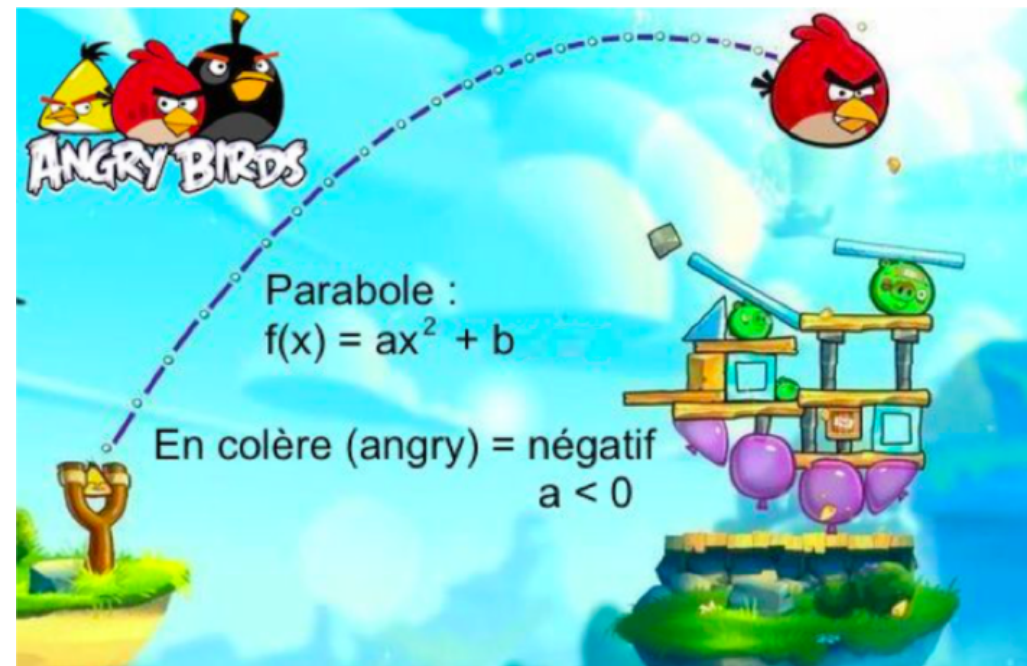




Fonctions du 2nd degré



Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur \mathbb{R} par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients **a**, **b** et **c** sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction **trinôme du second degré** ou par abus de langage "**trinôme**".

Exemples et contre-exemples

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 3$$

👉 Fonction du 2nd degré avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 3$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$$

👉 Fonction du 2nd degré avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -5$ et $c = \frac{3}{5}$

$$h(x) = 4 - 2x^2$$

👉 Fonction du 2nd degré avec $a = -2$, $b = 0$ et $c = 4$

$$k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$$

👉 Fonction du 2nd degré car :

- $(x - 4)(5 - 2x) = 5x - 2x^2 - 20 + 8x$

Donc $k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow a = -2$, $b = 13$ et $c = -20$

$$m(x) = 5x - 3$$

! Fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

$$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$$

! Fonction polynôme de degré 4.

Variations et représentation graphique

Exemple

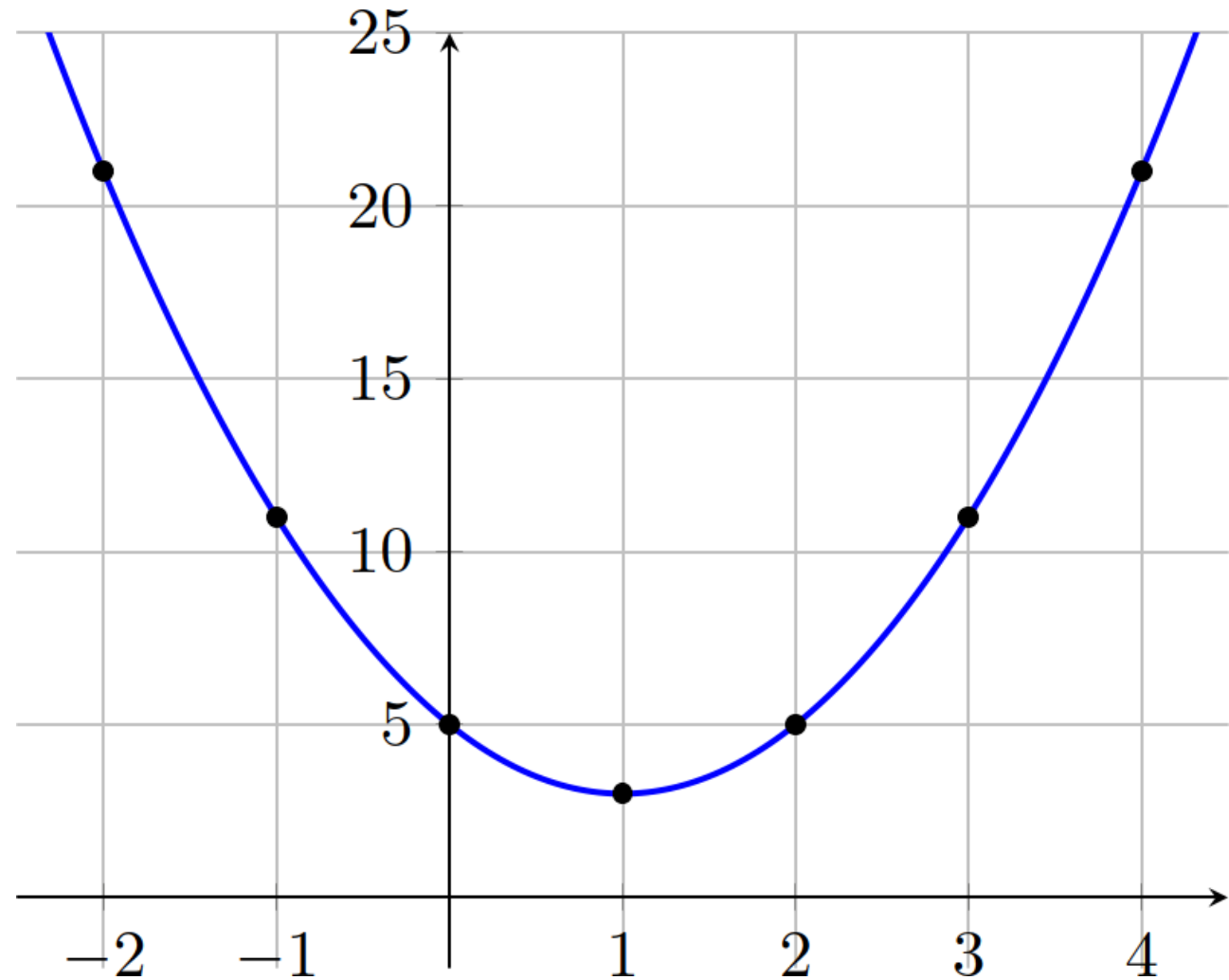
Soit $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Pour représenter f dans un repère, nous pouvons calculer quelques valeurs de $f(x)$.

- $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = 21$
- $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 11$
- $f(0) = 2 \times (0)^2 - 4 \times (0) + 5 = 5$
- ...

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|----|----|---|---|---|----|----|
| $f(x)$ | 21 | 11 | 5 | 3 | 5 | 11 | 21 |

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.



Propriété : Minimum et maximum

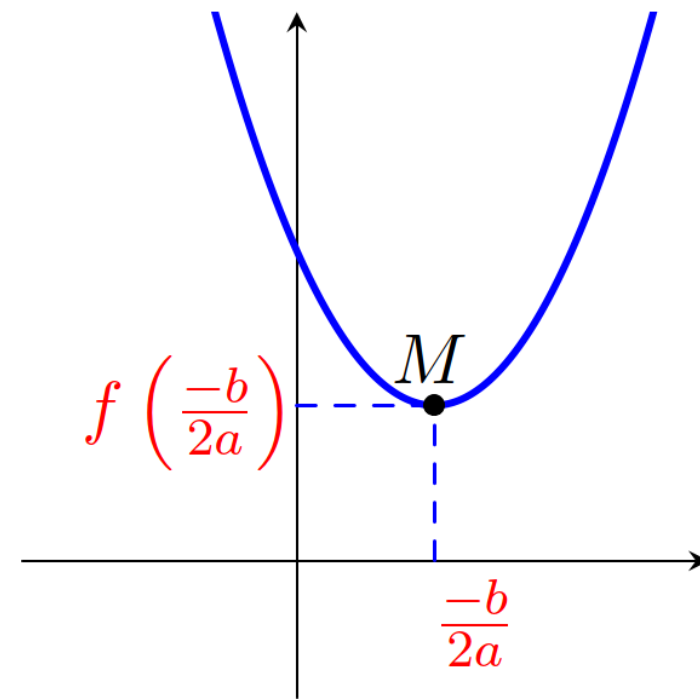
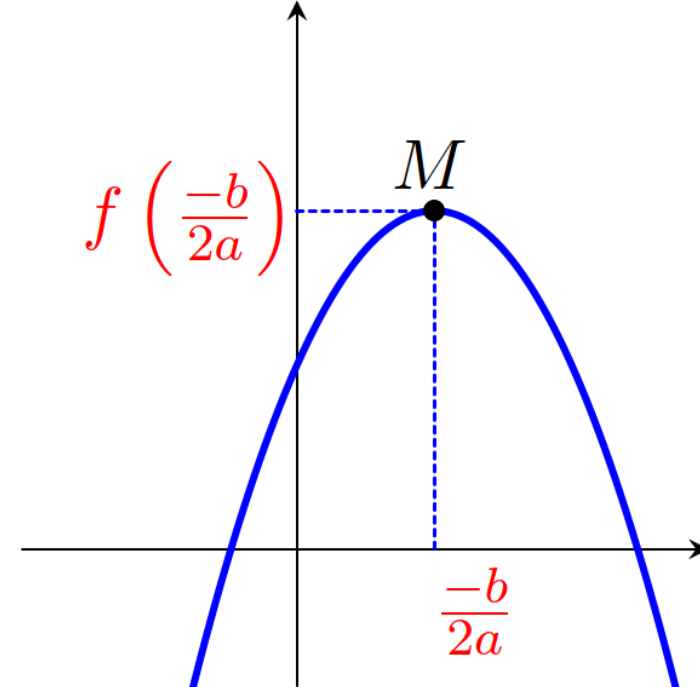
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \frac{-b}{2a}$.
 - Ce **minimum** est égal à $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, f admet un **maximum** pour $x = \frac{-b}{2a}$.
 - Ce **maximum** est égal à $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.



On appelle α la valeur $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ et β la valeur $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

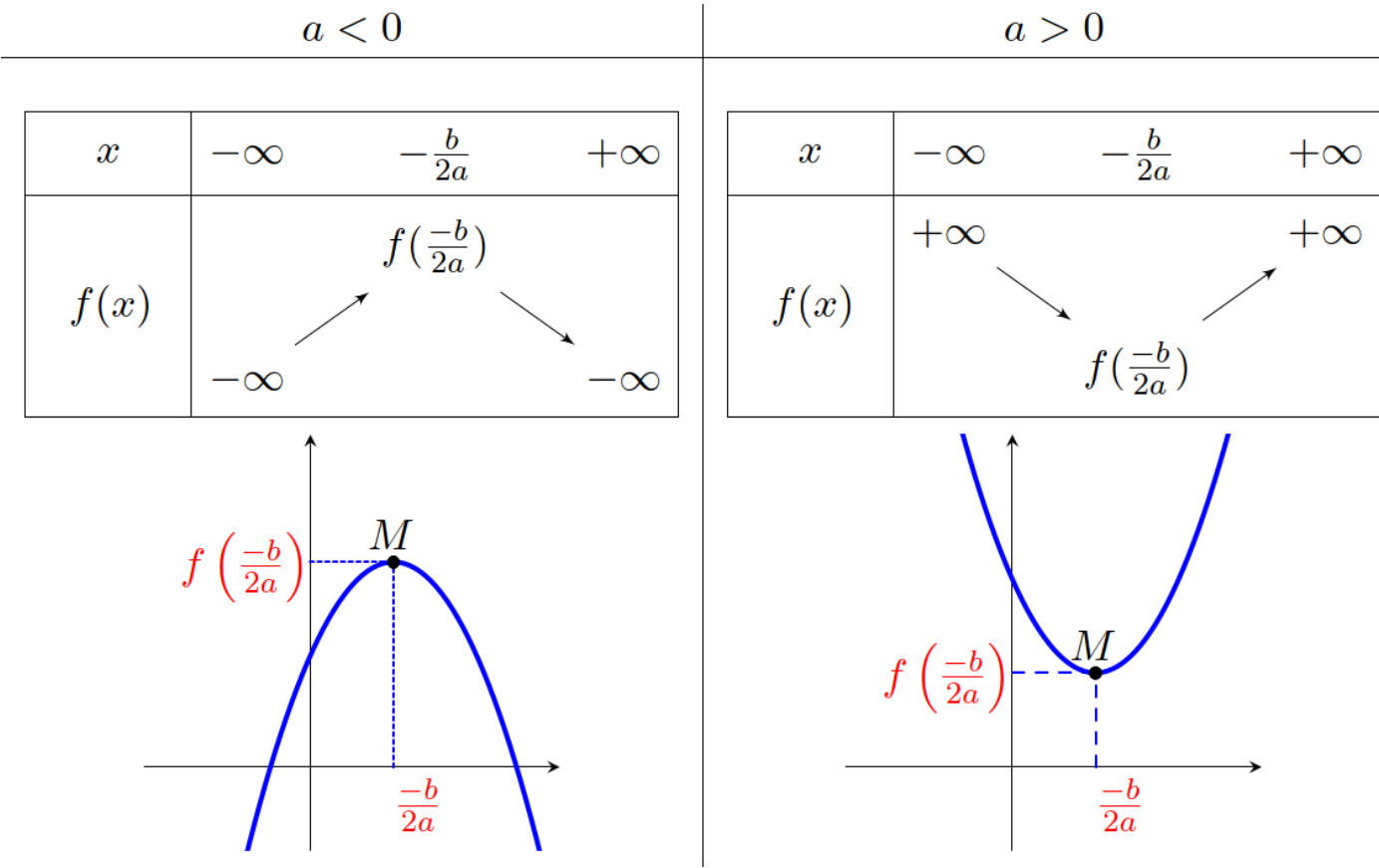
$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$



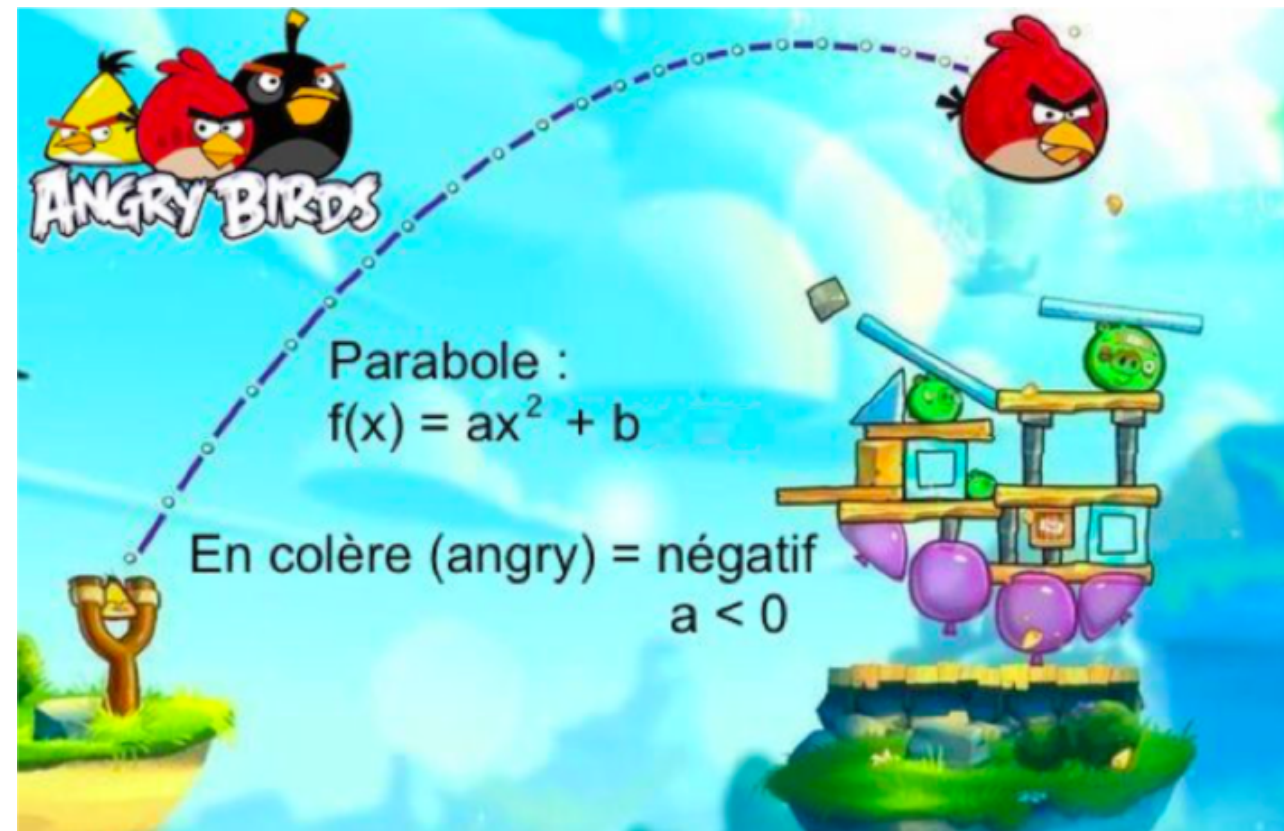


Propriété

Variations de $ax^2 + bx + c$



Il existe un moyen pour se souvenir
du résultat précédent



Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2nd degré

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

On a $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

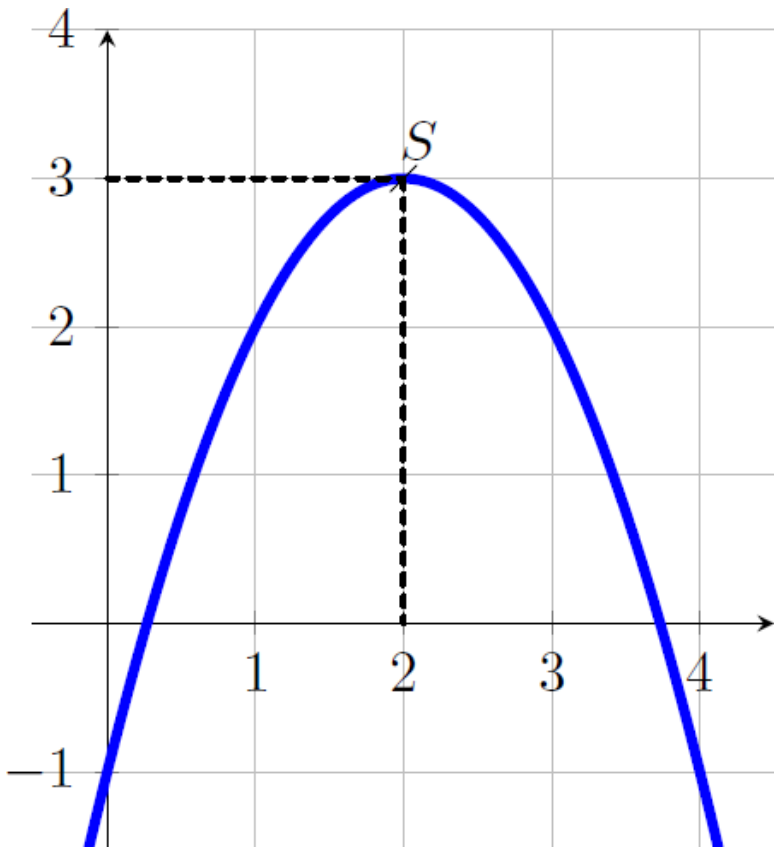
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 1 = 3$$

Le sommet de la parabole est le point $S(2; 3)$.



$a < 0$ donc le tableau de variation de f est :

| | | | |
|--------|-----------|-----|-----------|
| x | $+\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 3 | $-\infty$ |



Forme factorisée

Il se peut que le polynôme du 2nd degré ne se présente pas sous la forme **developpée** mais sous une forme **factorisée** comme par exemple :

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)(x - 2) \\ &= x^2 - 2x - 1x + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2 \quad \Rightarrow a = 1, b = -3 \text{ et } c = 2 \end{aligned}$$

Définition

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} tel que :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

f est la forme **factorisée** d'une fonction du 2nd degré.

x_1 et x_2 sont les **racines** de f

Remarque

les racines de f sont solutions de l'équation $f(x) = 0$.

- $f(x_1) = a(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) = 0$
- $f(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = 0$

Exemples

$$f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$$

$$f(x) = 3(x - 1)(x - (-2))$$

f est une fonction du 2nd degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

$$f(x) = (2x - 6)(x - 12)$$

Pour faire apparaître la forme factorisée il faut modifier l'écriture de $(2x - 6)$

$$(2x - 6) = 2(x - 3) \text{ donc } f(x) = 2(x - 3)(x - 12)$$

f est une fonction du 2nd degré avec $a = 2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 12$

$$f(x) = (3 - x)(2x + 1)$$

On a $(3 - x) = -(x - 3)$ et $(2x + 1) = 2 \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Donc $f(x) = -(x - 3) \times 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) = -2(x - 3) \left(x + \frac{1}{2}\right)$

f est une fonction du 2nd degré avec $a = -2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

Propriété : Racines de $f(x)$

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et x_1, x_2 les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Alors la forme **factorisée** de f est : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple

$$f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$$

f est une fonction du 2nd degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

$$\text{D'autre part, } f(x) = 3(x^2 + 2x - 1x - 2) = 3x^2 + 3x - 6$$

Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ sont solutions de l'équation $3x^2 + 3x - 6 = 0$

Résolution d'équations du 2nd degré

Résoudre une équation du 2nd degré, c'est résoudre une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Définition : Discriminant

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété : Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple

On cherche à résoudre $2x^2 - x - 6 = 0$

Calculons le discriminant :

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

| Calcul de x_1 | Calcul de x_2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\&= \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} \\&= -\frac{3}{2}\end{aligned}$ | $\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\&= \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} \\&= 2\end{aligned}$ |

Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ sont $S = \left\{ -\frac{3}{2} ; 2 \right\}$

Exemple

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$$

Calculons le discriminant :

$$a = 2, b = -3 \text{ et } c = \frac{9}{8} \text{ donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Exemple

$$x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$a = 1, b = 3 \text{ et } c = 10 \text{ donc}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété

La somme S et le produit P des **racines** d'un polynôme du 2nd degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par :

$$S = -\frac{b}{a} \quad P = \frac{c}{a}$$

Démonstration

Soit x_1 et x_2 les solutions de $x^2 + bx + c = 0$ alors

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc, la somme des **racines** est $S = x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta}) + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Le produit des racines est $P = x_1 \times x_2$:

$$\begin{aligned} P &= x_1 \times x_2 \\ &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta}) \times (-b + \sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} \\ &= \frac{(-b)^2 + ((-b) \times \sqrt{\Delta}) + ((-\sqrt{\Delta}) \times (-b)) + ((-\sqrt{\Delta}) \times \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Propriété : Forme factorisée de $ax^2 + bx + c$

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque

Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f .

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser le trinôme suivant : $4x^2 + 19x - 5$

On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$

On a $a = 4$, $b = 19$ et $c = -5$ donc

$$\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$$

Les racines du trinôme sont :

| Calcul de x_1 | Calcul de x_2 |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $x_1 = \frac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4}$ $= -5$ | $x_2 = \frac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4}$ $= \frac{1}{4}$ |

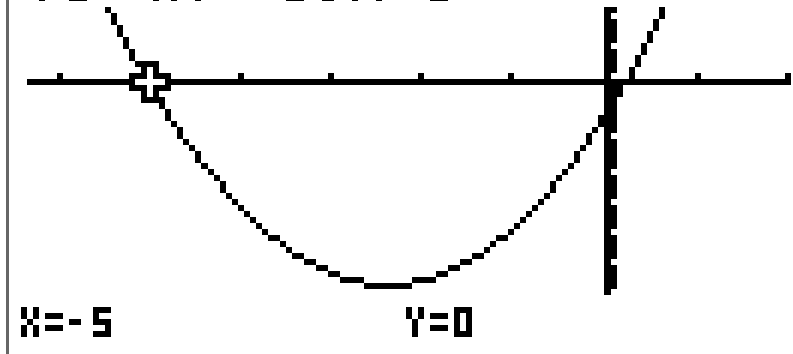
On a donc :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 19x - 5 &= 4(x - (-5)) \left(x - \frac{1}{4}\right) \\ &= 4(x + 5) \left(x - \frac{1}{4}\right) = (x + 5)(4x - 1) \end{aligned}$$

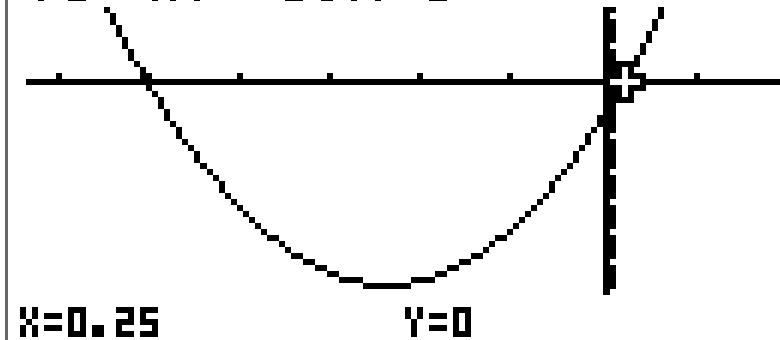
Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile ! On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

 x_1

$$Y1=4X^2+19X-5$$

 x_2

$$Y1=4X^2+19X-5$$



Exemple

Factoriser le trinôme suivant : $9x^2 - 6x + 1$

On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$

On a $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$ donc $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times (1) = 0$

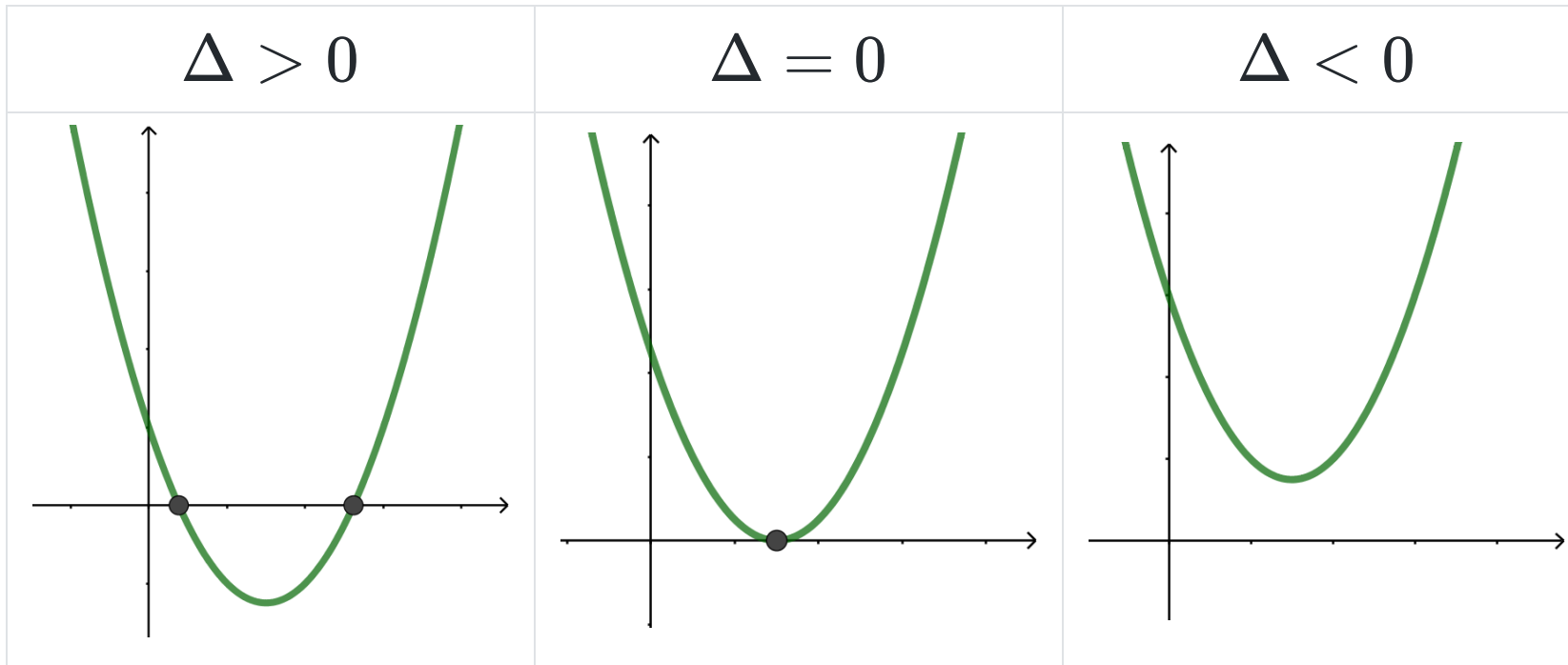
La racine du trinôme est : $x_0 = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$

On a donc : $9x^2 - 6x + 1 = 9 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2$

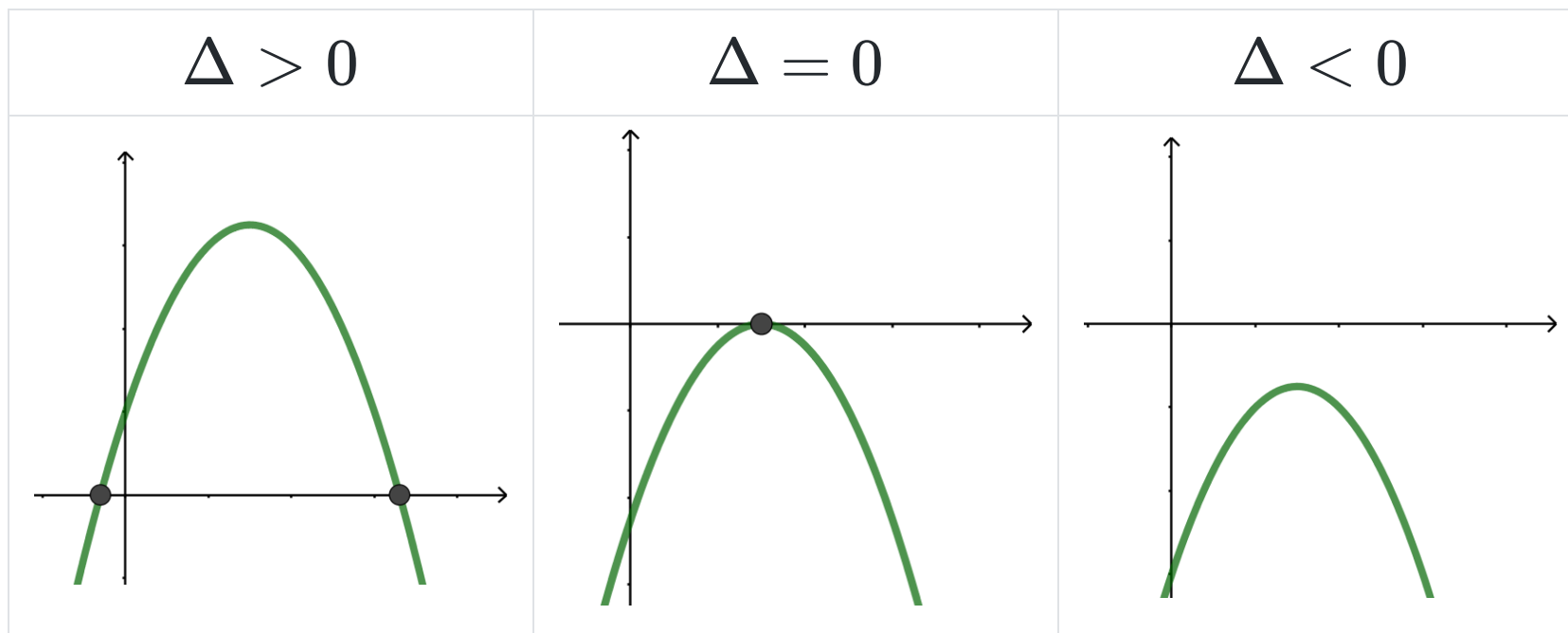
Propriété : Les différentes représentations possibles de f

En fonction du signe de a et de Δ , nous pouvons en déduire les représentations de f .

Pour $a > 0$



Pour $a < 0$



Forme canonique

Définition : Forme canonique

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f .

Exemple

$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ est une fonction du 2nd degré sous forme **canonique** avec $a = 2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

En effet,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - 1)^2 + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Donc $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction du 2nd degré

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\ &= 2[x^2 - 10x] + 10 \\ &= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10 \\ &= 2[(x - 5)^2 - 25] + 10 \\ &= 2(x - 5)^2 - 50 + 10 \\ &= 2(x - 5)^2 - 40 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$

$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$ est la forme **canonique** de f .

Démonstration

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x \right] + c$$

$$= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Remarque

Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β .

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction du 2nd degré

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

On a $a = 2$, $b = -20$ et $c = 10$ donc

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-20}{2 \times 2} = 5\end{aligned}$$

Calculons β :

$$\begin{aligned}\beta &= f(\alpha) \\ &= 2 \times 5^2 - 20 \times 5 + 10 \\ &= 50 - 100 + 10 = 40\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$ donc $f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$

Exemple

Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

On a :

$$(x - 1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 + 3 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 3$$

Or $f(1) = 3$ donc $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en $x = 1$. Ce minimum est égal à 3.

Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β .
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β .

Remarque

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\frac{b}{2a}$

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Déterminons l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation

$$y = 2x^2 - 12x + 1$$

La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$$

La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole.

Les coordonnées de son sommet sont

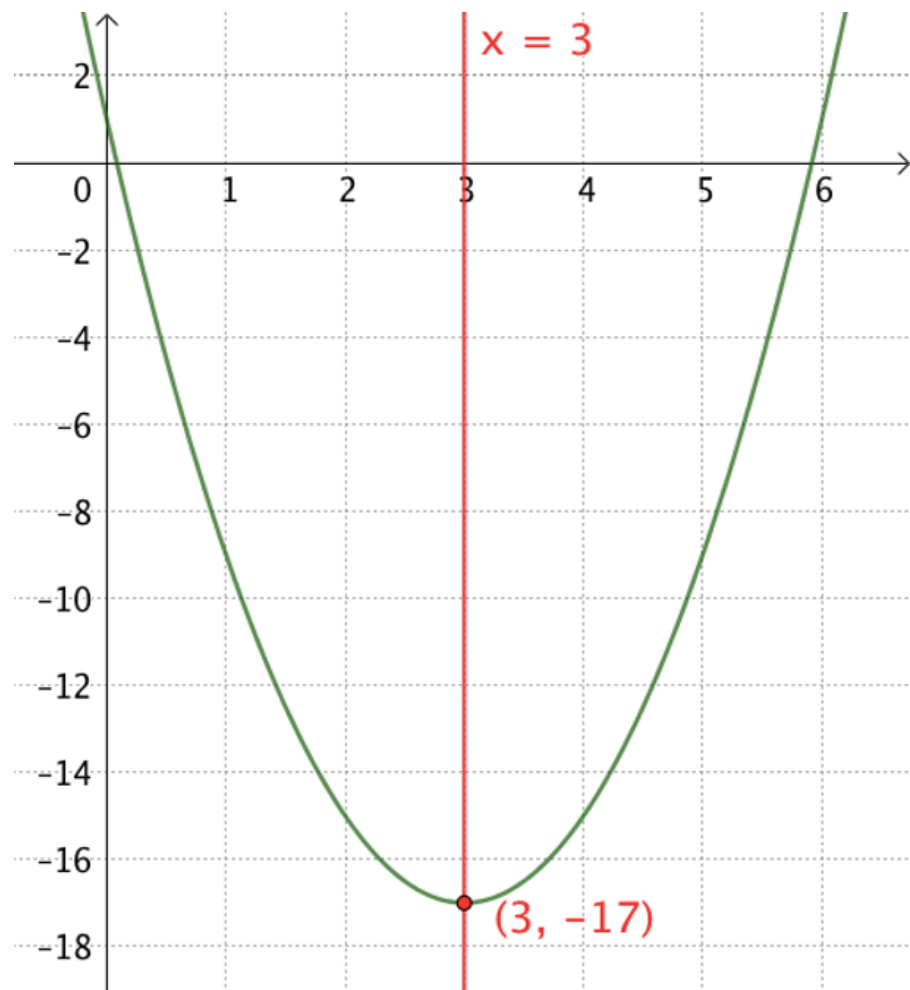
$$\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right)$$

Soit :

$$(3 ; 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 1) = (3 ; -17)$$

Le point $(3 ; -17)$ est le sommet de la parabole.

$a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.



Démonstration : Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Donc :

$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{car } a \neq 0$$

- Si $\Delta < 0$:

Comme un carré ne peut être négatif ($\frac{\Delta}{4a^2} < 0$), l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$:

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

| Solution n°1 | Solution n°2 |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ | $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ |
| $x = +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$ | $x = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$ |
| $x = \frac{+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$ | $x = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$ |
| $x = \frac{+\sqrt{\Delta} - b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x = \frac{-\sqrt{\Delta} - b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ |

L'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$