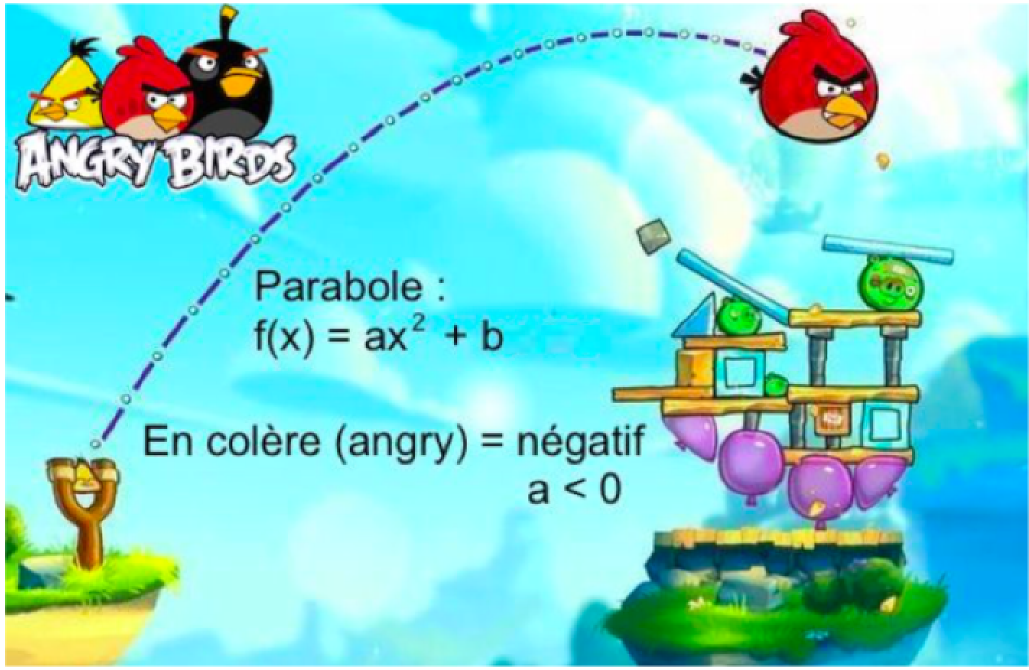
Fonctions du 2^{nd} degré



Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f\left(x\right)=ax^2+bx+c$$

où les coefficients **a**, **b** et **c** sont des réels donnés avec $a\neq 0$.

Remarque

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction **trinôme du second degré** ou par abus de langage "**trinôme**".

Exemples et contre-exemples

$$f\left(x\right) = 3x^2 - 7x + 3$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 3$

$$g\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -5$ et $c = \frac{3}{5}$

$$h\left(x\right) = 4 - 2x^2$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré avec $a = -2$, $b = 0$ et $c = 4$

$$k\left(x\right) = \left(x - 4\right)\left(5 - 2x\right)$$

> 👉 Fonction du 2^{nd} degré car :
>
> - $(x - 4)(5 - 2x) = 5x - 2x^2 - 20 + 8x$
>
> Donc $k(x) = -2x^2 + 13x - 20 \Rightarrow a = -2$, $b = 13$ et $c = -20$

$$m(x) = 5x - 3$$

> ⚠️ Fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

$$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$$

> ⚠️ Fonction polynôme de degré 4.

Variations et représentation graphique

Exemple

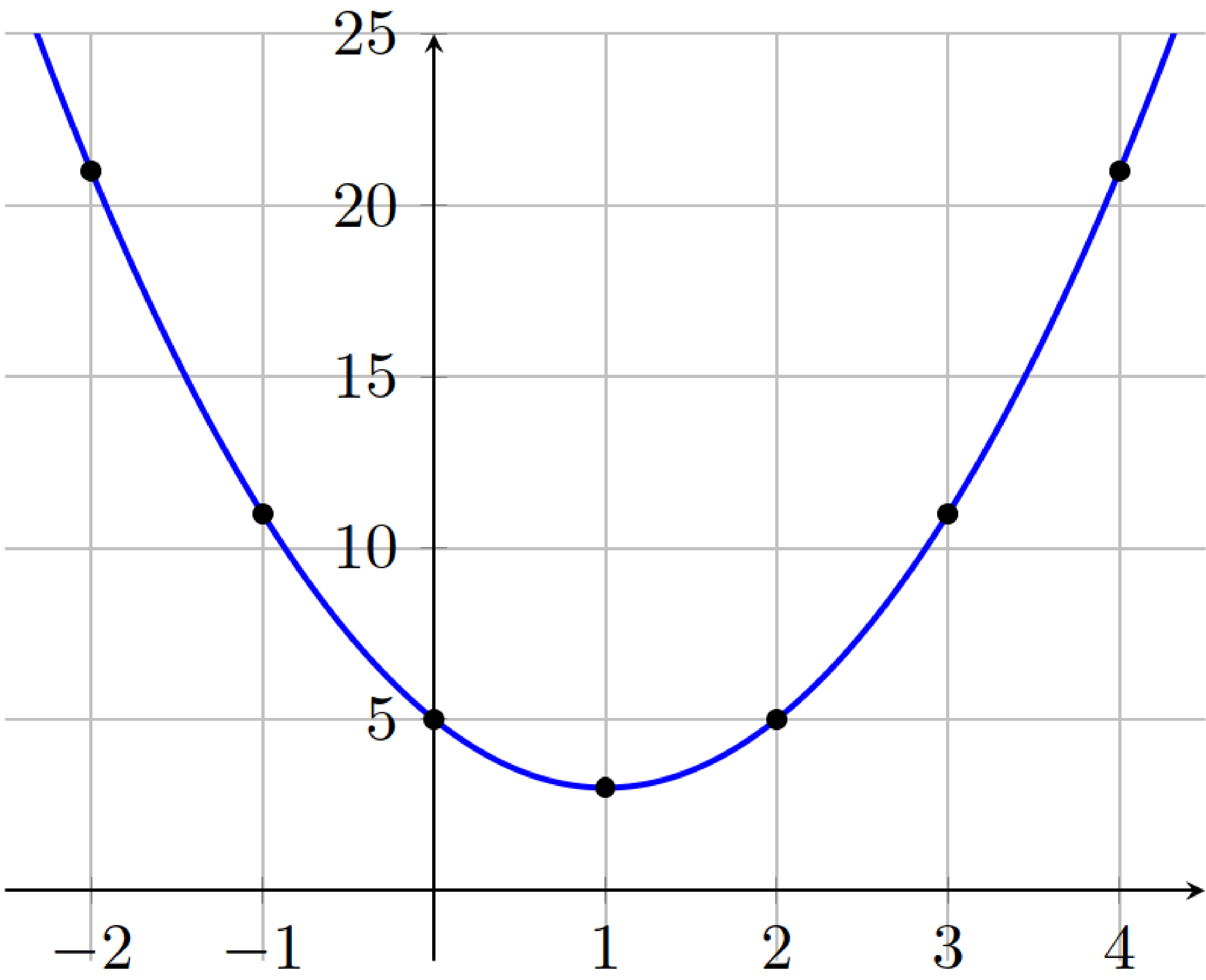
Soit $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Pour représenter f dans un repère, nous pouvons calculer quelques valeurs de $f(x)$.

- $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = 21$
- $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 5 = 11$
- $f(0) = 2 \times (0)^2 - 4 \times (0) + 5 = 5$
- $\dots$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.



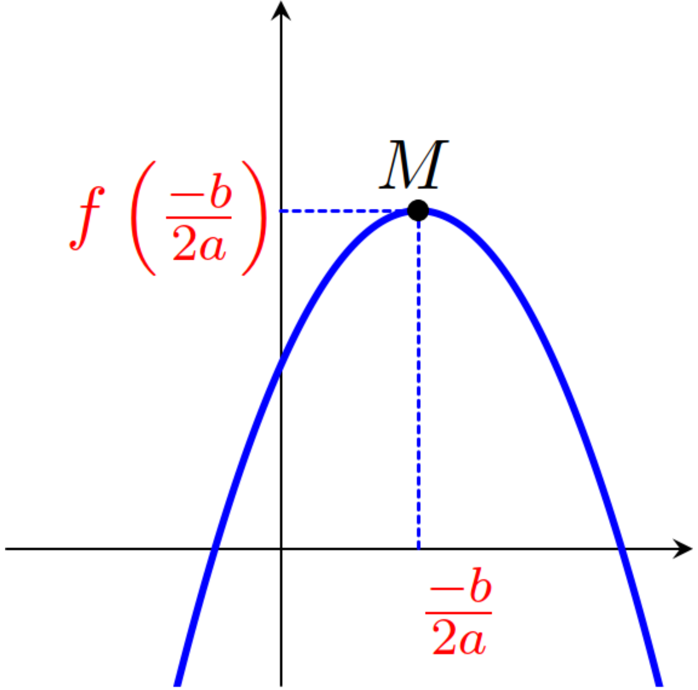
Propriété : Minimum et maximum

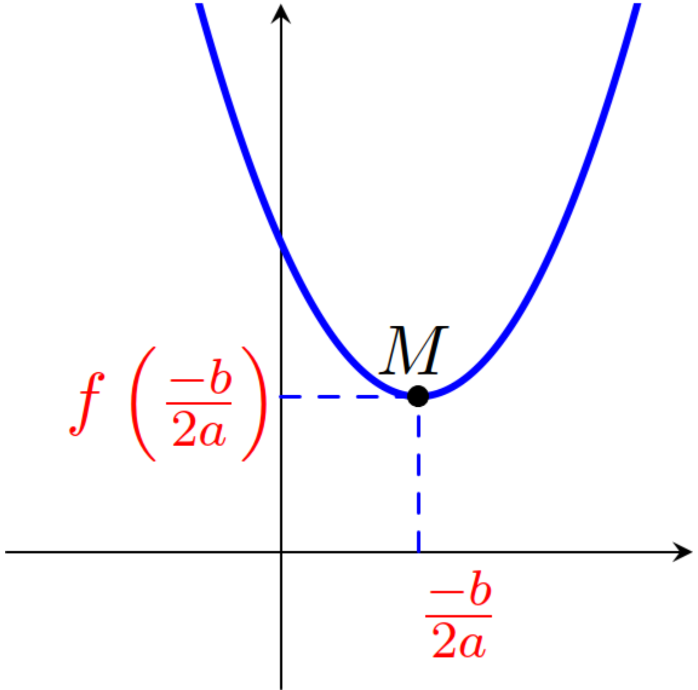
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Ce **minimum** est égal à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, f admet un **maximum** pour $x = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Ce **maximum** est égal à $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

On appelle α la valeur $\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ et β la valeur $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

$$\boxed{\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$$



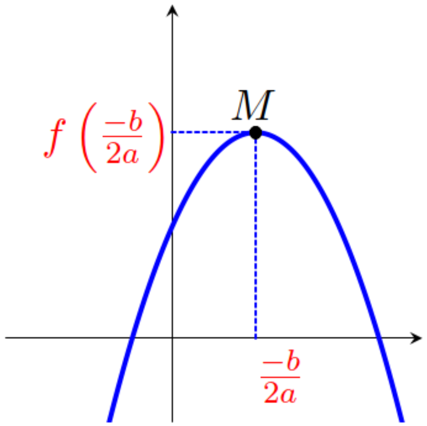


Propriété

Variations de $ax^2 + bx + c$

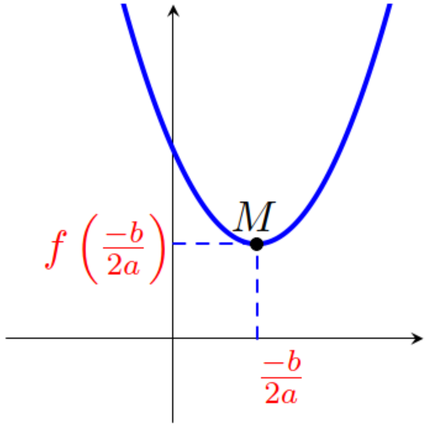
$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\frac{-b}{2a})$	↘ $-\infty$

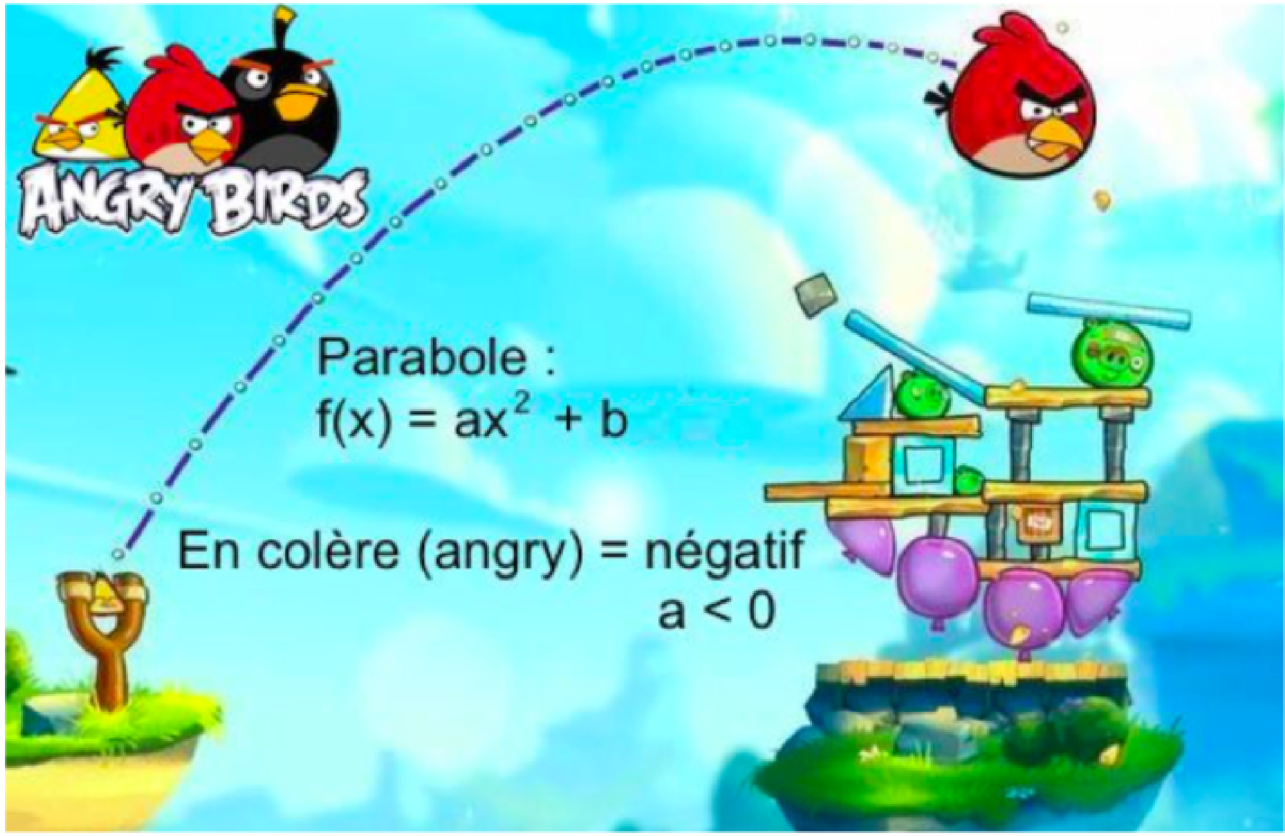


$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\frac{-b}{2a})$	↗ $+\infty$



Il existe un moyen pour se souvenir du résultat précedent



Méthode : Etudier les variations d'une fonction du 2^{nd} degré

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = -x^2 + 4x - 1$.

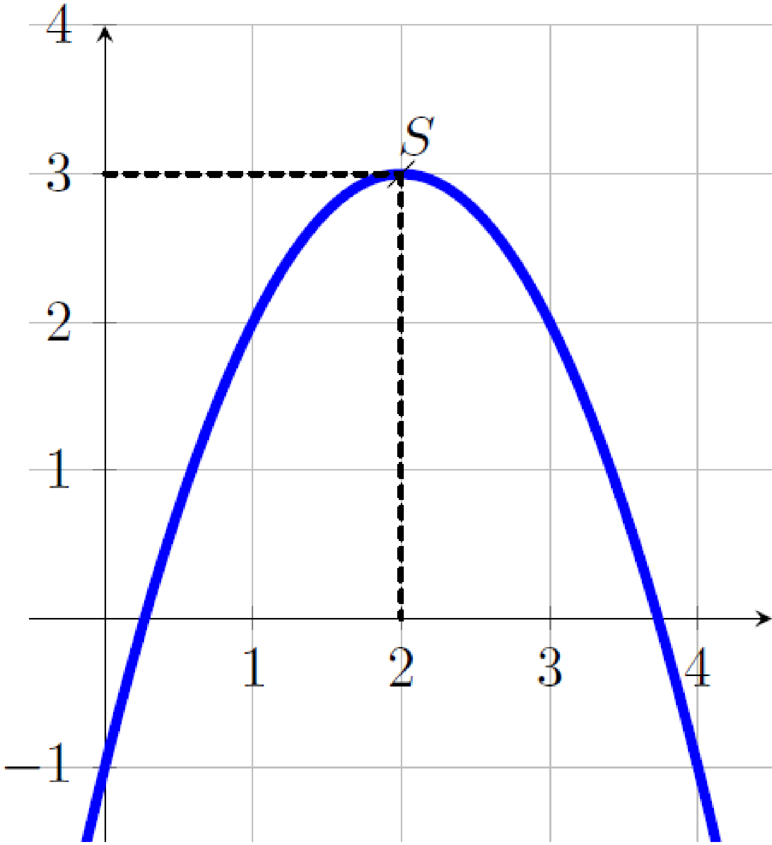
On a $\quad a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 1 = 3$$

Le sommet de la parabole est le point $S(2;3)$.

$a < 0$ donc le tableau de variation de f est :

x	$+\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$



Forme factorisée

Il se peut que le polynôme du 2^{nd} degré ne se présente pas sous la forme **developpée** mais sous une forme **factorisée** comme par exemple :

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2) \\ &= x^2 - 2x - 1x + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2 \qquad \Rightarrow a = 1 \text{ , } b = -3 \text{ et } c = 2 \end{aligned}$$

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

f est la forme **factorisée** d'une fonction du 2^{nd} degré.

x_1 et x_2 sont les **racines** de f

Remarque

les **racines** de f sont solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$f(x_1) = a(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) = 0$ et $f(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = 0$.

Exemples

$$f(x) = 3(x-1)(x+2)$$

> $f(x) = 3(x-1)\left(x-(-2)\right)$
>
> f est une fonction du 2^{nd} degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

$$f(x) = (2x - 6)(x - 12)$$

> Pour faire apparaître la forme factorisée il faut modifier l'écriture de $(2x - 6)$
>
> $(2x - 6) = 2(x - 3)$ donc $f(x) = 2(x - 3)(x - 12)$
>
> f est une fonction du 2^{nd} degré avec $a = 2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 12$

$$f(x) = (3 - x)(2x + 1)$$

> On a $(3 - x) = -(x - 3) \quad$ et $\quad (2x + 1) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$
>
> Donc $f(x) = -(x - 3) \times 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = -2(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
>
> f est une fonction du 2$^{\text{nd}}$ degré avec $a = -2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

Propriété : Racines de $f(x)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et x_1 ,x_2 les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Alors la forme **factorisée** de f est : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple

$$f(x) = 3(x-1)(x+2)$$

> f est une fonction du 2^{nd} degré sous forme factorisée avec $a = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.
>
> D'autre part, $f(x) = 3\left(x^2 + 2x - 1x - 2\right) = 3x^2 + 3x - 6$
>
> Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ sont solutions de l'équation $3x^2 + 3x - 6 = 0$

Résolution d'équations du 2^{nd} degré

Résourdre une équation du 2^{nd} degré, c'est résoudre une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$.

Définition : Discriminant

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Propriété : Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a **pas de solution réelle**.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **une unique solution** : $\boxed{x_0 = \dfrac{-b}{2a}}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **deux solutions distinctes** :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemple

On cherche à résoudre $2x^2 - x - 6 = 0$

Calculons le discriminant :

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Calcul de x_1	Calcul de x_2
$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} \\ &= 2 \end{aligned}$

Les solutions de l'équation $2x^2-x-6=0$ sont $S=\left\{-\frac{3}{2}\ ;\ 2\right\}$

Exemple

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$$

Calculons le discriminant :

$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Exemple

$x^2 + 3x + 10 = 0$

$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété

La somme S et le produit P des **racines** d'un polynôme du 2^{nd} degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ sont donnés par :

$$S=-\frac{b}{a} \qquad P=\frac{c}{a}$$

Démonstration

Soit x_1 et x_2 les solutions de $x^2 + bx + c = 0$ alors

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc, la somme des **racines** est $S = x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) + (-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Le produit des **racines** est $P = x_1 \times x_2$:

$$
\begin{aligned}
P &= x_1 \times x_2 \\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) \times (-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} \\
&= \frac{(-b)^2 + \left((-b) \times \sqrt{\Delta}\right) + \left(\left(-\sqrt{\Delta}\right) \times (-b)\right) + \left(\left(-\sqrt{\Delta}\right) \times \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}
\end{aligned}
$$

Propriété : Forme factorisée de $ax^2 + bx + c$

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur par $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f\left(x\right) = a\left(x - x_0\right)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f\left(x\right) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$.

Remarque

Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser le trinôme suivant : $4x^2 + 19x - 5$

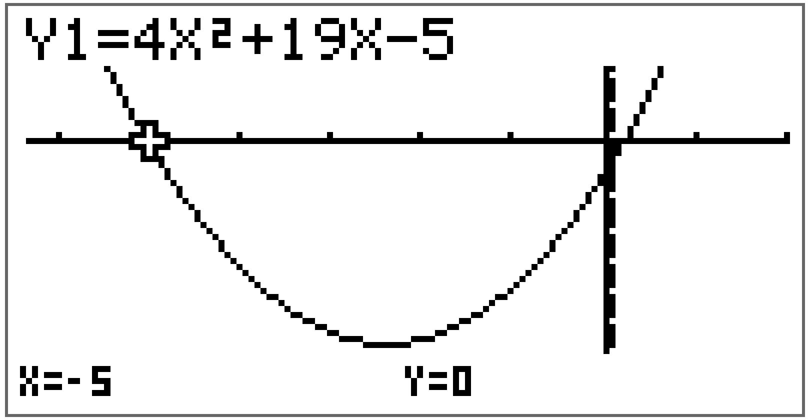
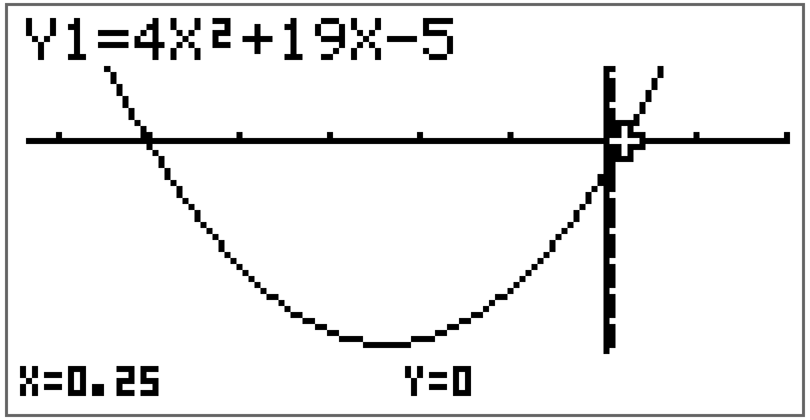
> On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$
>
> On a $a = 4$, $b = 19$ et $c = -5$ donc
>
> $$\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$$

> Les racines du trinôme sont :

Calcul de x_1	Calcul de x_2
$\begin{aligned} x_1 &= \dfrac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4} \\ &= -5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_2 &= \dfrac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4} \\ &= \dfrac{1}{4} \end{aligned}$

> On a donc :
>
> $$\begin{aligned} 4x^2+19x-5 &= 4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \\ &= 4\left(x+5\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \quad = \quad (x+5)(4x-1) \end{aligned}$$

> Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile ! On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

x_1	x_2
	

Exemple

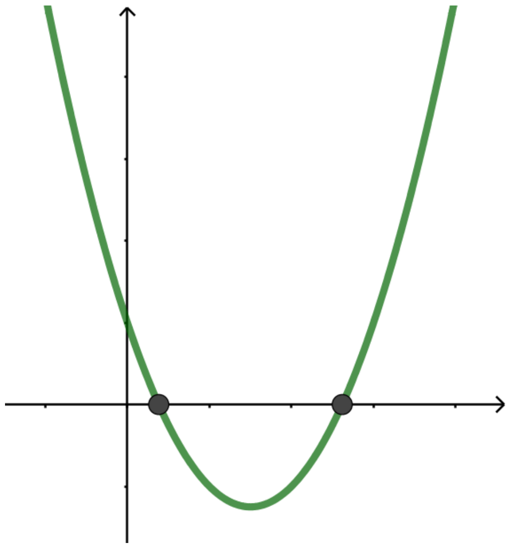
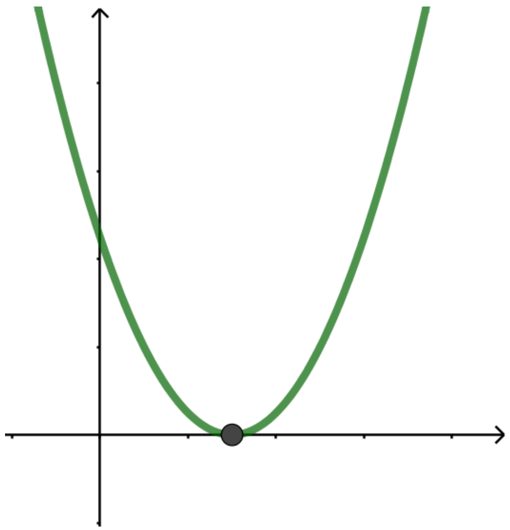
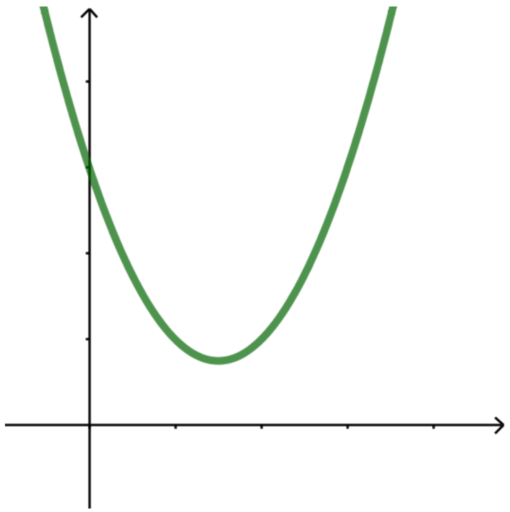
Factoriser le trinôme suivant : $9x^2 - 6x + 1$

> On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$
>
> On a $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$ donc $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times (1) = 0$
>
> La racine du trinôme est : $x_0 = \dfrac{-(-6)}{2 \times 9} = \dfrac{1}{3}$
>
> On a donc : $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

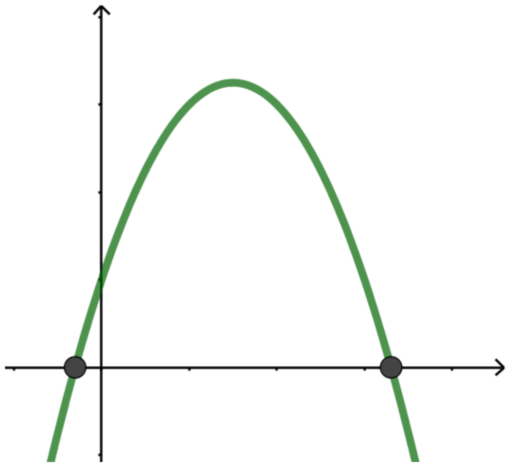
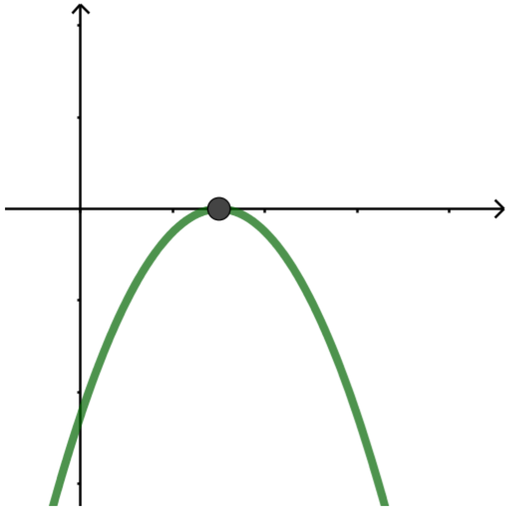
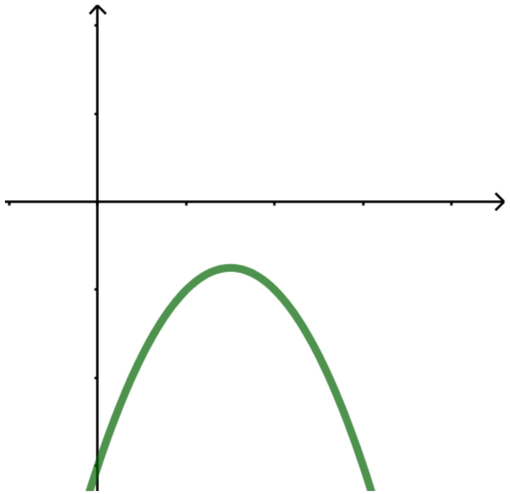
Propriété : Les différentes représentations possibles de f

En fonction du signe de a et de Δ, nous pouvons en déduire les représentations de f.

> Pour $a > 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		

> ## Pour $a < 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		

Forme canonique

Définition : Forme canonique

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Exemple

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ est une fonction du 2^{nd} degré sous forme **canonique** avec $a = 2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

> En effet,
>
> $$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-1)^2 + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$
>
> Donc $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction du 2$^{\text{nd}}$ degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = 2x^2 - 20x + 10$. On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\
&= 2\left[x^2 - 10x\right] + 10 \\
&= 2\left[x^2 - 10x + 25 - 25\right] + 10 \\
&= 2\left[(x-5)^2 - 25\right] + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 40
\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme **canonique** de f.

Démonstration

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \\ &= a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Remarque

Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction du 2^{nd} degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique.

On a $a = 2$, $b = -20$ et $c = 10$ donc

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-20}{2 \times 2} = 5 \end{aligned}$$

Calculons β :

$$\begin{aligned}\beta &= f(\alpha) \\ &= 2\times 5^2 - 20\times 5 + 10 \\ &= 50 - 100 + 10 = 40\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = 5$ et $\beta = -40$ donc $f(x) = 2\left(x-5\right)^2 - 40$

Exemple

Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f\left(x\right) = 2\left(x-1\right)^2 + 3$

On a :

$$\begin{aligned} & \left(x-1\right)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\left(x-1\right)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\left(x-1\right)^2 + 3 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 3 \end{aligned}$$

Or $f\left(1\right) = 3$ donc $f\left(x\right) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en $x = 1$. Ce minimum est égal à 3.

Propriété : Minimum et maximum

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

Remarque

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\dfrac{b}{2a}$

Méthode : Déterminer les caractéristiques d’une parabole

Déterminer l’axe de symétrie et le sommet de la parabole d’équation

$$y = 2x^2 - 12x + 1$$

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$$

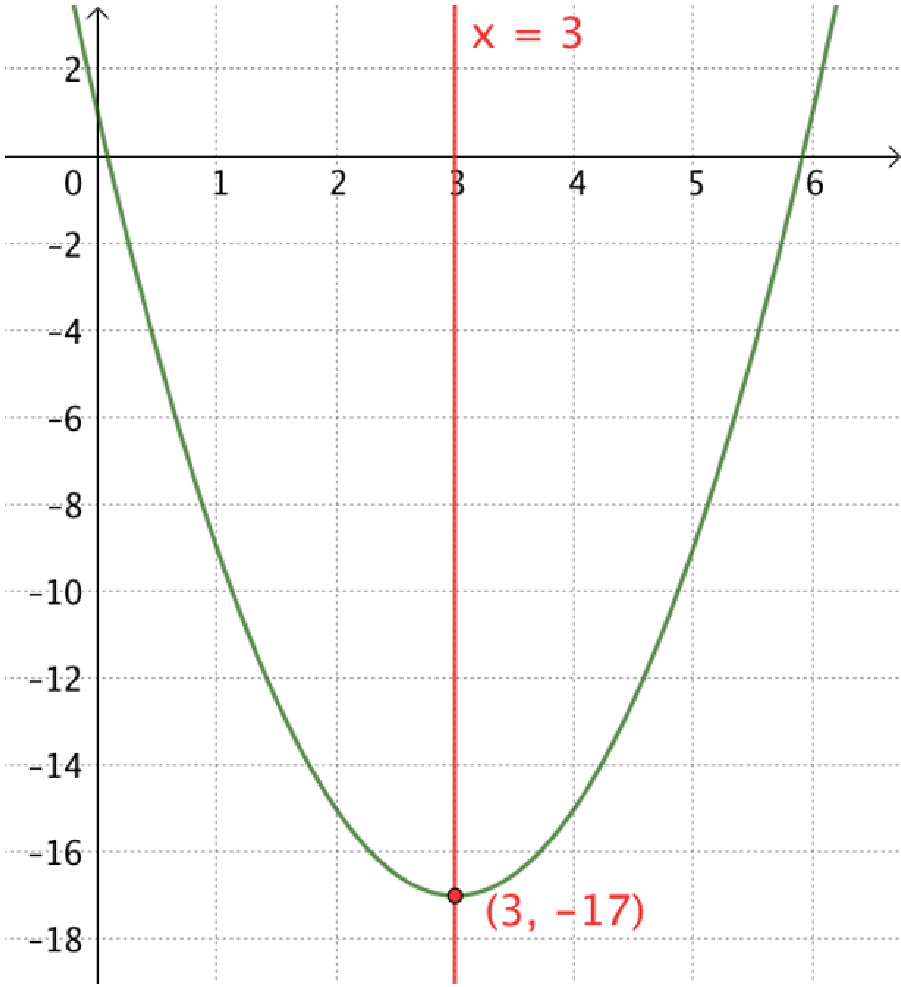
La droite d’équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole.

Les coordonnées de son sommet sont :
$\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, soit :

$$\left(3\,;2\times3^2-12\times3+1\right)=\left(3\,;\ -17\right)$$

Le point $\left(3\ ;\ -17\right)$ est le sommet de la parabole.

$a=2>0$, ce sommet correspond à un minimum.



Démonstration : Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x)=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :

$ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} &= 0 \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} &= 0 \\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a} \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{car } a \neq 0 \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$:
  Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$:
  L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$
  L'équation n'a qu'une seule solution : $x = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

Solution n°1	Solution n°2
$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ $x = +\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$ $x = \frac{+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$ $x = \frac{+\sqrt{\Delta} - b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ $x = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$ $x = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$ $x = \frac{-\sqrt{\Delta} - b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

L'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$