

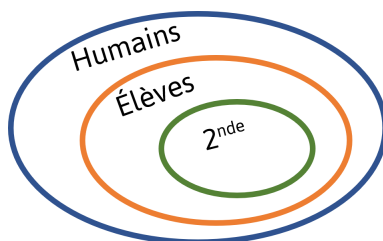
# Ensembles de nombres et intervalles de $\mathbb{R}$

## Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Les entiers</b>   | <b>1</b> |
| 1.1 Multiples - diviseurs . . . . .  | 2        |
| 1.2 Pair - impair . . . . .  | 2        |
| 1.3 Nombres premiers . . . . .   | 3        |
| 1.4 Décomposition en facteurs premiers . . . . .   | 3        |
| <b>2 Les ensembles <math>\mathbb{D}</math>, <math>\mathbb{Q}</math> et <math>\mathbb{R}</math></b> | <b>3</b> |
| 2.1 Les décimaux : $\mathbb{D}$ . . . . .  | 3        |
| 2.2 Les rationnels : $\mathbb{Q}$ . . . . .  | 3        |
| 2.3 Les réels : $\mathbb{R}$ . . . . .   | 4        |
| 2.4 Les ensembles de nombres à connaître♥ en 2 <sup>nde</sup> . . . . .                            | 4        |
| <b>3 Intervalles de <math>\mathbb{R}</math> et valeur absolue</b>                                  | <b>5</b> |
| 3.1 Valeur absolue . . . . .   | 6        |

## 1. Les entiers

**Rem. :** Dans le lycée, il y a un ensemble d'**humains**. Parmi eux, il y a des **élèves** et parmi ces élèves il y a des **secondes**.



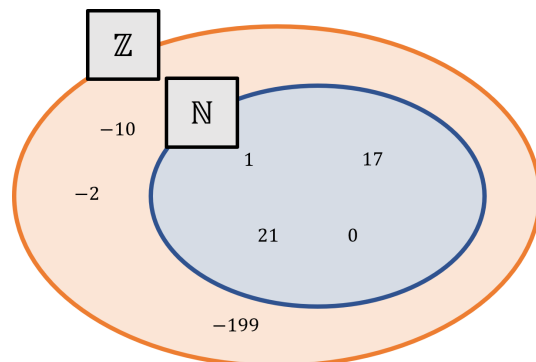
### Def. :

Parmi les nombres **entiers**, il existe :

- Entiers **naturels** :  $\mathbb{N}$ 
  - Entiers (sans partie décimale) positifs : 0 ; 1 ; 4 ; 999...
- Entiers **relatifs** :  $\mathbb{Z}$ 
  - Entiers positifs ou négatifs : -6 ; -77 ; 98 ; 4 ...

### Ex. :

- 17 appartient à  $\mathbb{N}$  et à  $\mathbb{Z}$   $\Rightarrow 17 \in \mathbb{N}$  et  $17 \in \mathbb{Z}$
- (-2) n'appartient pas à  $\mathbb{N}$   $\Rightarrow (-2) \notin \mathbb{N}$
- 157..... à  $\mathbb{N}$   $\Rightarrow 157..... \mathbb{N}$



### 1.1. Multiples - diviseurs

**Def. :** Soit  $a$  et  $b$ , deux nombres entiers.

On dit que  $a$  est un **multiple**  $b$  s'il existe un entier  $k$  tel que :

$$a = k \times b$$

On dit aussi que  $b$  est un **diviseur** de  $a$ .

**Ex. :**

- $27 = 3 \times 9$  donc
  - 27 est **multiple** de 3 (et de 9)
  - 9 est un **diviseur** de 27
- 85 n'est pas un **multiple** de 10 car :
  - $85 = k \times 10 \Leftrightarrow k = 8.5$  et  $k$  pas entier

| x  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   |
| 1  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 2  | 0 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20  |
| 3  | 0 | 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30  |
| 4  | 0 | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40  |
| 5  | 0 | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50  |
| 6  | 0 | 6  | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60  |
| 7  | 0 | 7  | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70  |
| 8  | 0 | 8  | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80  |
| 9  | 0 | 9  | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90  |
| 10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

**Prop. :**

Soit  $a$  un entier. La somme de deux **multiples** de  $a$ , est un **multiple** de  $a$ .

**Ex. :**

21 et 33 sont des **multiples** de 3 donc  $54 = (21 + 33)$  est un **multiple** de 3.

En effet,  $54 = 18 \times 3$

**Démonstration :**

Soit  $n_1$  et  $n_2$ , deux multiples de  $a$  alors :

$$n_1 = k_1 \times a \quad \text{et} \quad n_2 = k_2 \times a$$

On a donc :

$$n_1 + n_2 = (k_1 \times a) + (k_2 \times a) = (k_1 + k_2) \times a$$

Donc :  $(n_1 + n_2)$  est multiple de  $a$

### 1.2. Pair - impair

**Def. :**

Un nombre **pair** est un multiple de 2.

- Si  $n$  est **pair** alors  $n = 2k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$
- Si  $n$  est **impair** alors  $n = 2k + 1$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

**Ex. :**

- 157 est **impair** car  $157 = (2 \times 78) + 1$
- 2048 est **pair** car  $2048 = (2 \times 1024)$

**Prop. :**

Le **carré** d'un nombre **impair** est **impair**

**Démonstration :**

Soit  $n$  un nombre **impair**. On a donc  $n = 2k + 1$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = (2k + 1)(2k + 1)$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$= 2K + 1$$

Si  $n$  est **impair** alors  $n^2$  est **impair**.

2468

13579

### 1.3. Nombres premiers

**Def. :**

Un entier naturel est dit **premier**, s'il admet exactement deux diviseurs entiers positifs.

**Ex. :**

- 25 admet comme diviseurs 1, 5 et 25  $\rightarrow$  **pas premier**
- 17 admet comme diviseurs 1 et 17  $\rightarrow$  **premier**
- 221 admet comme diviseurs ...  $\rightarrow$  ...

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

### 1.4. Décomposition en facteurs premiers

**Ex. :**

- $60 = 30 \times 2 = 15 \times 2 \times 2 = 5 \times 3 \times 2 \times 2$

La décomposition de 60 en facteurs **premiers** est :

$$60 = 3^1 \times 5^1 \times 2^2$$

**Ex. :**

- $1300 = \dots$

$$\begin{array}{r|l}
 1300 & 2 \\
 650 & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Méthode pour décomposer 60 :

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & 
 \end{array}$$

## 2. Les ensembles $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

### 2.1. Les décimaux : $\mathbb{D}$

Nombres dont la **partie décimale est finie**. On peut les écrire sous la forme :

$$\frac{a}{10^n} \text{ avec } a \in \mathbb{Z}$$

**Ex. :**

À vous de compléter :

- $0.009 = \dots$
- $\frac{-1234}{10^2} = \dots$

**Ex. :**

- $1.77 = \frac{177}{100} = \frac{177}{10^2}$  donc  $1.77 \in \mathbb{D}$
- $-5.001 = \frac{-5001}{1000} = \frac{-5001}{10^3}$  donc  $-5.001 \in \mathbb{D}$

### 2.2. Les rationnels : $\mathbb{Q}$

Ils peuvent s'écrire sous la forme :  $\frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}^*$

**Ex. :**

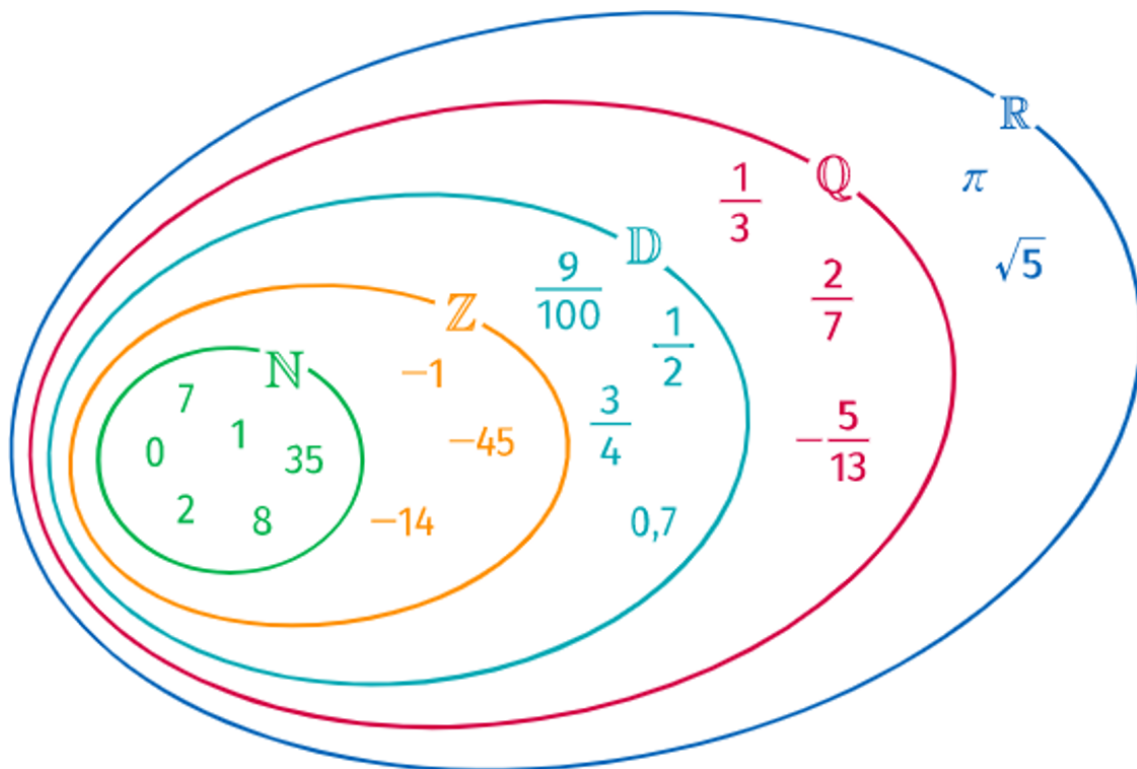
- $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} = 0.3333\dots \in \mathbb{Q}$
- $\frac{50}{7} = 7.142\ 857\ 142\ 857\dots \in \mathbb{Q}$

**Rem. :** La partie décimale peut se "répéter" à l'infini.

**2.3. Les réels :  $\mathbb{R}$** 

Tous les nombres connus en seconde.

**Ex :**  $-16$  ;  $\sqrt{3}$  ;  $\pi$  ; ...

**2.4. Les ensembles de nombres à connaître♥ en 2<sup>nde</sup>****Démonstration :**

Démontrons que  $\frac{1}{3}$  n'appartient pas aux décimaux.

**Supposons** que  $\frac{1}{3}$  appartient aux décimaux alors il peut s'écrire sous la forme :  $\frac{a}{10^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \in \mathbb{D} &\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \\ &\Leftrightarrow 3 \times a = 1 \times 10^n \\ &\Leftrightarrow 3a = 10^n \end{aligned}$$

On a :

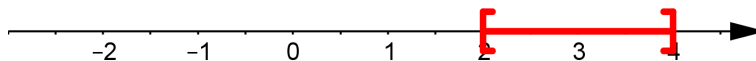
- $3a$  est un multiple de 3 donc la **somme des ses chiffres** doit être un multiple de 3.
- $10^n$  est un nombre constitué d'un seul 1 et de zéros donc la **somme des ses chiffres** est 1.

Donc  $10^n$  n'est pas un multiple de 3, donc  $10^n \neq 3 \times a$  donc  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

### 3. Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue

**Def. :**

L'ensemble  $I$  de tous les nombres réels  $x$  tels que  $2 \leq x \leq 4$  peut se représenter sur une droite graduée :



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note :

$$I = [2 ; 4]$$

**Ex. :**

L'ensemble  $J$  des réels  $x$  tels que  $-2 \leq x \leq 7$  se note :

$$J = [-2 ; 7]$$

On a :  $4 \in [-2 ; 7]$  et  $-5 \notin [-2 ; 7]$

**Ex. :**

| Notation       | Inégalité           | Représentation |
|----------------|---------------------|----------------|
| $[0 ; 1]$      | $0 \leq x \leq 1$   |                |
| $] -1 ; 3]$    | $-1 < x \leq 3$     |                |
| $[-0.5 ; 2.3[$ | $-0.5 \leq x < 2.3$ |                |
| $]2 ; 4[$      | $2 < x < 4$         |                |

**Ex. :**

| Notation            | Inégalité    | Représentation |
|---------------------|--------------|----------------|
| $] -\infty ; 1.5]$  | $x \leq 1.5$ |                |
| $] -\infty ; -1.7[$ | $x < -1.7$   |                |
| $] -2 ; +\infty[$   | $x > -2$     |                |
| $[2.7 ; +\infty[$   | $x \geq 2.7$ |                |

**Rem. :**

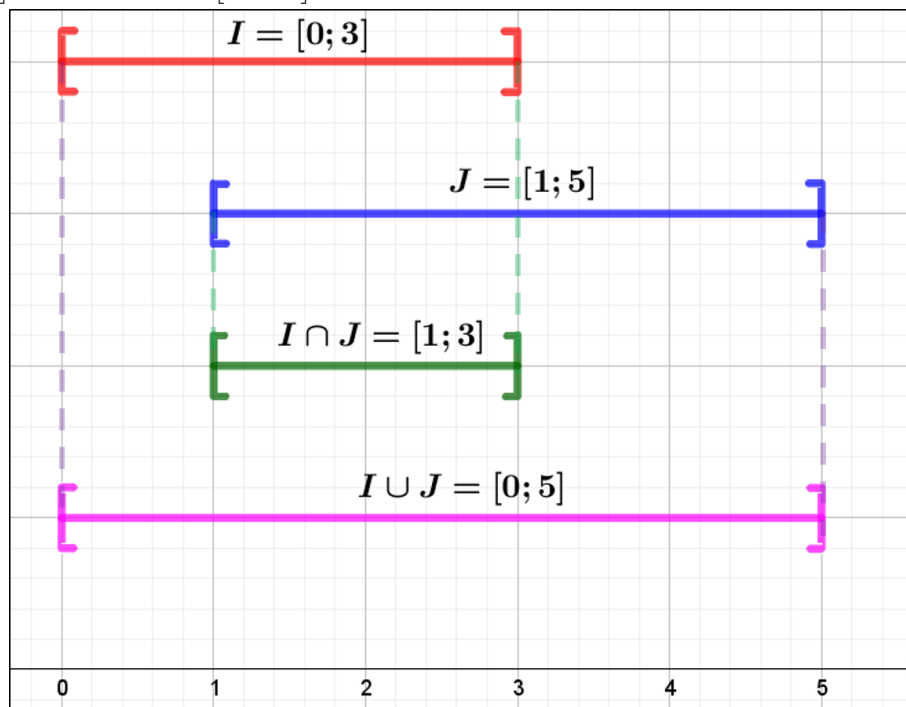
L'ensemble  $\mathbb{R}$  est un intervalle qui se note

$$\mathbb{R} = ] -\infty ; +\infty[$$

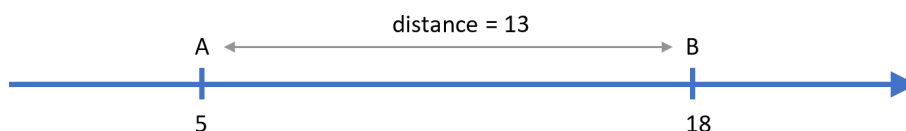
**Def. :**

- L'**intersection** de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  et à  $B$  et se note :  $A \cap B$
- La **réunion** (ou l'**union**) de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  et se note :  $A \cup B$

**Ex. :**  $I = [0 ; 3]$  et  $J = [1 ; 5]$

**3.1. Valeur absolue****Def. :**

La distance de deux réels  $a$  et  $b$  est la distance des points  $A$  et  $B$  d'abscisses  $a$  et  $b$  sur la droite numérique.

**Ex. :****Rem. :**

- Si  $(a < b)$  alors la distance est  $(b - a)$
- Si  $(a > b)$  alors la distance est  $(a - b)$

On note la distance :  $|a - b|$  et on lit **valeur absolue de  $(a - b)$**

**Ex. :**

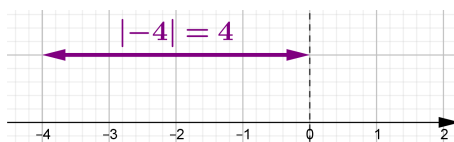
La distance de 5 à 18 est  $|5 - 18| = 18 - 5 = 13$

**Def. :**

La **valeur absolue** d'un réel  $x$  est la distance de ce réel à 0.

Elle est notée :  $|x|$

**Ex. :** La valeur absolue de  $-4$  est la distance de  $-4$  à 0. On a :  $|-4| = 4$



**Ex. :**

- $|3| = 3$
- $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
- $|-4| = 4$
- $|-0.177| = 0.177$

**Prop. :**On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

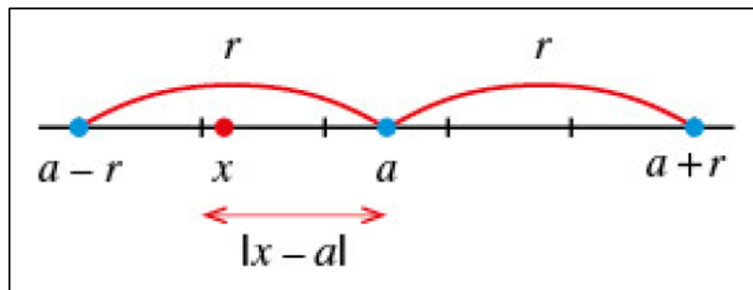
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Ex. :**

- $|3| = 3$  car  $3 > 0$
- $|-7| = -(-7) = 7$  car  $(-7) < 0$

**Prop. :**L'intervalle  $[a - r ; a + r]$  est l'ensemble des  $x$  tel que :

$$|x - a| \leq r$$

**Ex. :**L'ensemble des nombres  $x$  tel que  $|x - 5| \leq 3$  est l'intervalle  $I = [5 - 3 ; 5 + 3] = [2 ; 8]$ 