Chapitre 2 : Analyse des systèmes linéaires

Comportement autour d'un point d'équilibre

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Comportement de $x \,|_{u \text{ et } x(0)}$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}(x(0) + Bu(s))$$

$$X(s) = \frac{\mathrm{Co}(sI-A)^T}{\det(sI-A)}(x(0) + Bu(s))$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Co(sI-A)^T}{det(sI-A)}\, x_0\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Co(sI-A)^T}{det(sI-A)}\, B\, U(s)\right)$$

principe de superposition

Décomposition en Élément Simple

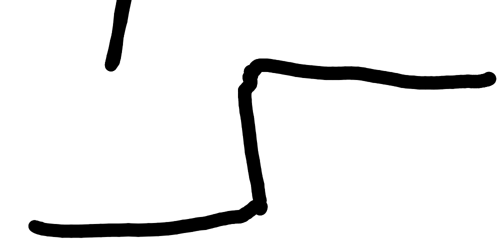
$$x(t) = \sum \mathcal{L}^{-1}(\text{elements simples}) = \sum P_i(t)\, e^{\lambda_i t}$$

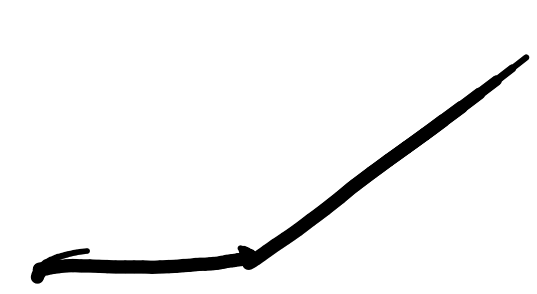
$\{\lambda_i\} = vp(A) \cup$ poles de $U(s)$

Les poles de $\dfrac{Co(sI-A)^T}{det(sI-A)} = vp(A)$ → Calcul des $\mathcal{L}^{-1}$ elt simples

Rappels :

$U(s) = 1$ dirac impulsion

$U(s) = \dfrac{1}{s}$ échelon 

$U(s) = \dfrac{1}{s^2}$ rampe 

Comportement de Y

$$Y = C \frac{\mathrm{Co}(sI-A)^T}{\det(sI-A)} \left(x(0) + BU\right) + DU$$

Définition de la fonction de transfert

$$x(0) = 0$$

$$Y = \left(C \frac{\mathrm{Co}(sI-A)^T}{\det(sI-A)} B + D \right) U$$

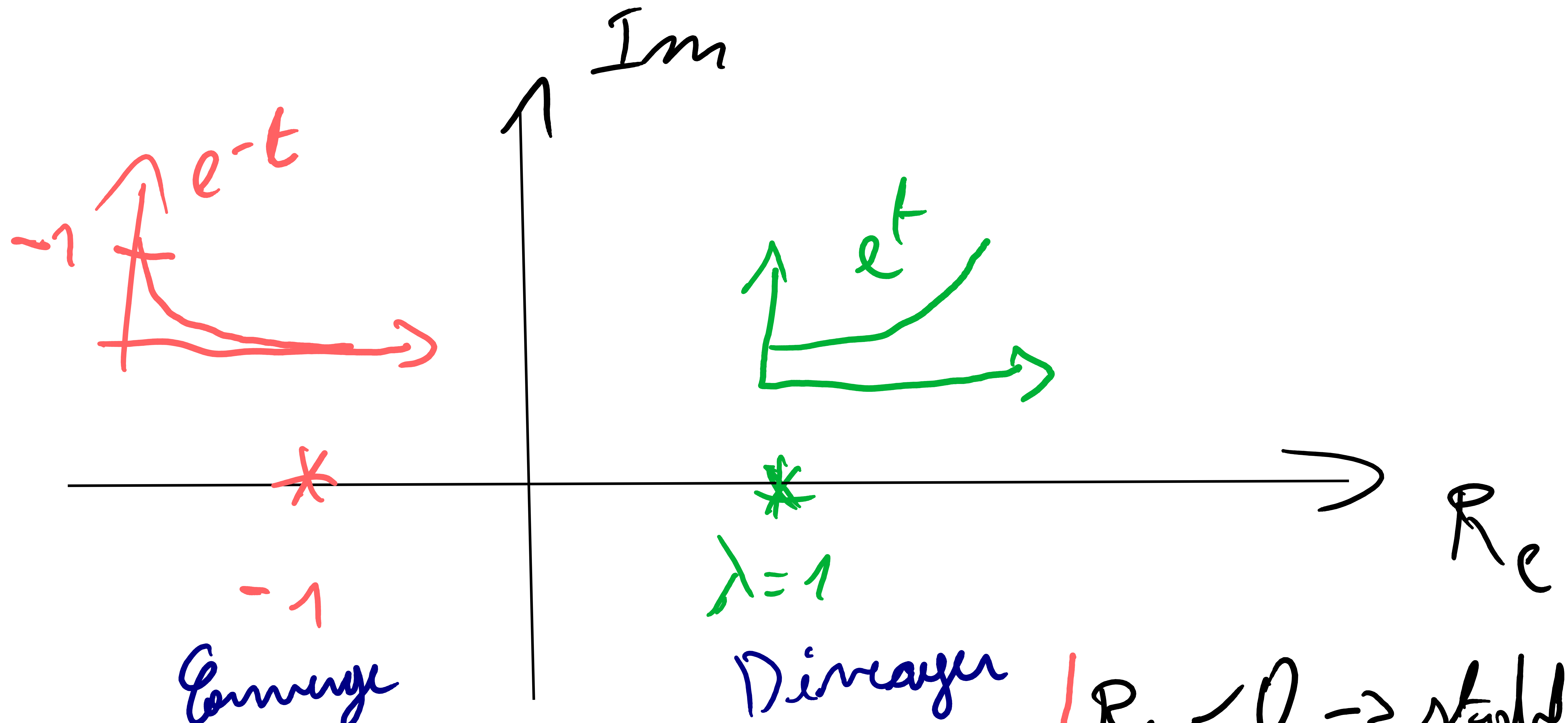
$$= \underbrace{\left(C(sI-A)^{-1}B + D \right)}_{\text{Matrice de transfert}} U$$

Si U et Y sont scalaires

$$\frac{Y}{U} = C(sI-A)^{-1}B + D = F(s)$$

fonction de transfert

$vp(A) = \text{pôles de } F(s) \rightarrow e^{\lambda_i t}$



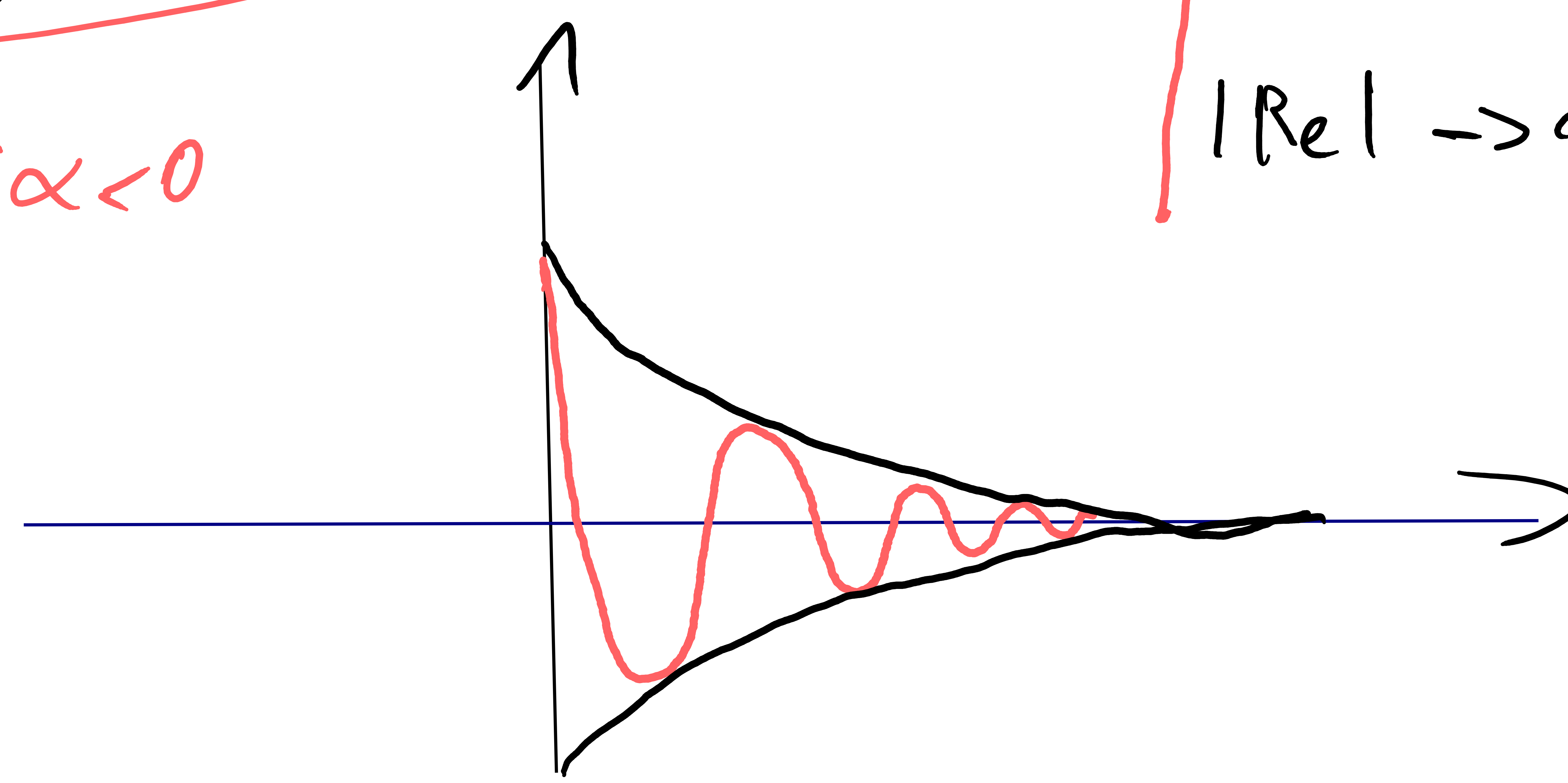
$Re < 0 \rightarrow$ stable

$Im \rightarrow$ pulsation

$|Re| \rightarrow$ vitesse

Pour le cas complexe

Si $\alpha < 0$

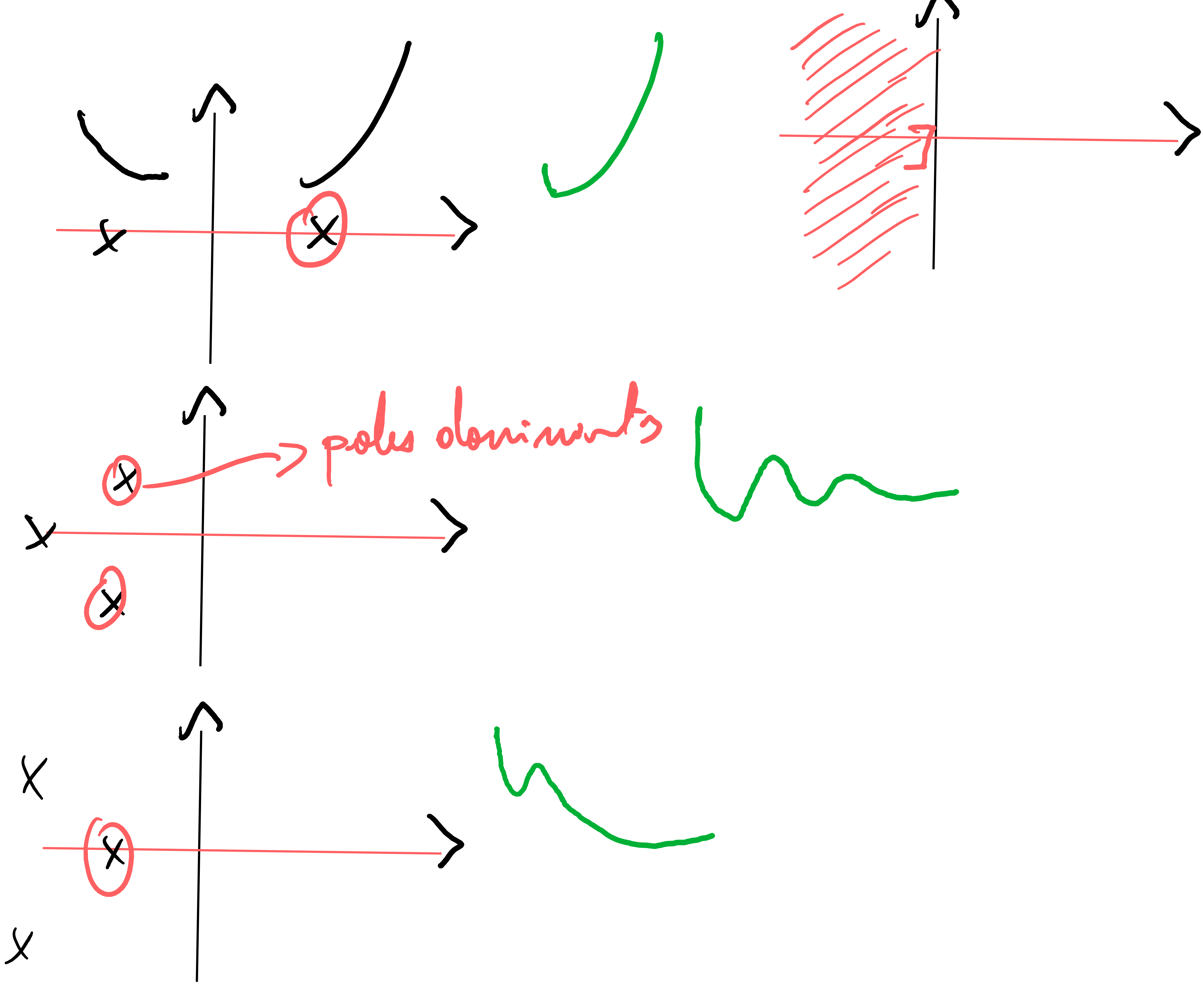


$$\left.\begin{aligned} \text{Si } \lambda_1 &= \alpha + \beta i \\ \lambda_2 &= \alpha - \beta i \end{aligned}\right) \text{réel}$$

$$e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} = 2 e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

Pour le cas où Re = 0 : indéterminé ;
il faut regarder le degré du polynôme

Dans notre cas, vu qu'on va mettre des échelons alors on sera instable



Si il y a 3 |Re| d'écart alors ils deviennent négligeable

Si les autres sont 3 fois plus rapide

II) Régime permanent

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$y = M(0)u = \left(C(-A)^{-1}B + D\right)u$$

<u>Remarque</u>

$$1 - e^{-1} = 0,63$$

$$1 - e^{-3} = 0,95$$

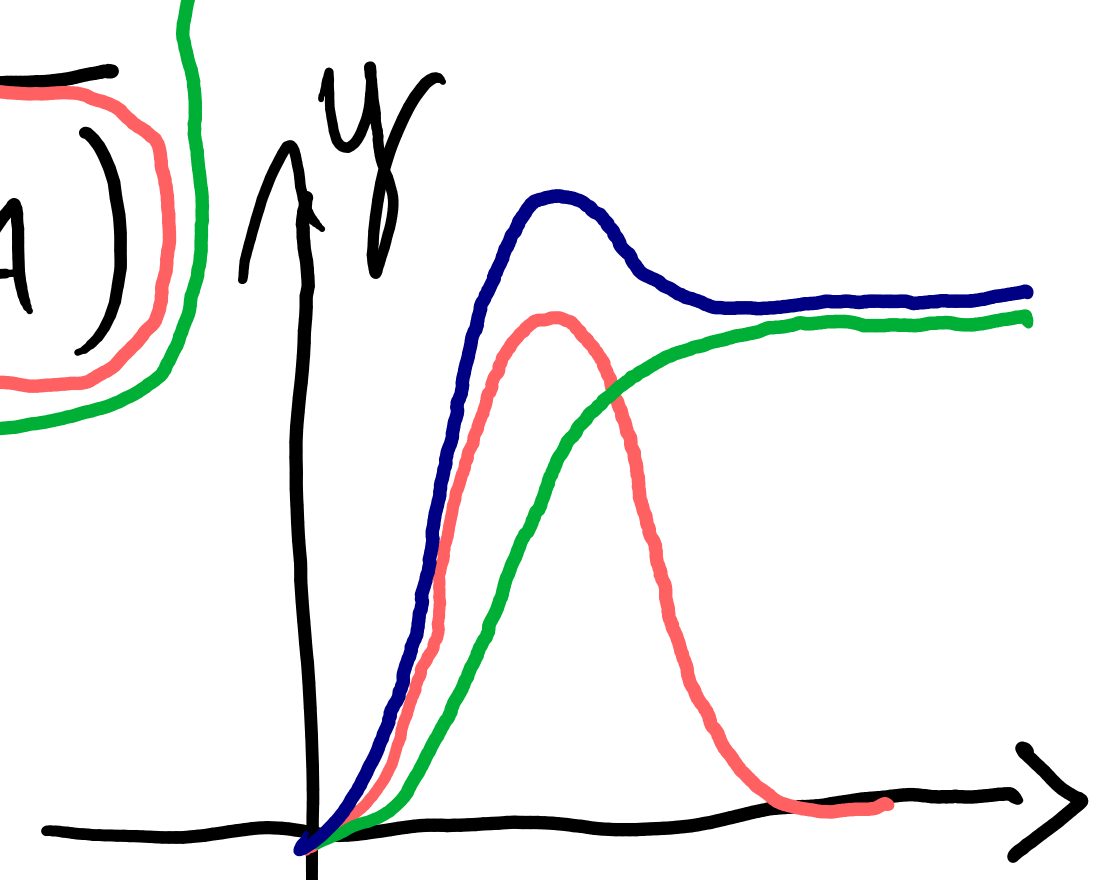
$$e^{\lambda t} \qquad \lambda t = 3$$

$$t = \frac{3}{\lambda}$$

III) Effet des zéros

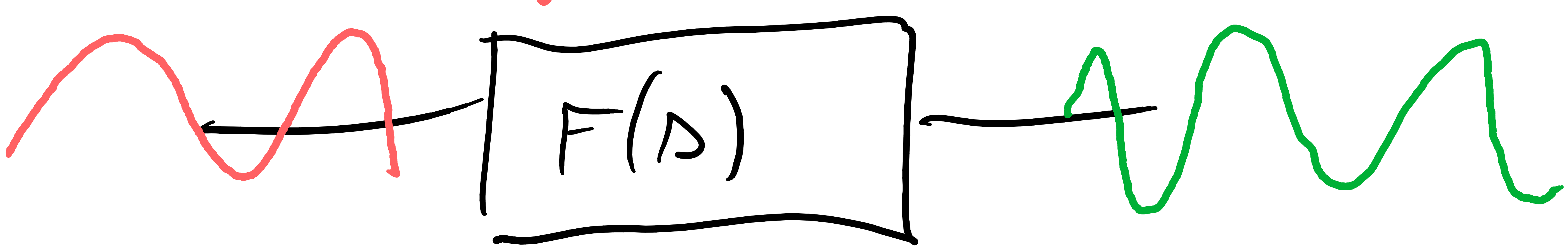
Dans le cas scalaire

$$\frac{Y}{U} = F(s) = \frac{\alpha D + 1}{\det(sI - A)}$$



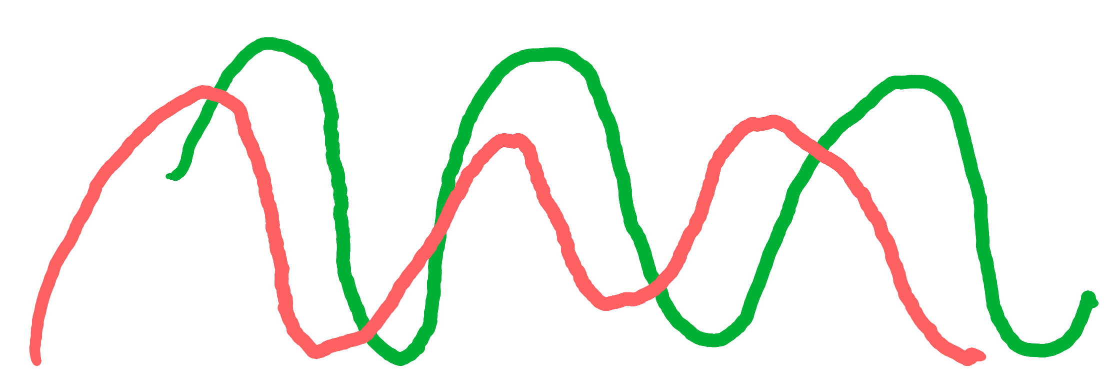
L'effet des zéros : dépassements

IV) Réponse fréquentielle



$U = \sin(\omega t)$

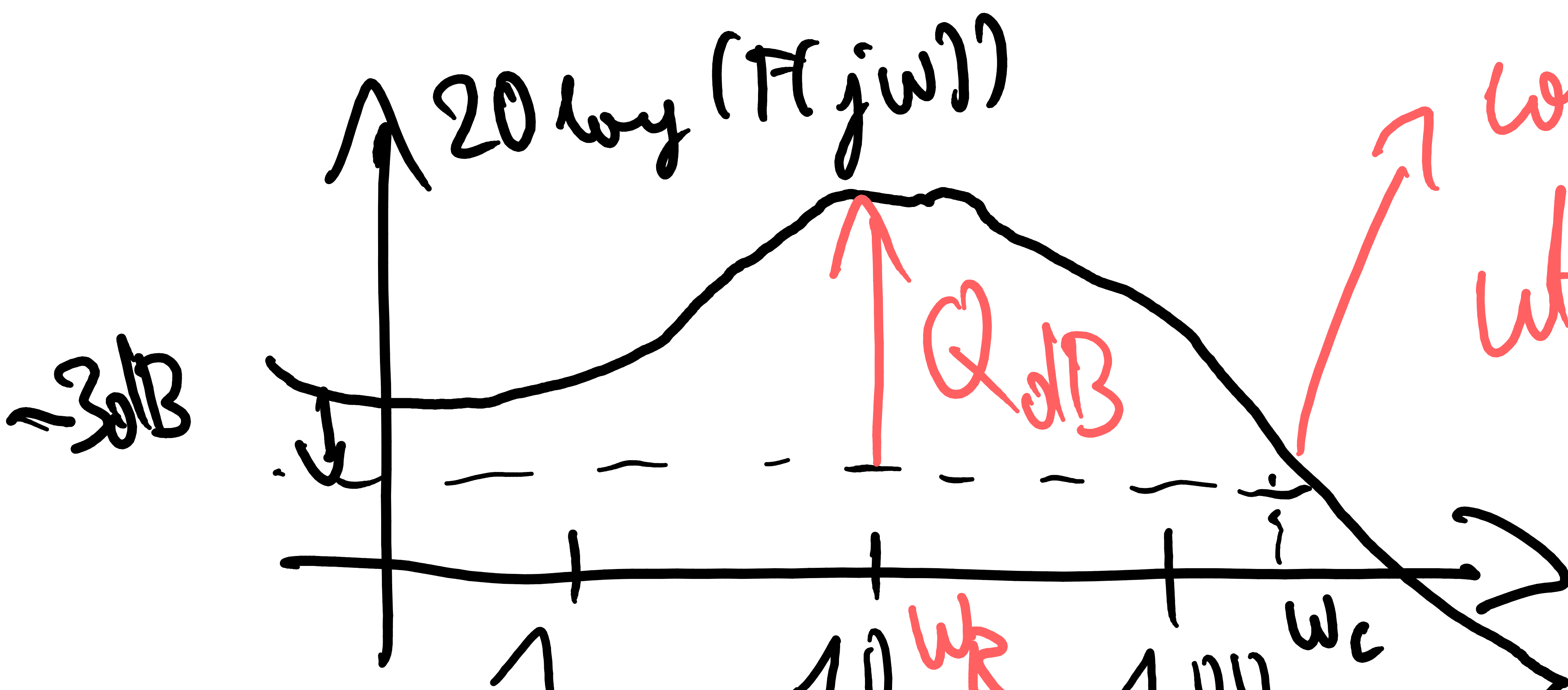
$t \to +\infty$



$y(t) \Rightarrow \|F(j\omega)\| \sin(\omega t + \arg F(j\omega))$

Sensibilité aux fréquences

Lieu de Bode



coupure

utile pour voir la sensibilité au bruit