Abel 恒等式的证明

Abel 变换　Abel 变换或 Abel 恒等式的一种形式是

$$a_n b_n - a_1 b_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1}\left(b_{i+1} - b_i\right) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\left(a_{i+1} - a_i\right)$$

理解　Abel 变换可以理解为分部积分的离散形式。我们从这个角度考虑证明该恒等式。

证明　定义差分

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

考察积的差分。

$$\begin{aligned}\Delta a_n b_n &= a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n \\ &= a_{n+1} b_{n+1} - a_{n+1} b_n + a_{n+1} b_n - a_n b_n \\ &= a_{n+1} \Delta b_n + b_n \Delta a_n\end{aligned}$$

两侧求和从 1 到 $n-1$ 有

$$a_n b_n - a_1 b_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1}\left(b_{i+1} - b_i\right) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\left(a_{i+1} - a_i\right)$$

这是要证的。