

Dérivation (2) : Fonctions dérivées

Table des matières

1 Dérivées des fonctions usuelles1

1.1 Formules de dérivation des fonctions usuelles♥3

2 Opérations sur les fonctions dérivées4

2.1 Somme, produit, inverse, quotient de dérivées4

2.2 Formules d'opération sur les fonctions dérivées♥5

2.3 Composée de dérivées7

2.4 Cas de la fonction valeur absolue7

2.5 Fonction valeur absolue7

2.6 Étude de la dérivabilité en 09

3 Étude de fonctions10

3.1 Variations d'une fonction10

3.2 Extremum d'une fonction13

3.3 Position relative de deux courbes13

	airforceblue	aliceblue	alizarin	almond
amaranth	amber	amber(sae/ece)	americanrose	amethyst
anti-flashwhite	antiquebrass			
antiquefuchsia	antiquewhite	ao	ao(english)	applegreen
apricot	aqua	aquamarine	armygreen	
arsenic	arylideyellow	ashgrey	asparagus	atomictangerine
auburn	aureolin			

1. Dérivées des fonctions usuelles

Ex. : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
 Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on : $f'(x) = 2x$.
 Pour cela, calculons le **nombre dérivé** de f en un nombre réel quelconque a .

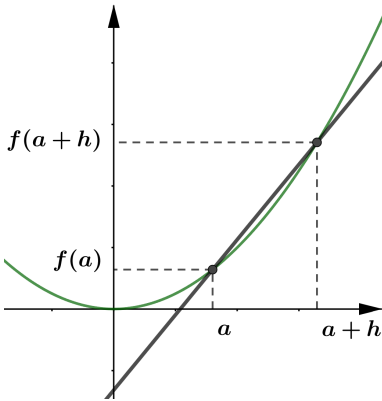


Figure 1: Représentation de $f(x) = x^2$

Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{2ah + h^2}{h}$$

$$= \frac{h \times (2a + h)}{h}$$

$$= 2a + h$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$

Pour tout nombre a , on associe le **nombre dérivé** de la fonction f égal à $2a$.
 On a donc défini sur \mathbb{R} une fonction, notée f' , tel que $f'(x) = 2x$.

Cette fonction s'appelle la **fonction dérivée** de f .

Déf. :

Soit f une fonction définie sur I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel $x \in I$.

Dans ce cas, la fonction qui à tout $x \in I$ associe le **nombre dérivé** de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .



Figure 2: C'est au mathématicien français **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) que l'on doit la notation $f'(x)$ au nom de "dérivée" pour désigner ce concept mathématique.

1.1. Formules de dérivation des fonctions usuelles♥

f	\mathcal{D}_f	f'	$\mathcal{D}_{f'}$
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
avec $a \in \mathbb{R}$			
$f(x) = ax$	\mathbb{R}	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
avec $a \in \mathbb{R}$			
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
avec $n \geq 1$			
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

Ex. :

- Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4$ alors :
 - f est dérivable sur \mathbb{R}
 - On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$
- Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^5}$ alors :
 - f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$
 - On a, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R} - \{0\}$, on a : $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{a(a+h)} \right) \\ &= \frac{-1}{a^2} \end{aligned}$$

Pour tout nombre a , on associe le **nombre dérivé** de f égal à $\frac{-1}{a^2}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, on a : $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Démonstration : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

On calcule le taux de variation de f en 0 :

Pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \right) = +\infty$$

En effet, lorsque $h \rightarrow 0$, $\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \right)$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction **racine carrée** admet une **tangente verticale** en $x = 0$.

2. Opérations sur les fonctions dérivées

2.1. Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Ex. : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + x^2$.

Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{((a+h) + (a+h)^2) - (a + a^2)}{h} \\ &= \frac{a + h + a^2 + 2ah + h^2 - a - a^2}{h} \\ &= \frac{h + 2ah + h^2}{h} = \frac{h(1 + 2a + h)}{h} = 1 + 2a + h \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2a + h) = 1 + 2a.$$

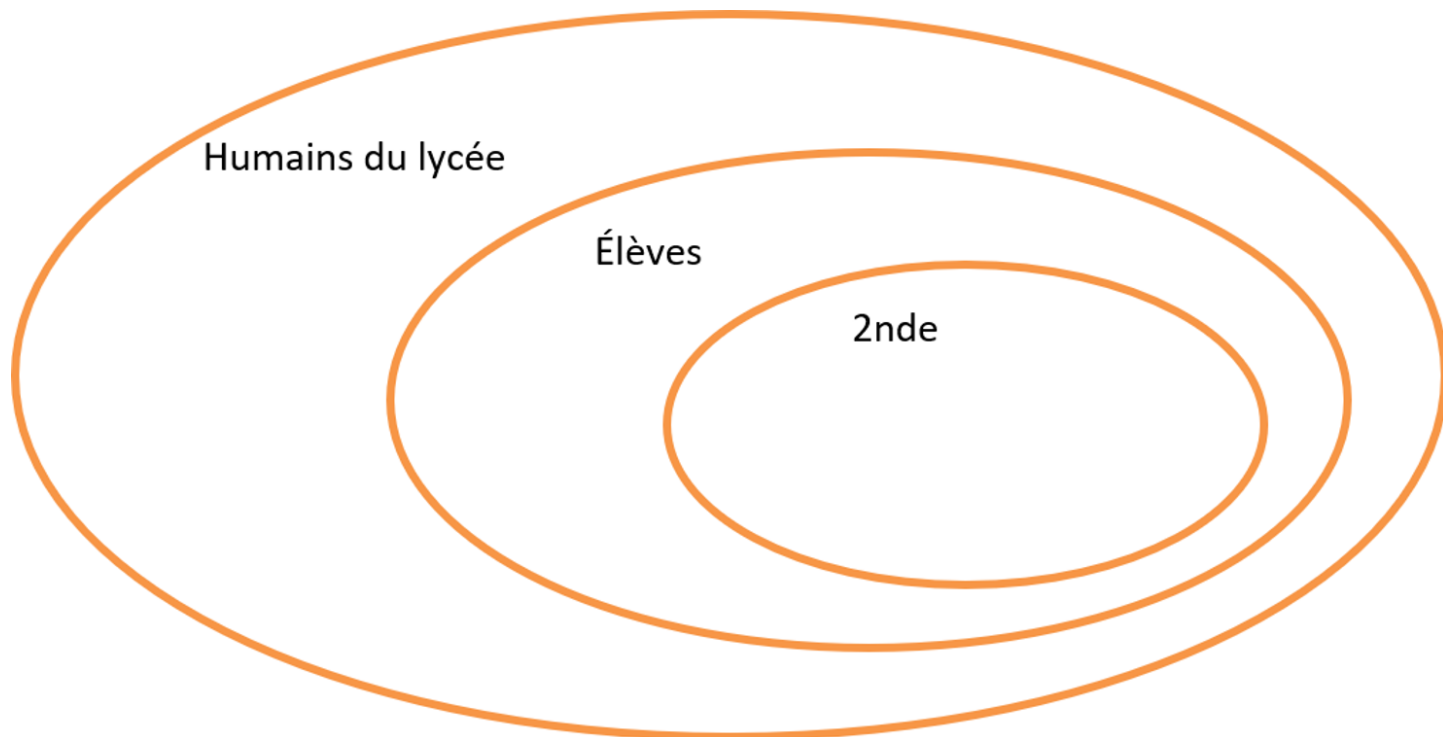
Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2x$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $u(x) = x$
- $v(x) = x^2$

On a ainsi : $f(x) = u(x) + v(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

Figure 3: Représentation de \sqrt{x}

- $u'(x) = 1$
- $v'(x) = 2x$

On constate sur cet exemple que : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Soit encore $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

2.2. Formules d'opération sur les fonctions dérivées♥

u et v sont deux fonctions dérivables sur I .

Dérivabilité	Propriété
$(u + v)$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
(ku) est dérivable sur I avec $k \in \mathbb{R}$	$(ku)' = ku'$
(uv) est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)$ est dérivable sur I Avec u qui ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I Avec v qui ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration pour $(uv)' = u'v + uv'$:

- On veut démontrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \right) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

Calculons $\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h}$

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h) + u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h)}{h} + \frac{u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}
\end{aligned}$$

On a :

- $\lim_{h \rightarrow 0} (u(a+h)) = u(a)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} (v(a+h)) = v(a)$

De plus, on a u et v dérivables sur I donc :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \right) = u'(a)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \right) = v'(a)$

En passant à la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(uv)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times u(a) \right) \\
&= u'(a)v(a) + u(a)v'(a)
\end{aligned}$$

On conclut que $(uv)' = u'v + uv'$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions.

Calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = 5x^3$
 $f_1(x) = 5 \times u(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $u'(x) = 3x^2$
Donc $f_1'(x) = 5 \times u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

$$\boxed{f_1'(x) = 15x^2}$$

- $f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$
 $f_2(x) = 3 \times u(x) + 4 \times v(x)$
avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$$\text{Donc } f_2'(x) = (3 \times u'(x)) + (4 \times v'(x)) = (3 \times 2x) + \left(4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\boxed{f_2'(x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}}$$

- $f_3(x) = \frac{1}{2x^2 + 5x}$
 $f_3(x) = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x$
 $\Rightarrow u'(x) = (2 \times 2x) + (5 \times 1) = 4x + 5$
Donc $f_3'(x) = \frac{u'}{u^2} = \frac{4x + 5}{(2x^2 + 5x)^2}$

$$\boxed{f_3'(x) = \frac{4x + 5}{(2x^2 + 5x)^2}}$$

$$\bullet f_4(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$$

$$f_4(x) = u(x) \times v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = 3x^2 + 4x \\ v(x) = 5x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 6x + 4 \\ v'(x) = 5 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= u'v + uv' \\ &= (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x)(5) \\ &= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x \\ &= 45x^2 + 34x - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_4'(x) = 45x^2 + 34x - 4}$$

$$\bullet f_5(x) = \frac{6x - 5}{x^3 - 2x^2 - 1}$$

$$f_5(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = 6x - 5 \\ v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 6 \\ v'(x) = 3x^2 - 4x \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(6)(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

2.3. Composée de dérivées

f	\mathcal{D}_f	f'
$f(ax + b)$	f dérivable sur I	$af'(ax + b)$

Ex. : $f(x) = \sqrt{5x - 4} = u(5x - 4)$ avec $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = 5 \times u'(5x - 4) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{5x - 4}}$

2.4. Cas de la fonction valeur absolue

Ex. :

- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Déf. : La valeur absolue d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre $-A$ si A est négatif.

La valeur absolue de A se note $|A|$.

$$|A| = \begin{cases} A & \text{si } A \geq 0 \\ -A & \text{si } A \leq 0 \end{cases}$$

Ex. :

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{si } (x - 5) \geq 0 \\ -(x - 5) & \text{si } (x - 5) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 5 & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$$

2.5. Fonction valeur absolue

Déf. :

La fonction valeur absolue

2 4 6 8

1 3 5 7 9

est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$.

Propriété : La fonction **valeur absolue**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

est

:

- strictement **décroissante** sur $] -\infty ; 0]$
- strictement **croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Remarque :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2.6. Étude de la dérivabilité en 0

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$.

Calculons le taux de variation de f en 0 :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

- Si $h > 0 \Rightarrow |h| = h$ donc $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$
- Si $h < 0 \Rightarrow |h| = -h$ donc $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$

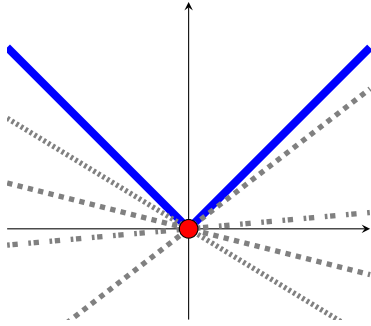
Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Cette limite n'existe pas car elle dépend du signe de h .

La fonction **valeur absolue** n'est donc pas dérivable en 0.

Où placer la tangente en $x = 0$?



Cependant, il est à noter que la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

3. Étude de fonctions

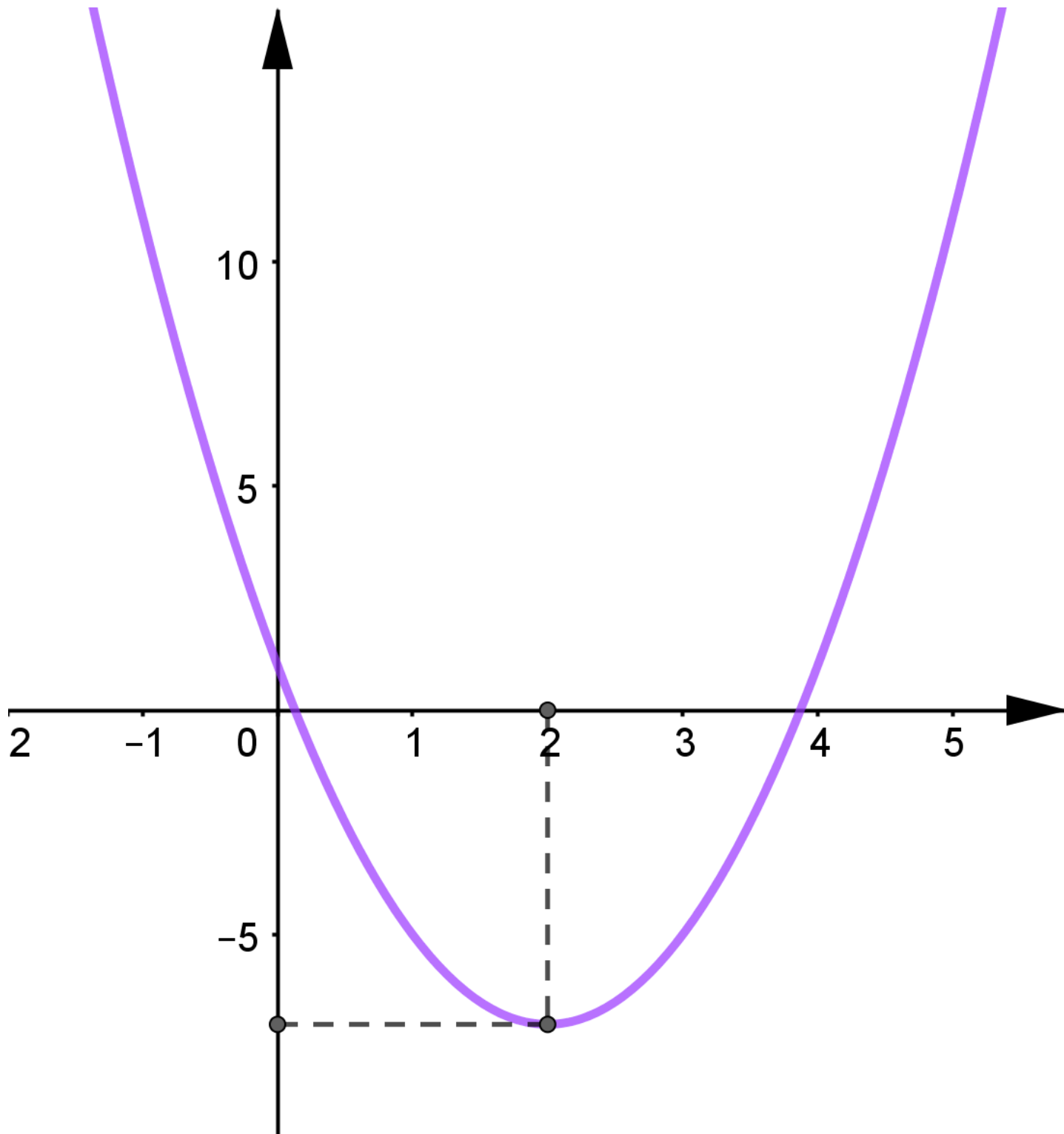
3.1. Variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I .

Ex. : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)$

$$= 2x^2 - 8x +$$



1.

- Calcul de $f'(x)$

f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 4x - 8$

- Signe de f' en fonction de x .

Il faut résoudre $f'(x) > 0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x > 8 \quad \Leftrightarrow x > 2$$

Si $x > 2$ alors $f'(x) > 0$ donc f est **croissante** sur

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$729 = 3^6$$

$$\begin{array}{r|l} 1485 & 3 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$1485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$[2 ; +\infty[$

$$f(2) = 2 \times (2)^2 - 8 \times (2) + 1 = -7$$

La fonction f admet un minimum égal à (-7) en $x = 2$

Ex. : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

• Calcul de $f'(x)$

f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$

• Signe de f' en fonction de x .

Il faut résoudre $f'(x) > 0$

f' étant une fonction du 2nd degré, il faut trouver les racines de $3x^2 + 9x - 12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225 > 0$$

Il existe donc 2 racines :

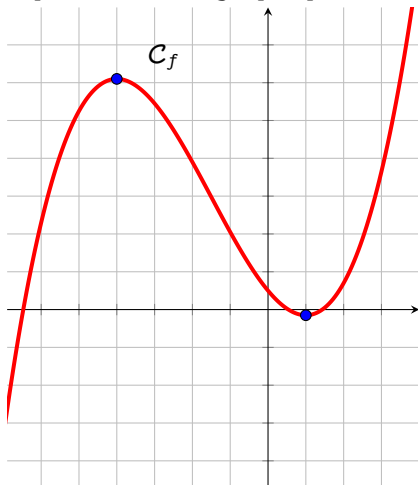
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4 \end{cases}$$

On a : $a = 3 > 0$ donc $f'(x) = (3x^2 + 9x - 12) < 0$ pour $x \in [-4 ; 1]$

• Tableau de variations de f .



Représentation graphique de f



On a :

$$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$$

$$f(1) = (1)^3 + \frac{9}{2} \times (1)^2 - 12 \times (1) + 5 = \frac{-3}{2}$$

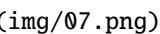
3.2. Extremum d'une fonction

Théorème :

Soit f définie et dérivable sur I et f' sa dérivée.

Si f' s'annule et change de signe en $x = c$ de I alors f admet un **extremum (minimum ou maximum) local** en $x = c$.

Ex. :

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$  (img/07.png)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 10x - 3$

Et $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$

On a : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$

f admet donc un **minimum** en $x = \frac{3}{10}$ égal à $\left(\frac{71}{20}\right)$.

3.3. Position relative de deux courbes

Ex. :

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2 ; +\infty[$ par :

- $f(x) = x^3$
- $g(x) = -5x + 18$

L'étude de la position relative de C_f et de C_g revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$

On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 18$

Pour tout x de $[2 ; +\infty[$, on a : $h'(x) = 3x^2 + 5$

h' est une fonction du 2^{nd} degré :

- $a = 3$, $b = 0$ et $c = 5$
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 3 \times 5 = -60 < 0$

Donc $h'(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$

$h'(x) > 0 \Rightarrow h$ est strictement

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	0	$+\infty$

croissante

sur $[2 ; +\infty[$

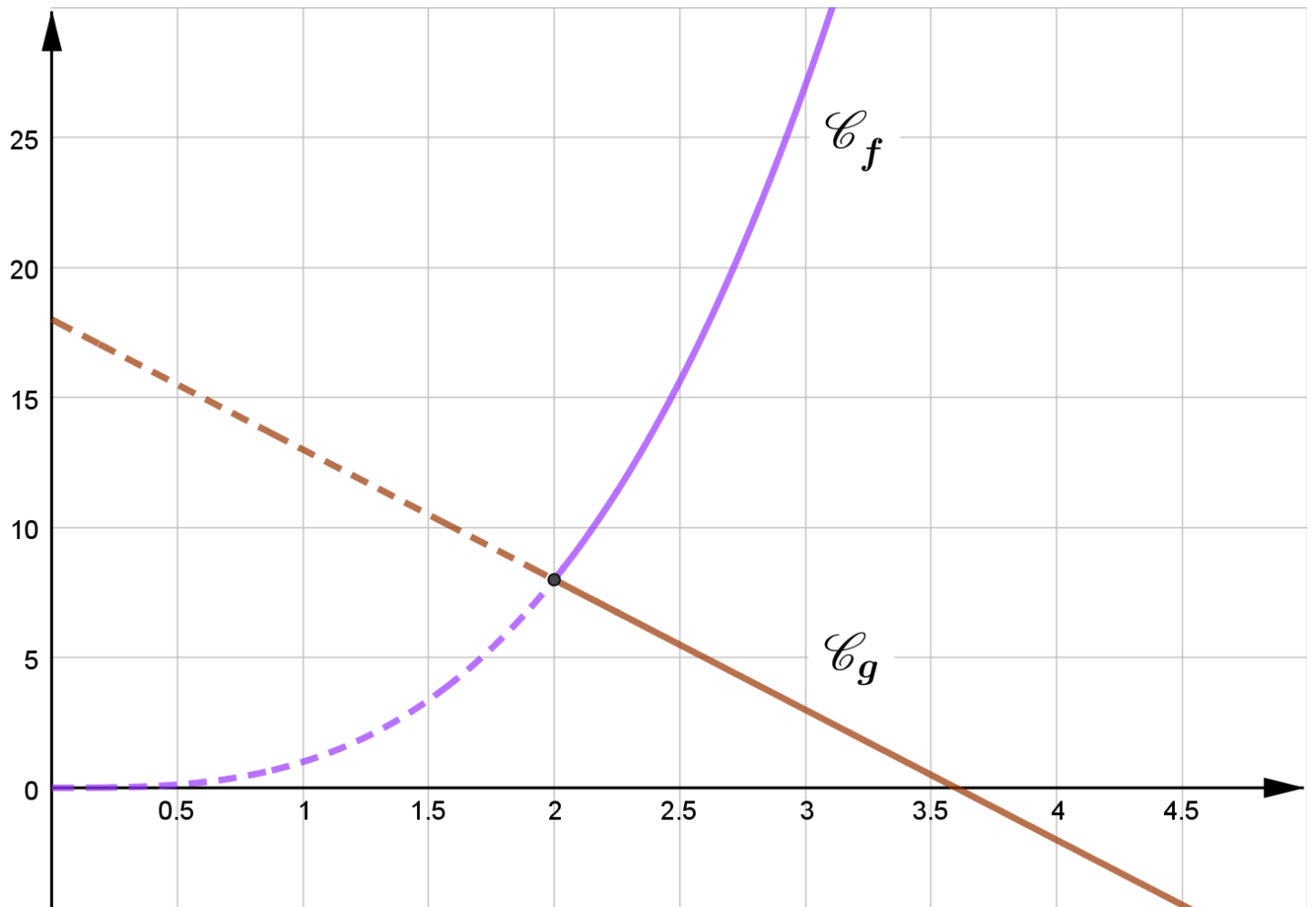
De plus, on a : $h(2) = (2)^3 + 5 \times (2) - 18 = 0$

D'après le tableau de variations, on a $h(x) \geq 0$.

Donc, pour tout $x \in [2 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

On en déduit que C_f est **au-dessus** de C_g sur $x \in [2 ; +\infty[$.

Figure 4: Représentation de f et g