$$\ddot{y} + \dot{y} - y = v$$

$$y_1 = y$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = \dot{y}$$

$$\dot{y}_1 + y_2 - y_1 = v$$

$$\dot{y}_2 = -y_2 + y_1$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (v)$$

$$\ddot{q} = v$$

$$\dot{x}_1 = v$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Si on veut

$$y = \dot{q} = x_2$$

$$\ddot{y} = -\dot{y} + y + u$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$

avec $x_1 = \dot{y}$.

$x_2 = y \Rightarrow \dot{x}_2 = x_1$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}_{B}(u)$$

$$y = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + (0)u$$

Fonction de transfert

$\frac{Y}{U}$ $\mathcal{L}$ CI

$$\ddot{y} + \dot{y} - y = u$$

$$s^2 y + sy - y = u$$

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{s^2 + s - 1}$$

damp $\rightarrow$ pulsation
amortissement

Rendre stable un système

Modèle en boucle fermée

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + \cancel{Dv}$$

$$u = K\varepsilon = K(r - y)$$

$$\dot{x} = Ax + BK(r - y)$$

Or $y = Cx$

$$\dot{x} = Ax + BKr - BKCx$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BKC) + BKr \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\frac{Y}{U} = F(s)$$

$$Y = FU = FK(r - Y)$$

$$(I + FK)Y = FKr$$

Dans le cas scalaire

$$\boxed{\frac{Y}{r} = \frac{FK}{1+FK}}$$

Formule de Black

Avec $K = 2$ on a stabilisé le système

on modifie le gain statique

$$\text{gain} = \frac{F(0)K}{1+F(0)K}$$

Si $K \nearrow$ gain $\xrightarrow[+\infty]{} 1$

$\dot{x}_I = \varepsilon = r - y$

$$\begin{cases}\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \\ \begin{cases} u = K\varepsilon + K_I x_I \\ \dot{x}_I = \varepsilon\end{cases}\end{cases}$$

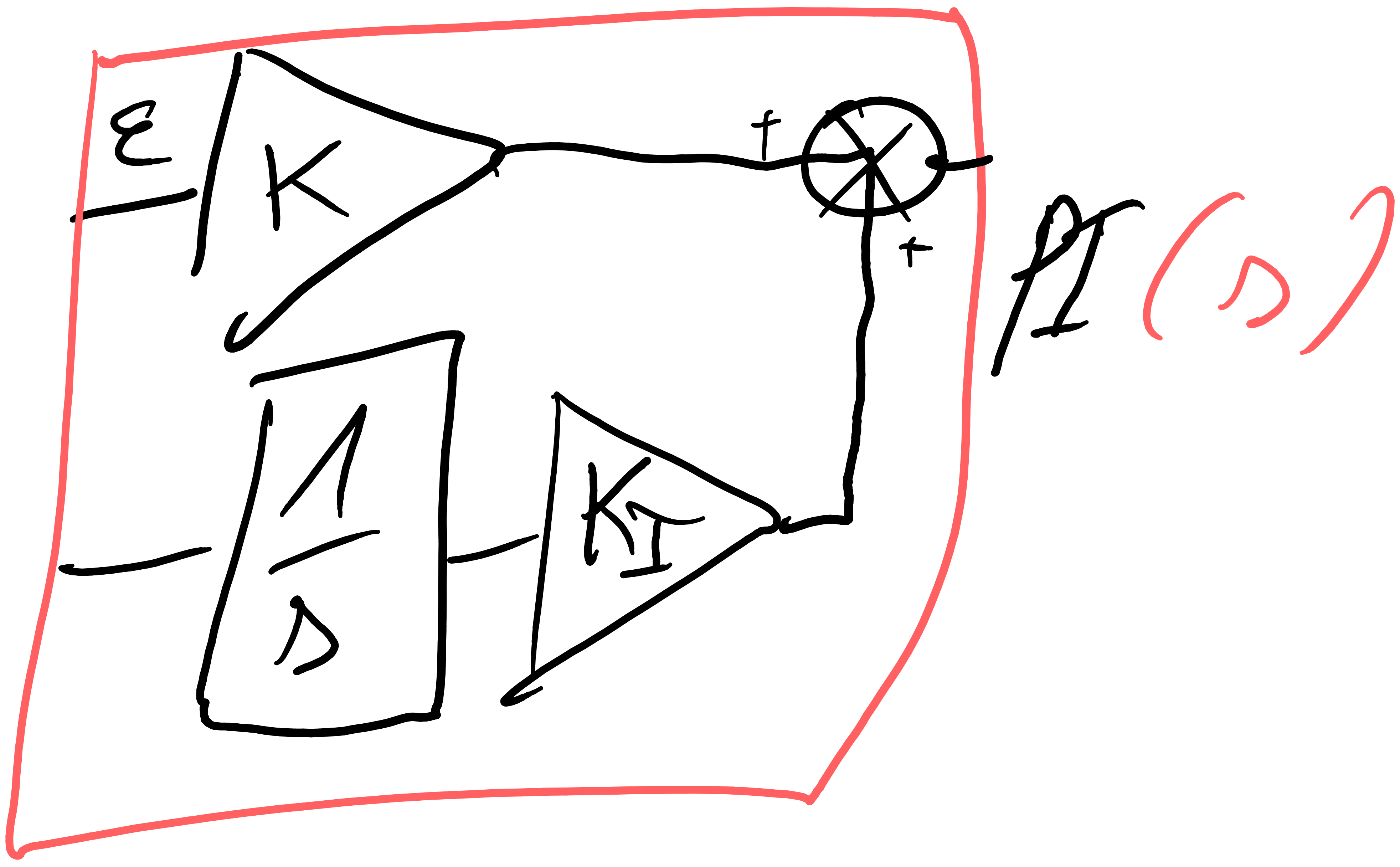
avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix}$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BKC & BK_I \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BK \\ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \end{pmatrix}$$

en considérant

$$Bu = BK\varepsilon + BK_I x_I$$

↳ $r - Cx$



$$P_I(s) = \frac{U}{\varepsilon} = K + \frac{K_I}{s}$$

$$Y = FP_I U = FP_I(r - Y)$$

$$Y + FP_I Y = FP_I r$$

$$(I + FP_I)Y = FP_I r$$

Dans le cas scalaire

$$\frac{Y}{r} = \frac{FP_I}{1 + FP_I}$$

Le PI ajoute 1 pôle (instable si K et $K_I = 0$)

$$\begin{cases} PI(0^+) \longrightarrow +\infty & \text{(à cause de l'intégrateur } \frac{1}{s}\text{)} \\ GS \longrightarrow 1 \end{cases}$$