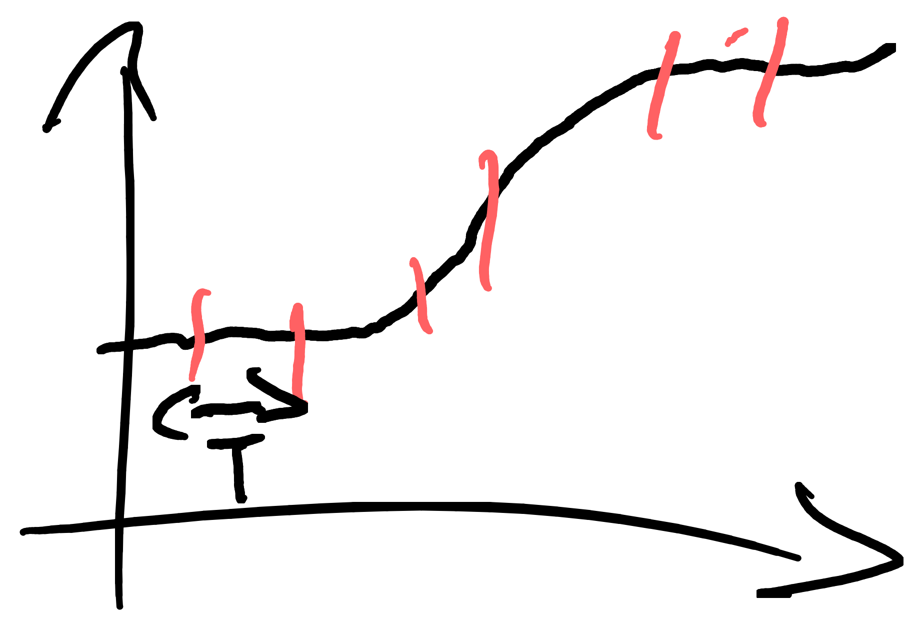
Continuous vs Discrete-time System



once $x(t) = x(kT) = x_k$

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_d(x_k, u_k) \\ y_k = H_d(x_k, u_k) \end{cases}$$

Linear-Time Invariant (LTI Hypothesis)

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases}$$

Presque tout les systèmes sont discret

(numérisation, certains système ne sont pas mesurable à chaque instant)

(↳ population)

1 Mesure discret

2 Contrôleur discret

3 Actionneur discret

Contrôleur continus

↳ Électronique

↳ Pneumatique

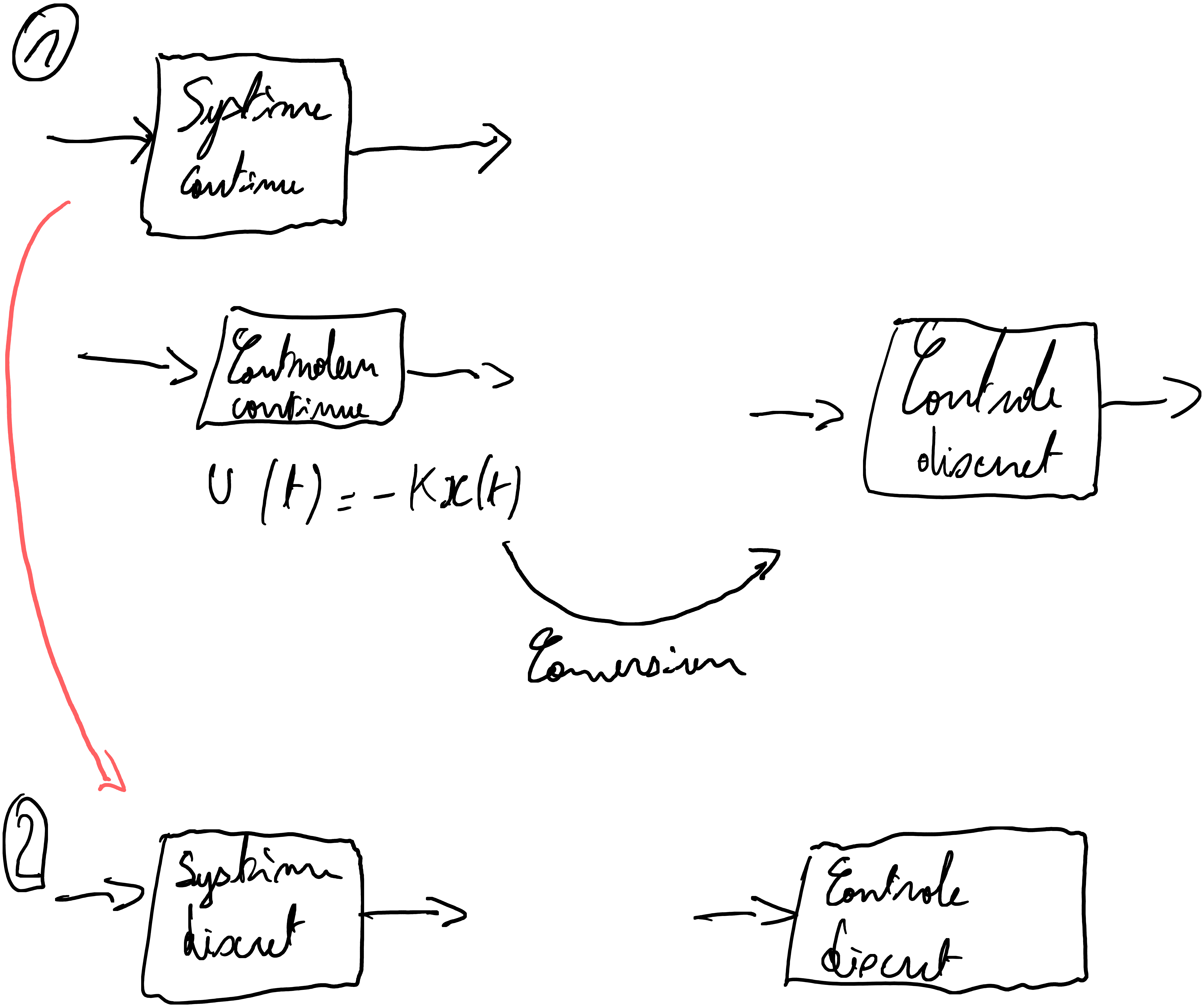
↳ Hydraulique

(Pour certaines approches, on a que des systèmes discret par nature)

Deux approches

① convertir en continue

② faire une implémentation directement discrète



Quand on n'échantillonne pas suffisamment rapidement par rapport à la dynamique du système :
on va considérer un contrôle discret.

Échantillonnage négligé ou non ?

Certaine fois du fait du contrôleur on va passer en discret

Ici on considère $T = \text{const}$

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases}$$

$$x(t) = \dots x(t=0)$$

$$\Rightarrow x_k = ? \; x_0$$

Considérons $u_k = 0 \quad \forall k$

$$\begin{aligned} x_k &= A_d x_{k-1} \\ &= A_d^{l} x_{k-l} \\ &= A_d^{k} x_0 \end{aligned}$$

Conditions $u_k \neq 0$ $\forall k$

$$x_k = A_d^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1} B_d u_i$$

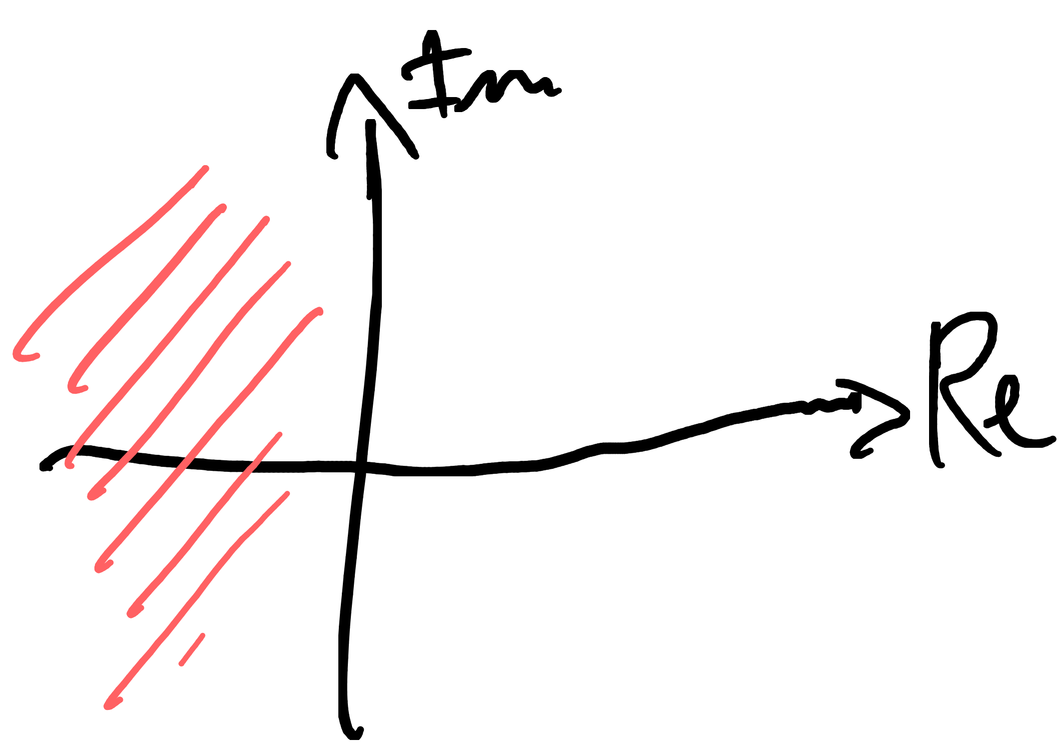
Matlab

ss(Ad, Bd, Cd, Dd, T)

En continue

Stabilité de $s = eig(A)$

Real $(s_i < 0)$ $\forall i$

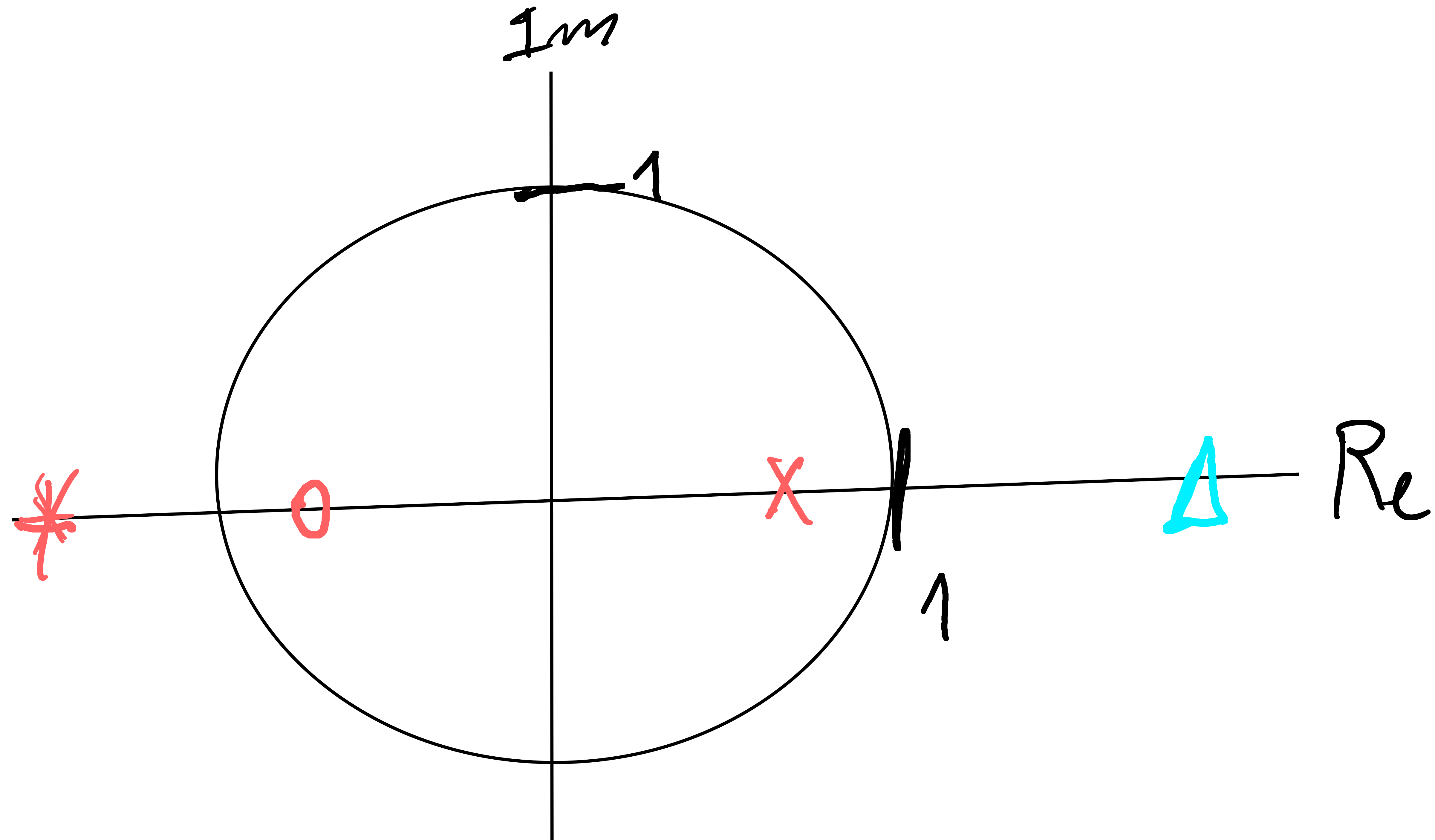


En discret

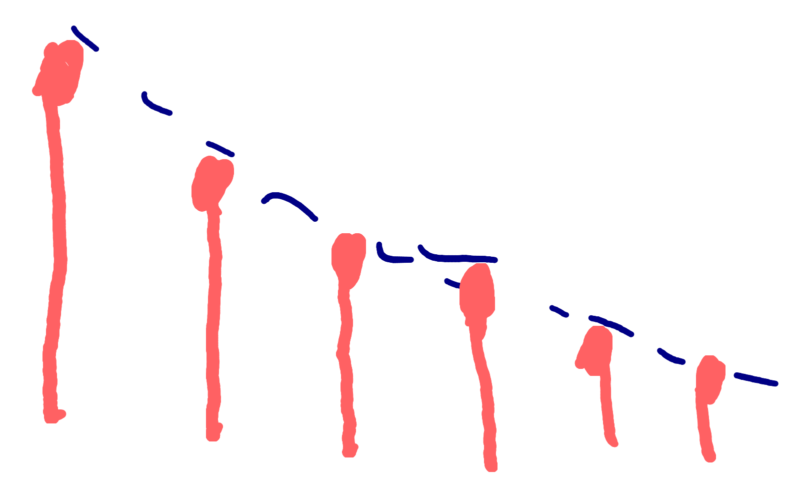
Stabilité de $z = eig(A_d)$

$\forall i$ $\boxed{|z_i| < 1}$

pzmap(sys_d)

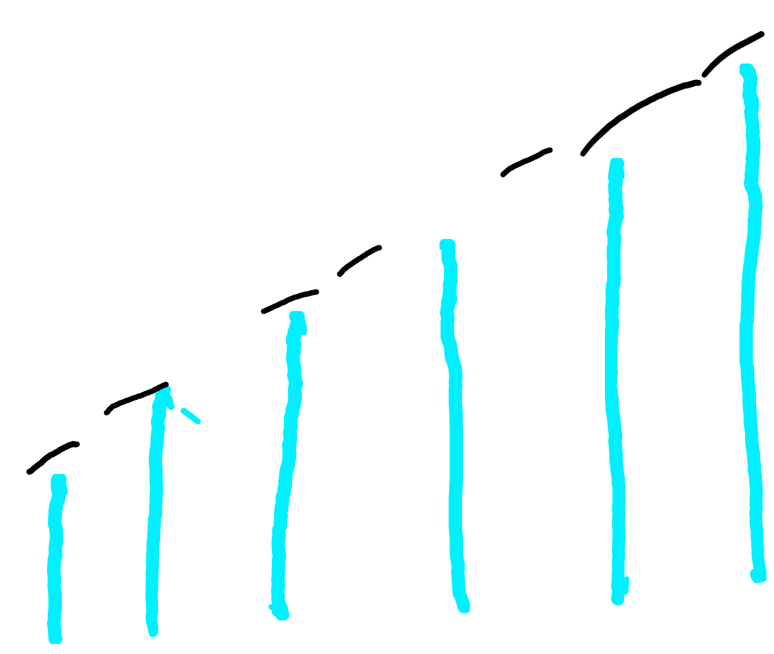


$Re(z)>0, |z|<1$ x :

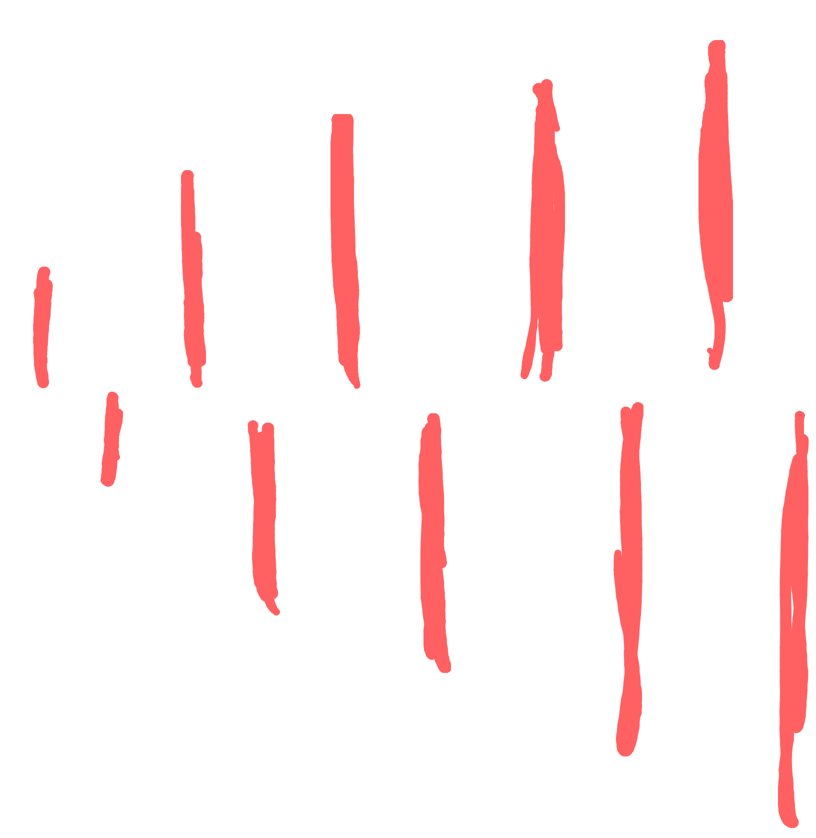


$Re(z)<0, |z|<1$ o :

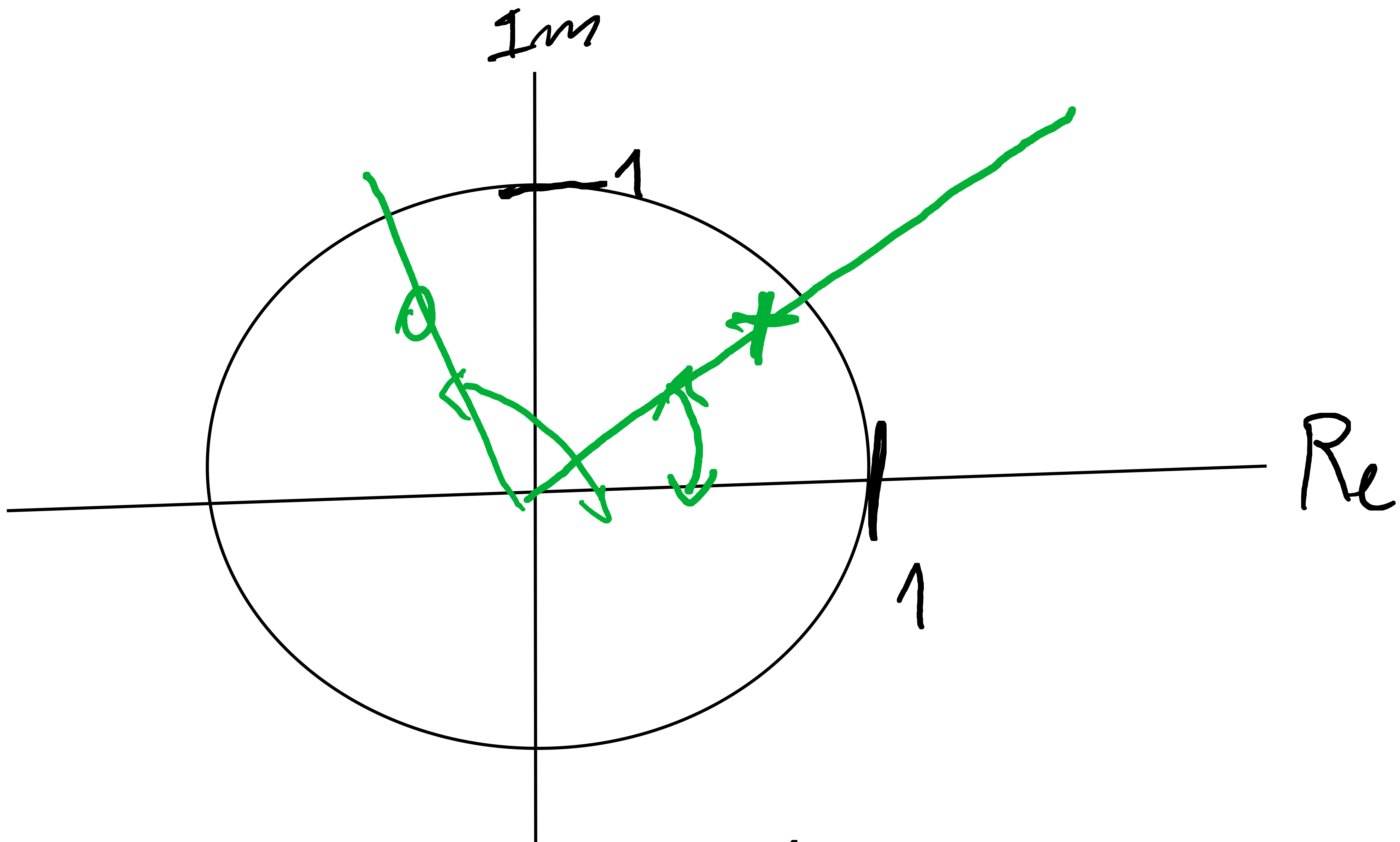
$Re(z)>0, |z|>1$ Δ



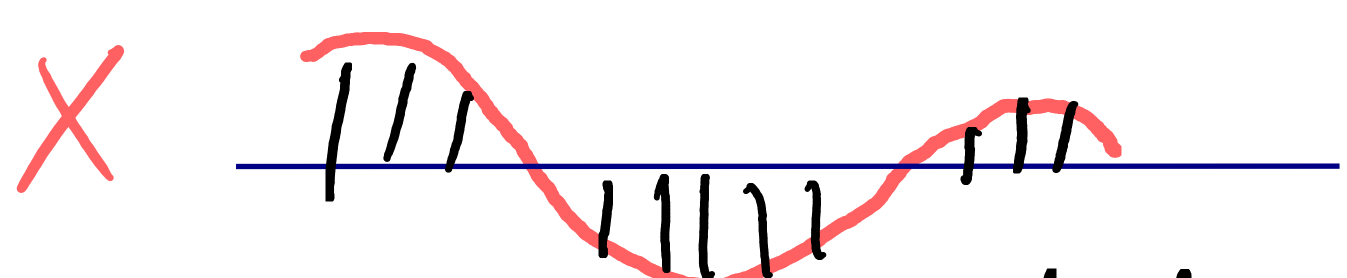
$Re(z)<0, |z|>1$ *



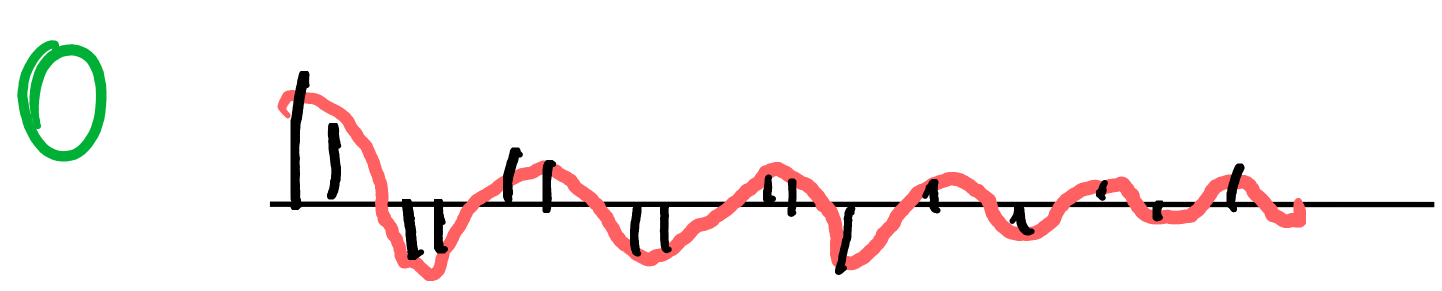
Limite de stabilité en 1 ou −1 par ex : valeurs constantes



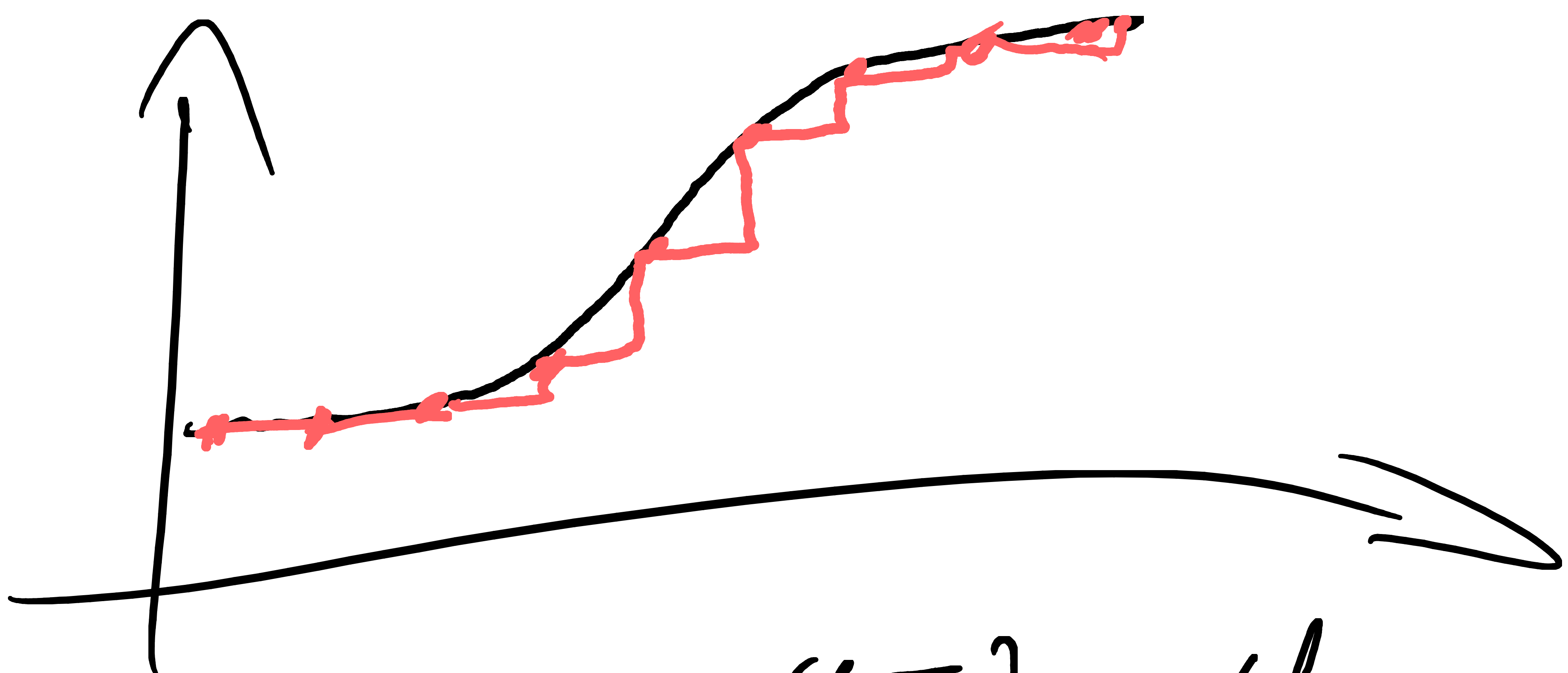
Influence de la partie imaginaire :



on va moduler l'amplitude



Discretization methode zero-order Hold ZOH



$$x(t) = x(kT) \quad \forall kT \leq t \leq (k+1)T$$

$$\begin{cases} A_d = e^{AT} & C_d = C \\ B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau & D_d = D \end{cases}$$

sys_d = c2d(sys, T, method="zoh")

Poles of the sampled system : $\boxed{z_i = e^{s_i T}}$

⊛ Notre système discret dépend de T

(initial(ss-model, [ ]))

Sur Simulink = Discrete State Space

Controlabilité Idem

$$\mathcal{C} = [B_d \quad A_d B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1} B_d]$$

rank($\mathcal{C}$) full $\Rightarrow$ full

système discret controlable $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{système continue controlable} \\ e^{s_j T} \neq e^{s_i T} \text{ pour } s_i \neq s_j \end{cases}$

Dépend de T

Static Feedback

$$v_k = G_d\, r_k - K_d\, x_k$$

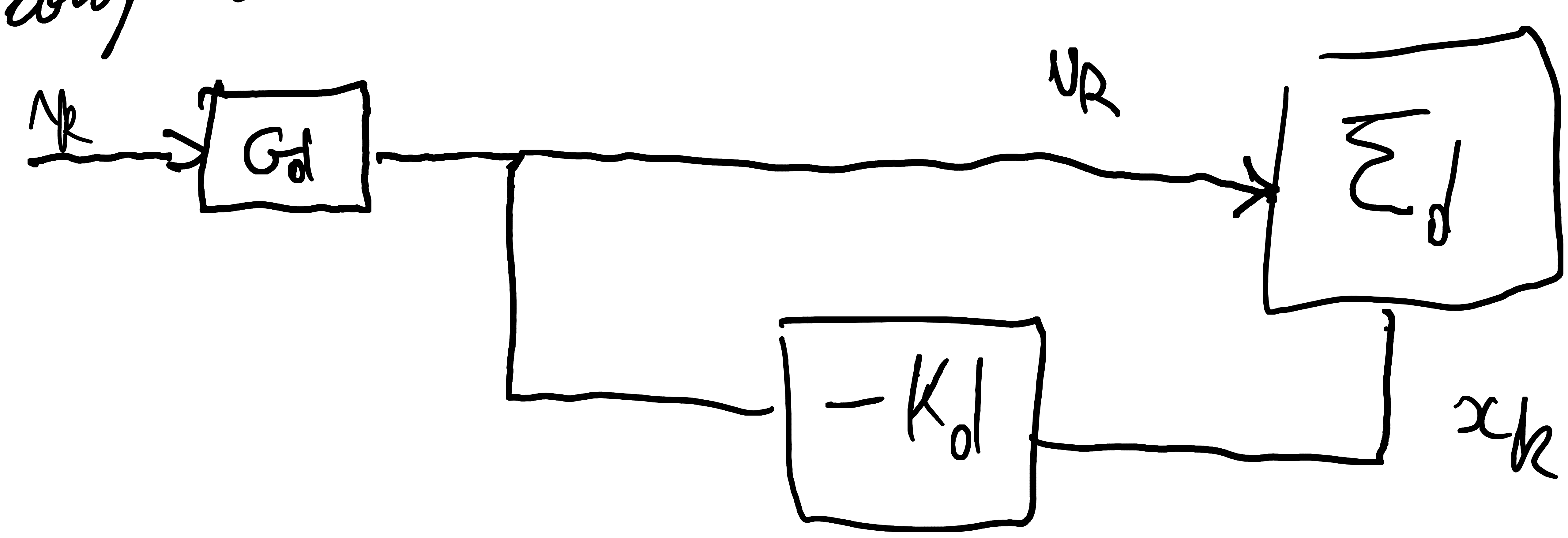
On doit chercher à placer les pôles à travers K_d

⚠ $|v_{p_d}| < 1$

$$K_d = \mathrm{place}(A_d, B_d, v_{p_d})$$

dépend de T

Précompensation



$$G_d = \left(C_d \left(I - (A_d - B_d K_d) \right)^{-1} B_d \right)^{-1}$$

Intégration $z_{k+1} = z_k + r_k - y_k$

$$\left(\text{En continue} \quad \dot{x}_i(t) = r(t) - y(t) \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix} \quad \dot{\bar{X}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \bar{X} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} r(t) \right)$$