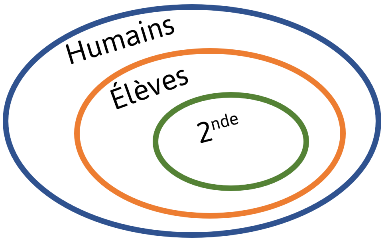
# Ensembles de nombres et intervalles de $\mathbb{R}$

## Table des matières



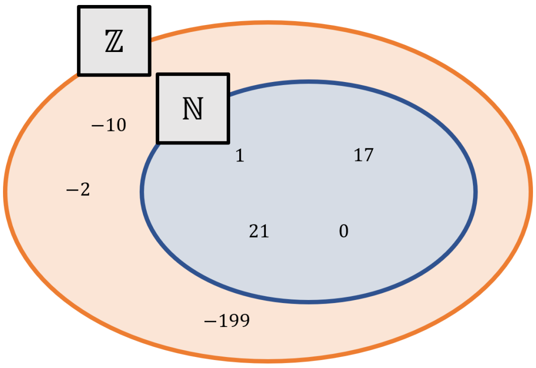
## 1. Les entiers

**Rem. :** Dans le lycée, il y a un ensemble d'**humains**. Parmi eux, il y a des **élèves** et parmi ces élèves il y a des **secondes**.




**Def. :**
Parmi les nombres **entiers**, il existe :

- Entiers **naturels** : $\mathbb{N}$
  - Entiers (sans partie décimale) positifs : $0$ ; $1$ ; $4$ ; $999\ldots$
- Entiers **relatifs** : $\mathbb{Z}$
  - Entiers positifs ou négatifs : $-6$ ; $-77$ ; $98$ ; $4$ $\ldots$




**Ex. :**

- $17$ appartient à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow 17 \in \mathbb{N}$ et $17 \in \mathbb{Z}$
- $(-2)$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$ $\Rightarrow (-2) \notin \mathbb{N}$
- $157 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ à $\mathbb{N}$ $\Rightarrow 157 \ldots\ldots\ldots \mathbb{N}$

## 1.1. Multiples - diviseurs

**Def. :** Soit $a$ et $b$, deux nombres entiers.
On dit que $a$ est un **multiple** $b$ s'il existe un entier $k$ tel que :

$$a = k \times b$$

On dit aussi que $b$ est un **diviseur** de $a$.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| **6** | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| **7** | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| **8** | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| **9** | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| **10** | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

**Ex. :**
- $27 = 3 \times 9$ donc
  - 27 est **multiple** de 3 (et de 9)
  - 9 est un **diviseur** de 27
- 85 n'est pas un **multiple** de 10 car :
  - $85 = k \times 10 \Leftrightarrow k = 8.5$ et $k$ pas entier

**Prop. :**
Soit $a$ un entier. La somme de deux **multiples** de $a$, est un **multiple** de $a$.

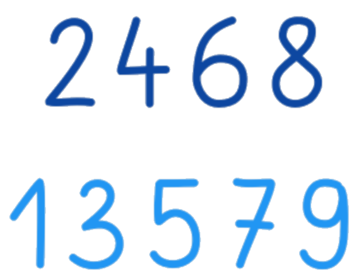
**Ex. :**
21 et 33 sont des **multiples** de 3 donc $54 = (21 + 33)$ est un **multiple** de 3.
En effet, $54 = 18 \times 3$

**Démonstration :**
Soit $n_1$ et $n_2$, deux multiples de $a$ alors :
$n_1 = k_1 \times a$ et $n_2 = k_2 \times a$
On a donc :
$n_1 + n_2 = (k_1 \times a) + (k_2 \times a) = (k_1 + k_2) \times a$
Donc : $(n_1 + n_2)$ est multiple de $a$

---

## 1.2. Pair - impair

**Def. :**
Un nombre **pair** est un multiple de 2.
- Si $n$ est **pair** alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- Si $n$ est **impair** alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$




**Ex. :**
- 157 est **impair** car $157 = (2 \times 78) + 1$
- 2048 est **pair** car $2048 = (2 \times 1024)$

**Prop. :**
Le **carré** d'un nombre **impair** est **impair**

**Démonstration :**
Soit $n$ un nombre **impair**. On a donc $n = 2k + 1$
$$\begin{aligned} n^2 = (2k+1)^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2K + 1 \end{aligned}$$
Si $n$ est **impair** alors $n^2$ est **impair**.

### 1.3. Nombres premiers

**Def. :**
Un entier naturel est dit **premier**, s'il admet exactement **deux diviseurs** entiers positifs.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Ex. :**
- 25 admet comme diviseurs 1, 5 et 25 $\longrightarrow$ **pas premier**
- 17 admet comme diviseurs 1 et 17 $\longrightarrow$ **premier**
- 221 admet comme diviseurs ... $\longrightarrow$ ...

### 1.4. Décomposition en facteurs premiers

**Ex. :**
- $60 = 30 \times 2 \quad = 15 \times 2 \times 2 \quad = 5 \times 3 \times 2 \times 2$

La décomposition de 60 en facteurs **premiers** est :

$$60 = 3^1 \times 5^1 \times 2^2$$

Méthode pour décomposer 60 :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

**Ex. :**
- $1300 = \ldots$

$$\begin{array}{r|l} 1300 & 2 \\ 650 & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

## 2. Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

### 2.1. Les décimaux : $\mathbb{D}$

Nombres dont **la partie décimale est finie.** On peut les écrire sous la forme :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z}$$

**Ex. :**
À vous de compléter :
- $0.009 = \ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{-1234}{10^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Ex. :**
- $1.77 = \frac{177}{100} = \frac{177}{10^2} \qquad \text{donc} \qquad 1.77 \in \mathbb{D}$
- $-5.001 = \frac{-5001}{1000} = \frac{-5001}{10^3} \qquad \text{donc} \qquad -5.001 \in \mathbb{D}$

### 2.2. Les rationnels : $\mathbb{Q}$

Ils peuvent s'écrire sous la forme : $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$

**Ex. :**
- $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots \in \mathbb{Q}$
- $\frac{50}{7} = 7.142\ 857\ 142\ 857\ \ldots \in \mathbb{Q}$

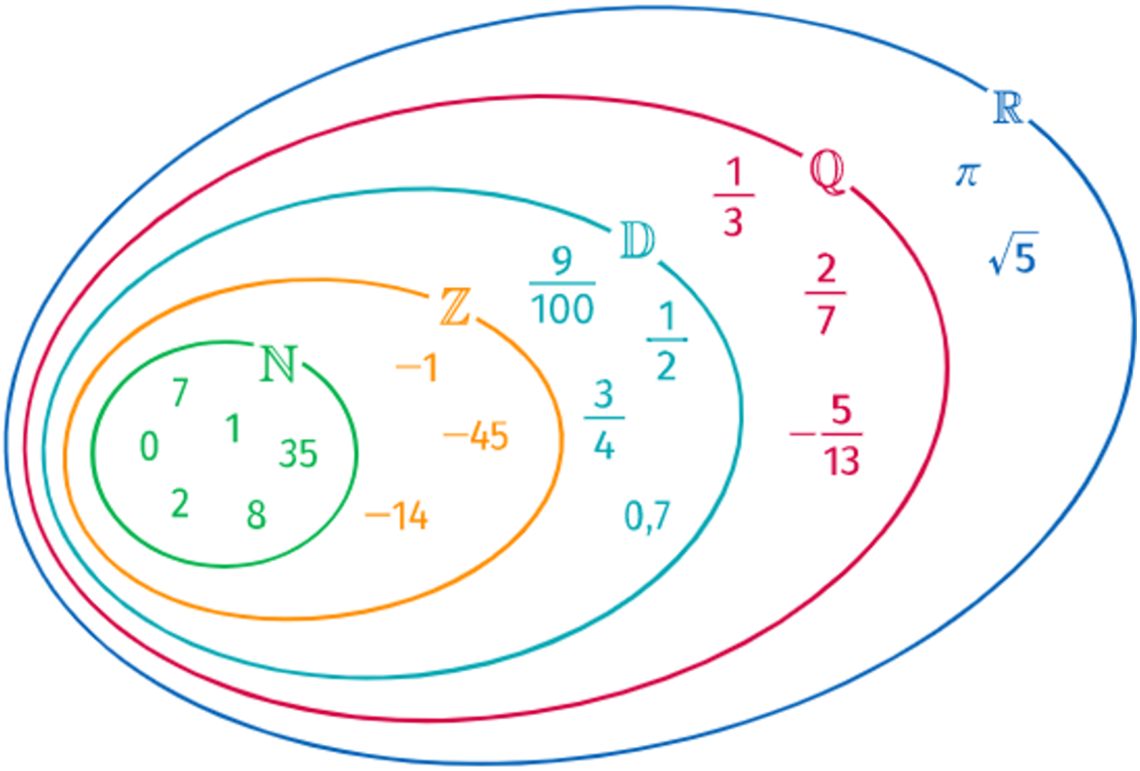
**Rem. :** La partie décimale peut se "répéter" à l'infini.

## 2.3. Les réels : $\mathbb{R}$

Tous les nombres connus en seconde.

**Ex :** $-16$ ; $\sqrt{3}$ ; $\pi$ ; ...

## 2.4. Les ensembles de nombres à connaître♥ en $2^{nde}$




**Démonstration :**

Démontrons que $\frac{1}{3}$ **n'** appartient **pas** aux décimaux.

**Supposons** que $\frac{1}{3}$ appartient aux décimaux alors il peut s'écrire sous la forme : $\dfrac{a}{10^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \in \mathbb{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \\ &\Leftrightarrow \quad 3 \times a = 1 \times 10^n \\ &\Leftrightarrow \quad 3a = 10^n \end{aligned}$$

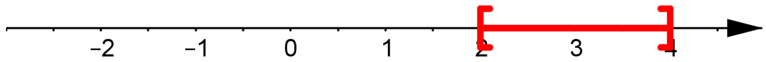
On a :

- $3a$ est un multiple de 3 donc la **somme des ses chiffres** doit être un multiple de 3.
- $10^n$ est un nombre constitué d'un seul 1 et de zéros donc la **somme des ses chiffres** est 1.

Donc $10^n$ n'est pas un multiple de 3, donc $10^n \neq 3 \times a$ donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

## 3. Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue

**Def. :**
L'ensemble $I$ de tous les nombres réels $x$ tels que $2 \leqslant x \leqslant 4$ peut se représenter sur une droite graduée :



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note :

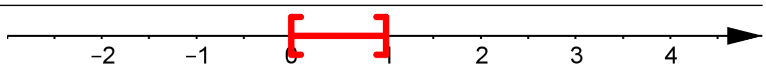
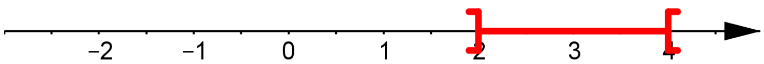
$$I = [2\ ;\ 4]$$

**Ex. :**
L'ensemble $J$ des réels $x$ tels que $-2 \leqslant x \leqslant 7$ se note :

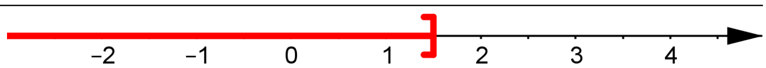
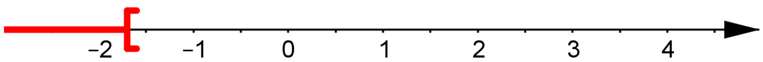
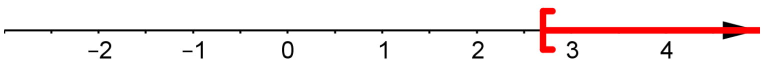
$$J = [-2\ ;\ 7]$$

On a : $4 \in [-2\ ;\ 7]$ et $-5 \notin [-2\ ;\ 7]$

**Ex. :**

| Notation | Inégalité | Représentation |
|---|---|---|
| $[0\ ;\ 1]$ | $0 \leqslant x \leqslant 1$ |  |
| $]-1\ ;\ 3]$ | $-1 < x \leqslant 3$ |  |
| $[-0.5\ ;\ 2.3[$ | $-0.5 \leqslant x < 2.3$ |  |
| $]2\ ;\ 4[$ | $2 < x < 4$ |  |

**Ex. :**

| Notation | Inégalité | Représentation |
|---|---|---|
| $]-\infty\ ;\ 1.5]$ | $x \leqslant 1.5$ |  |
| $]-\infty\ ;\ -1.7[$ | $x < -1.7$ |  |
| $]-2\ ;\ +\infty[$ | $x > -2$ |  |
| $[2.7\ ;\ +\infty[$ | $x \geqslant 2.7$ |  |

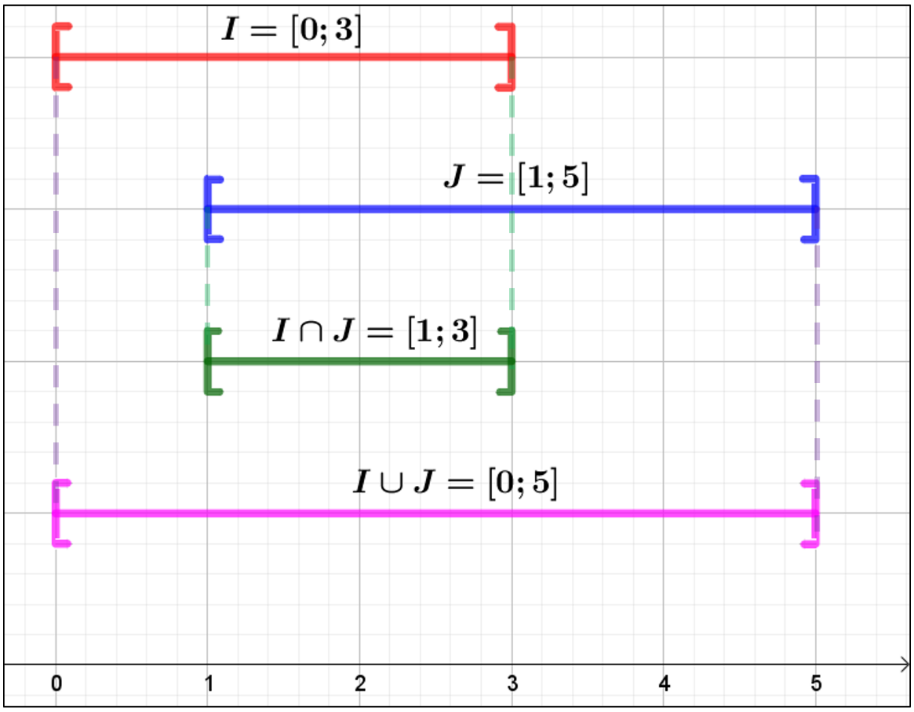
**Rem. :**
L'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle qui se note

$$\mathbb{R} = ]-\infty\ ;\ +\infty[$$

**Def. :**

- L'**intersection** de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ **et** à $B$ et se note : $\boxed{A \cap B}$
- La **réunion** (ou **l'union**) de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ **ou** à $B$ et se note : $\boxed{A \cup B}$

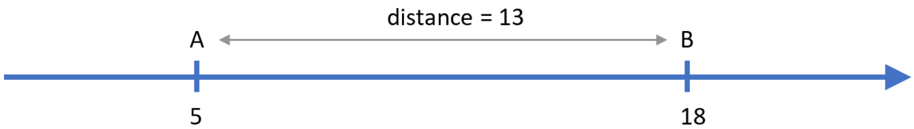
**Ex. :** $I = [0\ ;\ 3]$ et $J = [1\ ;\ 5]$




### 3.1. Valeur absolue

**Def. :**
La distance de deux réels $a$ et $b$ est la distance des points $A$ et $B$ d'abscisses $a$ et $b$ sur la droite numérique.

**Ex. :**




**Rem. :**

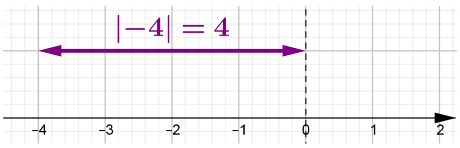
- Si $(a < b)$ alors la distance est $(b - a)$
- Si $(a > b)$ alors la distance est $(a - b)$

On note la distance : $|a - b|$ et on lit **valeur absolue de** $(a - b)$

**Ex. :**
La distance de 5 à 18 est $|5 - 18| = 18 - 5 = 13$

**Def. :**
La **valeur absolue** d'un réel $x$ est la distance de ce réel à 0.
Elle est notée : $|x|$

**Ex. :** La valeur absolue de $-4$ est la distance de $-4$ à 0. On a : $|-4| = 4$



**Ex. :**

- $|3| = 3$
- $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$
- $|-4| = 4$
- $|-0.177| = 0.177$

**Prop. :**

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

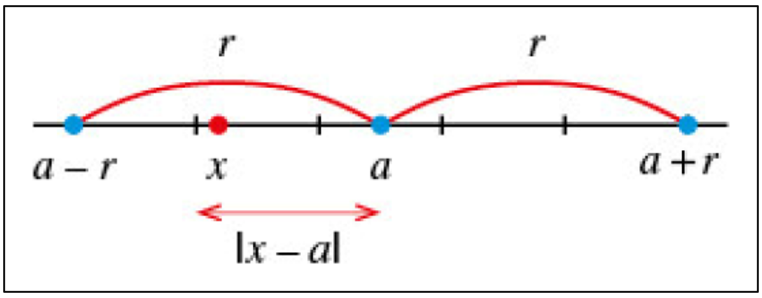
**Ex. :**

- $|3| = 3 \quad$ car $\quad 3 > 0$
- $|-7| = -(-7) = 7 \quad$ car $\quad (-7) < 0$

**Prop. :**

L'intervalle $[a - r\ ;\ a + r]$ est l'ensemble des $x$ tel que :

$$|x - a| \leqslant r$$




**Ex. :**

L'ensemble des nombres $x$ tel que $|x - 5| \leqslant 3$ est l'intervalle $I = [5 - 3\ ;\ 5 + 3] = [2\ ;\ 8]$