

# Ley de desintegración de una especie nuclear

Cedric Prieels

24 de mayo de 2016

## Resumen

Esta práctica nos permitió estudiar la desintegración radiactiva de una muestra, para determinar y verificar el tipo de ley que sigue el decaimiento radiactivo. La muestra que se estudia en este caso es una muestra de  $In^{116m_1}$ , que tiene un tiempo de semivida del orden de una hora y que se genera con una fuente intensa de neutrones, absorbidos por unas láminas de  $In^{115}$ . Esta práctica tenía tres objetivos principales. Lo primero que buscamos hacer es entender el espectro  $\gamma$  del isótopo  $In^{116m_1}$ . Se intenta también verificar el tipo de decaimiento radiactivo en este caso (lineal, cuadrático o exponencial) y por fin, se mide de manera precisa el tiempo de semivida de la muestra radiactiva considerada y se discutan los resultados obtenidos.

## 1. Introducción teórica

Todo compuesto radiactivo decae por definición, siguiendo lo que se llama la ley de desintegración radiactiva, de tipo exponencial. Se puede obtener una expresión para el decaimiento radiactivo considerando la probabilidad de desintegración de la especie considerada por unidad de tiempo  $\lambda$  (directamente relacionada con el tiempo de semivida  $T$  de la muestra radiactiva con la ecuación siguiente).

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T} \quad (1)$$

Si  $n(0)$  es la cantidad inicial de núcleos radiactivos y  $n(t)$  es el número de núcleos que quedan después de un tiempo  $t$ , la ley de decaimiento se puede escribir de la forma (2), siendo  $\lambda dt$  la probabilidad de desintegración de un núcleo en un intervalo de tiempo  $[t, t + dt]$ .

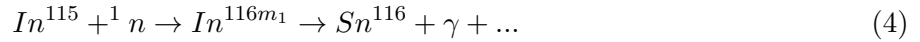
$$dn(t) = -n(t) \cdot \lambda dt \quad (2)$$

El número de desintegraciones en un intervalo de tiempo se calcula entonces con la integral de esta expresión, lo que se puede escribir de una manera sencilla (3).

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} = n_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{T} t} \quad (3)$$

En este caso, se estudia en particular el caso del  $In^{116m_1}$ . Esta especie radiactiva se produce por la interacción de neutrones con una lámina hecha de  $In^{113}$  y de  $In^{115}$  (pero la interacción con la parte 113 de la lámina no se considera en este caso, porque genera solo dos isótopos : uno que tiene un tiempo de semivida muy corto y que se desintegra en seguido, y el otro que tiene un tiempo de semivida del orden de 50 días, y se considera entonces como fondo porque tiene una actividad pequeña).

La reacción que nos interesa es la relación (4), la única que procude una especie radiactiva que tiene un tiempo de semivida interesante (ni demasiado pequeño, para poder medir algo durante unas 2 horas, ni demasiado grande para medir una actividad no despreciable comparado con el fondo del laboratorio).



Esta reacción es importante porque la especie  $In^{116m_1}$  tiene un tiempo de semivida de 54,29 minutos, perfecto para esta práctica. El  $In^{116m_1}$  sufre desintegración beta (produciendo un electrón y un neutrino, pero no nos interesan en esta práctica) y se transforma a un estado excitado ( $Sn^{116}$ )\*. Este estado se desexcita después emitiendo un fotón que se puede detectar fácilmente con un fotodetector y un analizador multicanal AMC. Por cada desintegración radiactiva se puede producir un fotón de energía determinada (cf. esquema simplificado para la desintegración del  $In^{116m_1}$  al  $Sn^{116}$  en los apuntes de preparación) y entonces, si medimos las cuentas en los fotopicos que aparecen en el AMC, podremos verificar el tipo de la ley de decaimiento radiactivo y calcular el valor de la constante  $\lambda$  usando la ecuación (5).

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-\lambda t} = \epsilon N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (5)$$

El factor  $C_0$  que aparece en esta última ecuación es una constante de proporcionalidad que tiene en cuenta diferentes parámetros experimentales, como la eficiencia del detector  $\epsilon$  y la emisividad gamma. El valor del tiempo de semivida  $T$  se podrá calcular fácilmente una vez obtenido el valor de la constante  $\lambda$ , usando la ecuación (1).

## 2. Desarrollo experimental

La primera parte del experimento (que no hicimos nosotros) consistía en introducir la lámina de  $In^{115}$  en parafina, cerca de una fuente intensa de neutrones, para iniciar la reacción (4) y obtener los primeros isótopos de  $In^{116m_1}$ . Este proceso de activación dura unas 3 o 4 horas, para obtener un número suficiente de especie radiactiva (la justificación de la elección de este tiempo se hace en una de las cuestiones al final del informe).

Durante este proceso de activación, se calibra el detector gamma con unas fuentes de  $Cs^{137}$  y de  $Co^{60}$  encapsuladas en plástico. Estas fuentes son emisores gamma y tienen cada una algunos picos de emisión muy bien conocidos. Se mide entonces el espectro obtenido con estas dos fuentes al lado del detector (medida de 5 minutos), y se hace una correspondencia entre los resultados experimentales obtenidos y los espectros teóricos de estas muestras. El proceso de calibración es necesario porque el AMC solo puede darnos un número de canal entre 1 y 1024 o 2048 pero lo que nos interesa es obtener la energía del fotón incidente. La conversión de canal a energía se hace suponiendo que la relación entre los dos valores es una recta, y el proceso de calibración nos permite calcular y verificar la ecuación de esta recta con unas fuentes conocidas.

Una vez la calibración concluida, se aleja la lámina activada de In de la fuente de neutrones y se esperan unos 10 minutos antes de empezar las medidas. Este tiempo de espera es necesario para estar seguro de que todos los isótopos producidos en el mismo tiempo que el isótopo de interés  $In^{116m_1}$ , que tienen todos un tiempo de semivida del orden de algunos segundos, se desintegran y que no influyen las medidas obtenidas.

Con la lámina activada, se mide primero un espectro de emisión gamma durante 100 segundos, para poder identificar los 3 picos característicos de la desintegración del  $In^{116m_1}$  al  $Sn^{116}$  a 417, 1097 y 1294 keV. Podemos así verificar la calibración hecha en el paso anterior.

Después, empiezan las medidas de la lámina. Se construye una tabla con unos 20 medidas, separadas cada una por 4 o 5 minutos para mejorar la estadística y medir durante un tiempo mayor que el periodo de semivida del isótopo de interés. Se notan cada vez los números de cuentas de los tres fotopicos más importantes (se considera solamente el área neta de los fotopicos, que tiene en cuenta el fondo radioactivo del laboratorio). Se puede de esta manera estudiar la evolución temporal del número de cuentas de cada fotopico, y determinar el valor de la constante  $\lambda$  y entonces el tiempo de semivida en cada caso, usando las ecuaciones (1) y (5).

Estudiar la evolución temporal del número de cuentas nos va a permitir estudiar el tipo de ley que sigue el decaimiento radiactivo. Se consideran diferentes modelos (lineal, cuadrático y exponencial) para verificar cuál es el modelo que describe nuestros resultados de la manera más precisa. Por fin, se determina también el valor del tiempo de semivida en cada uno de los fotopicos y el error asociado a las medidas para comparar este valor con el valor teórico de 54,29 minutos.

### 3. Resultados obtenidos

#### 3.1. Calibración

Los fotopicos obtenidos con las fuentes de  $Cs^{137}$  y de  $Co^{60}$  (medida de 5 minutos) tenían una energía experimental de 661,35 keV (valor teórico de 662 keV), de 1167,23 keV (pico de 1173 keV) y de 1330,42 keV (pico de 1333 keV). Se observa entonces un sesgo entre los resultados experimentales y las energías teóricas pero este sesgo es pequeño y no justifica una otra calibración (por lo menos en nuestra región de interés). Se guarda entonces la calibración del equipo para las medidas siguientes.

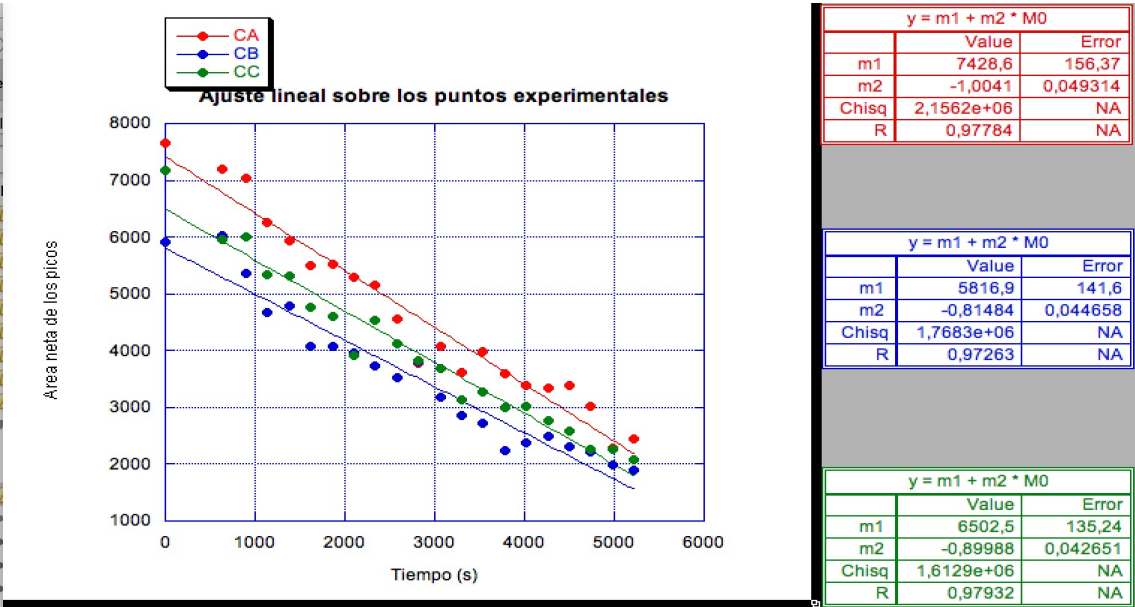
#### 3.2. Ley de decaimiento

Los resultados obtenidos durante la práctica se presentan primero en la tabla 1.

Hora $t_c$	Tiempo $t_t$ (min)	$C_A$	$C_B$	$C_C$
16h50m33s	10,5	7197	6033	5967
16h55m03s	15	7033	5370	6012
16h59m03s	19	6247	4671	5347
17h03m03s	23	5930	4799	5320
17h07m03s	27	5505	4089	4767
17h11m03s	31	5513	4077	4598
17h15m03s	35	5295	3973	3907
17h19m03s	39	5160	3729	4524
17h23m03s	43	4553	3533	4115
17h27m03s	47	3772	3809	3819
17h31m03s	51	4082	3185	3697
17h35m03s	55	3612	2859	3149
17h39m03s	59	3975	2712	3284
17h43m03s	63	3595	2240	2995
17h47m03s	67	3385	2372	3011
17h51m03s	71	3339	2488	2776
17h55m03s	75	3398	2305	2583
17h59m03s	79	3015	2228	2259
18h03m03s	83	2295	1993	2272
18h06m03s	87	2442	1841	2086

Cuadro 1: Resultados del estudio del tipo de la ley de decaimiento radiactivo.

Todas las medidas corresponden a un tiempo de integración de 100s, y el valor presentado en la primera columna es la hora de principio de la medida. El valor de  $C_i$  corresponde al área neta del fotopico  $i$ . Estos resultados se pueden representar en una gráfica, para hacer una regresión de los datos obtenidos usando diferentes modelos para verificar el tipo de ley que tenemos en este caso. Las gráficas obtenidas se representan en las figuras siguientes.



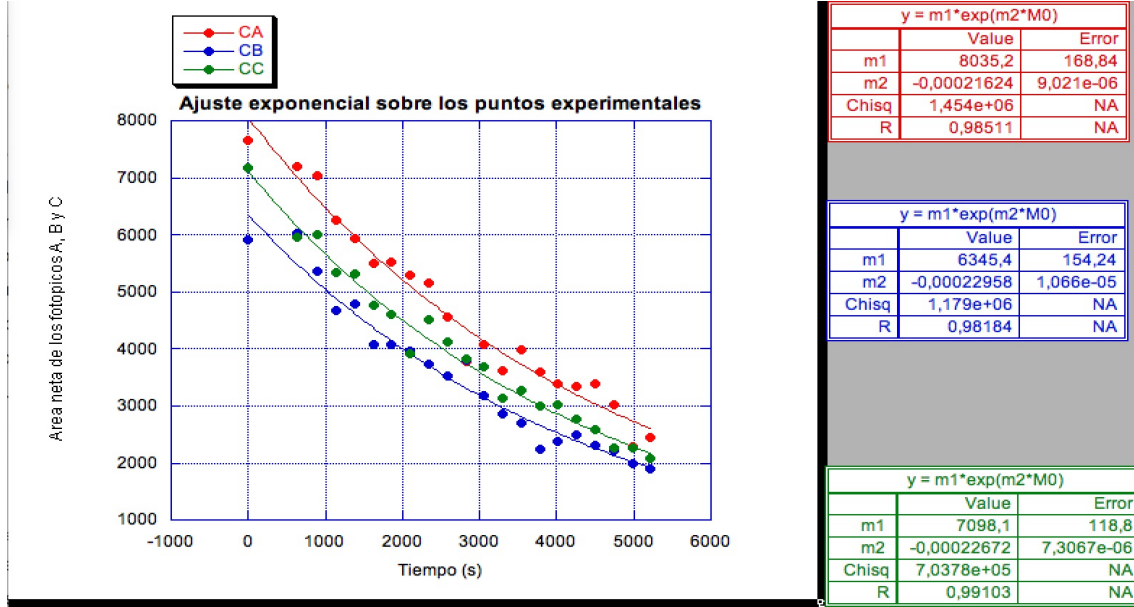


Figura 3: Intento de regresión exponencial.

Con las 3 figuras (1), (2) y (3), se puede ver claramente primero que la regresión de tipo cuadrática no funciona en este caso (el valor de  $R$  vale solamente 0,91 lo que es mucho más lejos de 1 que los otros dos tipos de regresiones). El mejor tipo de regresión con nuestros datos experimentales es el tipo exponencial ( $R \simeq 0,98$ ) y es el resultado que se esperaba. Un resultado un poco sorprendente es que la regresión de tipo lineal queda muy bien también ( $R \simeq 0,97$ ). Este resultado se puede explicar fácilmente con el desarrollo en serie de Taylor del exponencial en la ecuación (6).

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{-\ln(2)}{T}t} &\simeq 1 - \ln(2) \cdot \left(\frac{t}{T}\right) - \left(\frac{\ln(2)^2}{2}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \left(\frac{\ln(2)^3}{6}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^3 \\
 &= 1 - 0,7 \cdot \left(\frac{t}{T}\right) - 0,12 \left(\frac{t}{T}\right)^2 - 0,01 \left(\frac{t}{T}\right)^3 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Se puede ver que el factor en frente de cada término va bajando mucho. Entonces, la parte dominante de la expresión exponencial es en realidad una recta, solo se aplica una pequeña corrección después. Es entonces normal que una regresión lineal quede tan bien en este caso.

### 3.3. Tiempo de semivida

Usando ahora la verdadera ley de decaimiento radiactivo (3), se puede determinar el valor de la constante  $\lambda$  para cada fotopico. Usando después la ecuación (1) se puede directamente sacar el valor del tiempo de semivida del isótopo considerado en cada caso.

Los resultados obtenidos son los siguientes. El error ha sido calculado con una simple propagación de errores  $\Delta(T) = \ln(2) \cdot \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda^2}$ , siendo  $\Delta(\lambda)$  el error dado por Kaleidagraph después de la regresión de tipo exponencial.

$$T(\text{min}) = \begin{cases} (52 \pm 2) \text{ (Fotopico A)} \\ (50 \pm 2) \text{ (Fotopico B)} \\ (51 \pm 2) \text{ (Fotopico C)} \\ (51 \pm 1) \text{ (Suma de A, B y C)} \end{cases}$$

El valor final obtenido es un poco pequeño comparado con el valor teórico de tiempo de semivida de 54,29 minutos y no está incluido en nuestro valor experimental a  $1\sigma$  (intervalo de confianza del 68 %). Pero todos los valores experimentales obtenidos son compatibles. Si usamos el intervalo de confianza del 95 % (corresponde a un error de  $2\sigma$ ), las medidas de los fotopicos A y C son compatibles con el valor teórico y las otras medidas siguen un poco pequeñas. Hay que ir al  $3\sigma$  (intervalo de confianza del 99,7 %) para tener una correspondencia entre todos los valores experimentales y el valor teórico.

## 4. Profundizando el experimento

### 4.1. Formación del espectro de la lámina de In irradiada

Hemos colocado la lámina de In irradiada sobre el detector de INa que tiene un diámetro de más o menos 1mm. El espectro de interés obtenido tenía tres picos principales, como ya discutido antes, a 417 (pico A), 1097 (pico B) y 1294 keV (pico C). Si se considera solamente el espectro inicial, queremos comparar las razones de cuentas (los ratios entre números de cuentas en cada fotopico) con las predicciones basadas en emisividades y fotoeficiencias. Las razones de cuentas obtenidas experimentalmente son las siguientes (usando los valores del espectro inicial) :

$$\begin{cases} \frac{C_A}{C_B} = \frac{7671 \pm 88}{5915 \pm 77} = 1,30 \pm 0,02 \\ \frac{C_A}{C_C} = \frac{7671 \pm 88}{7185 \pm 85} = 1,07 \pm 0,02 \end{cases}$$

Para obtener los valores teóricos, hay que tener en cuenta las emisividades  $\gamma$  y el valor de la *fotoeficiencia* de cada fotopico, que es proporcional a la energía del pico considerado. Mi compañera de laboratorio, Marta Quintana Echevarria, calculó precisamente los valores de cuentas relativas  $CR$  en el caso teórico, después de haber aplicado un ajuste a una ley de potencias a los valores de fotoeficiencias intrínsecas encontradas en Peralta (2004). Los resultados obtenidos son los siguientes :

$E_{pico}$ (keV)	$CR_{exp}$	$CR_{teo}$
417	1	1
1097	$(1,30)^{-1} = 0,77 \pm 0,02$	0,653
1294	$(1,07)^{-1} = 0,94 \pm 0,02$	0,815

Cuadro 2: Comparación de los valores de cuentas relativas en el caso experimental y en el caso teórico. El valor de cuentas relativas  $CR$  corresponde al ratio entre el número de cuentas entre el pico considerado y el primer pico.

Los resultados obtenidos no parecen muy correctos, incluso con el error a  $1\sigma$  asociado. Podría ser porque el error ha sido mal estimado : solo se ha tenido en cuenta la raíz cuadrada del número de cuentas medido, pero como se verá en la próxima cuestión, no es estrictamente correcto. Además otras fuentes de errores podrían jugar un papel importante (como el tiempo de medida, muy limitado en este caso), pero que no entran en esta discusión.

### 4.2. Cuestiones

#### 4.2.1. Cuestión 1

El error de una distribución de Poisson (y en radiactividad, la mayoría de las distribuciones son de este tipo) viene dado por la raíz cuadrada del número de cuentas observados en el analizador multicanal. Pero en general, no es tan fácil porque se usa el valor del área neta de los picos, y no directamente el número de cuentas medido. El valor neta corresponde al número de cuentas medido menos el número de cuentas del fondo, estimado por el analizador (7).

$$C = C_{total} - B \quad (7)$$

Hay que entonces propagar el error para calcular el error sobre el valor de  $C$ , sabiendo que  $\sigma_{C_{total}} = \sqrt{C_{total}}$  y que  $\sigma_B = \sqrt{B}$ .

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_{C_{total}}^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{C_{total} + B} \quad (8)$$

El error sobre el área neta no se puede aproximar entonces por  $\sqrt{C}$  en el caso más general, esta aproximación solo es valida si  $C_{total} \gg B$ , pero no es el caso en esta práctica.

#### 4.2.2. Cuestión 2

Expuestos a la fuente de neutrones, los núcleos de In tienen una probabilidad  $\Phi$  fija de capturar un neutrón. Esta probabilidad se puede expresar también con la sección eficaz de captura neutrónica  $\sigma_{nc}$ . Si suponemos que el número de especie de  $In^{115}$  es constante durante la irradiación, se puede describir la evolución temporal del número de  $In^{116m_1}$  como el equilibrio entre la tasa de creación  $n_{In^{115}} \cdot \sigma_{nc} \cdot \Phi$  y la tasa de decaimiento dado por  $n_{In^{116m_1}}(t) \cdot \lambda$ . Esta evolución se puede escribir con la ecuación (9).

$$n_{116m_1}(t) = \frac{n_{In^{115}} \cdot \sigma_{nc} \cdot \Phi}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \quad (9)$$

Con esta última ecuación, se puede demostrar que se genera el 75 % de la limita asintótica  $n_{In^{115}} \cdot \sigma_{nc} \cdot \Phi$  de la actividad de saturación después de un tiempo de irradiación equivalente a dos veces el periodo de semivida del isótopo. Este valor de 75 % es exactamente igual al ratio entre el valor de  $n_{116m_1}(t)$  y el valor de  $\frac{n_{In^{115}} \cdot \sigma_{nc} \cdot \Phi}{\lambda}$ . Entonces, si usamos la condición que nos dice  $t = 2T$ , obtenemos lo siguiente :

$$Ratio = (1 - e^{-\lambda t}) = (1 - e^{-\frac{\ln(2)}{T} \cdot 2T}) = (1 - e^{-\ln(2) \cdot 2}) = 0,75 \quad (10)$$

En general, se irradia la lámina de In durante unos 2 o 3 horas, lo que corresponde a 2 o 3 veces el tiempo de semivida considerado de 54 minutos. Con un periodo de irradiación de  $3T$ , se produce un ratio equivalente al 87 % y entonces, no vale casi la pena dejar la lámina expuesta a los neutrones durante mucho más tiempo porque cada vez, hay que esperar más tiempo para mejorar cada vez menos la cantidad de  $In^{116m_1}$ .

## 5. Conclusión

En conclusión, esta práctica nos permitió estudiar más en detalles la ley de decaimiento radiactivo en el caso particular de un estado metastable del In, el  $In^{116m_1}$ . Primero, se verificó la calibración del analizador multicanal con unas fuentes bien conocidas de  $Cs^{137}$  y de  $Co^{60}$ . Una vez la calibración hecha, se verificó el tipo de decaimiento observado con la lámina de In activada, haciendo una regresión de diferentes tipos sobre el número de cuentas observadas en 3 de los fotopicos más característicos del espectro gamma de este isótopo de In. La regresión lineal que tenía un valor de  $R$  más cerca de 1 era la regresión de tipo exponencial, lo que corresponde a lo esperado. Después, se calculó en cada uno de los 3 fotopicos el valor del tiempo de semivida del  $In^{116m_1}$ . El valor final obtenido con la suma de las cuentas de los 3 picos vale  $(51 \pm 1)$  minutos, lo que corresponde al valor teórico solamente a un poco más de  $3\sigma$ , pero por lo menos, todos los valores obtenidos experimentalmente son compatibles.