmo del descenso por gradiente implementado para minimizarlas. Use $x_0 = 0$ como punto inicial y α arbitrario. ¿Qué valores de α hacen más eficiente el algoritmo para cada función?

2. Lea el capítulo 1 del siguiente libro (las fotocopias se proporcionaran en clase) para resolver las preguntas de esta seccion:

   Z. Michalewicz et al., *How to Solve It: Modern Heuristics.* Springer Berlin Heidelberg 2004

   (a) Mencione al menos 2 razones por las cuales un problema del mundo real puede no ser resuelto facilmente. NO USE ninguna de las razones enumeradas en la página 11 del capítulo proporcionado.

   (b) Supongamos que la optimización de una función f requiere de 10 variables de decisión $x_i (i = 1, ..., 10)$, cada una de las cuales esta en el dominio $-50 \leq x_i \leq 50$
   Si x_i puede tomar solo valores enteros, ¿cuál es el tamaño del espacio de búsqueda de este problema?
   Si x_i puede tomar valores reales y se usa una precisión de ocho lugares decimales, ¿cuál es el tamaño del espacio de búsqueda del problema?

3. Investiga a qué se refieren los términos: exploración y explotación dentro de las fases de un algoritmo evolutivo.

4. ¿Considerarías al algoritmo hill climbing, un algoritmo voraz (*greedy algorithm*)? ¿Por qué?

5. Considera la función $f(x) = x^2 + 3x + 5$ definida sobre los enteros $\mathbb{Z}$ en el intervalo $[-20, 20]$. Vamos a usar el algoritmo hill-climbing para encontrar el valor de x que minimiza la función en ese intervalo.

   (a) Grafica la función.

   (b) Considera el vecindario definido por $N(x) = \{x+1, x-1\}\ \forall x \in [-19, 19]$. Usa como solución inicial $x_0 = 6$ e indica los valores que toma x_t y $f(x_t)$ en cada iteración t del algoritmo.

6. **Ejercicio práctico**. Implementar en python el algoritmo de *búsqueda tabú* con una longitud máxima para la lista tabú y un criterio de paro arbitrarios para resolver el siguiente problema:

Considere a la función $\phi\colon [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ dada por

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 2\theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{4\theta}{5} & \text{si } \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ \theta & \text{si } \dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

para cada $\theta \in [0, 2\pi]$. Note que ϕ es una función biyectiva y que si vemos al dominio como el conjunto de ángulos que puede tomar un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces ϕ es tal que

$$\begin{aligned} 0 &\xmapsto{\phi} 0, \\ \frac{\pi}{4} &\xmapsto{\phi} \frac{\pi}{2}, \\ \text{y} \qquad \frac{3\pi}{2} &\xmapsto{\phi} \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

y los valores entre estos ángulos se adecúan para que ϕ sea una función biyectiva.

Considere a la función $\text{áng}\colon \mathbb{R}^2 \to [0, 2\pi]$ la función que a cada vector de $\mathbb{R}^2$ le asocia el ángulo que va del segmento entre $(1, 0)$ y $(0, 0)$ al segmento entre $(0, 0)$ y (x, y) y lo expresa como un radián entre 0 y 2π. Es decir,

$$\text{áng}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \text{ y } y \leq 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \leq 0 \end{cases}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Finalmente, definamos a la función objetivo $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} F(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(\phi(\text{áng}(x, y)))^2 - 5(x^2 + y^2) \sin^2(\phi(\text{áng(x,y)}))- \\ - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sin^3(\phi(\text{áng}(x, y))) + \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^2 \sin^4(\phi(\text{áng}(x, y))) \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, al espacio de búsqueda por

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists i \in \{0, \ldots, 150\}\ x, y \in \left\{\frac{i}{10}, \frac{i}{10\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

y, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a la vecindad de tipo 1 por

$$V_1(x, y) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |x - u| + |y - v| \leq 1\right\}$$

y a la vecindad de tipo ∞ por

$$V_\infty(x,y) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-u|, |y-v|\} \leq 1\right\}.$$

Aplique búsqueda tabú sobre el espacio de búsqueda S utilizando como solución inicial a $(0,0)$, primero usa vecindades de tipo 1 y luego las de tipo ∞. Reporta las mejores soluciones encontradas.

Punto extra: Sea X un arreglo de n elementos con un orden definido entre ellos, f una función tal que f(X) regresa el número de elementos desordenados de X y sea $V_d(x)$ la vecindad de tamaño d del arreglo x, donde una vecindad de tamaño d=1 se define como los arreglos obtenidos a partir de una permutación entre 2 elementos sobre el arreglo x.

Aplique búsqueda tabú usando vecindades de tamaño $d = 1, 2, 5$ y un arreglo X de 150 enteros donde S_0 es una permutación aleatoria.