

Dérivation (1) : Nombre dérivé

Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

Soit f définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{((x+1)^2 - 1)}{x}$.

L'image de 0 par f n'existe pas.

On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se **rapproche** de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se **rapproche** de 2 lorsque x se **rapproche** de 0.

On dit que la **limite** de f lorsque x **tend vers** 0 est égale à 2 et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

Exemple :

Soit g définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se **rapproche** de 0.

On dit que la **limite** de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Définition :

On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x **tend vers** 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être **aussi proche de L que l'on veut** pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

et on lit : "La **limite** de $f(x)$ lorsque x **tend vers** 0 est égale à L ".

Nombre dérivé

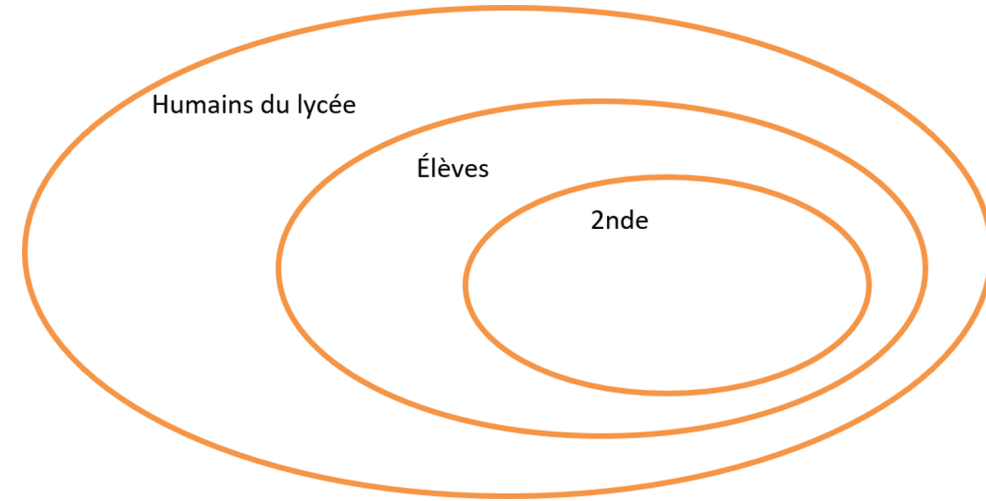
Rappel : Pente d'une droite

Soit f définie sur I . Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.

Soit A et B deux points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives a et b .

La **pente** (ou le **coefficient directeur**) de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Fonction dérivable

Soit f définie sur I . Soit un réel $a \in I$.

Soit A et M deux points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives (a) et $(a + h)$, avec $h \neq 0$.

La pente de la droite (AM) est égale à :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

2 4 6 8

1 3 5 7 9

Lorsque le point M se rapproche du point A , la pente de la droite (AM) est égale à la **limite** de $\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$ lorsque h tend vers 0.

Cette **pente** s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

2 4 6 8
1 3 5 7 9

Définition :

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L , tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L$$

L est appelé **le nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Pour démontrer que f est dérivable en $x = 2$, calculons $\left(\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \right)$ pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{((2+h)^2 + 2(2+h) - 3) - (2^2 + 2 \times 2 - 3)}{h} \\ &= \frac{(4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3) - (5)}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(6 + h)}{h} = 6 + h \end{aligned}$$

Donc

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$.

Le **nombre dérivé** de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$

Tangente à une courbe

Soit f définie sur I et dérivable en un nombre réel $a \in I$.

$f'(a)$ est le **nombre dérivé** de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à \mathcal{C}_f .

Définition :

La **tangente** à \mathcal{C}_f au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Méthode : Déterminer la pente d'une tangente à une courbe

Soit f définie sur \mathbb{R} par ...

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

... dérivable en $x = 2$.

On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 : $f'(2) = 6$.

Ainsi la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 2 est la droite passant par A et de **pente 6**.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$729 = 3^6$$

$$\begin{array}{r|l} 1485 & 3 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Propriété :

Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f en $A(a ; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration au programme :

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme :

$$y = f'(a)x + b \quad \text{où } b \text{ est l'ordonnée à l'origine.}$$

La tangente passe par le point $A(a ; f(a))$, donc :

$$f(a) = f'(a) \times a + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \left(f(a) - f'(a) \times a \right)$$

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :

$$y = f'(a)x + \left(f(a) - f'(a) \times a \right) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$

On a vu que $f'(2) = 6$.

Donc son équation est de la forme :

$$y = 6(x - 2) + f(2)$$

$$\Leftrightarrow y = 6(x - 2) + (2^2 + 2 \times 2 - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 6x - 12 + 5$$

$$\Leftrightarrow y = 6x - 7$$

Une équation de tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.