Calcul numérique et algébrique

Table des matières

---

1. plop

$$S : \begin{cases} c \\ p \text{ plop} \end{cases} \quad \text{plop}$$

2. Somme de termes et produit de facteurs

Ex. : Somme de terme
- $x - 3$
- $(x + 4) - (6 - x)$
- $1 + (x + 1)(x - 1)$
- $xˆ2+2x+10

La dernière opération est une somme (ou une différence)

Ex. : Produit de facteur
- $3x(5 - x)$
- $(x + 4)(6 - x)$
- $(x - 1)^2$
- $9 \times \dfrac{4x - 1}{1 - x}$

La dernière opération est un produit (ou un quotient)

2.1. Valeurs interdites

Ce sont les valeurs de x pour lesquelles il n'est pas possible de calculer l'expression algébrique.

Ex. :
Soit $f(x) = \dfrac{1 - x}{x - 4}$.
Si $x = 4$ alors $(x - 4) = 0$ et il n'est pas possible de calculer $f(4)$ (division par zéro).

Ex. :
Soit $f(x) = \sqrt{x}$.
Si $x \leqslant 0$ alors $\sqrt{x}$ n'est pas défini et il n'est pas possible de calculer $f(x)$
Pour $f(x)$, x est un nombre réel positif.

---

3. Développer / Factoriser

3.1. Def. : Distributivité et factorisation

mnimg{}{img/04}

- **Développer** : c'est transformer un **produit** en **somme**
- **Factoriser** : c'est transformer une **somme** en **produit**

Ex. :

- **Développer** : 3(☺+📓) = 3☺+3📓
- **Factoriser** : 3☺+3📓 = 3(☺+📓)

Méthode : Développer une expression algébrique

- $2(3-x) = 2 \times 3 + 2 \times (-x) = 6 - 2x$
- $4x(3x-y) = 4x \times 3x + 4x \times (-y) = 12x^2 - 4xy$
- $-(x-y) = (-1) \times x + (-1) \times (-y) = -x + y = y - x$
- $x(3 - a + 3b) = x \times 3 + x \times (-a) + x \times 3b = 3x - ax + 3xb$

Prop : Double distributivité
snimg{Avec les flèches :}{img/03}

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Méthode : Utiliser la double distributivité

$$\begin{aligned}(x+3)(y-1) &= (xy) + (-1x) + (3y) + \big(3 \times (-1)\big) \\ &= xy - x + 3y - 3\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}A = (x+5)(x-2) &= (x \times x) + (-2 \times x) + (5 \times x) + \big(5 \times (-2)\big) \\ &= x^2 - 2x + 5x - 10 \\ &= x^2 + 3x - 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B = (3-x)(3+x) &= (3 \times 3) + (3 \times x) + (-x \times 3) + (-x \times x) \\ &= 9 + 3x - 3x + x^2 \\ &= x^2 + 9\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}(4x+5)(x-1) - 2(x+1) &= (4x \times x) + (4x \times -1) + (5 \times x) + (5 \times -1)\dots \\ &\quad \dots + (-2 \times x) + (-2 \times 1) \\ &= 4x^2 - 4x + 5x - 5 - 2x - 2 \\ &= 4x^2 - x - 7\end{aligned}$$

Méthode : Factoriser une expression
Pour factoriser une expression, il faut faire apparaître un **facteur commun**.

Ex. :

$$\begin{aligned}4x - 2y &= \boxed{2} \times 2x - \boxed{2} \times y \\ &= \boxed{2} \times (2x - y) \\ &= 2(2x - y)\end{aligned}$$

Ex. :

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 5x &= \boxed{x} \times 6x - \boxed{x} \times 5 \\
&= \boxed{x} \times (6x - 5) \\
&= x(6x - 5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
110a + 11 &= \boxed{11} \times 10a + \boxed{11} \times 1 \\
&= \boxed{11} \times (10a + 1) \\
&= 11(10a + 1)
\end{aligned}
$$

Ex. :

$$
\begin{aligned}
3(2+3x) - (5+2x)(2+3x) &= \boxed{(2+3x)} \times 3 - \boxed{(2+3x)} \times (5+2x) \\
&= \boxed{(2+3x)} \times \Big(3 - (5+2x)\Big) \\
&= (2+3x) \times \Big(3 - 5 - 2x)\Big) \\
&= (2+3x)(-2-2x) \\
&= -(2+3x)(2+2x)
\end{aligned}
$$

Ex. :

$$\begin{aligned}(2-5x)^2-(2-5x)(1+x) &= \boxed{(2-5x)}\times(2-5x)-\boxed{(2-5x)}\times(1+x)\\ &= \boxed{(2-5x)}\times\big((2-5x)-(1+x)\big)\\ &= (2-5x)(2-5x-1-x)\\ &= (2-5x)(1-6x)\end{aligned}$$

Rem. : Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

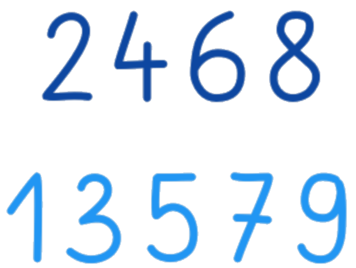
Ex. :

$$\begin{aligned}4(1-x)^2-3x(x-1) &= 4(1-x)(1-x)+3x(1-x)\\ &= \boxed{(1-x)}\times 4(1-x)+\boxed{(1-x)}\times(3x)\\ &= \boxed{(1-x)}\big(4(1-x)+(3x)\big)\\ &= (1-x)(4-4x+3x)\\ &= (1-x)(4-x)\end{aligned}$$

4. Identités remarquables

4.1. Propriété : Identités remarquables♥

Graphiquement :



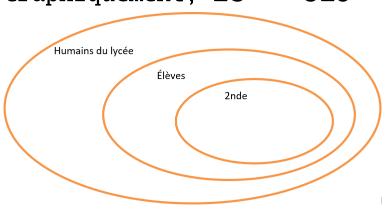
Pour tout a et b, on a :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Ex. :

$$\begin{aligned}23^2=(20+3)^2 &= 20^2+2\times20\times3+3^2\\ &= 400+120+9=529\end{aligned}$$

Graphiquement, $23^2=529$



Méthode : Utiliser les identités remarquables pour **développer**

Ex. :

$$A=(x-5)^2=x^2-2\times x\times 5+5^2$$
$$=x^2-10x+25$$
$$B=\left(6+\frac{1}{2}x\right)^2=6^2+2\times 6\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x\right)^2$$
$$=36+6x+\frac{1}{4}x^2$$
$$C=(2x-1)(2x+1)=(2x)^2-1^2$$
$$=4x^2-1$$
$$D=-2(1-x)^2=-2(1^2-2x+x^2)$$
$$=-2+4x-2x^2$$
$$E=2(x+3)-(2x+3)(2x-3)=2x+6-\left((2x)^2-3^2\right)$$
$$=2x+6-4x^2+9$$
$$=-4x^2+2x+15$$

Méthode : Utiliser les identités remarquables pour **factoriser**
Il faut faire apparaître les termes a^2, b^2 et $2ab$.

Ex. :

$$x^2-4x+4=x^2-2\times x\times 2+2^2$$
$$=a^2-2\times a\times b+b^2$$
$$=(a-b)^2$$
$$=(x-2)^2$$

Ex. :

$$A=25+x^2+10x=x^2+2\times x\times 5+5^2$$
$$=a^2+2\times a\times b+b^2$$
$$=(a+b)^2$$
$$=(x+5)^2$$
$$B=1-36x^2=1^2-(6x)^2$$
$$=a^2-b^2$$
$$=(a+b)(a-b))$$
$$=(1-6x)(1+6x)$$

Ex. :

$$\begin{aligned} C = (2-x)^2 - 64 &= (2-x)^2 - 8^2 \\ &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \\ &= ((2-x)+8)((2-x)-85) \\ &= (10-x)(-6-x) \\ &= -(10-x)(6+x) \\ &= (x+10)(x+6) \end{aligned}$$

5. Réduire au même dénominateur

5.1. Déf : Réduire au même dénominateur

Réduire au même dénominateur c'est transformer une **somme** (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Propriété :

Pour tout nombre a, b, c et d, réels on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Rem : Dénominateur commun = Produit des dénominateurs

Ex. :

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{1}{3} &= \left(\frac{2}{5} \times \boxed{\frac{3}{3}}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \boxed{\frac{5}{5}}\right) \\ &= \left(\frac{6}{15}\right) \qquad + \left(\frac{5}{15}\right) \qquad = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \left(\frac{a}{b} \times \boxed{\frac{d}{d}}\right) + \left(\frac{c}{d} \times \boxed{\frac{b}{b}}\right) \\ &= \frac{ad}{bd} \qquad + \frac{bc}{bd} \qquad = \frac{ad+bc}{bd} \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned} A = \left(\frac{2}{x}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right) &= \left(\frac{2}{x} \times \boxed{\frac{2}{2}}\right) - \left(\frac{x+1}{2} \times \boxed{\frac{x}{x}}\right) \\ &= \left(\frac{4}{2x}\right) - \left(\frac{(x+1)x}{2x}\right) \\ &= \left(\frac{4}{2x}\right) - \left(\frac{x^2+x}{2x}\right) = \frac{-x^2-x+4}{2x} \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned} B = 2 - \left(\frac{5x}{x-2}\right) &= \left(\frac{2}{1} \times \boxed{\frac{x-2}{x-2}}\right) - \left(\frac{5x}{x-2} \times \boxed{\frac{1}{1}}\right) \\ &= \left(\frac{2(x-2)}{x-2}\right) - \left(\frac{5x}{x-2}\right) \\ &= \frac{2x-4-5x}{x-2} = \frac{-3x-4}{x-2} = \frac{3x+4}{2-x} \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned} C = \left(\frac{3x}{1-x}\right) + \left(\frac{5}{2x-3}\right) &= \left(\frac{3x{\color{blue}(2x-3)}}{(1-x){\color{blue}(2x-3)}}\right) + \left(\frac{5{\color{red}(1-x)}}{(2x-3){\color{red}(1-x)}}\right) \\ &= \frac{6x^2-9x}{(1-x)(2x-3)} + \frac{5-5x}{(1-x)(2x-3)} \\ &= \frac{6x^2-14x+5}{(1-x)(2x-3)} \end{aligned}$$