数学分析复习题归纳总结（基础部分）

1. 如果变上限定积分被积函数含有函数自变量 x，则求导时不能直接把被积函数的 t 置换为 x 得到答案，因为被积函数是随着 x 变化的。而 x 相对被积函数来说是一个常量，所以需把 x 提到积分号外面，然后根据函数的求导法则对整个函数进行求导。例子：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)(x-t)^2\mathrm{d}t \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x x^2 f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x 2xtf(t)\mathrm{d}t+\int_a^x t^2 f(t)\mathrm{d}t\right) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2x\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t+\int_a^x t^2 f(t)\mathrm{d}t\right) \\
=&2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+x^2 f(x)-\left(2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-2x^2 f(x)\right)+x^2 f(x) \\
=&2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

2. 证明积分不等式的时候除了观察放缩法也要考虑使用最大最小值进行放缩，也就是讨论函数单调性。例子：

例题 试证明 $3\sqrt{e}<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<6$

证明 只证第二个不等号。考察被积函数 $f(x)$ 单调性.

$$
f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1-\frac{1}{2}\ln x)}{x}
$$

故

$$
\operatorname{sgn} f'(x)=\operatorname{sgn}(2-\ln x)
$$

故 $f(x)$ 在积分区间内先增后减，由于 $f(x)$ 连续，考察其最大值

$$
\max f(x)=f(e^2)=\frac{2}{e}
$$

应用积分保不等式性有

$$\int_e^{4e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < \int_e^{4e} \frac{2}{e}$$

也就是

$$\int_e^{4e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 6$$

即证。

3. 重要结论 若 $\psi(x) \geq 0$，则 $\displaystyle\int_a^b \psi(x) > 0$ 的充分必要条件是 $\exists[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 使得 $\forall x \in [a, b]$ 有 $\psi(x) > 0$.

证明 略

注 反面同样成立，即 $\displaystyle\int_a^b \psi(x) = 0$ 的充分必要条件是 $\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b]$，都 $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$ 使得 $\psi(x_0) = 0$

4. 证明与和有关的不等式时，不仅要想到把和转化为积分，也要考虑把函数转变为积分再变换为和。

例题 试证明

$$\ln(1+n) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < 1 + \ln n$$

分析 首先考虑把和转化为积分。这不合适，因为和不是趋于无穷的。遂考虑把函数转化为积分再转化为和。特别要注意利用上和和下和的性质进行放缩。上和和下和是无限求和和有穷求和之间的重要桥梁，一定要善加使用。

证明 事实上，可以对分割 $[0, n]$ 做分割 $T: 0 = x_0 < 1 = x_1 < 2 = x_2 < ... < i = x_i < ... < n = x_n$. 考虑积分 $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x$ 在分割 T 下的上和，因为 $\dfrac{1}{1+x}$ 递减，故每个区间的上界在左端点取，不难得到

$$\ln(1+n)=\int_0^n \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

这样第一个不等号得到证明。(不是小于等于是因为被积函数是严格单调的，具体性质可另行证明。)

于第二个不等号，则采取相同的手段

$$\ln n=\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x>\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$$

即证。

上述不等式的应用 观察到调和级数形式即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 就要想到用上述不等式进行估计。

例 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$$

证明 使用夹逼准则.

$$\frac{\ln(1+n)}{\ln n}<\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n}<\frac{1+\ln n}{\ln n}$$

原命题立刻得到证明。