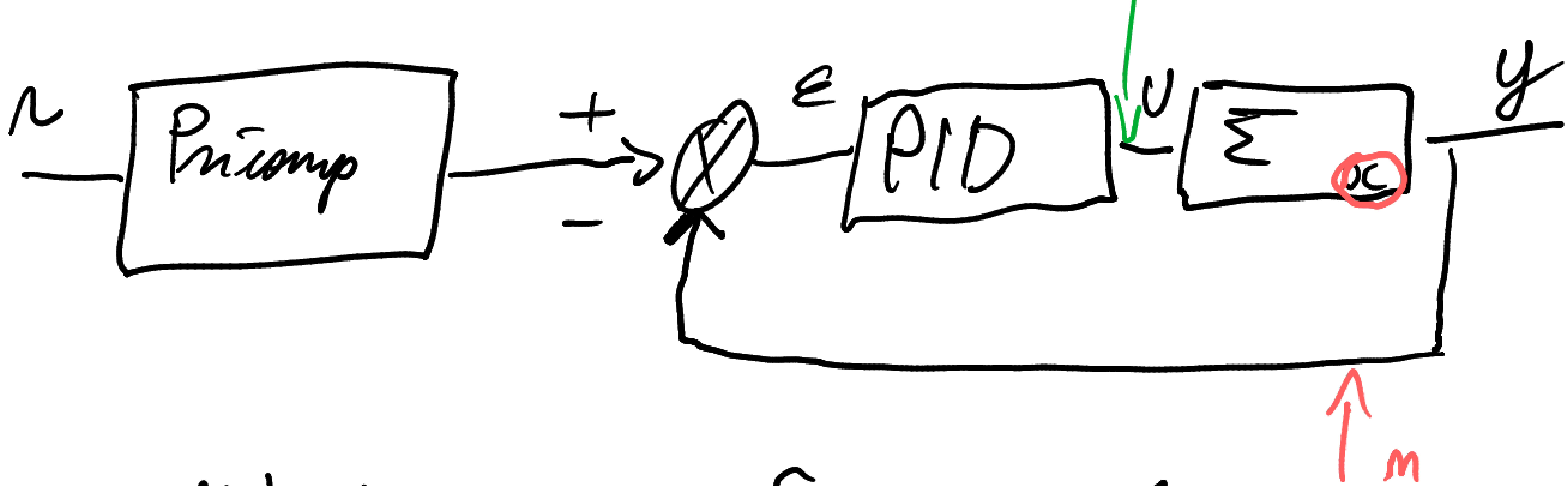
Correction par retour de sortie



$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_I \int \varepsilon + \underbrace{K_d \dot{\varepsilon}}_{\text{placement de pôle}}$$

On a calculé $W(s) = \frac{Y}{R}$ → pôles, zéros, gain statique

$\frac{\varepsilon}{du}$ sensibilité aux perturbations

$\frac{U}{m}$ sensibilité aux bruits (attention au D)

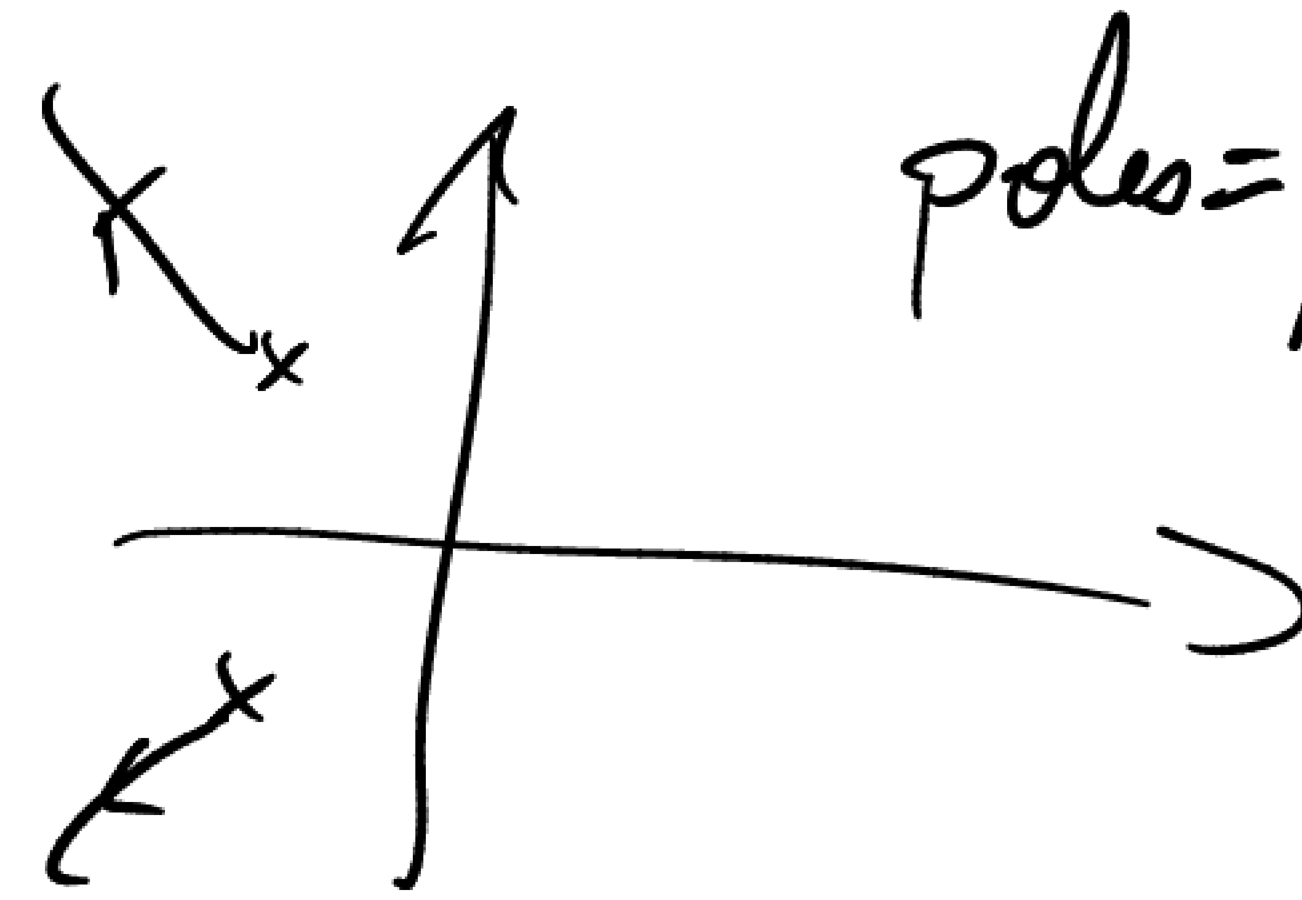
Si ordre 1 ou 2 : placement de pôle possible
on choisit le dénominateur idéal pour W

Si ordre > 2 → placement de pôle impossible (ou non réaliste) (avec PID)

Solutions partielles

→ $\Sigma \simeq$ ordre 2

→ Lieu des racines



poles $= f(K, \ldots)$

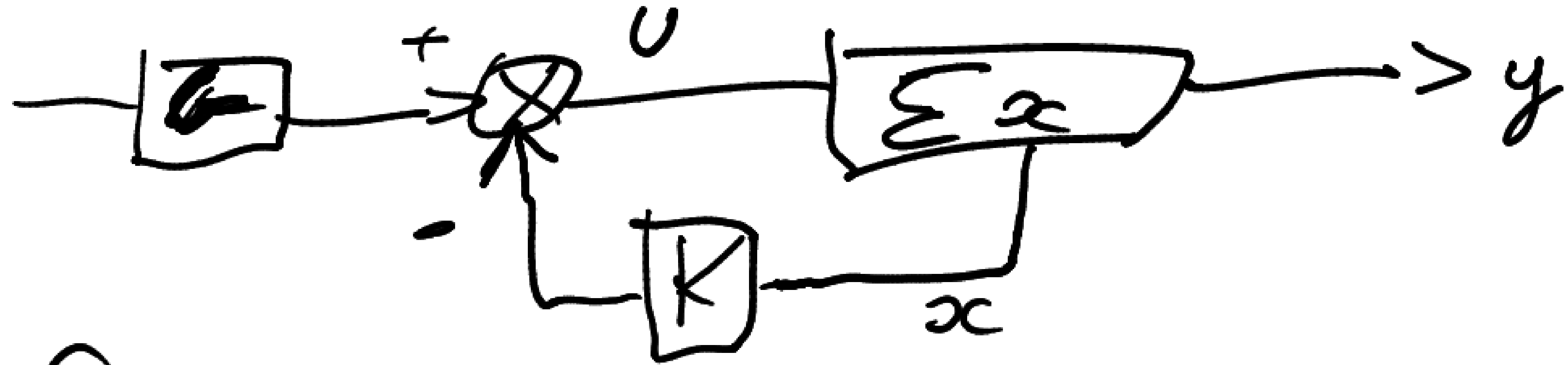
→ Formatage de la réponse fréquentielle

$$W \longrightarrow \frac{G}{1+G}$$

[mettre des prérequis sur W

Lieu de Bode / Black Nichols (méthode graphique)

I) Retour d'état



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$U = Gr - Kx$$

taille de x = ordre du système

BF $$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BGr \\ y = (C - DK)x + DGr \end{cases}$$

pôles de (BF) = vp $\underbrace{(A - BK)}_{A_{bf}}$

gain statique $\dot{x} = 0$

$$0 = (A - BK)x + BGr$$

$$x = -(A - BK)^{-1} BGr$$

$$y = [(C - DK)(A - BK)^{-1} BG_n + DG_n$$

Si $D = 0$, alors $y = C(A - BK)^{-1} BG_n$

99% des cas

1 colonne → U est un 1 colonne → 1 ligne pour k

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = [0, 1]$ $D = [0]$

$$A_{bf} = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1, k_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nombre de colonnes de B = Nombre de lignes de K

(par propriété matricielle)

$$\Pi_{A_{ff}} = \det(sI - A_{ff})$$

$$= \begin{vmatrix} s-1+k_1 & -1+k_2 \\ -1 & s \end{vmatrix}$$

$$= s(s-1+k_1) - 1 + k_2$$

$$= s^2 + (k_1 - 1)s - 1 + k_2$$

On peut imposer le $\Pi_{A_{ff}} \Rightarrow$ les pôles

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{A_{bf}} = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1+k_2 & s+k_2 \end{vmatrix}$$

$$= (s+1)(s+k_2) + k_2 - 1$$

$$= s^2 + (k_2-1)s + k_1 - 1 + k_2$$

Exemple 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\Pi_{A_{bf}} = \begin{vmatrix} s-1 & 0 \\ -1+k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (k_2-1)s - k_2$$

$\Rightarrow$ placement de pôle

Or $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$

ici u ne peut pas agir sur x_2

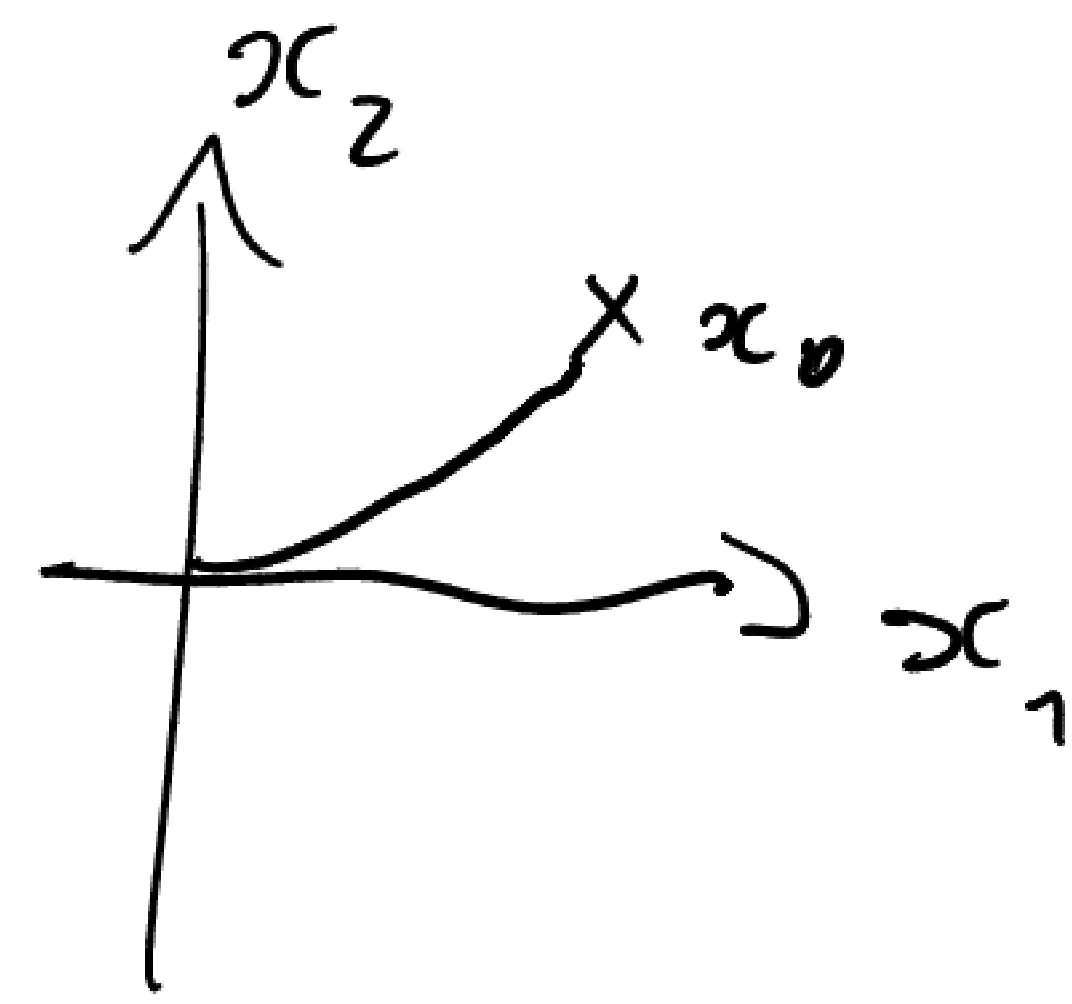
$\Longrightarrow$ pas commandable

Critère de Kalman

$\in M_{n,\, n \times m}(\mathbb{R})$

Si rang$([B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]) = n$

alors le Σ est commandable $\to$ le placement de pôle via retour d'état possible



Commandabilité, principe

Est ce qu'on peut trouver un u, pour chaque CI, atteindre en un temps donné l'origine

Example 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3×2

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^{3-1}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \quad \text{rang } 3$$

$$Com = [\ B \quad A*B \quad A\hat{}2 * B\ ] = ctrb(A,B)$$

rank(Com)

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & 1-k_3 \\ 1-k_4 & -k_5 & -k_6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{Abf} = \begin{bmatrix} s-1+k_1 & -1+k_2 & 1+k_3 \\ 1-k_4 & s+k_5 & +k_6 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$= s \begin{vmatrix} s-1+k_1 & -1+k_2 \\ 1-k_4 & s+k_5 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} s-1+k_1 & 1+k_3 \\ 1-k_4 & k_6 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (\quad)s^2 + (\quad)s + (\quad)$$

Résumé : CdC + Système

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = Cx \end{cases}$$

$\boxed{\text{traduire}}$

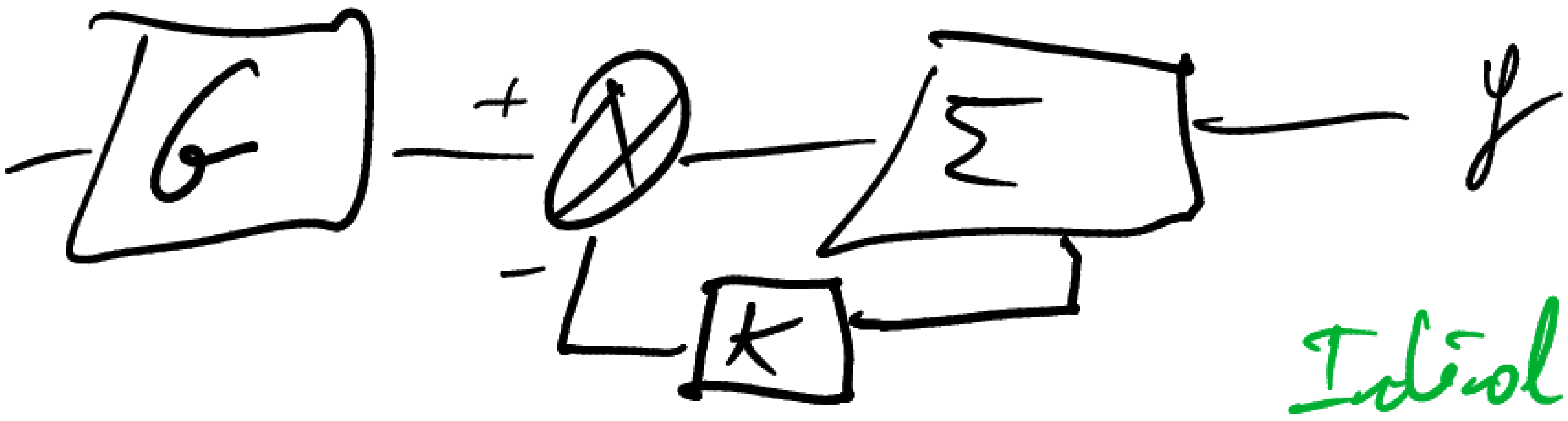
Commandable ?

$\hookrightarrow$ placement de pôle

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

calcul de K avec $\Pi_{Abf} = \prod_{\lambda} (s-\lambda)$

$K = \text{place}(A, B, [\quad])$



$$y = \overbrace{-C\underbrace{(A-BK)}_{\text{inversible, on a placé les pôles}}^{-1} B G}^{\text{Idéal} = I}\, r$$

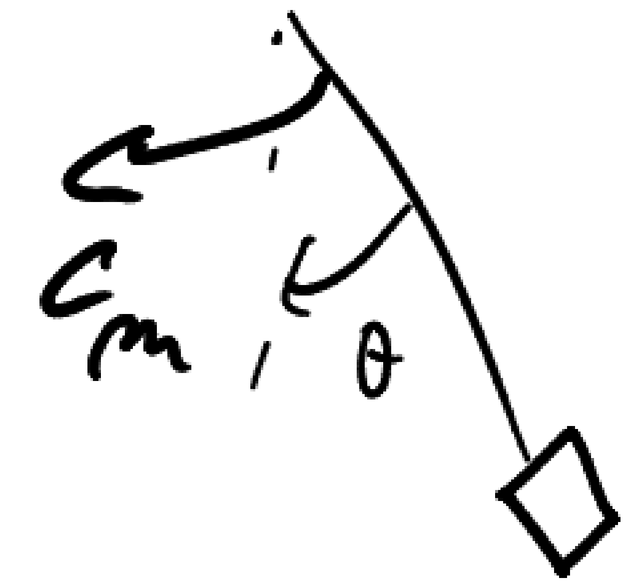
Pour $y = r$ il faut que que

Si possible $G = \left(-C(A-BK)^{-1}B\right)^{-1}$

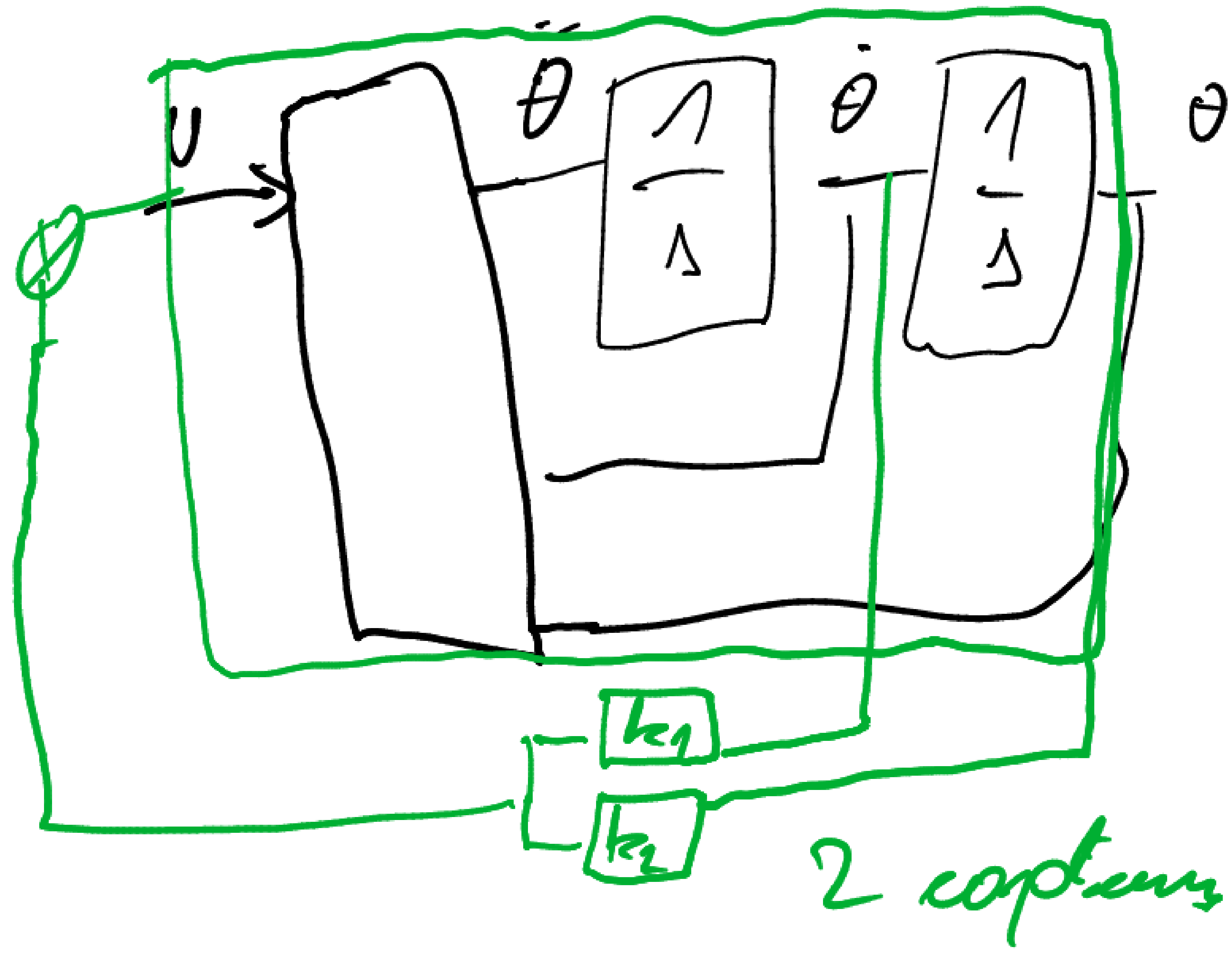
y et u de même dimension

Signification du gain K

Pendule $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

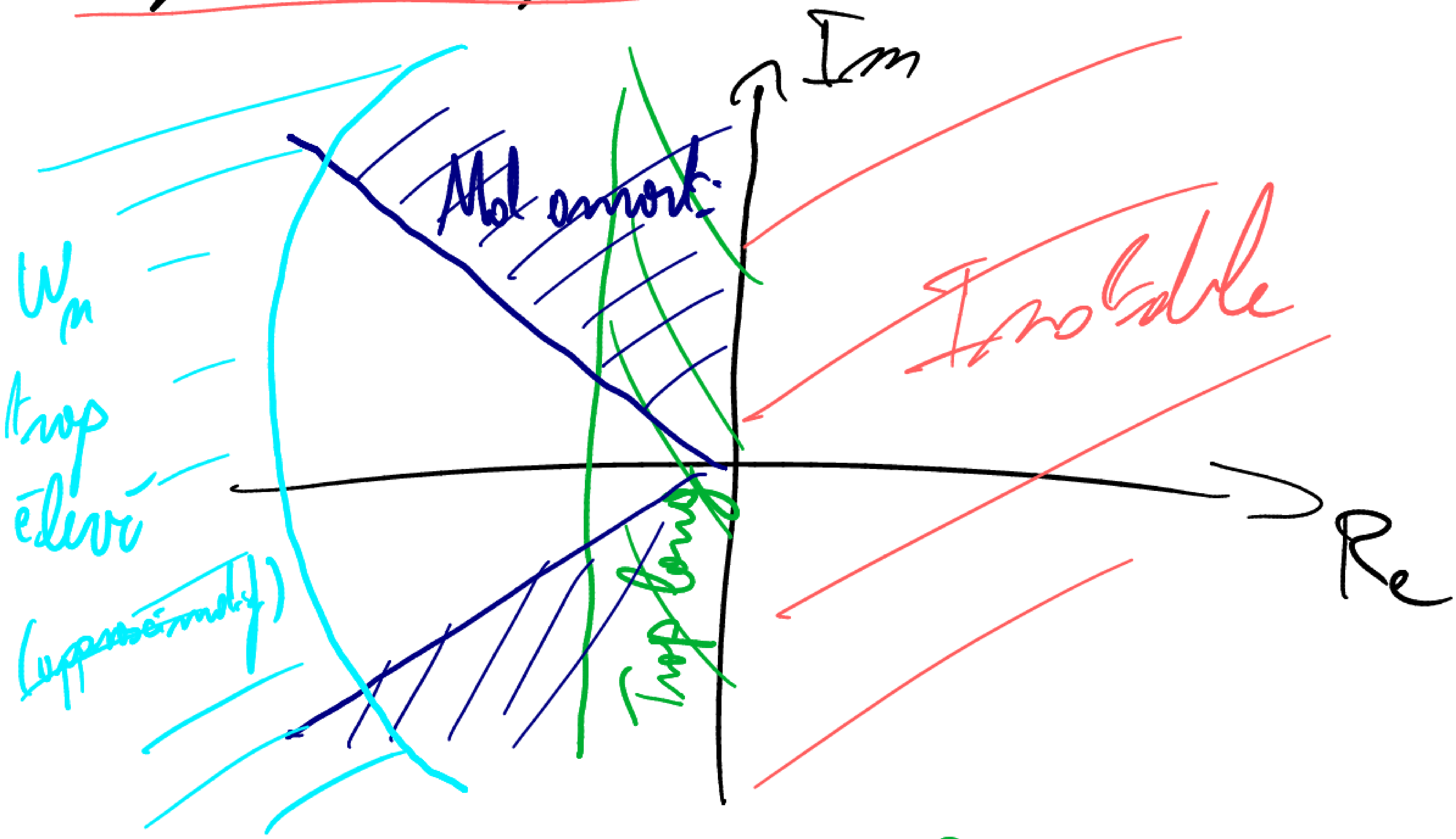


$$x = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix}$$

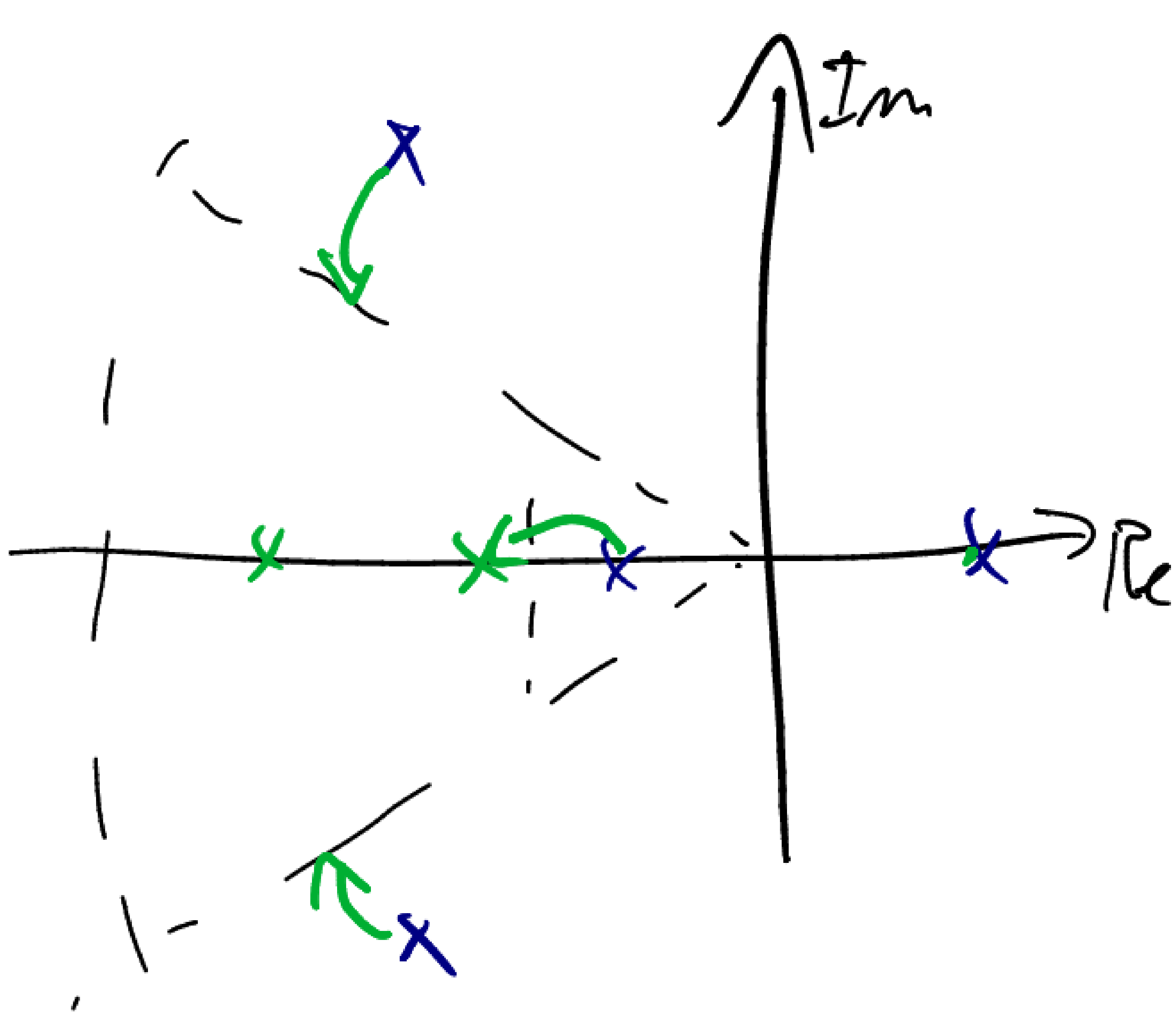


$$U = Gr - Kx = Gr - k_1\dot{\theta} - k_2\theta$$

Choix du pole



$$Re < \frac{-3}{T_{R\ \text{souhaité}}}$$

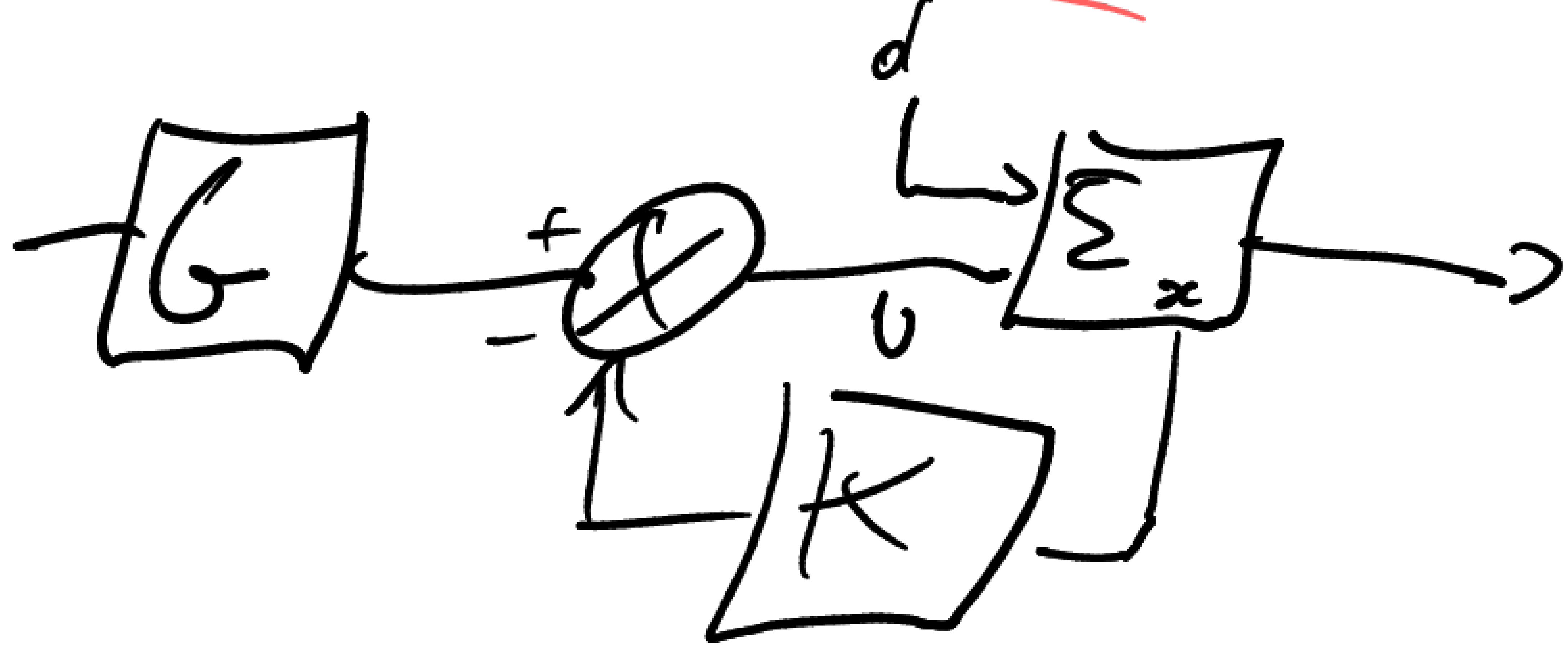


A

$A - BK$

On regarde le plus petite optimisation pour le mettre dans la zone

II) Retour d'état avec intégration



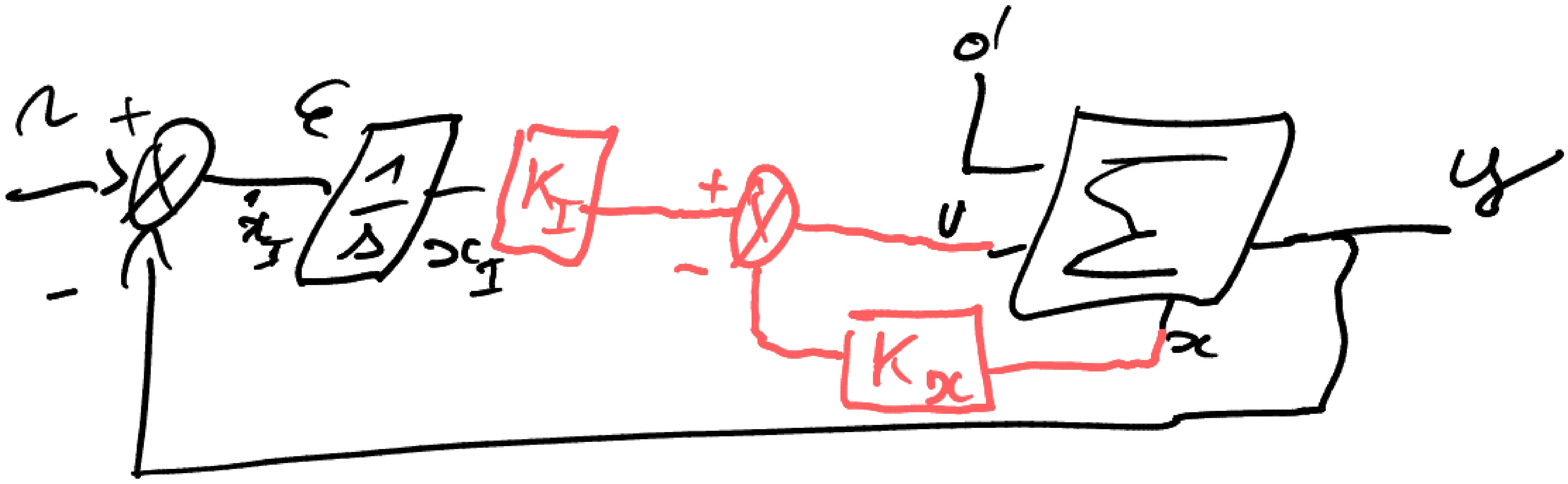
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} B_u & B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \\ y = Cx \\ u = Gr - Kx \end{cases}$$

$$BF \begin{cases} \dot{x} = (A - B_u K)x + B_u G r + B_d d \\ y = Cx \end{cases}$$

$t \to +\infty$ (si stable) $\quad \dot{x} = 0$

$$y(\infty) = -C(A - B_u K)^{-1}(B_u G r + B_d d)$$

Gain statique $d \to y$ $\quad -C(A - B_u K)^{-1} B_d$



$$X = \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix} \quad \text{état augmenté}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{pmatrix} = \dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \begin{pmatrix} x \\ x_I \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{B}} u + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} B_d \\ 0 \end{pmatrix} d$$

$$\dot{X} = \bar{A} X + \bar{B} u + \dots$$

$$\bar{K} = \text{place}(\bar{A}, \bar{B}, [\quad])$$

$$u = -\bar{K} X + G r$$

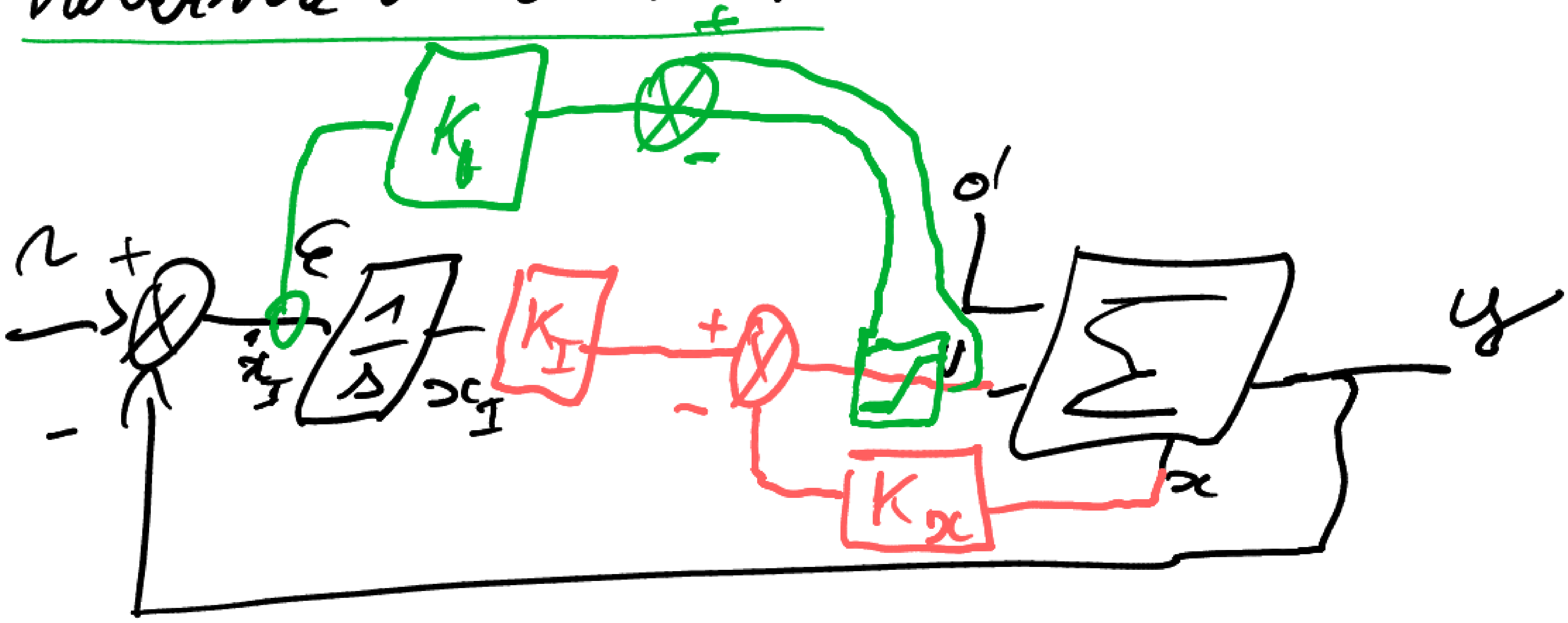
pas utile pour le gain statique

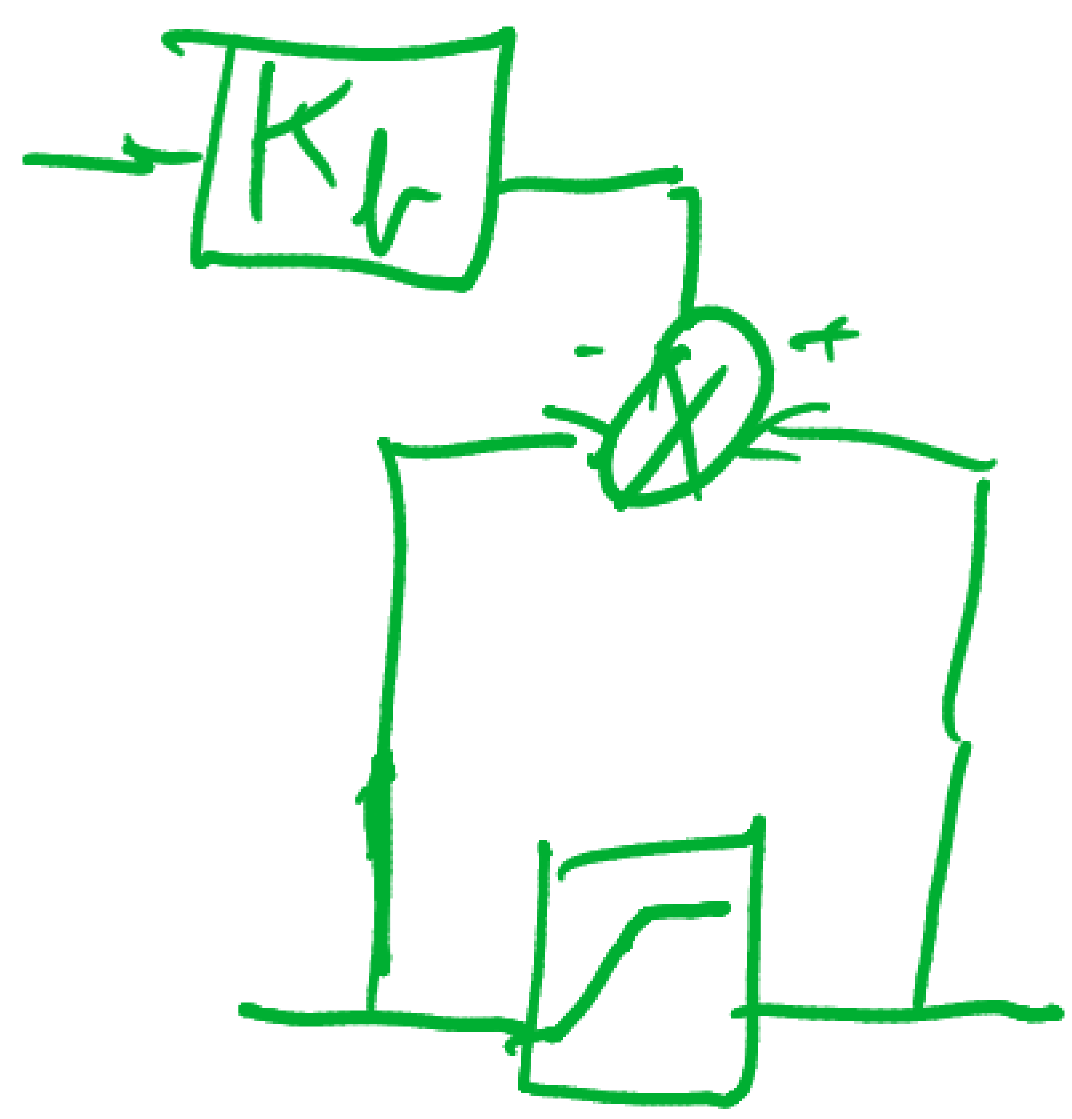
car $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ stable $\Rightarrow \dot{X} \to 0$

$$\Rightarrow \dot{x}_I = \varepsilon \to 0$$

$$u = -\bar{K} X = -K_x x - K_I x_I$$

Problème de saturation





Fonctionne si stable en boucle ouverte

Propriétés

$$\dot{X} = \bar{A}_{bf} X + \bar{B}_r r + \bar{B}_d d$$

$r = 0 \quad d = \text{cste}$

$\dot{d} = 0$

$$\ddot{X} = \bar{A}_{bf} \dot{X} \quad \text{si stable}$$

$\dot{X} \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$

Si $r = 0$ et $\dot{d} = \text{cste} = \dot{d}_0$

$$\ddot{X} = \bar{A}_{bf} \dot{X} + \bar{B}_d \dot{d}_0$$

On a montré

$\ddot{X} \to 0 \qquad \dot{\varepsilon} \to 0$

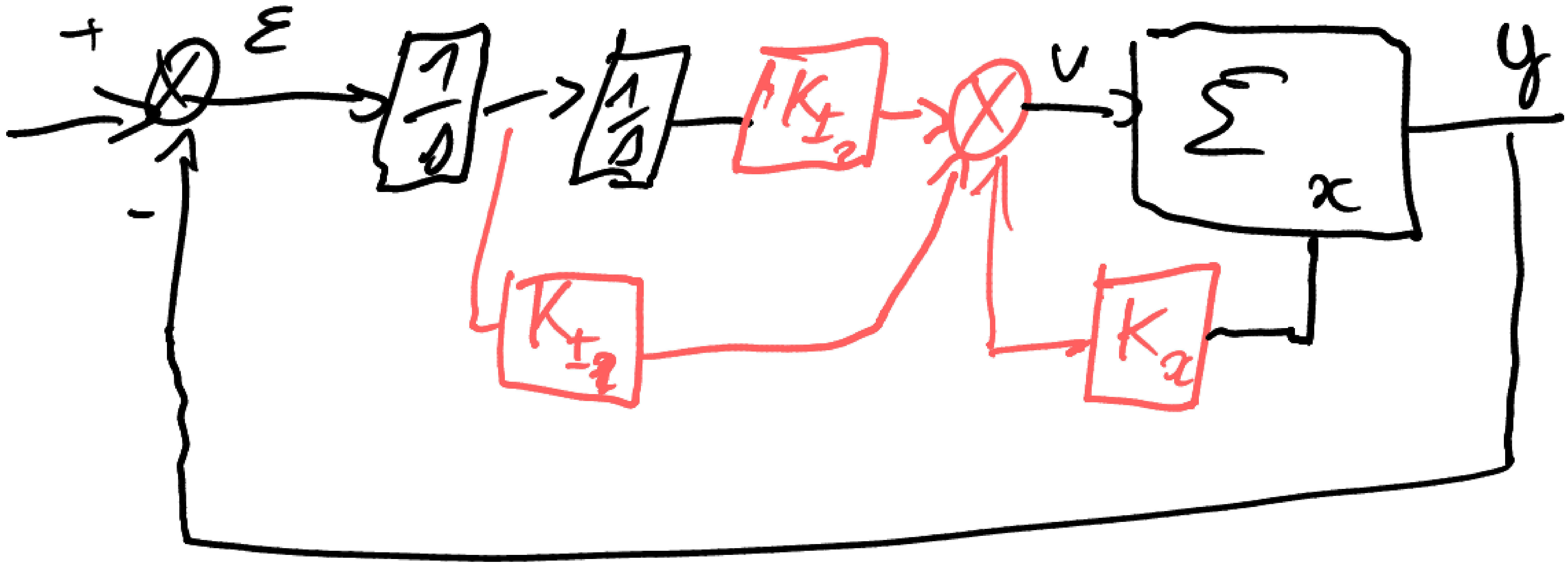
$$\dot{X} = -\bar{A}_{bf}^{-1} \bar{B}_d \dot{d}_0$$

$\varepsilon \to \text{cste}$

Solution si $X = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ alors $\varepsilon \to 0$ pour $\dot{d} = \text{cste}$

Pour rejeter de perturbation de type rampe :

on doit intégrer deux fois



rejette les perturbation en rampe

de même pour les consignes en rampes

On a besoin d'un nombre d'intégration qui dépend de la complexité de la perturbation