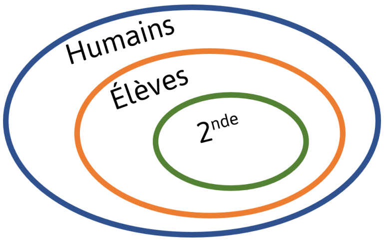
Ensembles de nombres et intervalles de $\mathbb{R}$

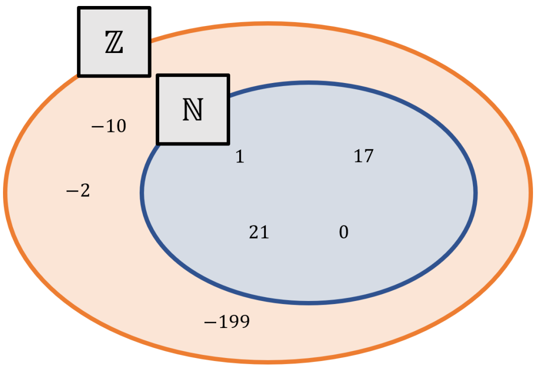
Table des matières

1. Les entiers

Rem. : Dans le lycée, il y a un ensemble d'**humains**. Parmi eux, il y a des **élèves** et parmi ces élèves il y a des **secondes**.



Def. :
Parmi les nombres **entiers**, il existe :
- Entiers **naturels** : $\mathbb{N}$
  - Entiers (sans partie décimale) positifs : 0 ; 1 ; 4 ; $999\dots$
- Entiers **relatifs** : $\mathbb{Z}$
  - Entiers positifs ou négatifs : -6 ; -77 ; 98 ; 4 $\dots$



Ex. :
- 17 appartient à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow 17 \in \mathbb{N}$ et $17 \in \mathbb{Z}$
- (-2) n'appartient pas à $\mathbb{N}$ $\Rightarrow (-2) \notin \mathbb{N}$
- 157 . . . . à $\mathbb{N}$ $\Rightarrow 157$ . . . . $\mathbb{N}$

1.1. Multiples - diviseurs

Def. : Soit a et b, deux nombres entiers.
On dit que a est un **multiple** b s'il existe un entier k tel que :

$$a = k \times b$$

On dit aussi que b est un **diviseur** de a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ex. :
- $27 = 3 \times 9$ donc
  - 27 est **multiple** de 3 (et de 9)
  - 9 est un **diviseur** de 27
- 85 n'est pas un **multiple** de 10 car :
  - $85 = k \times 10 \Leftrightarrow k = 8.5$ et k pas entier

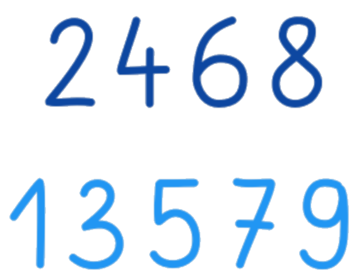
Prop. :
Soit a un entier. La somme de deux **multiples** de a, est un **multiple** de a.

Ex. :
21 et 33 sont des **multiples** de 3 donc $54 = (21 + 33)$ est un **multiple** de 3.
En effet, $54 = 18 \times 3$

Démonstration :
Soit n_1 et n_2, deux multiples de a alors :
$n_1 = k_1 \times a$ et $n_2 = k_2 \times a$
On a donc :
$n_1 + n_2 = (k_1 \times a) + (k_2 \times a) = (k_1 + k_2) \times a$
Donc : $(n_1 + n_2)$ est multiple de a

1.2. Pair - impair

Def. :
Un nombre **pair** est un multiple de 2.
- Si n est **pair** alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- Si n est **impair** alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Ex. :
- 157 est **impair** car $157 = (2 \times 78) + 1$
- 2048 est **pair** car $2048 = (2 \times 1024)$

Prop. :
Le **carré** d'un nombre **impair** est **impair**

Démonstration :
Soit n un nombre **impair**. On a donc $n = 2k + 1$
$n^2 = (2k + 1)^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
$= 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(2k^2 + 2k) + 1$
$= 2K + 1$
Si n est **impair** alors n^2 est **impair**.

1.3. Nombres premiers

Def. :
Un entier naturel est dit **premier**, s'il admet exactement **deux diviseurs** entiers positifs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ex. :
- 25 admet comme diviseurs 1, 5 et 25 $\longrightarrow$ **pas premier**
- 17 admet comme diviseurs 1 et 17 $\longrightarrow$ **premier**
- 221 admet comme diviseurs ... $\longrightarrow$ ...

1.4. Décomposition en facteurs premiers

Ex. :
- $60 = 30 \times 2 \quad = 15 \times 2 \times 2 \quad = 5 \times 3 \times 2 \times 2$

La décomposition de 60 en facteurs **premiers** est :

$$60 = 3^1 \times 5^1 \times 2^2$$

Méthode pour décomposer 60 :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ex. :
- $1300 = \ldots$

$$\begin{array}{r|l} 1300 & 2 \\ 650 & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

2. Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

2.1. Les décimaux : $\mathbb{D}$

Nombres dont **la partie décimale est finie.** On peut les écrire sous la forme :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z}$$

Ex. :
À vous de compléter :
- $0.009 = \ldots\ldots\ldots$
- $\dfrac{-1234}{10^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Ex. :
- $1.77 = \frac{177}{100} = \frac{177}{10^2}$ donc $1.77 \in \mathbb{D}$
- $-5.001 = \frac{-5001}{1000} = \frac{-5001}{10^3}$ donc $-5.001 \in \mathbb{D}$

2.2. Les rationnels : $\mathbb{Q}$

Ils peuvent s'écrire sous la forme : $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$

Ex. :
- $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots \in \mathbb{Q}$
- $\frac{50}{7} = 7.142\ 857\ 142\ 857\ \ldots \in \mathbb{Q}$

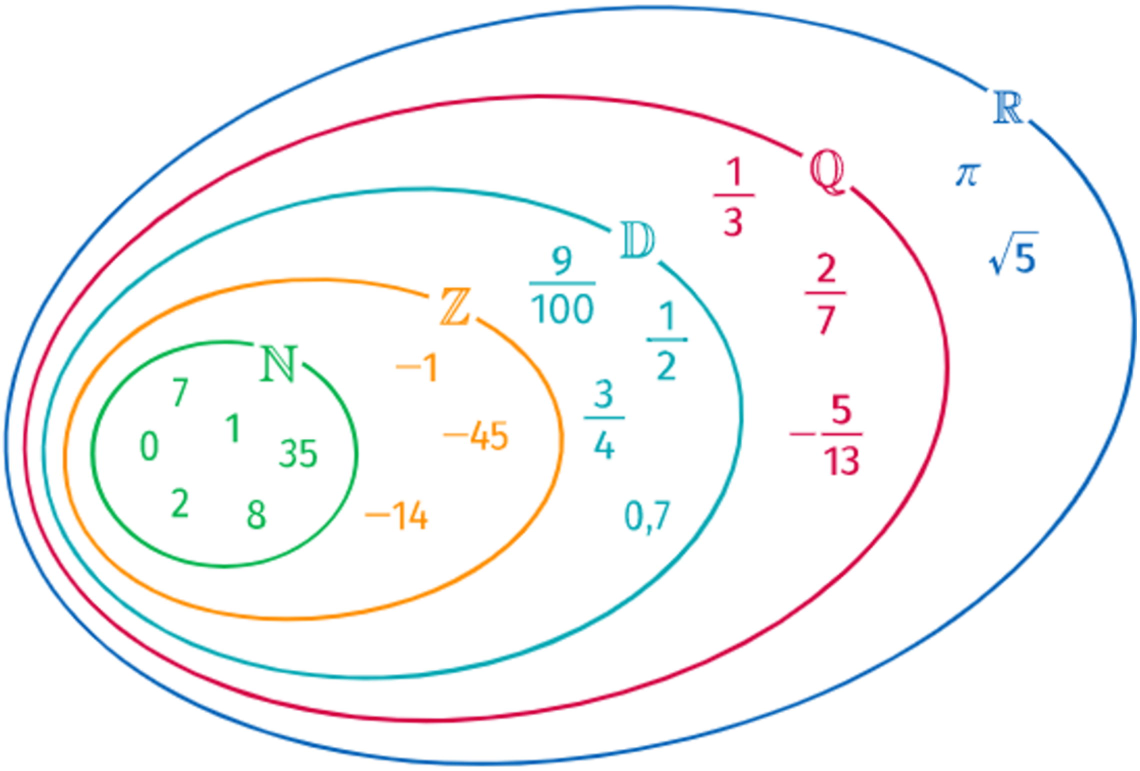
Rem. : La partie décimale peut se "répéter" à l'infini.

2.3. Les réels : $\mathbb{R}$

Tous les nombres connus en seconde.

Ex : -16 ; $\sqrt{3}$; π ; ...

2.4. Les ensembles de nombres à connaître♥ en 2nde



Démonstration :

Démontrons que $\frac{1}{3}$ **n'** appartient **pas** aux décimaux.

Supposons que $\frac{1}{3}$ appartient aux décimaux alors il peut s'écrire sous la forme : $\frac{a}{10^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \in \mathbb{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \\ &\Leftrightarrow \quad 3 \times a = 1 \times 10^n \\ &\Leftrightarrow \quad 3a = 10^n \end{aligned}$$

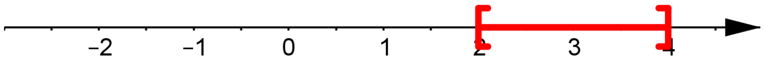
On a :

- $3a$ est un multiple de 3 donc la **somme des ses chiffres** doit être un multiple de 3.
- 10^n est un nombre constitué d'un seul 1 et de zéros donc la **somme des ses chiffres** est 1.

Donc 10^n n'est pas un multiple de 3, donc $10^n \neq 3 \times a$ donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

3. Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue

Def. :
L'ensemble I de tous les nombres réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 4$ peut se représenter sur une droite graduée :



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note :

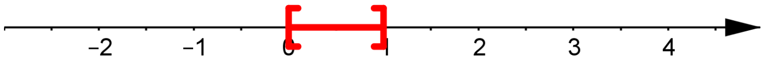
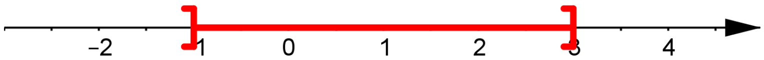
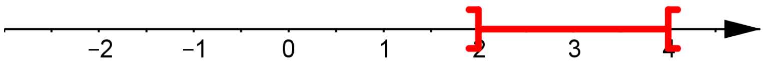
$$I = [2\ ;\ 4]$$

Ex. :
L'ensemble J des réels x tels que $-2 \leqslant x \leqslant 7$ se note :

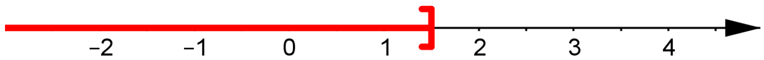
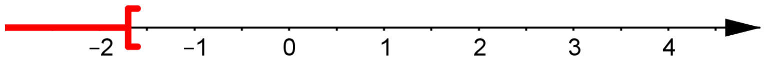
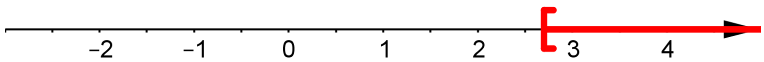
$$J = [-2\ ;\ 7]$$

On a : $4 \in [-2\ ;\ 7]$ et $-5 \notin [-2\ ;\ 7]$

Ex. :

Notation	Inégalité	Représentation
$[0\ ;\ 1]$	$0 \leqslant x \leqslant 1$	
$]-1\ ;\ 3]$	$-1 < x \leqslant 3$	
$[-0.5\ ;\ 2.3[$	$-0.5 \leqslant x < 2.3$	
$]2\ ;\ 4[$	$2 < x < 4$	

Ex. :

Notation	Inégalité	Représentation
$]-\infty\ ;\ 1.5]$	$x \leqslant 1.5$	
$]-\infty\ ;\ -1.7[$	$x < -1.7$	
$]-2\ ;\ +\infty[$	$x > -2$	
$[2.7\ ;\ +\infty[$	$x \geqslant 2.7$	

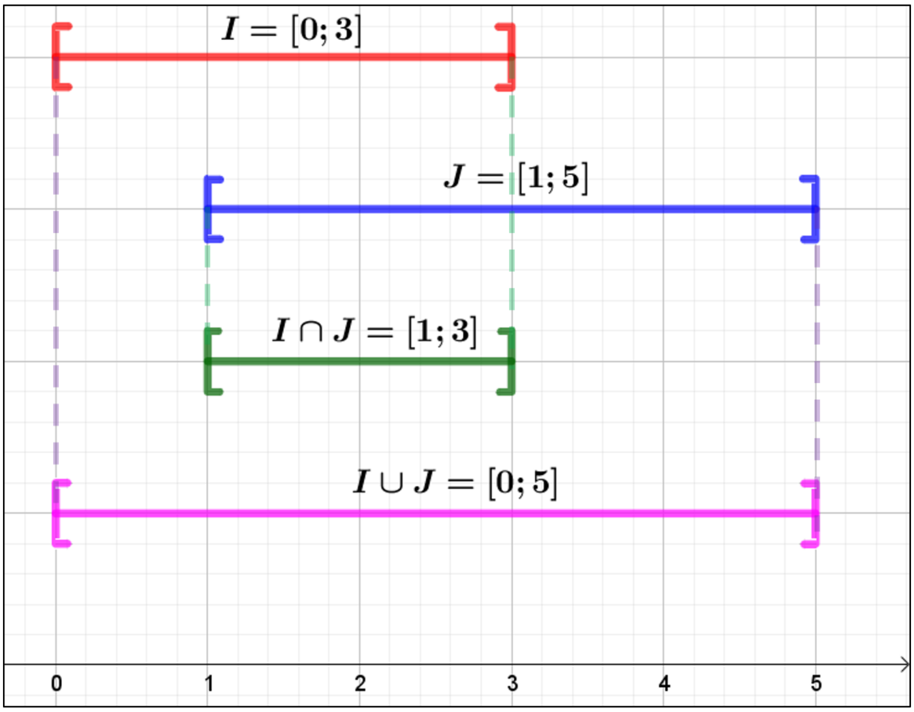
Rem. :
L'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle qui se note

$$\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$$

Def. :

- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note : $\boxed{A \cap B}$
- La **réunion** (ou **l'union**) de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note : $\boxed{A \cup B}$

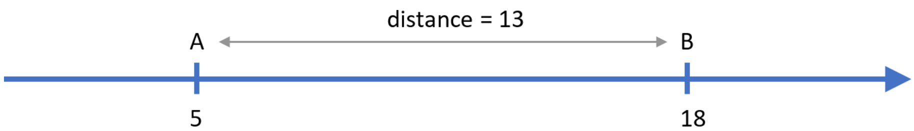
Ex. : $I = [0\ ;\ 3]$ et $J = [1\ ;\ 5]$



3.1. Valeur absolue

Def. :
La distance de deux réels a et b est la distance des points A et B d'abscisses a et b sur la droite numérique.

Ex. :



Rem. :

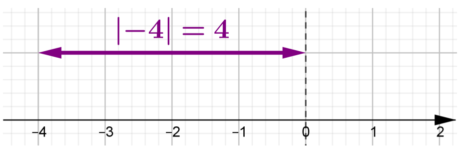
- Si $(a < b)$ alors la distance est $(b - a)$
- Si $(a > b)$ alors la distance est $(a - b)$

On note la distance : $|a - b|$ et on lit **valeur absolue de** $(a - b)$

Ex. :
La distance de 5 à 18 est $|5 - 18| = 18 - 5 = 13$

Def. :
La **valeur absolue** d'un réel x est la distance de ce réel à 0.
Elle est notée : $|x|$

Ex. : La valeur absolue de -4 est la distance de -4 à 0. On a : $|-4| = 4$



Ex. :

- $|3| = 3$
- $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$
- $|-4| = 4$
- $|-0.177| = 0.177$

Prop. :
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

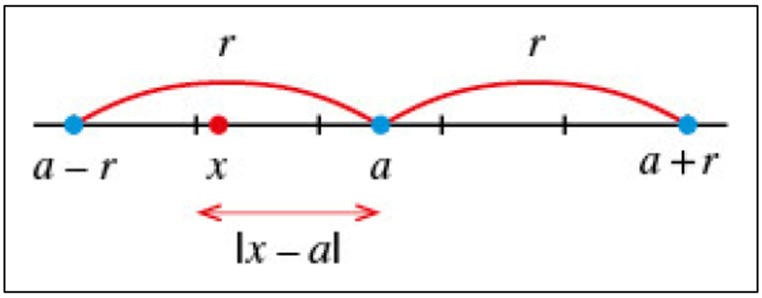
$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Ex. :

- $|3| = 3 \quad$ car $\quad 3 > 0$
- $|-7| = -(-7) = 7 \quad$ car $\quad (-7) < 0$

Prop. :
L'intervalle $[a - r \ ; \ a + r]$ est l'ensemble des x tel que :

$$|x - a| \leqslant r$$



Ex. :
L'ensemble des nombres x tel que $|x - 5| \leqslant 3$ est l'intervalle $I = [5 - 3 \ ; \ 5 + 3] = [2 \ ; \ 8]$