Arithmétique

Table des matières

1. Nombres entiers

1.1. Entier naturel

Def : Un nombre **entier naturel** est un nombre entier qui est **positif**.
L'ensemble des nombres **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Ex. : $4 \in \mathbb{N}$ $\qquad -2 \notin \mathbb{N}$

1.2. Entier relatif

Def : Un nombre **entier relatif** est un nombre entier qui est **positif** ou **négatif**.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{D}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Ex. : $14 \in \mathbb{Z}$ $\qquad -4 \in \mathbb{Z}$ $\qquad 0.33 \notin \mathbb{Z}$

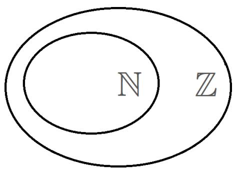

Figure 1: Représentation de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

2. Multiples et diviseurs

2.1. Multiple et diviseur

Def : Soit a et b deux entiers. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un **entier** k tel que :

$$a = k \times b$$

On dit alors que b est un **diviseur** de a.

Ex. :

- 15 est **multiple** de 3 car $15 = 5 \times 3$ ...et 3 est un **diviseur** de 15
- 7 est un **diviseur** de 21 car $21 = 7 \times 3$ ...et 21 est **multiple** de 7
- 5 n'est pas un **multiple** de 17 car il n'existe pas **d'entier** k tel que $17 = k \times 5$

Table de 3	Table de 5
3 x 1 = 3	5 x 1 = 5
3 x 2 = 6	5 x 2 = 10
3 x 3 = 9	5 x 3 = 15
3 x 4 = 12	5 x 4 = 20
3 x 5 = 15	5 x 5 = 25
3 x 6 = 18	5 x 6 = 30
3 x 7 = 21	5 x 7 = 35
3 x 8 = 24	5 x 8 = 40
3 x 9 = 27	5 x 9 = 45
3 x 10 = 30	5 x 10 = 50

Figure 2: Tables du 3 et du 5

2.2. Somme de deux multiples

Prop : La **somme** de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Ex. :

- 15 est multiple de 3 $(3 \times 5 = 15)$
- 21 est multiple de 3 $(3 \times 7 = 21)$

Donc $(15 + 21) = 36$ est multiple de 3 $(3 \times 12 = 36)$

Démonstration

Soit b et c deux multiples de a.

- b est un multiple de a donc il existe un **entier** k_1 tel que $b = a \times k_1$
- c est un multiple de a donc il existe un **entier** k_2 tel que $c = a \times k_2$

On a :

$$\begin{aligned}(b + c) &= a \times k_1 + a \times k_2 \\ &= a \times (k_1 + k_2) \\ &= a \times k \qquad \text{où} \quad k = k_1 + k_2\end{aligned}$$

Or, $k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers

Donc $(b + c) = a \times k$ avec k entier $\Rightarrow (b + c)$ est donc un multiple de a.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Montrons que la somme de **trois entiers consécutifs** est un **multiple de 3**.

Soit **trois entiers consécutifs** : (n), $(n + 1)$ et $(n + 2)$, où n est un entier quelconque.

Leur somme est :

$$\begin{aligned}S &= n + (n + 1) + (n + 2) \\ &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \qquad = 3(n + 1)\end{aligned}$$

Soit k l'entier tel que $k = n + 1$.

Donc $S = 3k$, avec k entier $\Rightarrow S$ est un multiple 3.

3. Nombres pairs, impairs

3.1. Définition : pair / impair

- Un nombre **pair** est un multiple de 2.
- Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

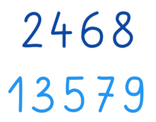

Figure 3: Pair / impair

Ex. :
- 34, 68, 9756786 et 0 sont des nombres **pairs**.
- 567, 871 et 1 sont des nombres **impairs**.

3.2. Propriétés : pair / impair

Prop :
- Un nombre **pair** s'écrit sous la forme $(2k)$, avec k entier.
- Un nombre **impair** s'écrit sous la forme $(2k+1)$, avec k entier.

3.3. Propriété : Carré d'un nombre impair

Prop : Le **carré** d'un nombre **impair** est **impair**.

Ex. : $13^2 = 169$ $\quad 5^2 = 25$ $\quad \ldots$

Démonstration

Soit a est un nombre **impair**.

On peut l'écrire sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.

On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2+2k) + 1 \\ &= 2k' + 1 \qquad \text{avec } k' = 2k^2 + 2k \end{aligned}$$

k' est **entier** car **somme** de **deux entiers**

a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ $\quad \Rightarrow a^2$ est **impair**.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Montrons que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.

1er cas : n pair

Si n est **pair**, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.

Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 2k(2k+1) \\ &= 2k_1 \qquad \text{avec} \quad k_1 = k(2k+1) \quad \text{entier} \end{aligned}$$

Donc $n(n+1)$ est pair.

2ème cas : n impair

Si n est **impair**, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier.

Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :

$$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1)(2k+2) \\ &= 2(2k+1)(k+1) \\ &= 2k_2 \qquad \text{avec} \quad k_2 = (2k+1)(k+1) \quad \text{entier} \end{aligned}$$

Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le **produit** de **deux entiers consécutifs** est un **nombre pair**.

4. Nombres premiers

4.1. Définition : Nombre premier

Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et **lui-même**.

Ex. : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Figure 4: Les nombres premiers de 1 à 100 :

Un très grand nombre premier :
22 989 432 637 682 048 935 578 359 759 258 512 929 075 458 593 285 426 151 563 351 225 878 608 019 921 960 174 786 937 174 324 066 918 557 552 262 283 220 478 419 095 917 521 791 323 874 771 300 201 334 066 843 810 139 337 069 250 339 905 576 793 882 539 603 587 327 037 857 904 876 391 811 440 492 908 489 972 485 276 368 673 701 887

Rem. : Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'**un seul diviseur**.

4.2. Définition : Deux nombres premiers entre-eux

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul **diviseur** commun est 1.

Ex. : 20 et 21 sont **premier** entre-eux car :

- $20 = 5 \times 2 \times 2 \times 1$
- $21 = 7 \times 3 \times 1$

4.3. Propriété : Décomposition d'un nombre

Tout nombre **non premier** peut se décomposer en **produits** de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

Ex. : Décomposons 420 en facteurs premiers

$$\begin{array}{l|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

Ex. : Décomposons 150, 729, 1485, 378 et 1260 en facteurs premiers

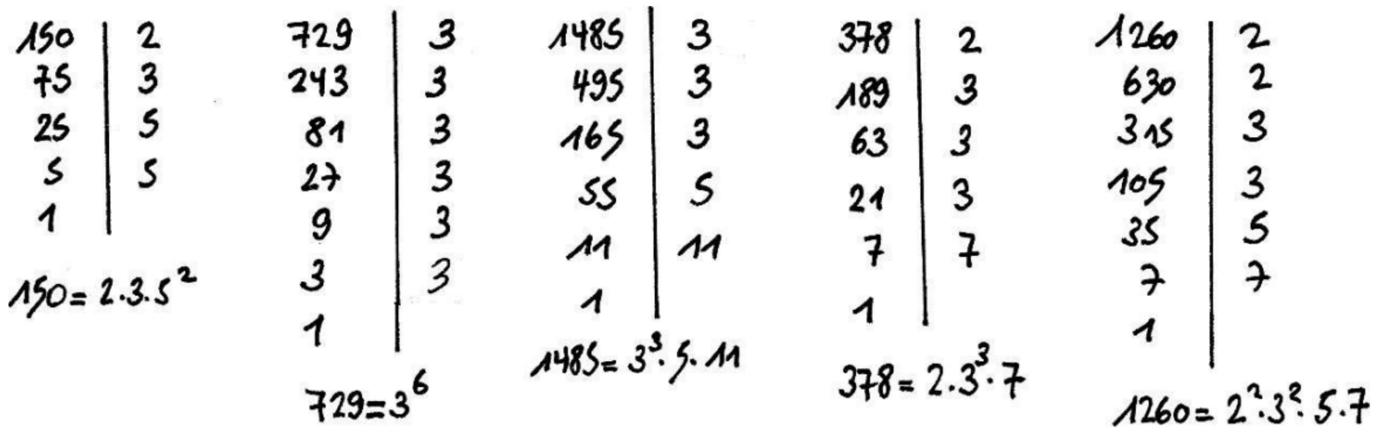

Figure 5: Méthode de décomposition en facteurs premiers

4.4. Définition : Fraction irréductible

On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son **numérateur** et son **dénominateur** sont **premiers entre eux**.

Ex. :

- $\frac{7}{5}$ est irréductible
- $\frac{21}{144}$ n'est pas irréductible car $\frac{21}{144} = \frac{7\times3}{48\times3} = \frac{7}{48}$ $\Rightarrow$ $\frac{7}{48}$ est irréductible.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Rendons irréductible la fraction $\dfrac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son **numérateur** et son **dénominateur** en produits de **facteurs premiers**.

60	2	126	2
30	2	63	3
15	3	21	3
5	5	7	7
1		1	

On ainsi les décompositions de 60 et 126 :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \qquad 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

On a :

$$\frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

10 et 21 sont **premiers entre eux**, donc:

$\dfrac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\dfrac{60}{126}$