

Calcul numérique et algébrique

Table des matières

1 Somme de termes et produit de facteurs	1
1.1 Valeurs interdites	1
2 Développer / Factoriser	2
2.1 Def. : Distributivité et factorisation	2
3 Identités remarquables	4
3.1 Propriété : Identités remarquables♥	4
4 Réduire au même dénominateur	6
4.1 Déf : Réduire au même dénominateur	6

1. Somme de termes et produit de facteurs

Ex. : Somme de terme

- $x - 3$
- $(x + 4) - (6 - x)$
- $1 + (x + 1)(x - 1)$
- $x^2 + 2x + 10$

La dernière opération est une somme (ou une différence)

Ex. : Produit de facteur

- $3x(5 - x)$
- $(x + 4)(6 - x)$
- $(x - 1)^2$
- $9 \times \frac{4x - 1}{1 - x}$

La dernière opération est un produit (ou un quotient)

1.1. Valeurs interdites

Ce sont les valeurs de x pour lesquelles il n'est pas possible de calculer l'expression algébrique.

Ex. :

Soit $f(x) = \frac{1 - x}{x - 4}$.

Si $x = 4$ alors $(x - 4) = 0$ et il n'est pas possible de calculer $f(4)$ (division par zéro).

Ex. :Soit $f(x) = \sqrt{x}$.Si $x \leq 0$ alors \sqrt{x} n'est pas défini et il n'est pas possible de calculer $f(x)$ Pour $f(x)$, x est un nombre réel positif.

2. Développer / Factoriser

2.1. Def. : Distributivité et factorisation

mnimg{{img/04}}

- **Développer** : c'est transformer un **produit** en **somme**
- **Factoriser** : c'est transformer une **somme** en **produit**

Ex. :

- **Développer** : $3(\odot + \boxplus) = 3\odot + 3\boxplus$
- **Factoriser** : $3\odot + 3\boxplus = 3(\odot + \boxplus)$

Méthode : Développer une expression algébrique

- $2(3 - x) = 2 \times 3 + 2 \times (-x) = 6 - 2x$
- $4x(3x - y) = 4x \times 3x + 4x \times (-y) = 12x^2 - 4xy$
- $-(x - y) = (-1) \times x + (-1) \times (-y) = -x + y = y - x$
- $x(3 - a + 3b) = x \times 3 + x \times (-a) + x \times 3b = 3x - ax + 3xb$

Prop : Double distributivité

snimg{Avec les flèches :}{img/03}

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Méthode : Utiliser la double distributivité

$$\begin{aligned}(x + 3)(y - 1) &= (xy) + (-1x) + (3y) + (3 \times (-1)) \\ &= xy - x + 3y - 3\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}A &= (x + 5)(x - 2) = (x \times x) + (-2 \times x) + (5 \times x) + (5 \times (-2)) \\ &= x^2 - 2x + 5x - 10 \\ &= x^2 + 3x - 10 \\ B &= (3 - x)(3 + x) = (3 \times 3) + (3 \times x) + (-x \times 3) + (-x \times x) \\ &= 9 + 3x - 3x + x^2 \\ &= x^2 + 9\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}(4x + 5)(x - 1) - 2(x + 1) &= (4x \times x) + (4x \times -1) + (5 \times x) + (5 \times -1) \dots \\ &\quad \dots + (-2 \times x) + (-2 \times 1) \\ &= 4x^2 - 4x + 5x - 5 - 2x - 2 \\ &= 4x^2 - x - 7\end{aligned}$$

Méthode : Factoriser une expressionPour factoriser une expression, il faut faire apparaître un **facteur commun**.**Ex. :**

$$\begin{aligned}4x - 2y &= \boxed{2} \times 2x - \boxed{2} \times y \\ &= \boxed{2} \times (2x - y) \\ &= 2(2x - y)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}6x^2 - 5x &= \boxed{x} \times 6x - \boxed{x} \times 5 \\&= \boxed{x} \times (6x - 5) \\&= x(6x - 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}110a + 11 &= \boxed{11} \times 10a + \boxed{11} \times 1 \\&= \boxed{11} \times (10a + 1) \\&= 11(10a + 1)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x) &= \boxed{(2 + 3x)} \times 3 - \boxed{(2 + 3x)} \times (5 + 2x) \\&= \boxed{(2 + 3x)} \times (3 - (5 + 2x)) \\&= (2 + 3x) \times (3 - 5 - 2x) \\&= (2 + 3x)(-2 - 2x) \\&= -(2 + 3x)(2 + 2x)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}
 (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x) &= \boxed{(2 - 5x)} \times (2 - 5x) - \boxed{(2 - 5x)} \times (1 + x) \\
 &= \boxed{(2 - 5x)} \times ((2 - 5x) - (1 + x)) \\
 &= (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x) \\
 &= (2 - 5x)(1 - 6x)
 \end{aligned}$$

Rem. : Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

Ex. :

$$\begin{aligned}
 4(1 - x)^2 - 3x(x - 1) &= 4(1 - x)(1 - x) + 3x(1 - x) \\
 &= \boxed{(1 - x)} \times 4(1 - x) + \boxed{(1 - x)} \times (3x) \\
 &= \boxed{(1 - x)} (4(1 - x) + (3x)) \\
 &= (1 - x)(4 - 4x + 3x) \\
 &= (1 - x)(4 - x)
 \end{aligned}$$

3. Identités remarquables

3.1. Propriété : Identités remarquables♥

Graphiquement :

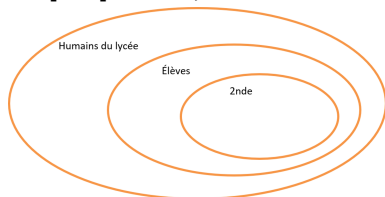
2468
13579

Pour tout a et b , on a :

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}
 23^2 &= (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 3 + 3^2 \\
 &= 400 + 120 + 9 = 529
 \end{aligned}$$

Graphiquement, $23^2 = 529$ 

Méthode : Utiliser les identités remarquables pour **développer**

Ex. :

$$\begin{aligned}A &= (x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\&= x^2 - 10x + 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \left(6 + \frac{1}{2}x\right)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \\&= 36 + 6x + \frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= (2x - 1)(2x + 1) = (2x)^2 - 1^2 \\&= 4x^2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= -2(1 - x)^2 = -2(1^2 - 2x + x^2) \\&= -2 + 4x - 2x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= 2(x + 3) - (2x + 3)(2x - 3) = 2x + 6 - ((2x)^2 - 3^2) \\&= 2x + 6 - 4x^2 + 9 \\&= -4x^2 + 2x + 15\end{aligned}$$

Méthode : Utiliser les identités remarquables pour **factoriser**

Il faut faire apparaître les termes a^2 , b^2 et $2ab$.

Ex. :

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 &= \boxed{x}^2 - 2 \times \boxed{x} \times \boxed{2} + \boxed{2}^2 \\&= \boxed{a}^2 - 2 \times \boxed{a} \times \boxed{b} + \boxed{b}^2 \\&= (\boxed{a} - \boxed{b})^2 \\&= (x - 2)^2\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}A &= 25 + x^2 + 10x = \boxed{x}^2 + 2 \times \boxed{x} \times \boxed{5} + \boxed{5}^2 \\&= \boxed{a}^2 + 2 \times \boxed{a} \times \boxed{b} + \boxed{b}^2 \\&= (a + b)^2 \\&= (x + 5)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= 1 - 36x^2 = 1^2 - (6x)^2 \\&= a^2 - b^2 \\&= (a + b)(a - b) \\&= (1 - 6x)(1 + 6x)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}
 C &= (2 - x)^2 - 64 = (2 - x)^2 - 8^2 \\
 &= a^2 - b^2 \\
 &= (a + b)(a - b) \\
 &= ((2 - x) + 8)((2 - x) - 8) \\
 &= (10 - x)(-6 - x) \\
 &= -(10 - x)(6 + x) \\
 &= (x + 10)(x + 6)
 \end{aligned}$$

4. Réduire au même dénominateur

4.1. Déf : Réduire au même dénominateur

Réduire au même dénominateur c'est transformer une **somme** (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Propriété :

Pour tout nombre a , b , c et d , réels on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Rem : Dénominateur commun = Produit des dénominateurs

Ex. :

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{5} + \frac{1}{3} &= \left(\frac{2}{5} \times \boxed{\frac{3}{3}} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \boxed{\frac{5}{5}} \right) \\
 &= \left(\frac{6}{15} \right) + \left(\frac{5}{15} \right) = \frac{11}{15}
 \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \left(\frac{a}{b} \times \boxed{\frac{d}{d}} \right) + \left(\frac{c}{d} \times \boxed{\frac{b}{b}} \right) \\
 &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}
 \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{2}{x}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{x} \times \boxed{\frac{2}{2}}\right) - \left(\frac{x+1}{2} \times \boxed{\frac{x}{x}}\right) \\
 &= \left(\frac{4}{2x}\right) - \left(\frac{(x+1)x}{2x}\right) \\
 &= \left(\frac{4}{2x}\right) - \left(\frac{x^2+x}{2x}\right) = \frac{-x^2-x+4}{2x}
 \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}
 B &= 2 - \left(\frac{5x}{x-2}\right) = \left(\frac{2}{1} \times \boxed{\frac{x-2}{x-2}}\right) - \left(\frac{5x}{x-2} \times \boxed{\frac{1}{1}}\right) \\
 &= \left(\frac{2(x-2)}{x-2}\right) - \left(\frac{5x}{x-2}\right) \\
 &= \frac{2x-4-5x}{x-2} = \frac{-3x-4}{x-2} = \frac{3x+4}{2-x}
 \end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}
 C &= \left(\frac{3x}{1-x}\right) + \left(\frac{5}{2x-3}\right) = \left(\frac{3x(2x-3)}{(1-x)(2x-3)}\right) + \left(\frac{5(1-x)}{(2x-3)(1-x)}\right) \\
 &= \frac{6x^2-9x}{(1-x)(2x-3)} + \frac{5-5x}{(1-x)(2x-3)} \\
 &= \frac{6x^2-14x+5}{(1-x)(2x-3)}
 \end{aligned}$$