Dérivation (1) : Nombre dérivé

Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

Soit f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{((x+1)^2-1)}{x}$.

L'image de 0 par f n'existe pas.

On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se **rapproche** de 0.

x	$-0,5$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$\ldots$	$0,001$	$0,01$	$0,1$	$0,5$
$f(x)$	$1,5$	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$?$	$2,001$	$2,01$	$2,1$	$2,5$

On constate que $f(x)$ se **rapproche** de 2 lorsque x se **rapproche** de 0.

On dit que la **limite** de f lorsque x **tend vers** 0 est égale à 2 et on note :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

Exemple :

Soit g définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se **rapproche** de 0.

On dit que la **limite** de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

Définition :

On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x **tend vers** 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être **aussi proche de** L **que l'on veut** pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

On note :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L$$

et on lit : "La **limite** de $f(x)$ lorsque x **tend vers** 0 est égale à L".

Nombre dérivé

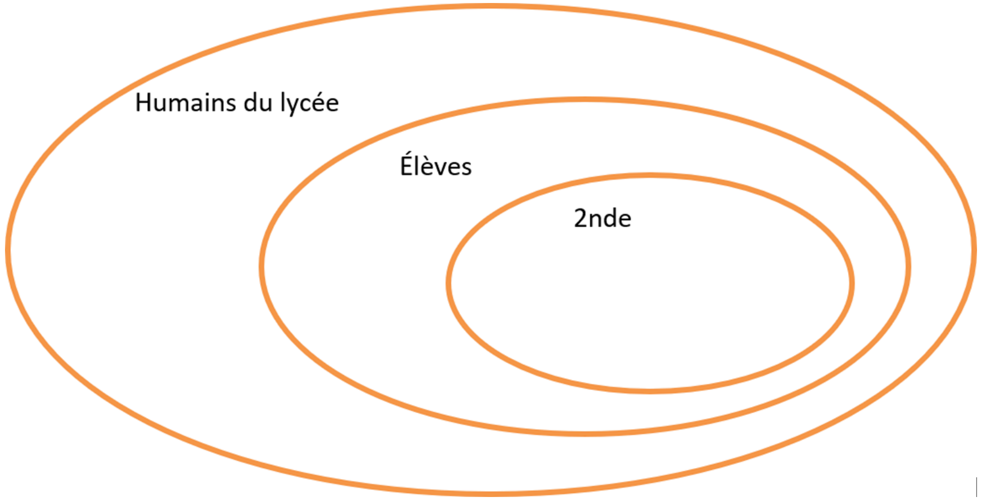
Rappel : Pente d'une droite

Soit f définie sur I. Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.

Soit A et B deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

La **pente** (ou le **coefficient directeur**) de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



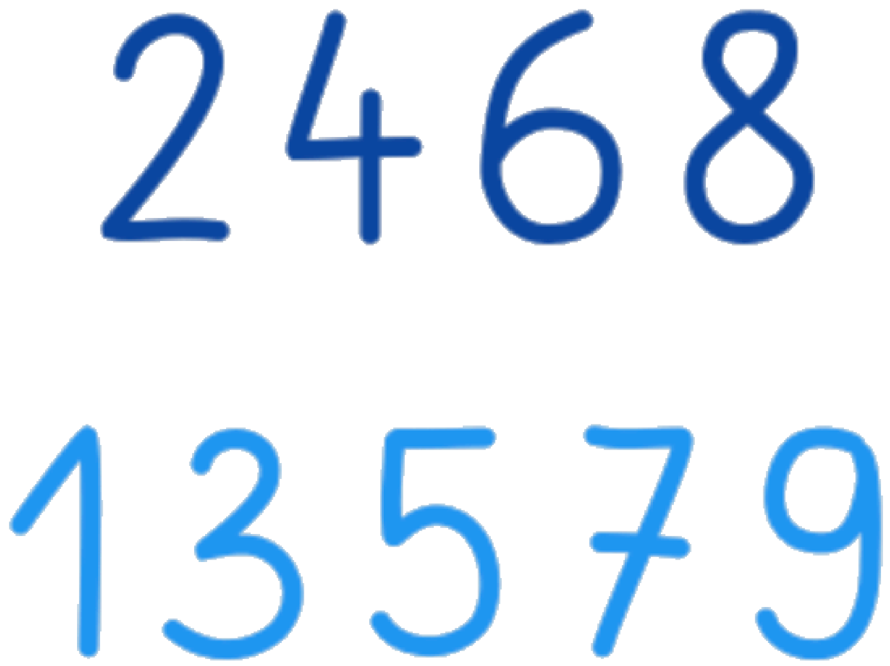
Fonction dérivable

Soit f définie sur I. Soit un réel $a \in I$.

Soit A et M deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives (a) et $(a+h)$, avec $h \neq 0$.

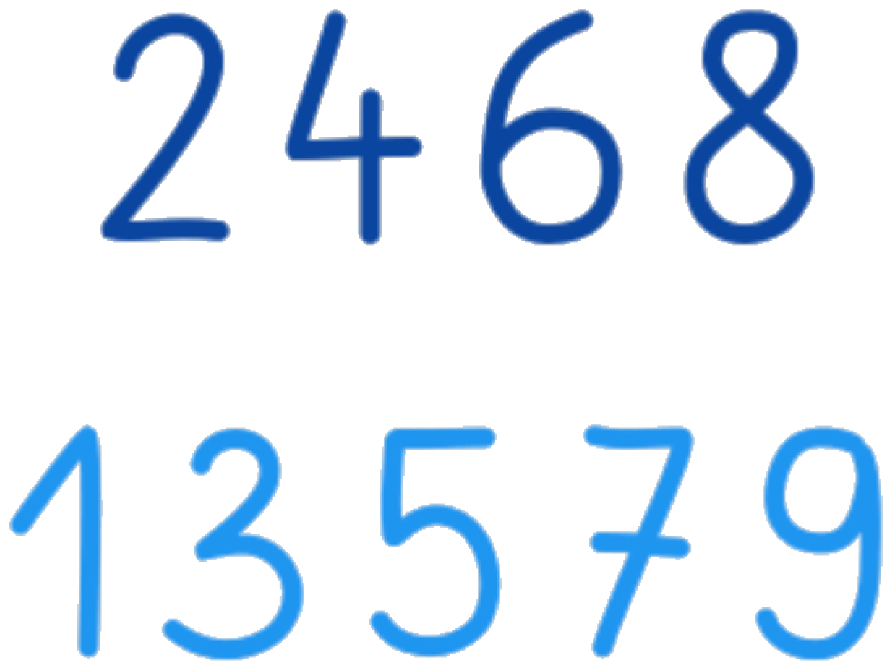
La pente de la droite (AM) est égale à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Lorsque le point M se rapproche du point A , la pente de la droite (AM) est égale à la **limite** de $\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ lorsque h tend vers 0.

Cette **pente** s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.



Définition :

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L$$

L est appelé **le nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)}$$

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Pour démontrer que f est dérivable en $x = 2$, calculons $\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)$ pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{\left((2+h)^2+2(2+h)-3\right)-\left(2^2+2\times 2-3\right)}{h}\\ &= \frac{(4+4h+h^2+4+2h-3)-(5)}{h}\\ &= \frac{6h+h^2}{h}\\ &= \frac{h(6+h)}{h} \quad = 6+h\end{aligned}$$

Donc

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \right) = \lim_{h \to 0}(6+h) = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$.

Le **nombre dérivé** de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$

Tangente à une courbe

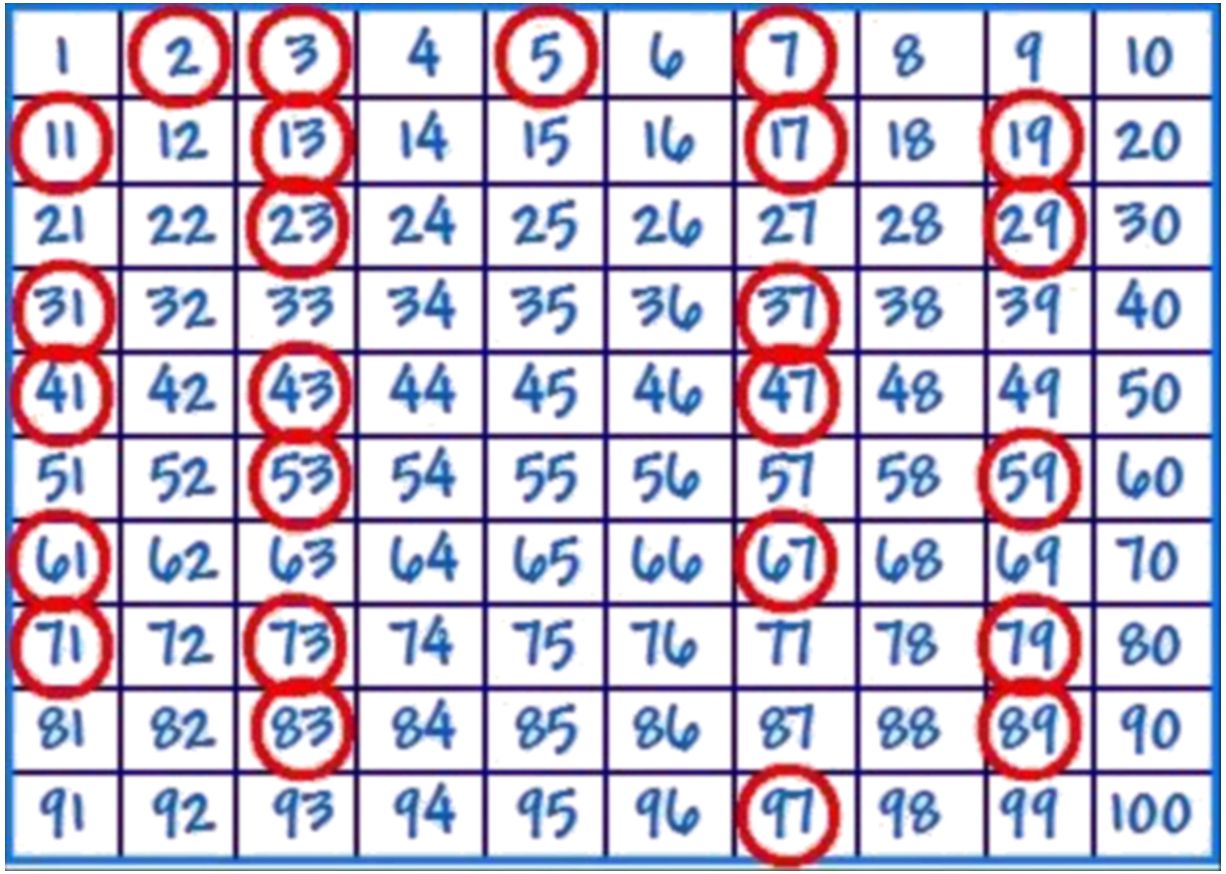
Soit f définie sur I et dérivable en un nombre réel $a \in I$.

$f'(a)$ est le **nombre dérivé** de f en a.

A est un point d'abscisse a appartenant à $\mathscr{C}_f$.

Définition :

La **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.



Méthode : Déterminer la pente d'une tangente à une courbe

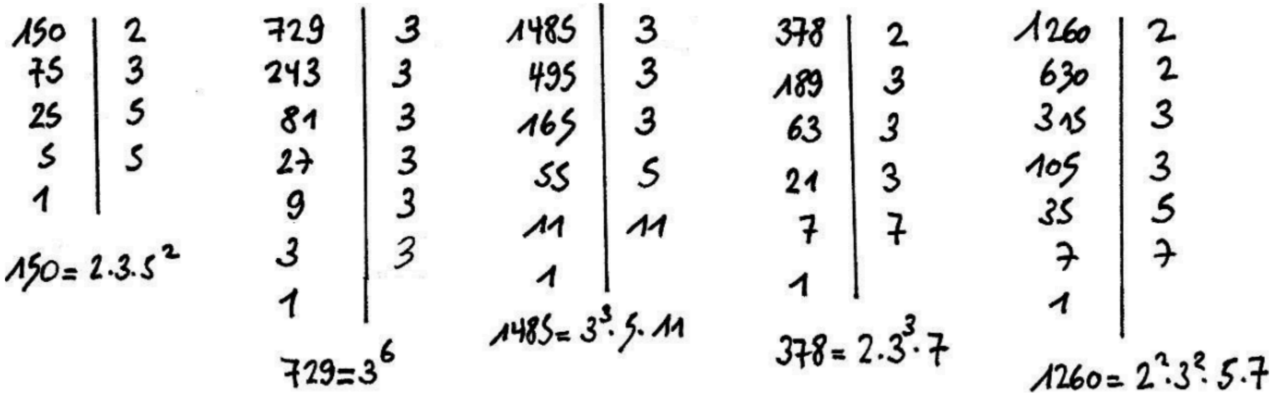
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par ...

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

... dérivable en $x = 2$.

On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 : $f'(2) = 6$.

Ainsi la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2 est la droite passant par A et de **pente** 6.



Propriété :

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A\left(a\ ;\ f(a)\right)$ est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Démonstration au programme :

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme :

$y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

La tangente passe par le point $A\left(a\ ;\ f(a)\right)$, donc :

$$f(a) = f'(a) \times a + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \left(f(a) - f'(a) \times a\right)$$

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :

$$y = f'(a)x + \left(f(a) - f'(a) \times a\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$

On a vu que $f'(2) = 6$.

Donc son équation est de la forme :

$$\begin{aligned} & y = 6(x-2) + f(2) \\ \Leftrightarrow\ & y = 6(x-2) + (2^2 + 2 \times 2 - 3) \\ \Leftrightarrow\ & y = 6x - 12 + 5 \\ \Leftrightarrow\ & y = 6x - 7 \end{aligned}$$

Une équation de tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.