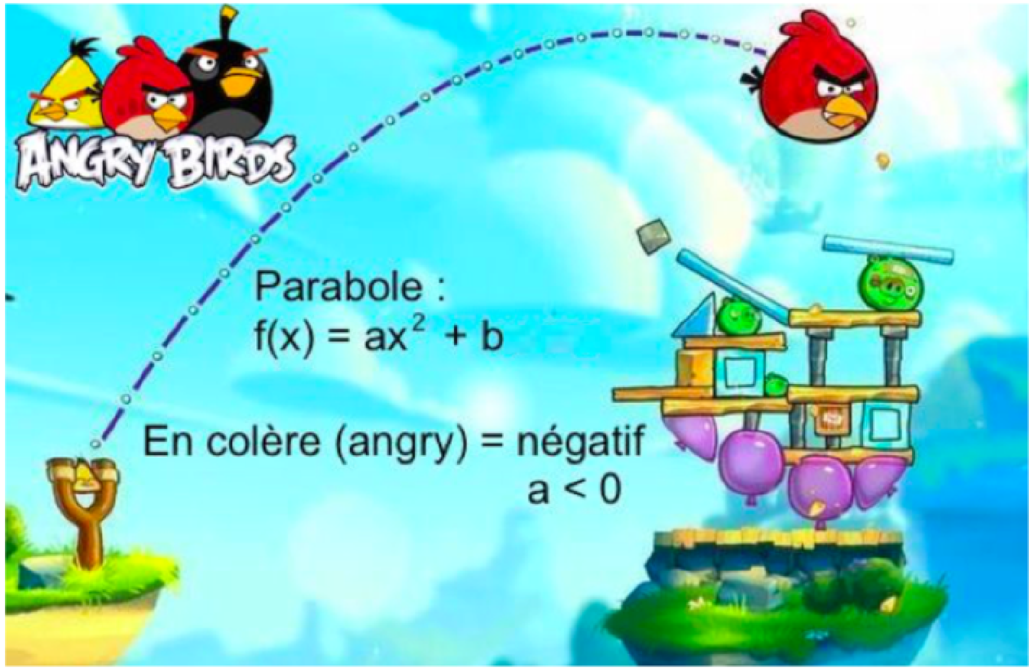
Fonctions du 2^{nd} degré



Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients **a**, **b** et **c** sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction **trinôme du second degré** ou par abus de langage "**trinôme**".

Exemples et contre-exemples

$$f\left(x\right)=3x^2-7x+3$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré avec $a=3$, $b=-7$ et $c=3$

$$g\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-5x+\frac{3}{5}$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré avec $a=\frac{1}{2}$, $b=-5$ et $c=\frac{3}{5}$

$$h\left(x\right)=4-2x^2$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré avec $a=-2$, $b=0$ et $c=4$

$$k\left(x\right)=\left(x-4\right)\left(5-2x\right)$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré car :
>
> - $(x-4)(5-2x)=5x-2x^2-20+8x$
>
> Donc $k(x)=-2x^2+13x-20\Rightarrow a=-2$, $b=13$ et $c=-20$

$$m(x) = 5x - 3$$

> 👉 Fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

$$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$$

> 👉 Fonction polynôme de degré 4.

Variations et représentation graphique

Exemple

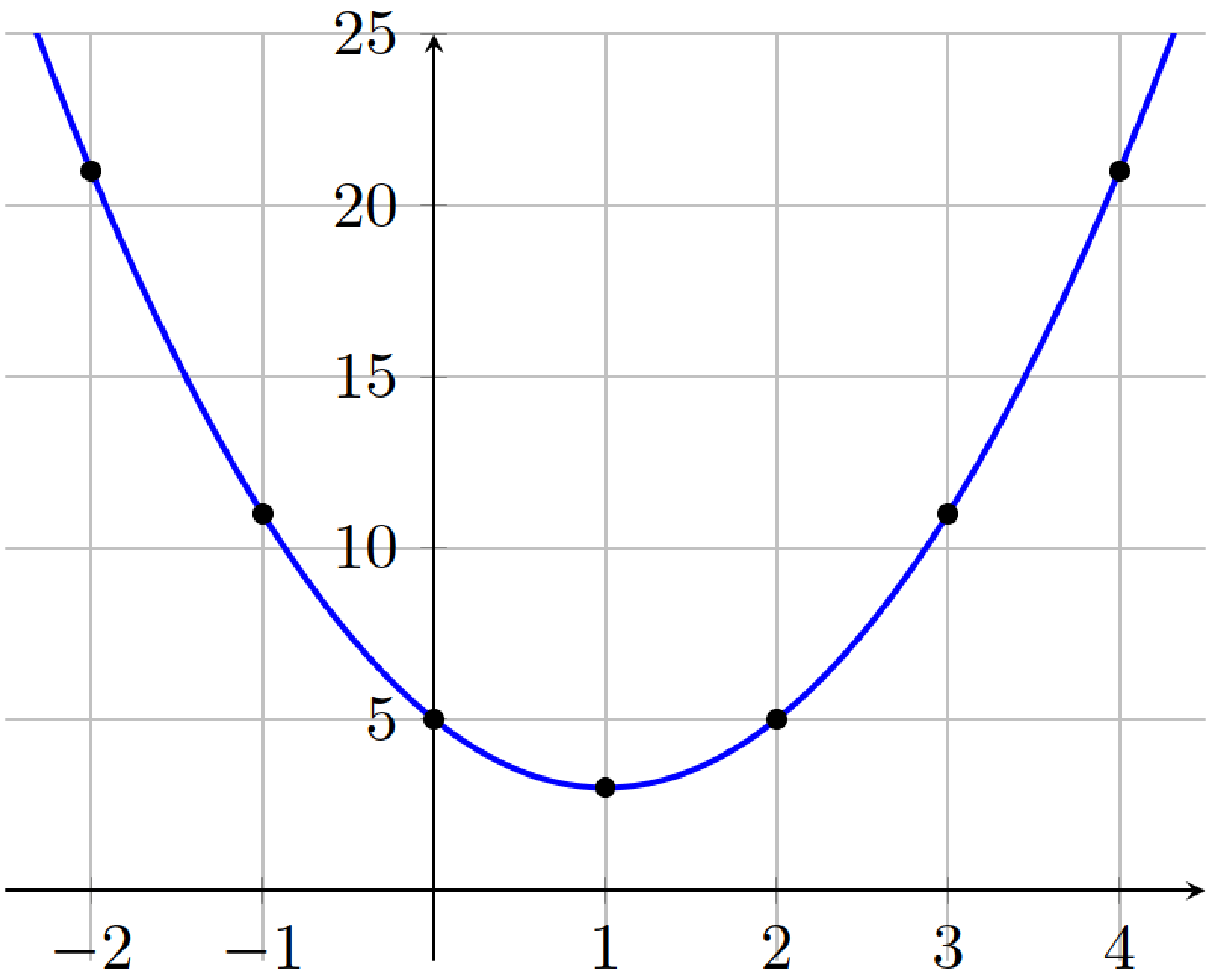
Soit $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Pour représenter f dans un repère, nous pouvons calculer quelques valeurs de $f(x)$.

- $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = 21$
- $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 11$
- $f(0) = 2 \times (0)^2 - 4 \times (0) + 5 = 5$
- $\ldots$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.



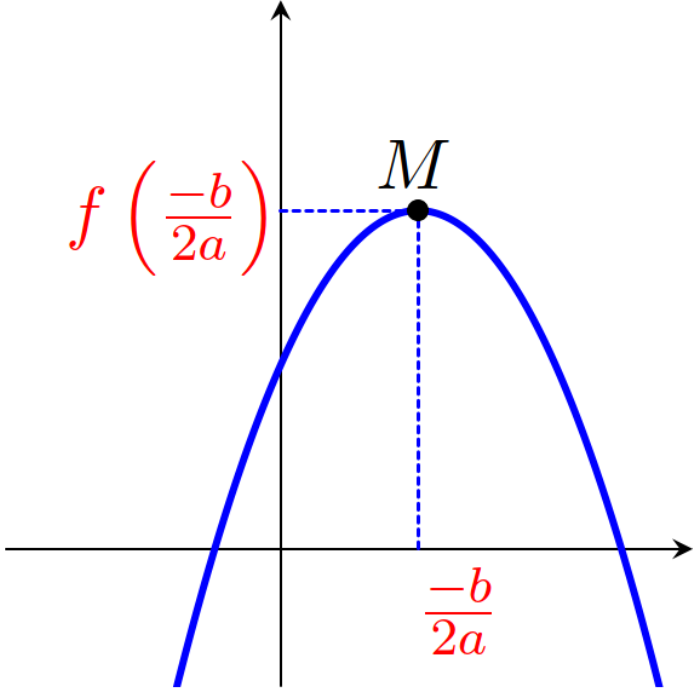
Propriété : Minimum et maximum

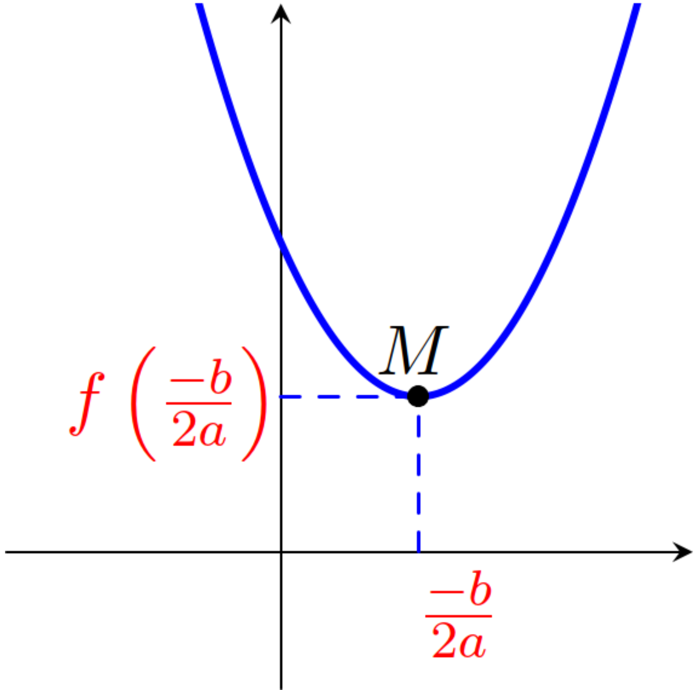
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.
    - Ce **minimum** est égal à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, f admet un **maximum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.
    - Ce **maximum** est égal à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

On appelle α la valeur $\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ et β la valeur $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

$$\boxed{\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$$



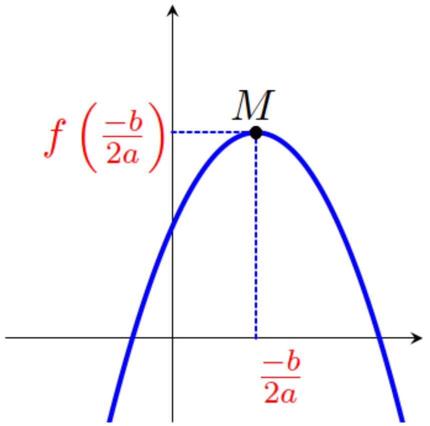


Propriété

Variations de $ax^2 + bx + c$

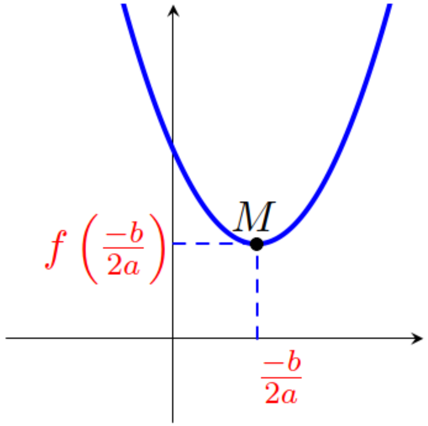
$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

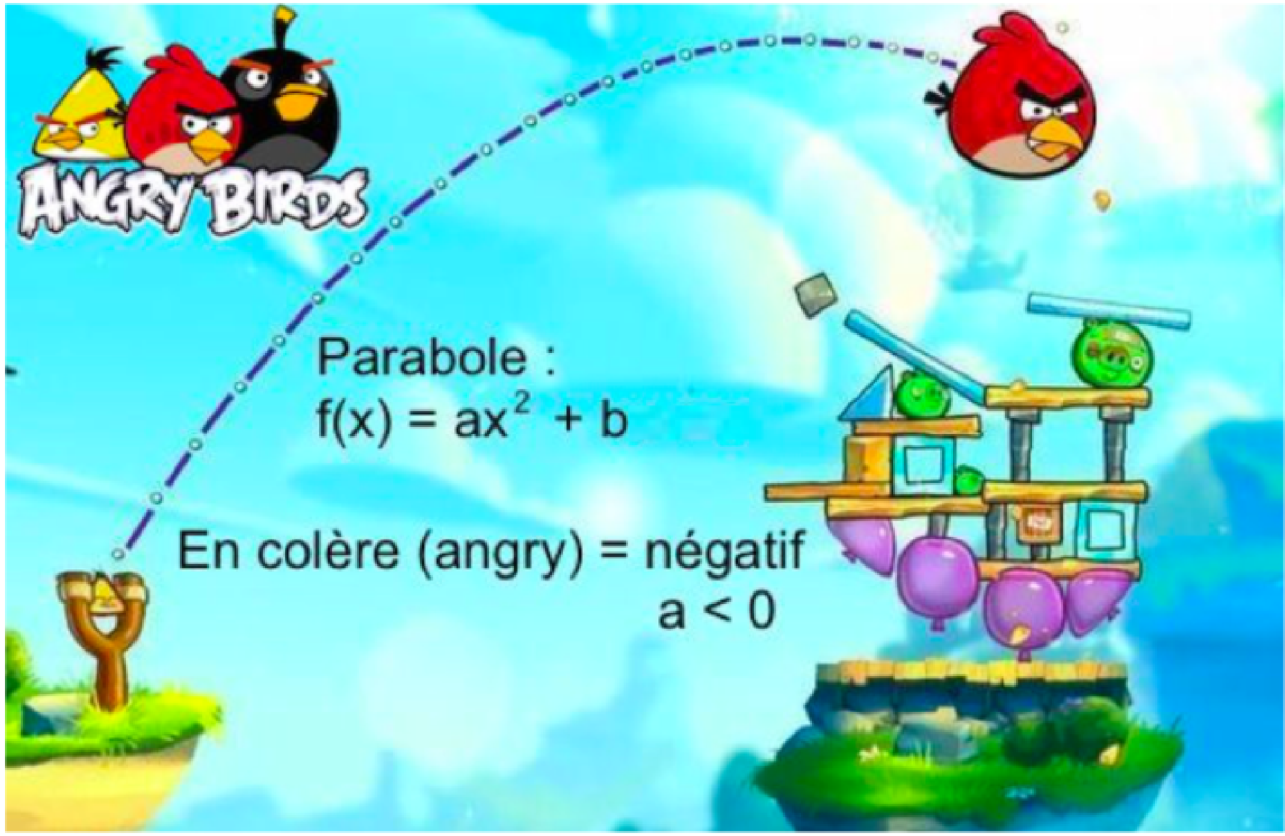


$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$



Il existe un moyen pour se souvenir du résultat précedent :



Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2^nd^ degré

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = -x^2 + 4x - 1$.

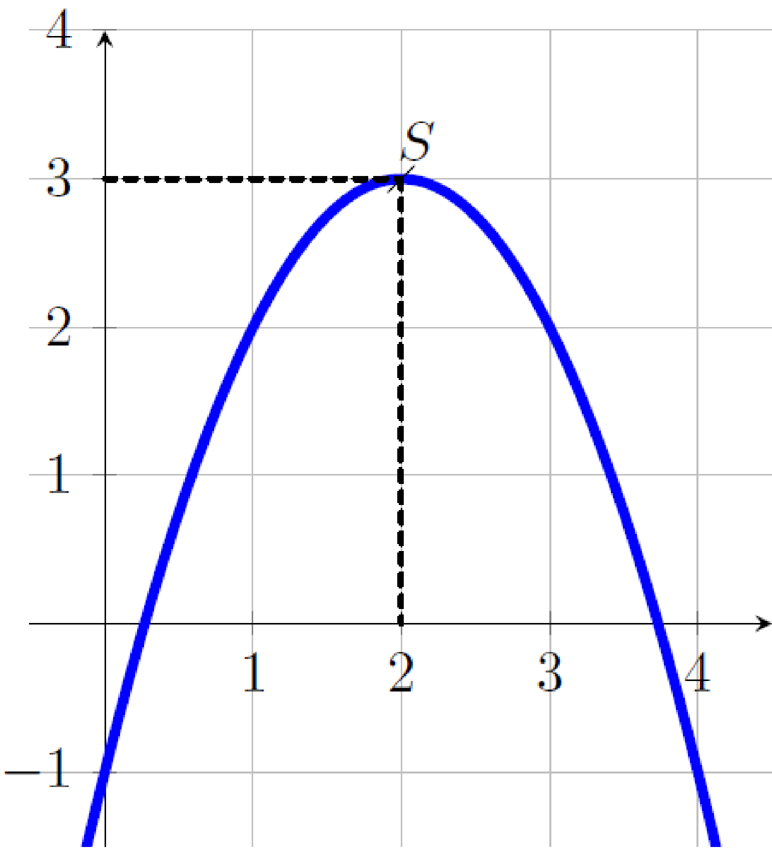
On a $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 1 = 3$$

Le sommet de la parabole est le point $S(2;3)$.

$a < 0$ donc le tableau de variation de f est :

x	$+\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$			3		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$



Et sa représentation graphique est :

A FINIRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR

```
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,x=1.0cm,y=1.0cm]
\begin{axis}[x=1.0cm,y=1.0cm,axis
lines=middle,ymajorgrids=true,xmajorgrids=true,xmin=-0.5,xmax=4.5,ymin=-1.5,ymax=
4.0,xtick={-0.0,1.0,...,4.0},ytick={-1.0,0.0,...,4.0},]
\clip(-0.5,-1.5) rectangle (4.5,4.);
\draw[line width=2.pt,color=blue,smooth,samples=100,domain=-0.5:4.5] plot(\x,{0-
(\x)^(2.0)+4.0*(\x)-1.0});
\draw [line width=1.pt,dash pattern=on 2pt off 2pt] (0.,3.)-- (2.,3.);
\draw [line width=1.pt,dash pattern=on 2pt off 2pt] (2.,3.)-- (2.,0.);
\begin{scriptsize}
\draw [color=black] (2.,3.)-- ++(-2.5pt,-2.5pt) -- ++(5.0pt,5.0pt) ++(-5.0pt,0) -- ++
(5.0pt,-5.0pt);
\draw[color=black] (2.0951127605442115,3.252050267803505) node {$S$};
\end{scriptsize}
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

les **racines** de f sont solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$f(x_1) = a(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) = 0$ et $f(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = 0$.

Exemples {-}

(1) $f(x) = 3(x-1)(x+2)$

> $f(x) = 3(x-1)\,(x-(-2))$

> f est une fonction du 2^nd^ degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

(2) $f(x) = (2x-6)(x-12)$

> Pour faire apparaître la forme factorisée il faut modifier l'écriture de $(2x-6)$

> $(2x-6) = 2(x-3)$ donc $f(x) = 2(x-3)(x-12)$

> f est une fonction du 2^nd^ degré avec $a = 2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 12$

(3) $f(x) = (3-x)(2x+1)$

\begin{center}

$$S = -\frac{b}{a}$$\quad et\quad $$P = \frac{c}{a}$$

\end{center}

Démonstration {-}

Soit x_1 et x_2 les solutions de $x^2 + bx + c = 0$ alors $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc, la somme des **racines** est $S = x_1 + x_2$:

$$S = x_1 + x_2$$
$$= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) + (-b+\sqrt{\Delta})}{2a}$$

$$-2b \quad -b$$

> $a < 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
{width="5cm"}	{width="5cm"}	{width="5cm"}

> $$\beta = f(\alpha)$$
> $$= 2 \times 5^2 - 20 \times 5 + 10$$
> $$= 50 - 100 + 10 = 40$$

> On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$ donc $f(x) = 2(x-5)^2 - 40$

Exemple : {-}

Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2(x-1)^2$ est positif.

Or $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en $x = 1$. Ce minimum est égal à 3.

Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec