Dérivation (2) : Fonctions dérivées

Table des matières

airforceblue aliceblue alizarin almond amaranth amber amber(sae/ece) americanrose amethyst anti-flashwhite antiquebrass antiquefuchsia antiquewhite ao ao(english) applegreen apricot aqua aquamarine armygreen arsenic arylideyellow ashgrey asparagus atomictangerine auburn aureolin

1. Dérivées des fonctions usuelles

Ex. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on : $f'(x) = 2x$.
Pour cela, calculons le **nombre dérivé** de f en un nombre réel quelconque a.

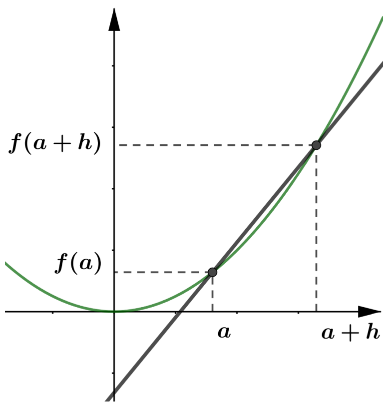


Figure 1: Représentation de $f(x) = x^2$

Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= \frac{h \times (2a+h)}{h} \\ &= 2a + h\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = \lim\limits_{h \to 0} (2a+h) = 2a$

Pour tout nombre a, on associe le **nombre dérivé** de la fonction f égal à $2a$.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f', tel que $f'(x) = 2x$.

Cette fonction s'appelle la **fonction dérivée** de f.

Déf. :
Soit f une fonction définie sur I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel $x \in I$.
Dans ce cas, la fonction qui à tout $x \in I$ associe le **nombre dérivé** de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Figure 2: C'est au mathématicien français **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) que l'on doit la notation $f'(x)$ au nom de "dérivée" pour désigner ce concept mathématique.

1.1. Formules de dérivation des fonctions usuelles♥

f	$\mathcal{D}_f$	f'	$\mathcal{D}_{f'}$
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
avec $a \in \mathbb{R}$			
$f(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
avec $a \in \mathbb{R}$			
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{(n+1)}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
avec $n \geqslant 1$			
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

Ex. :

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^4}$ alors :
  - f est dérivable sur $\mathbb{R}$
  - On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 4x^3}$
- Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^5}}$ alors :
  - f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$
  - On a, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{-5}{x^6}}$

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}-\{0\}$, on a : $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.
Pour $h\neq 0$ et $h\neq -a$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\frac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

Donc
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{a(a+h)}\right)=\frac{-1}{a^2}$$

Pour tout nombre a, on associe le **nombre dérivé** de f égal à $\dfrac{-1}{a^2}$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, on a : $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

Démonstration : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$
On calcule le taux de variation de f en 0 :
Pour $h>0$:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Donc :
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)=+\infty$$

En effet, lorsque $h\to 0$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{h}}\right)$ prend des valeurs de plus en plus grandes.
Donc f n'est pas dérivable en 0.
Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction **racine carrée** admet une **tangente verticale** en $x=0$.

2. Opérations sur les fonctions dérivées

2.1. Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Ex. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+x^2$.
Pour $h\neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{((a+h)+(a+h)^2)-(a+a^2)}{h}=\frac{a+h+a^2+2ah+h^2-a-a^2}{h}=\frac{h+2ah+h^2}{h}=\frac{h(1+2a+h)}{h}=1+2a+h$$

Donc : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(1+2a+h)=1+2a$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1+2x$.
On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$:
- $u(x)=x$
- $v(x)=x^2$

On a ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc :

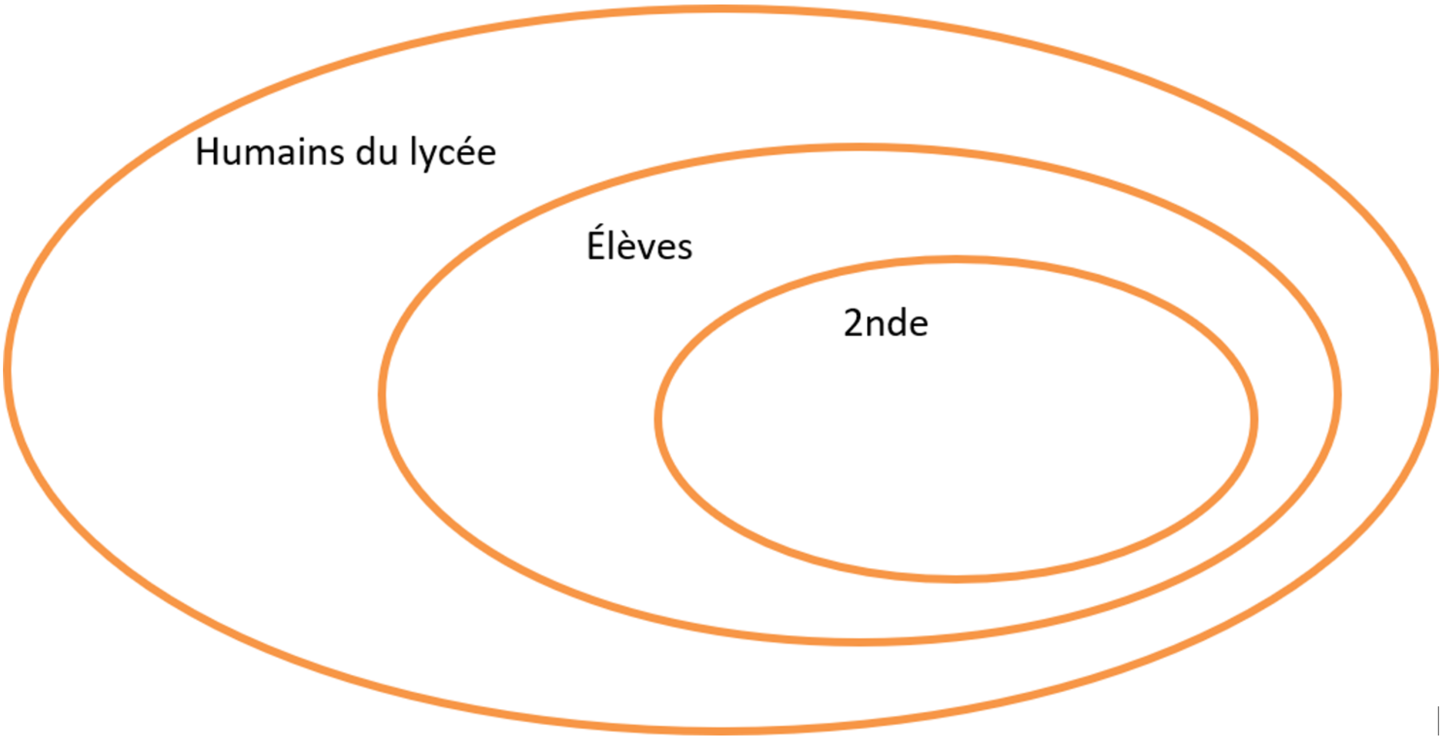


Figure 3: Représentation de $\sqrt{x}$

- $u'(x) = 1$
- $v'(x) = 2x$

On constate sur cet exemple que : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Soit encore $\boxed{(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)}$

2.2. Formules d'opération sur les fonctions dérivées❤

u et v sont deux fonctions dérivables sur I.

Dérivabilité	Propriété
$(u+v)$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
(ku) est dérivable sur I avec $k \in \mathbb{R}$	$(ku)' = ku'$
(uv) est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)$ est dérivable sur I Avec u qui **ne s'annule pas** sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I Avec v qui **ne s'annule pas** sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration pour $(uv)' = u'v + uv'$:

- On veut démontrer que :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \right) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

Calculons $\dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h}$

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\
&= \frac{u(a+h)v(a+h) \quad - u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h) \quad - u(a)v(a)}{h}\\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\
&= \frac{\big(u(a+h)-u(a)\big)v(a+h)+u(a)\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}\\
&= \frac{\big(u(a+h)-u(a)\big)v(a+h)}{h}+\frac{u(a)\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}\\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h) \quad + \quad u(a)\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}
\end{aligned}$$

On a :

- $\lim\limits_{h\to 0}(u(a+h)) = u(a)$
- $\lim\limits_{h\to 0}(v(a+h)) = v(a)$

De plus, on a u et v dérivables sur I donc :

- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right) = u'(a)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right) = v'(a)$

En passant à la limite lorsque $h\to 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(uv)' &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h) \quad + \quad u(a)\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\times u(a)\right)\\
&= u'(a)v(a)+u(a)v'(a)
\end{aligned}$$

On conclut que $(uv)' = u'v+uv'$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions.

Calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = 5x^3$

  $f_1(x) = 5\times u(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $u'(x) = 3x^2$

  Donc $f_1'(x) = 5\times u'(x) = 5\times 3x^2 = 15x^2$

  $\boxed{f_1'(x) = 15x^2}$

- $f_2(x) = 3x^2+4\sqrt{x}$

  $f_2(x) = 3\times u(x)+4\times v(x)$

  avec $\begin{cases} u(x) = x^2\\ v(x) = \sqrt{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x\\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\end{cases}$

  Donc $f_2'(x) = (3\times u'(x))+(4\times v'(x)) = (3\times 2x)+\left(4\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

  $\boxed{f_2'(x) = 6x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

- $f_3(x) = \dfrac{1}{2x^2+5x}$

  $f_3(x) = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x^2+5x$

  $\Rightarrow u'(x) = (2\times 2x)+(5\times 1) = 4x+5$

  Donc $f_3'(x) = \dfrac{u'}{u^2} = \dfrac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$

  $\boxed{f_3'(x) = \dfrac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}}$

- $f_4(x) = (3x^2+4x)(5x-1)$

  $f_4(x) = u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x^2+4x \\ v(x) = 5x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 6x+4 \\ v'(x) = 5 \end{cases}$

  Donc :

  $$\begin{aligned} f_4'(x) &= u'v + uv' \\ &= (6x+4)(5x-1) + (3x^2+4x)(5) \\ &= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x \\ &= 45x^2 + 34x - 4 \end{aligned}$$

  $$\boxed{f_4'(x) = 45x^2 + 34x - 4}$$

- $f_5(x) = \dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

  $f_5(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 6x-5 \\ v(x) = x^3-2x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 6 \\ v'(x) = 3x^2-4x \end{cases}$

  Donc :

  $$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(6)(x^3-2x^2-1) - (6x-5)(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2-1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3-2x^2-1)^2} \\ &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3-2x^2-1)^2} \end{aligned}$$

2.3. Composée de dérivées

f	$\mathcal{D}_f$	f'
$f(ax+b)$	f dérivable sur I	$af'(ax+b)$

Ex. : $f(x) = \sqrt{5x-4} = u(5x-4)$ avec $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = 5 \times u'(5x-4) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{5x-4}}$

2.4. Cas de la fonction valeur absolue

Ex. :

- La valeur **absolue** de -5 est égale à 5.
- La valeur **absolue** de 8 est égale à 8.

Déf. : La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est **positif**, et au nombre $-A$ si A est négatif.
La **valeur absolue** de A se note $|A|$.

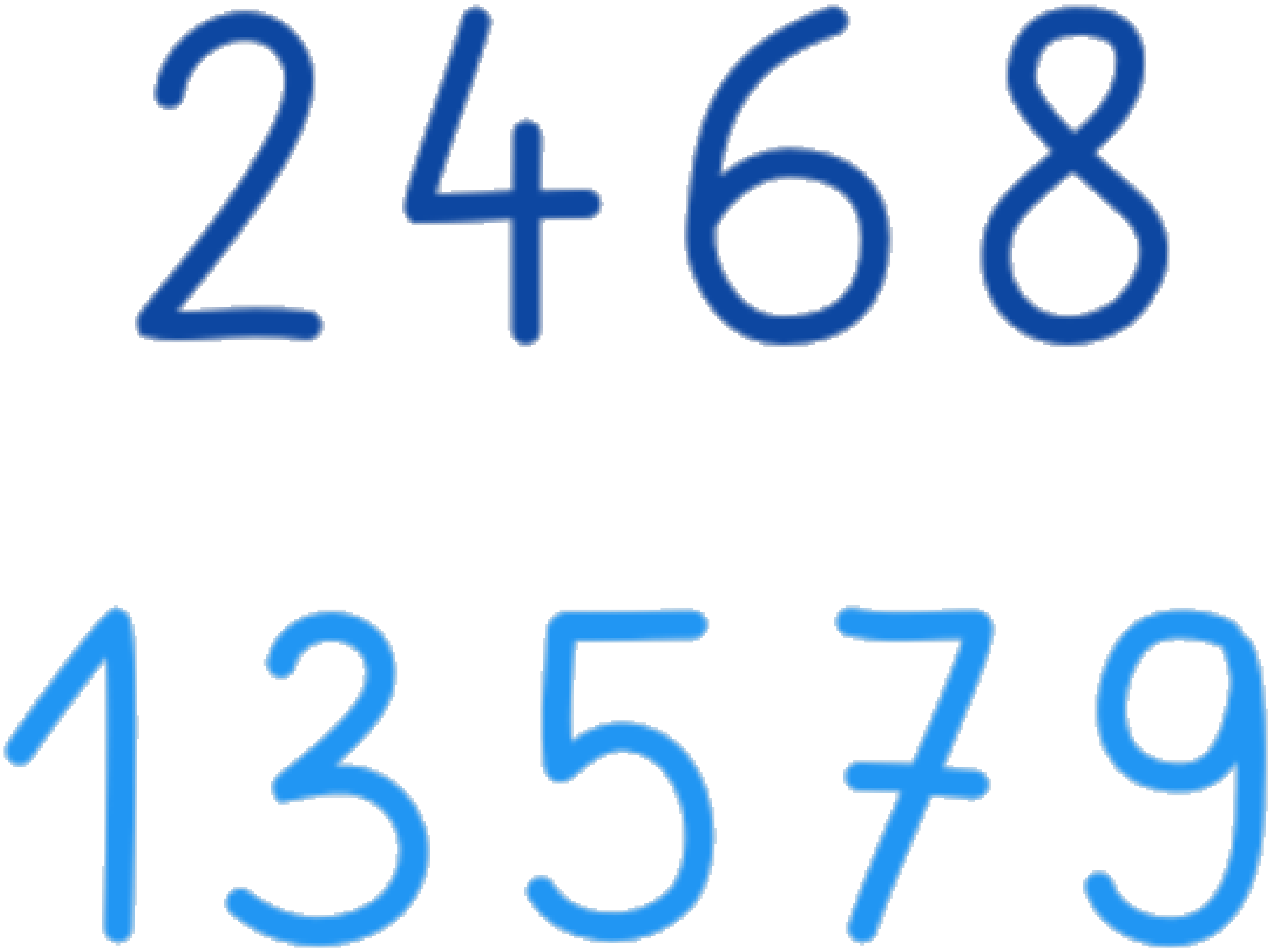
$$|A| = \begin{cases} A & \text{si } A \geq 0 \\ -A & \text{si } A \leq 0 \end{cases}$$

Ex. :

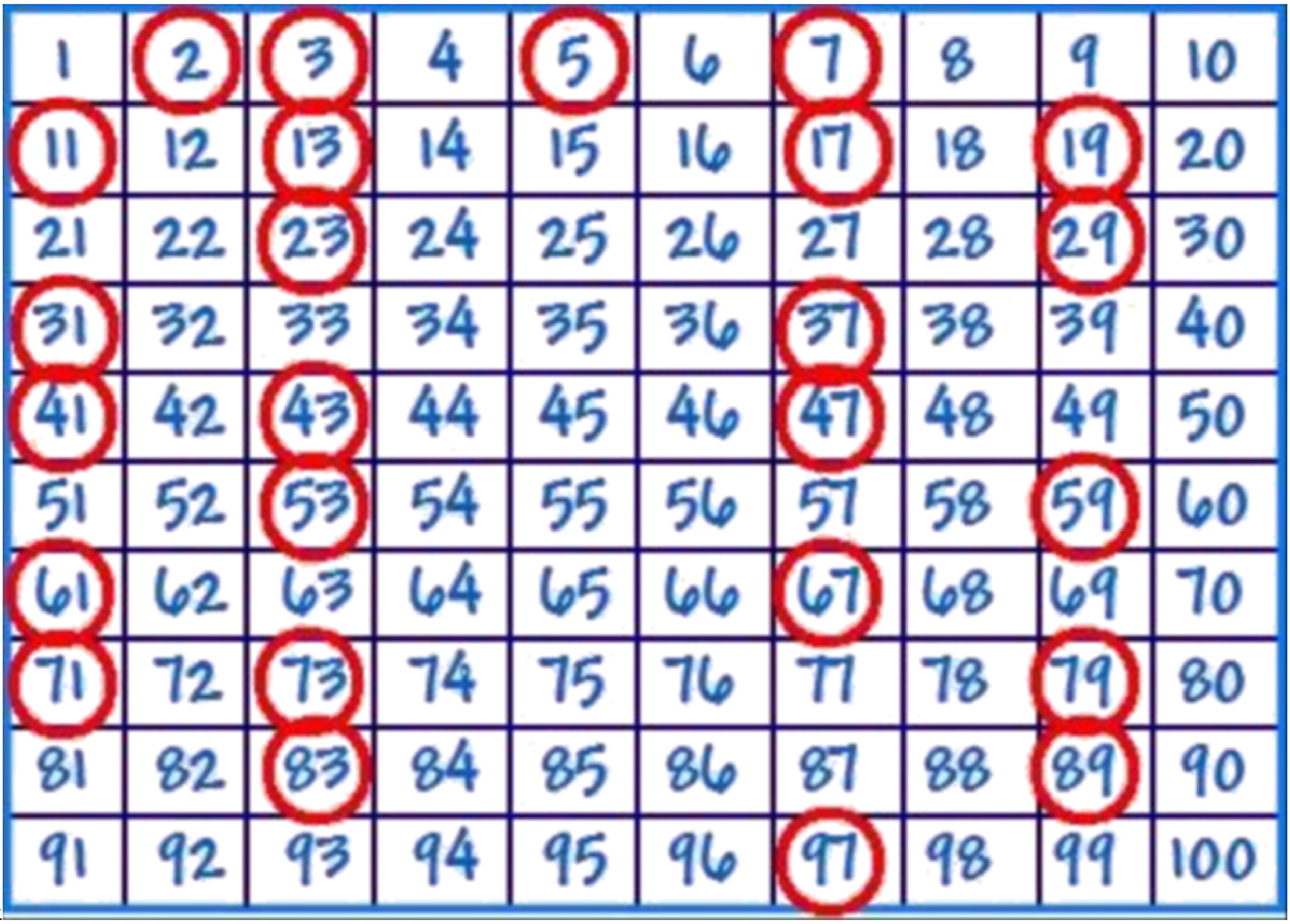
$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } (x-5) \geq 0 \\ -(x-5) & \text{si } (x-5) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \geq 5 \\ 5-x & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$$

2.5. Fonction valeur absolue

Déf. :
La fonction **valeur absolue**



est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
Propriété : La fonction **valeur absolue**



est
:

- strictement **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0]$
- strictement **croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$.

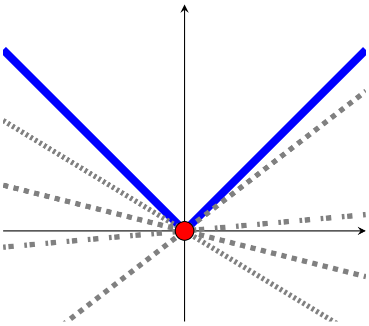
Remarque :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2.6. Étude de la dérivabilité en 0

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
Calculons le taux de variation de f en 0 :
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

- Si $h > 0 \Rightarrow |h| = h$ donc $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$
- Si $h < 0 \Rightarrow |h| = -h$ donc $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$

Donc :
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$
Cette limite n'existe pas car elle dépend du signe de h.
La fonction **valeur absolue** n'est donc pas dérivable en 0.
Où placer la tangente en $x = 0$?



Cependant, il est à noter que la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

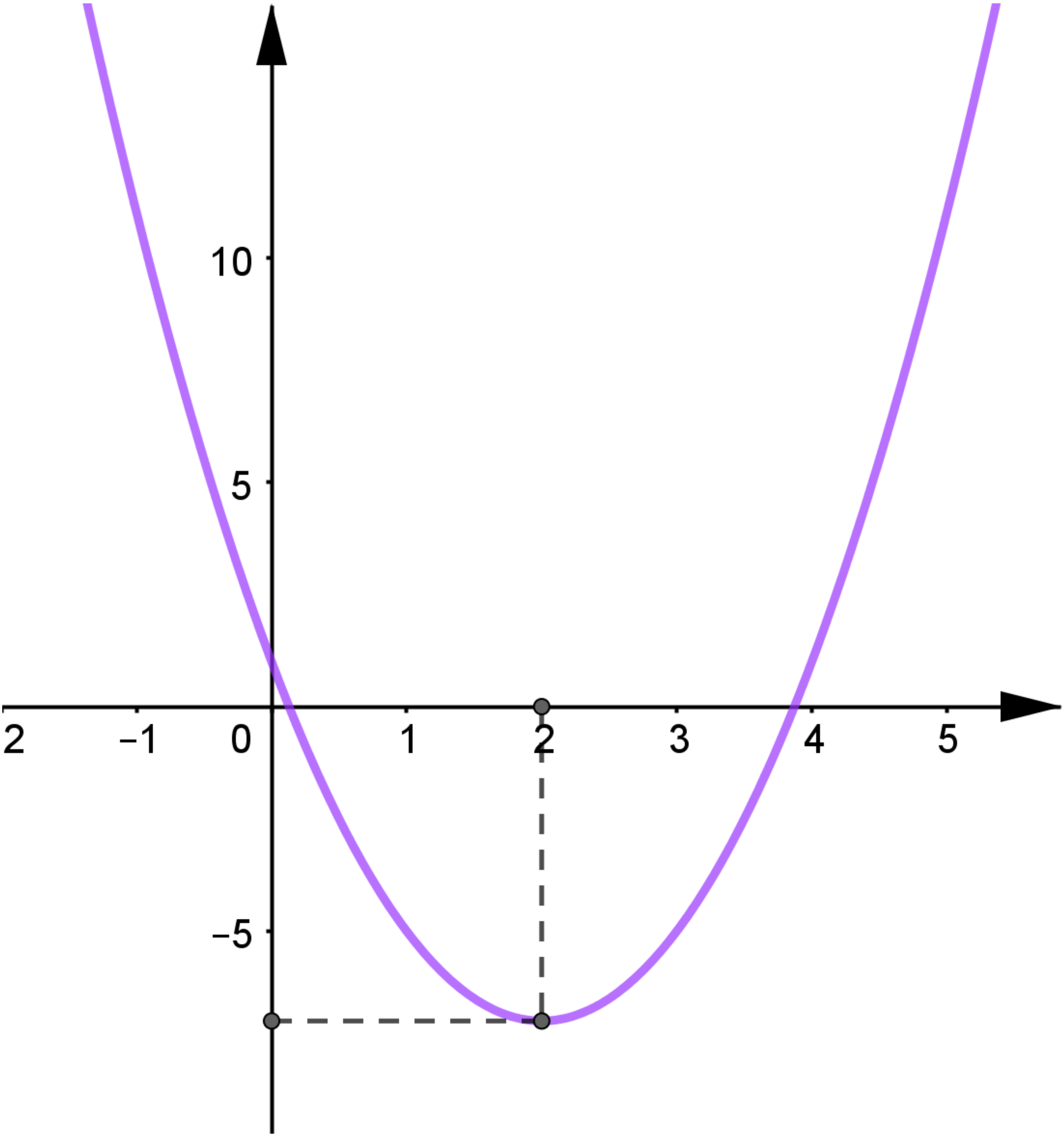
3. Étude de fonctions

3.1. Variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur I.

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I.

Ex. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x +$



1.

- <u>Calcul de $f'(x)$</u>

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x - 8$

- <u>Signe de f' en fonction de x.</u>

Il faut résoudre $f'(x) > 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 8 > 0$

$\Leftrightarrow 4x > 8 \quad \Leftrightarrow x > 2$

Si $x > 2$ alors $f'(x) > 0$ donc f est **croissante** sur

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$150 = 2.3.5^2$

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$729 = 3^6$

1485	3
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

$1485 = 3^3.5.11$

378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

$378 = 2.3^3.7$

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$1260 = 2^2.3^2$

$[2\ ;\ +\infty[$

$f(2) = 2 \times (2)^2 - 8 \times (2) + 1 = -7$

La fonction f admet un minimum égal à (-7) en $x = 2$

Ex. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

- Calcul de $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\quad f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$

- Signe de f' en fonction de x.

Il faut résoudre $f'(x) > 0$

f' étant une fonction du 2nd degré, il faut trouver les racines de $3x^2 + 9x - 12$

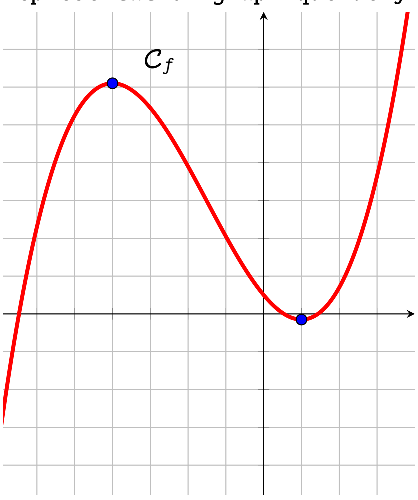
$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225 \quad > 0$

Il existe donc 2 racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1 \\ \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4 \end{cases}$

On a : $\quad a = 3 > 0 \quad$ donc $\quad f'(x) = (3x^2 + 9x - 12) < 0 \quad$ pour $\quad x \in [-4\ ;\ 1]$

- Tableau de variations de f.

Représentation graphique de f



On a :

$$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$$

$$f(1) = (1)^3 + \frac{9}{2} \times (1)^2 - 12 \times (1) + 5 = \frac{-3}{2}$$

3.2. Extremum d'une fonction

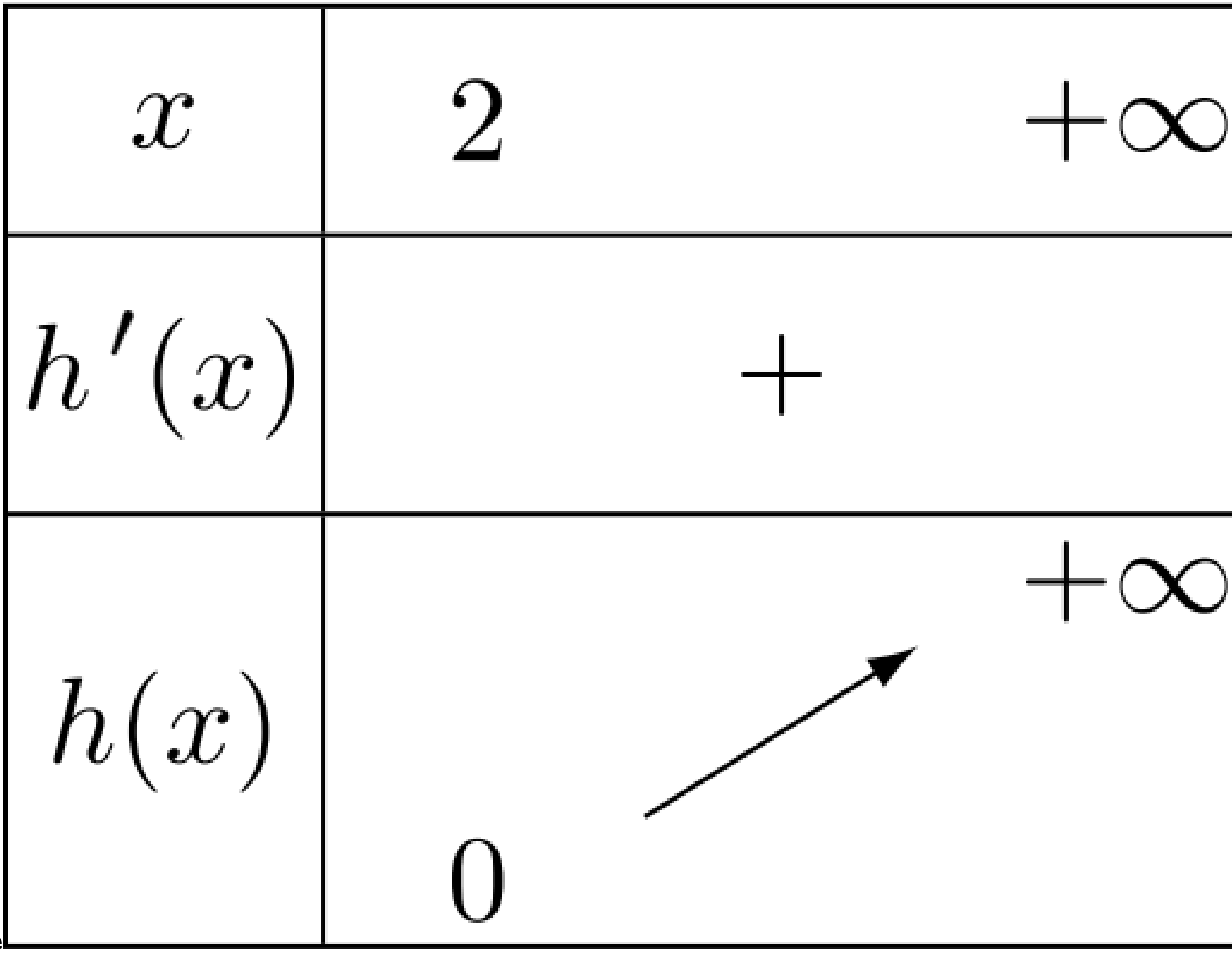
Théorème :
Soit f définie et dérivable sur I et f' sa dérivée.
Si f' s'**annule et change de signe** en $x = c$ de I alors f admet un **extremum (minimum ou maximum) local** en $x = c$.
Ex. :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$\mnimg{Tableau de variation de $f(x)$}(img/07.png)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 10x - 3$
Et $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$
On a : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$
f admet donc un **minimum** en $x = \frac{3}{10}$ égal à $\left(\frac{71}{20}\right)$.

3.3. Position relative de deux courbes

Ex. :
Soit f et g deux fonctions définies sur $[2 ; +\infty[$ par :
- $f(x) = x^3$
- $g(x) = -5x + 18$

L'étude de la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$
On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 18$
Pour tout x de $[2 ; +\infty[$, on a : $h'(x) = 3x^2 + 5$
h' est une fonction du 2^{nd} degré :
- $a = 3$, $b = 0$ et $c = 5$
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 3 \times 5 = -60 < 0$

Donc $h'(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$
$h'(x) > 0 \Rightarrow h$ est strictement



croissante
sur $[2\ ;\ +\infty[$
De plus, on a : $h(2) = (2)^3 + 5 \times (2) - 18 = 0$
D'après le tableau de variations, on a $h(x) \geq 0$.
Donc, pour tout $x \in [2\ ; +\infty[$, on a :

$$f(x) - g(x) \geq 0 \iff f(x) \geq g(x)$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ sur $x \in [2\ ; +\infty[$.

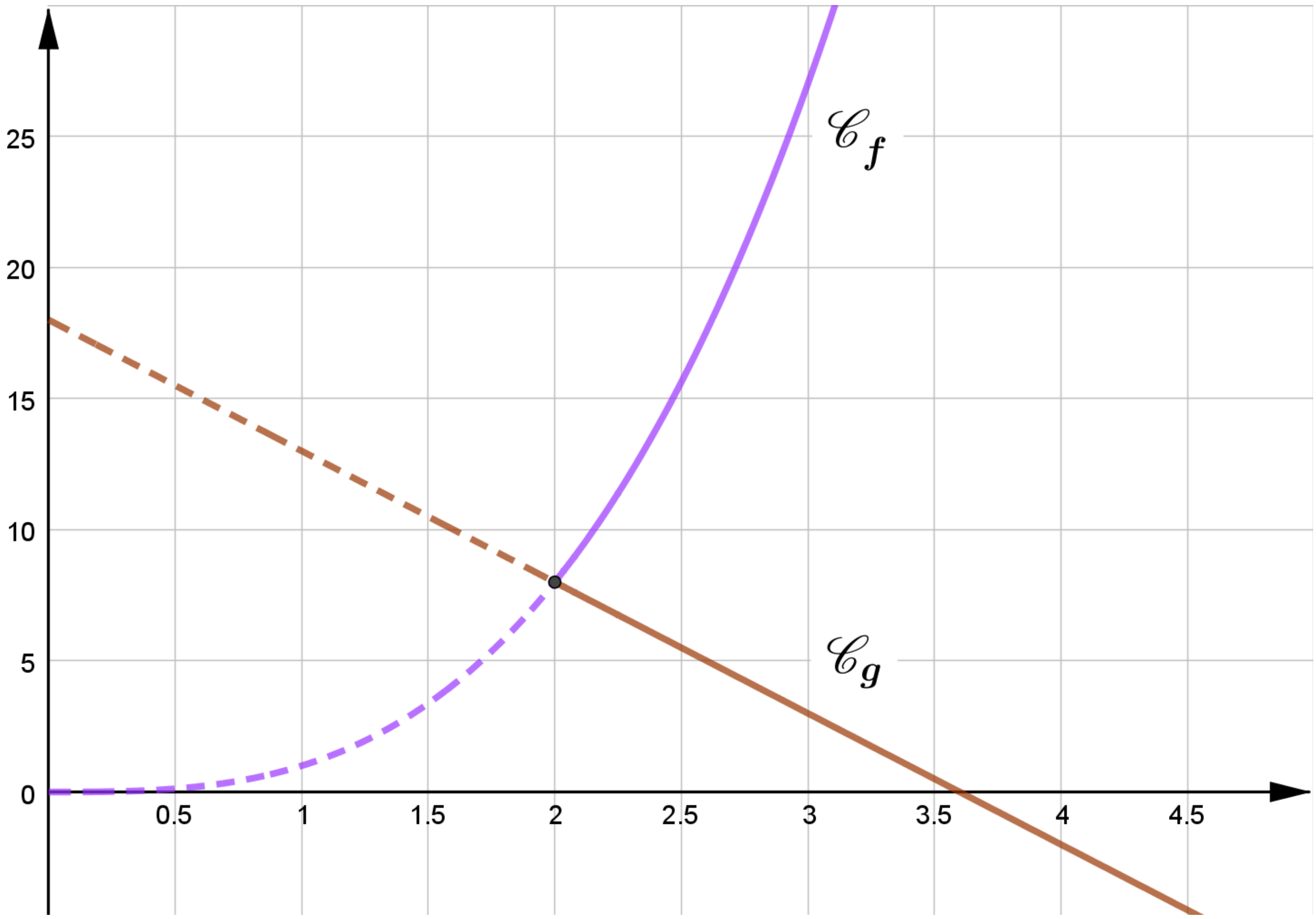


Figure 4: Représentation de f et g