Calcul numérique et algébrique

Table des matières

1. Somme de termes et produit de facteurs

Ex. : Somme de terme
- $x-3$
- $(x+4)-(6-x)$
- $1+(x+1)(x-1)$
- $x^2+2x+10
La dernière opération est une somme (ou une différence)

Ex. : Produit de facteur
- $3x(5-x)$
- $(x+4)(6-x)$
- $(x-1)^2$
- $9\times\dfrac{4x-1}{1-x}$
La dernière opération est un produit (ou un quotient)

1.1. Valeurs interdites

Ce sont les valeurs de x pour lesquelles il n'est pas possible de calculer l'expression algébrique.

Ex. :
Soit $f(x)=\dfrac{1-x}{x-4}$.
Si $x=4$ alors $(x-4)=0$ et il n'est pas possible de calculer $f(4)$ (division par zéro).

Ex. :
Soit $f(x)=\sqrt{x}$.
Si $x \leqslant 0$ alors $\sqrt{x}$ n'est pas défini et il n'est pas possible de calculer $f(x)$
Pour $f(x)$, x est un nombre réel positif.

2. Développer / Factoriser

2.1. Def. : Distributivité et factorisation

mnimg{}{img/04}

- **Développer** : c'est transformer un **produit** en **somme**
- **Factoriser** : c'est transformer une **somme** en **produit**

Ex. :

- **Développer** : 3(☺+📓) = 3☺+3📓
- **Factoriser** : 3☺+3📓 = 3(☺+📓)

Méthode : Développer une expression algébrique

- $2(3-x) = 2 \times 3 + 2 \times (-x) = 6-2x$
- $4x(3x-y) = 4x \times 3x + 4x \times (-y) = 12x^2-4xy$
- $-(x-y) = (-1) \times x + (-1) \times (-y) = -x+y = y-x$
- $x(3-a+3b) = x \times 3 + x \times (-a) + x \times 3b = 3x-ax+3xb$

Prop : Double distributivité
snimg{Avec les flèches :}{img/03}

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Méthode : Utiliser la double distributivité

$$\begin{aligned}(x+3)(y-1) &= (xy)+(-1x)+(3y)+\big(3\times(-1)\big)\\ &= xy-x+3y-3\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}A=(x+5)(x-2) &= (x\times x)+(-2\times x)+(5\times x)+\big(5\times(-2)\big)\\ &= x^2-2x+5x-10\\ &= x^2+3x-10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B=(3-x)(3+x) &= (3\times 3)+(3\times x)+(-x\times 3)+(-x\times x)\\ &= 9+3x-3x+x^2\\ &= x^2+9\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}(4x+5)(x-1)-2(x+1) &= (4x\times x)+(4x\times -1)+(5\times x)+(5\times -1)\ldots\\ &\qquad \ldots+(-2\times x)+(-2\times 1)\\ &= 4x^2-4x+5x-5-2x-2\\ &= 4x^2-x-7\end{aligned}$$

Méthode : Factoriser une expression
Pour factoriser une expression, il faut faire apparaître un **facteur commun**.

Ex. :

$$\begin{aligned}4x-2y &= \boxed{2}\times 2x - \boxed{2}\times y\\ &= \boxed{2}\times(2x-y)\\ &= 2(2x-y)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}6x^2-5x &= \boxed{x}\times 6x-\boxed{x}\times 5\\ &= \boxed{x}\times(6x-5)\\ &= x(6x-5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}110a+11 &= \boxed{11}\times 10a+\boxed{11}\times 1\\ &= \boxed{11}\times(10a+1)\\ &= 11(10a+1)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}3(2+3x)-(5+2x)(2+3x) &= \boxed{(2+3x)}\times 3-\boxed{(2+3x)}\times(5+2x)\\ &= \boxed{(2+3x)}\times\Big(3-(5+2x)\Big)\\ &= (2+3x)\times\Big(3-5-2x)\Big)\\ &= (2+3x)(-2-2x)\\ &= -(2+3x)(2+2x)\end{aligned}$$

Ex. :

$$\begin{aligned}(2-5x)^2-(2-5x)(1+x) &= \boxed{(2-5x)}\times(2-5x)-\boxed{(2-5x)}\times(1+x)\\ &= \boxed{(2-5x)}\times\big((2-5x)-(1+x)\big)\\ &= (2-5x)(2-5x-1-x)\\ &= (2-5x)(1-6x)\end{aligned}$$

Rem. : Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

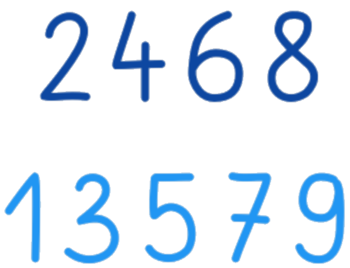
Ex. :

$$\begin{aligned}4(1-x)^2-3x(x-1) &= 4(1-x)(1-x)+3x(1-x)\\ &= \boxed{(1-x)}\times 4(1-x)+\boxed{(1-x)}\times(3x)\\ &= \boxed{(1-x)}\big(4(1-x)+(3x)\big)\\ &= (1-x)(4-4x+3x)\\ &= (1-x)(4-x)\end{aligned}$$

3. Identités remarquables

3.1. Propriété : Identités remarquables♥

Graphiquement :



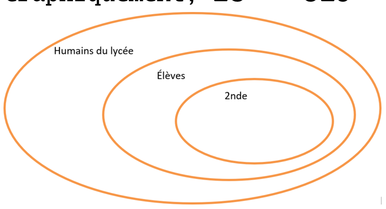
Pour tout a et b, on a :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ex. :

$$\begin{aligned}23^2=(20+3)^2 &= 20^2+2\times20\times3+3^2\\ &= 400+120+9=529\end{aligned}$$

Graphiquement, $23^2=529$



Méthode : Utiliser les identités remarquables pour **développer**

Ex. :

$$A = (x-5)^2 = x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2$$
$$= x^2 - 10x + 25$$
$$B = \left(6+\frac{1}{2}x\right)^2 = 6^2 + 2\times 6\times\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$
$$= 36 + 6x + \frac{1}{4}x^2$$
$$C = (2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2$$
$$= 4x^2 - 1$$
$$D = -2(1-x)^2 = -2(1^2 - 2x + x^2)$$
$$= -2 + 4x - 2x^2$$
$$E = 2(x+3) - (2x+3)(2x-3) = 2x + 6 - \left((2x)^2 - 3^2\right)$$
$$= 2x + 6 - 4x^2 + 9$$
$$= -4x^2 + 2x + 15$$

Méthode : Utiliser les identités remarquables pour **factoriser**
Il faut faire apparaître les termes a^2, b^2 et $2ab$.

Ex. :

$$x^2 - 4x + 4 = \boxed{x}^2 - 2\times\boxed{x}\times\boxed{2} + \boxed{2}^2$$
$$= \boxed{a}^2 - 2\times\boxed{a}\times\boxed{b} + \boxed{b}^2$$
$$= (\boxed{a} - \boxed{b})^2$$
$$= (x-2)^2$$

Ex. :

$$A = 25 + x^2 + 10x = x^2 + 2\times x\times 5 + 5^2$$
$$= a^2 + 2\times a\times b + b^2$$
$$= (a+b)^2$$
$$= (x+5)^2$$

$$B = 1 - 36x^2 = 1^2 - (6x)^2$$
$$= a^2 - b^2$$
$$= (a+b)(a-b))$$
$$= (1-6x)(1+6x)$$

Ex. :

$$\begin{aligned} C = (2-x)^2 - 64 &= (2-x)^2 - 8^2 \\ &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \\ &= ((2-x)+8)((2-x)-85) \\ &= (10-x)(-6-x) \\ &= -(10-x)(6+x) \\ &= (x+10)(x+6) \end{aligned}$$

4. Réduire au même dénominateur

4.1. Déf : Réduire au même dénominateur

Réduire au même dénominateur c'est transformer une **somme** (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Propriété :

Pour tout nombre a, b, c et d, réels on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Rem : Dénominateur commun = Produit des dénominateurs

Ex. :

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{1}{3} &= \left(\frac{2}{5} \times \boxed{\frac{3}{3}}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \boxed{\frac{5}{5}}\right) \\ &= \left(\frac{6}{15}\right) \quad + \left(\frac{5}{15}\right) \quad = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \left(\frac{a}{b} \times \boxed{\frac{d}{d}}\right) + \left(\frac{c}{d} \times \boxed{\frac{b}{b}}\right) \\ &= \frac{ad}{bd} \quad + \frac{bc}{bd} \quad = \frac{ad+bc}{bd} \end{aligned}$$

Ex. :

$$A = \left(\frac{2}{x}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{x} \times \boxed{\frac{2}{2}}\right) - \left(\frac{x+1}{2} \times \boxed{\frac{x}{x}}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{2x}\right) \qquad - \left(\frac{(x+1)x}{2x}\right)$$
$$= \left(\frac{4}{2x}\right) \qquad - \left(\frac{x^2+x}{2x}\right) \qquad = \underline{\frac{-x^2-x+4}{2x}}$$

Ex. :

$$B = 2 - \left(\frac{5x}{x-2}\right) = \left(\frac{2}{1} \times \boxed{\frac{x-2}{x-2}}\right) - \left(\frac{5x}{x-2} \times \boxed{\frac{1}{1}}\right)$$
$$= \left(\frac{2(x-2)}{x-2}\right) \qquad - \left(\frac{5x}{x-2}\right)$$
$$= \frac{2x-4-5x}{x-2} \qquad = \frac{-3x-4}{x-2} \qquad = \underline{\frac{3x+4}{2-x}}$$

Ex. :

$$C = \left(\frac{3x}{1-x}\right) + \left(\frac{5}{2x-3}\right) = \left(\frac{3x(2x-3)}{(1-x)(2x-3)}\right) + \left(\frac{5(1-x)}{(2x-3)(1-x)}\right)$$
$$= \frac{6x^2-9x}{(1-x)(2x-3)} \qquad + \frac{5-5x}{(1-x)(2x-3)}$$
$$= \frac{6x^2-14x+5}{(1-x)(2x-3)}$$