

**Control Predictivo basado en Modelo (MPC).
Control Predictivo Generalizado (GPC) y GPC
Multivariable**

César Ernesto Hernández Hernández
e-mail: ceelch@gmail.com

23 de julio de 2020

Índice

1. Control predictivo basado en modelo (MPC)	3
1.0.1. Ventajas y desventajas del MPC	5
2. Control Predictivo Generalizado (GPC)	6
2.1. Restricciones	11
3. GPC Multivariable	11
3.1. Para el caso $C(z^{-1}) = I_{n \times n}$	11
3.2. Recursión de la ecuación Diofántica	12
3.3. Restricciones en GPC multivariable	16
3.4. Ejemplo	16

Índice de figuras

1. Estrategia MPC	3
2. Esquema básico del MPC	4
3. Ley de control del GPC	10
4. Reactor en tanque agitado	17
5. Acciones de control y respuesta del sistema	25

1. Control predictivo basado en modelo (MPC)

Los elementos de un algoritmo MPC son ([1]) :

- **Modelo de predicción.** Es el modelo matemático que describe el comportamiento esperado del sistema. Este modelo puede ser lineal o no lineal, en tiempo continuo o en tiempo discreto, en variables de estado o en entrada-salida.
- **Función objetivo.** Es la función que indica el criterio a optimizar. Es una función definida positiva que expresa el coste asociado a una determinada evolución del sistema a lo largo del horizonte de predicción N .
- **Restricciones.** Indican los límites dentro de los cuales debe discurrir la evolución del sistema. La evolución de las señales de un sistema no debe exceder determinadas restricciones que, ya sea por límites físicos o bien por motivos de seguridad, se imponen al sistema.

La metodología de todos los controladores pertenecientes a la familia MPC se caracteriza por la siguiente estrategia, representada en la figura 1, ([2]):

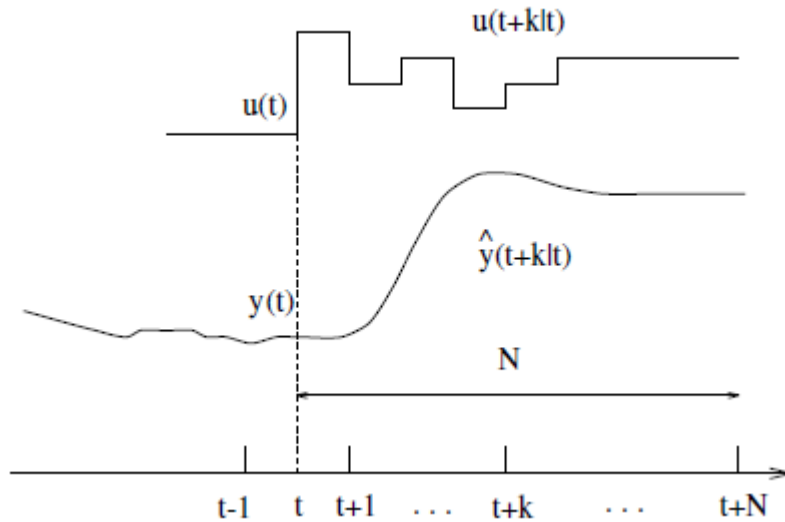


Figura 1: Estrategia MPC

1. Las salidas futuras para un horizonte determinado N , llamado horizonte de predicción, se predicen cada instante t utilizando el modelo del proceso. Estas predicciones de la salida $y(t + k|t)$ para $k = 1 \dots N$ dependen de los

valores conocidos hasta el instante t (entradas y salidas conocidas) y de las señales de control $u(t + k|t)$, $k = 0 \dots N - 1$, que han de ser calculadas y enviadas al sistema.

2. La secuencia de señales de control futuras se calcula minimizando un criterio para mantener al proceso lo más cerca posible de la trayectoria de referencia $w(t + k)$. Este criterio toma normalmente la forma de una función cuadrática del error entre la salida predicha y la trayectoria de referencias futuras. En la mayor parte de los casos se incluye también el esfuerzo de control dentro de la función objetivo. La solución explícita se puede obtener cuando el criterio es cuadrático y el modelo lineal; en caso contrario se ha de utilizar un método numérico para buscar la solución.
3. La señal de control $u(t|t)$ se envía al proceso mientras que el resto de las señales calculadas no se consideran, ya que en el instante siguiente de muestreo $y(t + 1)$ es ya conocida y los pasos anteriores se repiten con este nuevo valor. Por lo que $u(t + 1|t + 1)$ se calcula con información diferente y en principio sería también diferente de $u(t + 1|t)$.

En la figura 2 se muestra la estructura básica necesaria para implementar el control predictivo. Se usa un modelo para predecir la evolución de la salida o estado del proceso a partir de las señales de entrada y salida conocidas. Las acciones de control futuras se calculan con el optimizador, que considera la función de coste y las posibles restricciones.

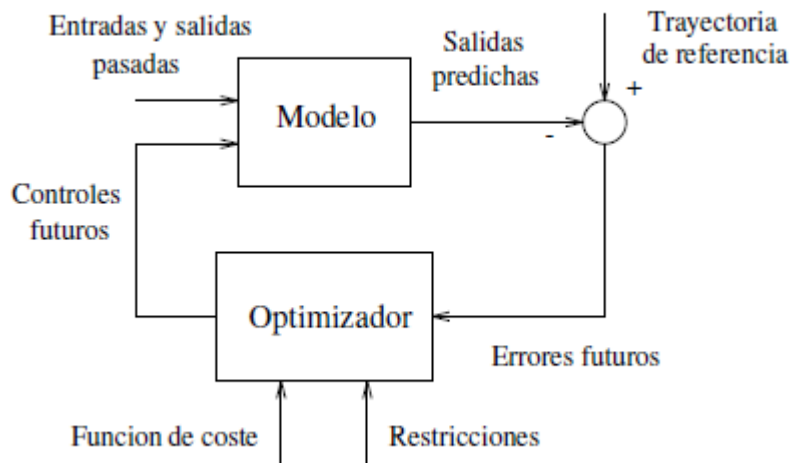


Figura 2: Esquema básico del MPC

El modelo de proceso juega, en consecuencia, un papel decisivo en el controlador. El modelo elegido debe ser capaz de capturar la dinámica del proceso para predecir de forma precisa la evolución del sistema. Al mismo tiempo, debe ser suficientemente simple de implementar y entender. Las distintas metodologías del control predictivo difieren fundamentalmente en el tipo de modelo utilizado.

El optimizador es otra parte fundamental de la estructura ya que permite obtener las acciones de control a aplicar. Si la función de coste es cuadrática, el modelo lineal y no existen restricciones, se puede obtener una solución explícita. Si éste no es el caso se ha de acudir a un algoritmo numérico de optimización que requiere mayor capacidad de cálculo. El tamaño del problema resultante depende del número de variables, de los horizontes de control y predicción y del número de restricciones, aunque se puede decir que en general los problemas de optimización resultantes en este contexto son problemas más bien modestos.

1.0.1. Ventajas y desventajas del MPC

El control predictivo presenta una serie de ventajas y desventajas ([1], [2]) sobre otros métodos, las ventajas que se pueden citar son las siguientes:

- Es una técnica particularmente atractiva para los operadores que requiere pocos conocimientos de control porque los conceptos son muy intuitivos y la sintonización relativamente simple.
- Se puede utilizar para controlar una gran variedad de procesos, desde procesos muy simples hasta procesos con dinámicas complejas, como procesos con grandes tiempos muertos, procesos de fase no mínima, procesos inestables o procesos multivariados.
- Su carácter predictivo lo hace compensar intrínsecamente los tiempos muertos.
- Introduce un control anticipativo (*feed forward*) y de forma natural se compensan las perturbaciones medibles.
- La ley de control resultante es fácilmente implementable.
- La ley de control responde a criterios óptimos.
- Formulación en el dominio del tiempo, flexible, abierta e intuitiva.
- Es muy útil cuando se conocen las referencias futuras, como ocurre en el caso de robótica o procesos por lotes y

- permite tratar las restricciones de una forma sistemática y conceptualmente muy simple durante la fase de diseño.

El control predictivo también tiene sus desventajas, algunas de éstas son:

- Aunque su implementación no es compleja, resulta más difícil que la de los clásicos controladores PID.
- Hasta hace relativamente poco, no se podía garantizar la estabilidad de los controladores, especialmente en el caso con restricciones. Esto hacía que el ajuste de estos controladores fuese heurístico y sin un conocimiento de cómo podían influir los parámetros en la estabilidad.
- Si la dinámica del proceso no cambia y no existen restricciones, la mayor parte de los cálculos se puede realizar fuera de línea y el controlador resultante es simple, pudiéndose aplicar a procesos de dinámicas rápidas; en caso contrario, los requisitos de cálculo son mucho mayores. Aunque hay que decir que debido a la potencia de los computadores actuales esto no es realmente una dificultad insalvable.
- La mayor dificultad que presenta para su aplicación es la necesidad de un modelo apropiado del proceso cuya obtención requiere unos conocimientos mínimos de control.

Existen diversas formulaciones de modelos matemáticos, modelos lineales o no lineales, para los diversos esquemas de MPC, se analizan a continuación algunas formulaciones.

En [2] se describe la siguiente formulación.

2. Control Predictivo Generalizado (GPC)

La formulación más conocida que usa este tipo de modelo es sin duda el control predictivo generalizado (Generalized Predictive Control, GPC) [3]. El GPC se ha convertido en uno de los métodos más populares tanto en el mundo industrial como en el académico y ha funcionado con éxito en muchas aplicaciones industriales [4], pudiendo tratar plantas inestables y de fase no mínima a la vez que incorpora la idea de horizonte de control y la consideración de pesos en los incrementos de la señal de control.

En el GPC el modelo de la planta viene dado por una función de transferencia discreta en la forma de un modelo CARIMA (Controller Auto Regressive Integrated Moving Average):

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (1)$$

Donde $\Delta = 1 - z^{-1}$, $u(t)$ e $y(t)$ son las variables de entrada y salida respectivamente y $e(t)$ es un ruido blanco de media cero, A , B y C son polinomios en el operador retardo z^{-1} y d es el tiempo muerto del sistema. Este modelo es muy apropiado para muchas aplicaciones industriales en las que las perturbaciones no son estacionarias, según se justifica en [3]. A partir de ahora el polinomio C se toma igual a 1. Nótese que si se puede truncar entonces puede ser incluido en A y B . En [5] se trata el caso general de ruido coloreado. En general es difícil determinar el valor real de este polinomio, por lo que se puede usar para rechazo óptimo de perturbaciones, aunque es más adecuado su papel en la mejora de la robustez.

El algoritmo GPC consiste en aplicar la secuencia de control que minimiza una función de coste de la forma

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (2)$$

donde $\hat{y}(t+j|t)$ es la predicción óptima de la salida j pasos hacia adelante calculada con datos conocidos en el instante t , N_1 y N_2 son los horizontes mínimo y máximo de predicción y N_u es el horizonte de control, $\delta(j)$ y $\lambda(j)$ son secuencias de ponderación (normalmente constantes) y $w(t+j)$ es la futura trayectoria de referencia.

Con objeto de minimizar la función de coste, hay que calcular la predicción óptima $y(t+j)$ para $j \geq N_1$ y $j \leq N_2$. Esto se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica cuya solución se puede obtener mediante un algoritmo recursivo. Si se hace esto, se pueden escribir los valores futuros de la salida como:

$$y(t+j) = F_j y(t) + E_j B(z^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + E_j e(t+j) \quad (3)$$

Los polinomios E_j y F_j se derivan de la ecuación diofántica y vienen unívocamente definidos con grados $j-1$ y na respectivamente. Se pueden obtener dividiendo 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto se pueda factorizar como $z^{-1}F_j(z^{-1})$. El cociente de la división es el polinomio $E_j(z^{-1})$. Como el grado del polinomio $E_j(z^{-1}) = j-1$, los términos de ruido de la ecuación (3) se encuentran en el futuro y por lo tanto la mejor predicción viene dada por:

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + F_j(z^{-1})y(t)$$

donde $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$.

Para resolver el problema del GPC, es necesario obtener una secuencia de señales de control $u(t), u(t+1), \dots, u(t+N)$ que optimice la expresión (2). Como el proceso tiene un tiempo muerto de d períodos de muestreo, la salida sólo se verá influenciada por la señal de control $u(t)$ tras $d+1$ periodos. Los horizontes se pueden definir por tanto como $N_1 = d+1$, $N_2 = d+N$ y $N_u = N$. Obsérvese que no tiene sentido hacer $N_1 < d+1$ ya que los términos que se añadirían a (2) sólo dependerían de acciones de control pasadas. Por otro lado, si $N_1 > d+1$ los primeros puntos de predicción, que son los mejor estimados, no se tendrían en cuenta.

Considérese ahora el siguiente conjunto de predicciones de j pasos

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+d+1) &= G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t) \\ \hat{y}(t+d+2) &= G_{d+2}\Delta u(t+1) + F_{d+2}y(t) \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+d+N) &= G_{d+N}\Delta u(t+N-1) + F_{d+N}y(t)\end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$y = Gu + F(z^{-1})y(t) + G'(z^{-1})\Delta u(t-1) \quad (4)$$

con

$$\begin{aligned}y &= [\hat{y}(t+d+1|t) \dots \hat{y}(t+d+N|t)]^T \\ u &= [\Delta u(t) \Delta u(t+1) \dots \Delta u(t+N-1)]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \\
G'(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1 z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ (G_{d+N}(z^{-1}) - \cdots - g_{N-1} z^{-(N-1)})z^N \end{bmatrix} \\
F(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nótese que los dos últimos términos en la ecuación (4) dependen sólo del pasado y se pueden agrupar por tanto dentro del vector f (respuesta libre) dando lugar a:

$$y = Gu + f$$

Si las condiciones iniciales son nulas, la respuesta libre también lo es. Si se aplica un escalón unitario a la entrada en el instante t , es decir,

$$\Delta u(t) = 1, \Delta u(t+1) = 0, \dots, \Delta u(t+N-1) = 0$$

la secuencia de salida $t[\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N)]^T$ es igual a la primera columna de la matriz G . Es decir, la primera columna de la matriz G se puede calcular como la respuesta de la planta cuando se aplica un escalón unitario en la variable manipulable. La respuesta libre se puede calcular de forma recursiva como

$$f_{j+1} = z(1 - \tilde{A}(z^{-1}))f_j + B(z^{-1})\Delta u(t-d+j)$$

con $f_0 = y(t)$ y $\Delta u(t+j) = 0$ para $j \geq 0$.

Por otra parte, la función de coste se puede escribir como

$$J = (Gu + f - W)^T(Gu + f - W) + \lambda u^T u \quad (5)$$

donde

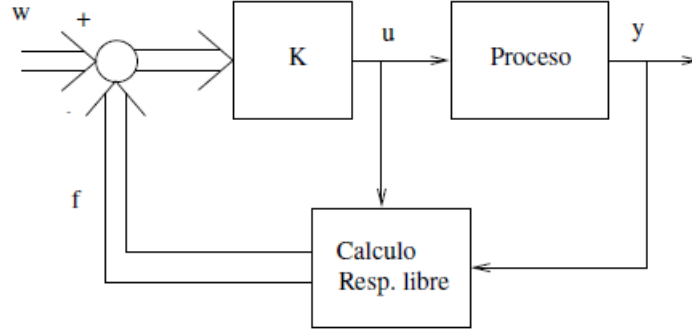


Figura 3: Ley de control del GPC

$$W = [w(t + d + 1) \cdots w(t + d + N)]^T$$

El mínimo de J , considerando que no hay restricciones se puede encontrar igualando a cero el gradiente de J , lo que conduce a:

$$u = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (W - f) \quad (6)$$

En realidad, al usar una estrategia de horizonte deslizante, la señal de control que verdaderamente se envía al proceso es el primer elemento del vector u , dado por

$$\Delta u(t) = K(W - f) \quad (7)$$

donde K es la primera fila de la matriz $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$. Este hecho tiene un claro significado, que se puede derivar fácilmente de la figura 3: si no hay errores futuros (predichos), es decir, si $W - f = 0$, entonces no hay movimientos en la señal de control, ya que el objetivo se satisfará con la evolución libre del proceso. Sin embargo, en cualquier otro caso existirá un incremento de la acción de control proporcional (con factor K) al error futuro. Obsérvese que la acción se toma respecto a errores *futuros*, no a errores *pasados* como en el caso de los controladores realimentados convencionales.

La solución del GPC precisa de la inversión (o al menos de la triangularización) de una matriz de dimensión $N \times N$ que requiere una carga de cómputo considerable. En [3] se introduce el concepto de horizonte de control para reducir la carga de cálculo, considerando que las señales de control futuras se mantendrán constantes tras $N_u < N$. Esto da lugar a la inversión de una matriz de dimensión $N_u \times N_u$ que reduce la carga de cálculo (en particular, si $N_u = 1$ se reduce a un escalar, aunque se restringe la optimalidad del GPC).

2.1. Restricciones

Las restricciones que aparecen serán básicamente amplitud y velocidad de cambio en la señal de control y amplitud en la salida, y se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\underline{U} &\leq u(t) \leq \overline{U} \quad \forall t \\ \underline{u} &\leq u(t) - u(t-1) \leq \overline{u} \quad \forall t \\ \underline{y} &\leq y(t) \leq \overline{y} \quad \forall t\end{aligned}$$

3. GPC Multivariable

Un modelo CARIMA para n -Salidas y m -Entradas puede ser expresado como:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \frac{1}{\Delta}C(z^{-1})e(t) \quad (8)$$

donde $A(z^{-1})$ y $C(z^{-1})$ son matrices de polinomios monicos $n \times n$ y $B(z^{-1})$ es una matriz polinomial $n \times m$ definidas como

$$\begin{aligned}A(z^{-1}) &= I_{n \times n} + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{nb} z^{-nb} \\ C(z^{-1}) &= I_{n \times n} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{nc} z^{-nc}\end{aligned}$$

El operador Δ se define como $\Delta = 1 - z^{-1}$. Las variables $y(t)$, $u(t)$ y $e(t)$ son el vector de salida $n \times 1$, el vector de entrada $m \times 1$ y el vector de ruido $n \times 1$ al tiempo t respectivamente. Se considera la siguiente función objetivo

$$J(N_1, N_2, N_3) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \|\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)\|_R^2 + \sum_{j=1}^{N_3} \|\Delta u(t+j-1)\|_Q^2 \quad (9)$$

3.1. Para el caso $C(z^{-1}) = I_{n \times n}$

Se considera la siguiente ecuación Diofantica.

$$I_{n \times n} = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (10)$$

donde $\tilde{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta$, $E_j(z^{-1})$ y $F_j(z^{-1})$ son matrices de polinomios de orden $j-1$ y na respectivamente.

Si (8) se multiplica por $\Delta E_j(z^{-1})z^{-j}$

$$E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1})y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1})e(t+j)$$

Usando (10)

$$\begin{aligned} (I_{n \times n} - z^{-j}F_j(z^{-1}))y(t+j) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \\ &\quad + E_j(z^{-1})e(t+j) \\ y(t+j) - z^{-j}F_j(z^{-1})y(t+j) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \\ &\quad + E_j(z^{-1})e(t+j) \\ y(t+j) &= F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \\ &\quad + E_j(z^{-1})e(t+j) \end{aligned} \quad (11)$$

Dado que el grado de $E_j(z^{-1})$ es $j-1$, los términos del ruido de la ecuación (11) están todos en el futuro, considerando que $E[e(t) = 0]$, el valor esperado $y(t+1)$ es dado por

$$\hat{y}(t+j|t) = E[y(t+j)] = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \quad (12)$$

3.2. Recursión de la ecuación Diofántica

Consideremos que la solución $(E_j(z^{-1}), F_j(z^{-1}))$ para la ecuación Diofántica es obtenida, esto es

$$I_{n \times n} = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (13)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z^{-1}) &= A(z^{-1})\Delta = I_{n \times n} + \tilde{A}_1 z^{-1} + \tilde{A}_2 z^{-2} + \dots + \tilde{A}_{na} z^{-na} + \tilde{A}_{na+1} z^{-(na+1)} \\ &= I_{n \times n} + (A_1 - I_{n \times n})z^{-1} + (A_2 - A_1)z^{-2} + \dots + (A_{na} - A_{na-1})z^{-na} \\ &\quad - A_{na} z^{-(na-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_j(z^{-1}) &= E_{j,0} + E_{j,1}z^{-1} + E_{j,2}z^{-2} + \dots + E_{j,j-1}z^{j-1} \\ F_j(z^{-1}) &= F_{j,0} + F_{j,1}z^{-1} + F_{j,2}z^{-2} + \dots + F_{j,na}z^{-na} \end{aligned}$$

Ahora consideremos la ecuación Diofántica correspondiente a la predicción $\hat{y}(t+j+1|t)$

$$I_{n \times n} = E_{j+1}(z^{-1})\tilde{A}(z^{-(j+1)}) + z^{-j}F_{j+1}(z^{-1}) \quad (14)$$

Restamos (14)-(13)

$$0_{n \times n} = (E_{j+1}(z^{-1}) - E_j(z^{-1}))\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}(z^{-1}F_{j+1}(z^{-1}) - F_j(z^{-1})) \quad (15)$$

La matriz $(E_{j+1}(z^{-1}) - E_j(z^{-1}))$ es de grado j . Hacemos

$$(E_{j+1}(z^{-1}) - E_j(z^{-1})) = \tilde{R}(z^{-1}) + R_j z^{-j}$$

donde $R(z^{-1})$ es una matriz polinomial $n \times n$ de grado menor o igual que $j - 1$ y R_j es una matriz real $n \times n$. Sustituyendo en (15)

$$0_{n \times n} = \tilde{R}(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}(R_j\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-1}F_{j+1}(z^{-1}) - F_j(z^{-1})) \quad (16)$$

Como $\tilde{A}(z^{-1})$ es monica, es fácil ver que $\tilde{R}(z^{-1}) = 0_{n \times n}$. Esto es, la matriz $E_{j+1}(z^{-1})$ puede ser calculada recursivamente por

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + R_j z^{-j} \quad (17)$$

la siguiente expresión puede ser fácilmente obtenida de (16)

$$\begin{aligned} R_j &= F_{j,0} \\ F_{j+1,i} &= F_{j,i+1} - R_j \tilde{A}_{i+1} \quad \text{para } i = 0 \dots \delta(F_{j+1}) \end{aligned}$$

Se puede ver fácilmente que las condiciones para la recursión de la ecuación están dadas por:

$$E_1 = I \quad (18)$$

$$F_1 = z(I - \tilde{A}) \quad (19)$$

Haciendo la matriz polinomial

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}G_{jp}(z^{-1}) \quad (20)$$

con $\delta(G_j(z^{-1})) < j$, la ecuación de predicción puede ser escrita como

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + G_{jp}(z^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (21)$$

Note que los últimos términos del lado derecho de la ecuación (21) dependen de valores pasados del proceso de las variables de salida y entrada y corresponde a la respuesta libre del proceso considerada si las señales de control se mantienen constantes, mientras que el primer termino solo depende de valores futuros de la señal de control y pueden ser interpretados como la respuesta forzada. Esto es, la respuesta se obtiene cuando las condiciones iniciales son cero $y(t - j) = 0$, $\Delta u(t - j) = 0$ para $j = 0, 1, \dots$. La ecuación (21) puede ser reescrita como

$$\hat{y}(t + j|t) = G_j \Delta u(t - 1) + F_j(z^{-1})y(t)$$

Consideremos ahora j predicciones hacia adelante

$$\begin{aligned} \hat{y}(t + 1|t) &= G_1(z^{-1})\Delta u(t) + f_1 \\ \hat{y}(t + 2|t) &= G_2(z^{-1})\Delta u(t + 1) + f_2 \\ &\vdots \\ \hat{y}(t + N|t) &= G_N(z^{-1})\Delta u(t + N - 1) + f_N \end{aligned} \quad (22)$$

Por las propiedades recursivas de la matriz polinomial E_j descritas arriba, la expresión (22) puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t + 1|t) \\ \hat{y}(t + 2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t + j|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t + N|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{j-1} & G_{j-2} & \cdots & G_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N-1} & G_{N-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

donde $G_j(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{j-1} G_i z^{-i}$. Las predicciones pueden ser expresadas de forma condensada como

$$y = Gu + f$$

Note que si todas las condiciones iniciales son cero, la respuesta libre f también es cero. Si un escalón unitario es aplicado a la primer entrada al tiempo t , esto es

$$\Delta u(t) = [1, 0, \dots, 0]^T, \quad \Delta u(t + 1) = 0, \dots, \Delta u(t + N - 1) = 0$$

la secuencia de salida esperada es igual a la primer columna de la matriz G o a las primeras columnas de las matrices G_0, G_1, \dots, G_{N-1} . Esto es, la primer

columna de la matriz G puede ser calculada como la respuesta de la planta cuando un escalón unitario es aplicado a la primer señal de control. La columna i puede ser obtenida de manera similar aplicando un escalón unitario a la entrada i . En general, la matriz G_k se puede obtener como sigue:

$$(G_k)_{i,j} = y_{i,j}(t + k + 1)$$

donde $(G_k)_{i,j}$ es el elemento (i, j) de la matriz G_k y $y_{i,j}(t + k + 1)$ es la salida i del sistema cuando un escalón unitario es aplicado a la entrada j de control al tiempo t .

Los términos de la respuesta libre pueden ser calculados recursivamente por:

$$f_{j+1} = z(I - \tilde{A}(z^{-1}))f_j + B(z^{-1})\Delta u(t + j)$$

con $f_0 = y(t)$ y $\Delta u(t + j) = 0$ para $j \geq 0$.

Note que si la matriz $A(z^{-1})$ es diagonal, las matrices $E_j(z^{-1})$ y $F_j(z^{-1})$ también son diagonales y el problema es reducido a la recursión de n ecuaciones Diofánticas escalares, las cuales son mucho más simples de programar y requieren menos cálculo computacional. El cálculo de $G_j(z^{-1})$ y f_j es también considerablemente simplificado.

Si la señal de control se mantiene constante después de los primeros N_3 movimientos de control, el conjunto de predicciones $y_{N_{12}} = [\hat{y}(t + N_1|t)^T \cdots \hat{y}(t + N_2|t)^T]^T$ afecta a la función de coste (9) la cual puede ser expresada como

$$y_{N_{12}} = G_{N_{12}}u_{N_3} + f_{N_{12}}$$

donde $u_{N_3} = [\Delta u(t)^T \cdots \Delta u(t + N_3 - 1)^T]^T$, $f_{N_{12}} = [f_{N_1}^T \cdots f_{N_2}^T]^T$ y $G_{N_{123}}$ es la siguiente matriz

$$G_{N_{123}} = \begin{bmatrix} G_{N_1-1} & G_{N_1-2} & \cdots & G_{N_1-N_3} \\ G_{N_1} & G_{N_1-1} & \cdots & G_{N_1+1-N_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_2-1} & G_{N_2-2} & \cdots & G_{N_2-N_3} \end{bmatrix}$$

con $G_i = 0$ para $i < 0$. La ecuación (9) puede ser reescrita como

$$J = (G_{N_{123}}u_{N_3} + f_{N_{12}} - w)^T \bar{R} (G_{N_{123}}u_{N_3} + f_{N_{12}} - w) + u_{N_3}^T \bar{Q} u_{N_3}$$

donde $\bar{R} = \text{diag}(R, \cdots, R)$ y $\bar{Q} = \text{diag}(Q, \cdots, Q)$.

Si no hay restricciones, el óptimo puede ser expresado como

$$u = (G_{N_{123}}^T \bar{R} G_{N_{123}})^{-1} G_{N_{123}} \bar{R} (w - f_{N_{12}})$$

Dado que en la estrategia de control deslizante, solamente $\Delta u(t)$ se necesita al tiempo t . Entonces, solamente las primera m filas de $(G_{N_{123}}^T \bar{R} G_{N_{123}})^{-1} G_{N_{123}} \bar{R}$, llámese K , son calculadas. La ley de control puede ser expresada como

$$\Delta u(t) = K(w - f) \quad (23)$$

Esto es una matriz de ganancias lineal que multiplica el error predicho entre las referencias predichas y la respuesta libre predicha de la planta.

3.3. Restricciones en GPC multivariable

Para un proceso de m entradas y n salidas y restricciones en el horizonte N , las restricciones se pueden expresar como

$$\begin{aligned} 1\bar{U} &\leq Tu(t) + u(t-1)1 \leq 1\bar{U} \quad \forall t \\ 1\underline{u} &\leq u(t) \leq 1\bar{u} \quad \forall t \\ 1\underline{y} &\leq Gu + f \leq 1\bar{y} \quad \forall t \end{aligned}$$

donde 1 es una matriz de dimensiones $(N \times n) \times m$ formada por N matrices identidad de tamaño $m \times m$ y T es una matriz triangular inferior por bloques cuyos elementos no nulos son matrices identidad de dimensión $m \times m$. En forma condensada se puede expresar como

$$Ru \leq c$$

Siendo

$$R = \begin{bmatrix} I_{N \times N} \\ -I_{N \times N} \\ T \\ -T \\ G \\ -G \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1\bar{u} \\ -1\underline{u} \\ 1\bar{U} - 1u(t-1) \\ -1\underline{U} + 1u(t-1) \\ 1\bar{y} - f \\ -1\underline{y} + f \end{bmatrix}$$

En la siguiente sesión se muestra un ejemplo donde se aplica un GPC a un proceso MIMO considerando un pequeño modelo de un tanque reactor agitado.

3.4. Ejemplo

Este ejemplo se muestra en la página 143 – 146 del libro [5]. En esta sesión se desarrollará de manera detallada el ejemplo.

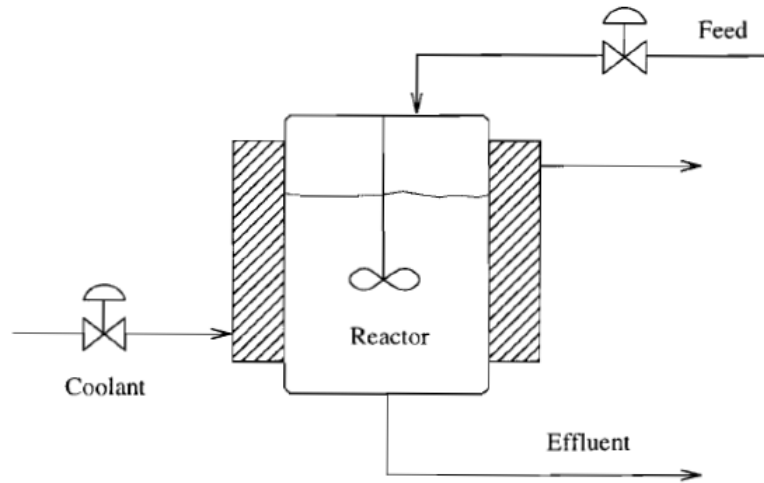


Figura 4: Reactor en tanque agitado

El proceso es descrito por la siguiente matriz de transferencia

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+0.7s} & \frac{5}{1+0.3s} \\ \frac{1}{1+0.5s} & \frac{2}{1+0.4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Discretizando el modelo con un tiempo de muestreo de 0.03 minutos, se obtiene

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0420z^{-1}}{1-0.9580z^{-1}} & \frac{0.4758z^{-1}}{1-0.9048z^{-1}} \\ \frac{0.0582z^{-1}}{1-0.9481z^{-1}} & \frac{0.1445z^{-1}}{1-0.9277z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

esto es

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0420}{1-0.9580z^{-1}} & \frac{0.4758}{1-0.9048z^{-1}} \\ \frac{0.0582}{1-0.9481z^{-1}} & \frac{0.1445}{1-0.9277z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix}$$

aplicando el mínimo común múltiplo por filas, se tiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0420(1 - 0.9048z^{-1})}{(1 - 0.9580z^{-1})(1 - 0.9048z^{-1})} & \frac{0.4758(1 - 0.9580z^{-1})}{(1 - 0.9580z^{-1})(1 - 0.9048z^{-1})} \\ \frac{0.0582(1 - 0.9277z^{-1})}{(1 - 0.9481z^{-1})(1 - 0.9277z^{-1})} & \frac{0.1445(1 - 0.9481z^{-1})}{(1 - 0.9481z^{-1})(1 - 0.9277z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix}$$

de aquí que, para tener la expresión $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1)$, se tiene que

$$\begin{bmatrix} (1 - 0.9580z^{-1})(1 - 0.9048z^{-1}) & 0 \\ 0 & (1 - 0.9481z^{-1})(1 - 0.9277z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0420(1 - 0.9048z^{-1}) & 0.4758(1 - 0.9580z^{-1}) \\ 0.0582(1 - 0.9277z^{-1}) & 0.1445(1 - 0.9481z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix}$$

desarrollando el producto de los polinomios de las matrices, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 - 1.8628z^{-1} + 0.8668z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 1.8695z^{-1} + 0.8737z^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0402 - 0.0364z^{-1} & 0.4758 - 0.4558z^{-1} \\ 0.0582 - 0.0555z^{-1} & 0.1445 - 0.1361z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix}$$

ahora se obtiene $\tilde{A}(z^{-1}) = A\Delta$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 1.8628z^{-1} + 0.8668z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 1.8695z^{-1} + 0.8737z^{-2} \end{bmatrix} [1 - z^{-1}]$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 2.8628z^{-1} + 2.7296z^{-2} - 0.8608z^{-3} & 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} \\ 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} & 1 - 2.8695z^{-1} + 2.7432z^{-2} - 0.8737z^{-3} \end{bmatrix}$$

dado que $\tilde{A}(z^{-1})$ es monica, entonces $\tilde{R}(z^{-1}) = 0_{n \times n}$, por lo tanto, $E_{j+1}(z^{-1})$ puede ser calculada recursivamente por

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + R_j z^{-j} \quad (24)$$

lo siguiente puede ser obtenido fácilmente

$$\begin{aligned} R_j &= F_{j,0} \\ F_{j+1,i} &= F_{j,i+1} - R_j \tilde{A}_{i+1} \quad \text{para } i = 0, \dots, \delta(F_{j+1}) \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para la recursión de la ecuación son dadas por

$$\begin{aligned} E_1 &= I \\ F_1 &= z(I - \tilde{A}) \end{aligned}$$

de aquí que, se puede empezar a calcular las matrices E_i , F_i y R_i . Se tiene que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahora se calcula F_1

$$\begin{aligned} F_1 &= z \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \tilde{A} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 2.8628z^{-1} - 2.7296z^{-2} + 0.8608z^{-3} & 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} \\ 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} & 2.8695z^{-1} - 2.7432z^{-2} + 0.8737z^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de aquí se obtiene

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2.8628 & 0 \\ 0 & 2.8695 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula E_2

$$\begin{aligned}
E_2 &= E_1(z^{-1}) + R_1 z^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.8628 & 0 \\ 0 & 2.8695 \end{bmatrix} z^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + 2.8628z^{-1} & 0 + 0z^{-1} \\ 0 + 0z^{-1} & 1 + 2.8695z^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ahora, para calcular F_2 se tiene que rellenar calculo a calculo y por último obtener F_2 . Se realiza lo siguiente

$$\begin{aligned}
F_{\{2\}(1)} &= \begin{bmatrix} \overbrace{-2.796}^{F\{1\}\{1,1\}(2)} & 0 \\ 0 & \underbrace{-2.7433}_{F\{1\}\{2,2\}(2)} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2.8628 & 0 \\ 0 & 2.8695 \end{bmatrix}}_{R_1} \begin{bmatrix} \overbrace{2.8628}^{\tilde{A}\{1,1\}(2)} & 0 \\ 0 & \underbrace{-2.8695}_{\tilde{A}\{2,2\}(2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5.4660 & 0 \\ 0 & 5.4808 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

NOTA: Abusando de la notación, se describe a continuación que significa cada una de ellas.

- $F_{\{2\}(1)}$ denota que se obtendrá el primer elemento de cada posición de la matriz F_2 .
- $F\{1\}\{1,1\}(2)$ denota el elemento 2 de la posición $\{1,1\}$ de la matriz F_1 .
- $F\{1\}\{2,2\}(2)$ denota el elemento 2 de la posición $\{2,2\}$ de la matriz F_1 .
- $\tilde{A}\{1,1\}(2)$ denota el elemento 2 de la posición $\{1,1\}$ de la matriz \tilde{A} .
- $\tilde{A}\{2,2\}(2)$ denota el elemento 2 de la posición $\{2,2\}$ de la matriz \tilde{A} .

Siguiendo con el calculo de F_2 , se tiene

$$\begin{aligned}
F_{\{2\}(2)} &= \begin{bmatrix} \overbrace{0.8668}^{F\{1\}\{1,1\}(3)} & 0 \\ 0 & \underbrace{0.8737}_{F\{1\}\{2,2\}(3)} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2.8628 & 0 \\ 0 & 2.8695 \end{bmatrix}}_{R_1} \begin{bmatrix} \overbrace{2.7296}^{\tilde{A}\{1,1\}(3)} & 0 \\ 0 & \underbrace{2.7432}_{\tilde{A}\{2,2\}(3)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6.9475 & 0 \\ 0 & -6.9979 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

el siguiente elemento de F_2 se obtiene de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
F_{\{2\}(3)} &= \begin{bmatrix} \overbrace{0}^{F\{1\}\{1,1\}(4)} & 0 \\ 0 & \underbrace{0}_{F\{1\}\{2,2\}(4)} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2.8628 & 0 \\ 0 & 2.8695 \end{bmatrix}}_{R_1} \begin{bmatrix} \overbrace{-0.8668}^{\tilde{A}\{1,1\}(4)} & 0 \\ 0 & \underbrace{-0.8737}_{\tilde{A}\{2,2\}(4)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2.4815 & 0 \\ 0 & 2.5071 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

entonces, F_2 se puede se describe de la siguiente manera

$$F_2 = \begin{bmatrix} 5.4660 - 6.9475z^{-1} + 2.4815z^{-2} & 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} \\ 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} & 5.4908 - 6.9979z^{-1} + 2.5071z^{-2} \end{bmatrix}$$

de aquí se obtiene que

$$R_2 = \begin{bmatrix} 5.4660 & 0 \\ 0 & 5.4908 \end{bmatrix}$$

El calculo de E_3 se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
E_3 &= \begin{bmatrix} 1 + 2.8628z^{-1} & 0 + 0z^{-1} \\ 0 + 0z^{-1} & 1 + 2.2895z^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.4660 & 0 \\ 0 & 5.4908 \end{bmatrix} z^{-2} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + 2.8628z^{-1} + 5.4660z^{-2} & 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} \\ 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} & 1 + 2.2895z^{-1} + 5.4908z^{-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De la misma manera que se ha calculado F_2 , se puede calcular F_3 . Evitando los cálculos, se obtiene

$$F_3 = \begin{bmatrix} 8.7006 - 12.4386z^{-1} + 4.7379z^{-2} & 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} \\ 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} & 8.7580 - 12.5554z^{-1} + 4.7974z^{-2} \end{bmatrix}$$

de aquí, R_3 es

$$R_3 = \begin{bmatrix} 8.7006 & 0 \\ 0 & 8.7580 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz F es la siguiente

$$F = \begin{bmatrix} 2.8628 & 0 & -2.7296 & 0 & 0.8668 & 0 \\ 0 & 2.8695 & 0 & -2.7432 & 0 & 0.8737 \\ 5.4660 & 0 & -6.9475 & 0 & 2.4815 & 0 \\ 0 & 5.4908 & 0 & -6.9979 & 0 & 2.5071 \\ 8.7006 & 0 & -12.4383 & 0 & 4.7379 & 0 \\ 0 & 8.7580 & 0 & -12.5554 & 0 & 4.7974 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula $E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}G'_j(z^{-1})$ para obtener las matrices G y G' .

$$\begin{aligned}
E_1(z^{-1})B(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0402 - 0.0364z^{-1} & 0.4758 - 0.4558z^{-1} \\ 0.0582 - 0.0555z^{-1} & 0.1445 - 0.1361z^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0402 - 0.0364z^{-1} & 0.4758 - 0.4558z^{-1} \\ 0.0582 - 0.0555z^{-1} & 0.1445 - 0.1361z^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0402 & 0.4758 \\ 0.0582 & 0.1445 \end{bmatrix}}_{G_1} + z^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.0364 & -0.4558 \\ -0.0555 & -0.1361 \end{bmatrix}}_{G'_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2(z^{-1})B(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} 1 + 2.8628z^{-1} & 0 + 0z^{-1} \\ 0 + 0z^{-1} & 1 + 2.8695z^{-1} \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} 0.0402 - 0.0364z^{-1} & 0.4758 - 0.4558z^{-1} \\ 0.0582 - 0.0555z^{-1} & 0.1445 - 0.1361z^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0402 + 0.0787z^{-1} - 0.1241z^{-2} & 0.4758 + 0.9063z^{-1} - 1.3049z^{-2} \\ 0.0582 + 0.1116z^{-1} - 0.1591z^{-2} & 0.1445 + 0.2785z^{-1} - 0.3905z^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0402 + 0.0787z^{-1} & 0.4758 + 0.9063z^{-1} \\ 0.0582 + 0.1116z^{-1} & 0.1445 + 0.2785z^{-1} \end{bmatrix}}_{G_2} + z^{-2} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1042 & -1.3049 \\ -0.1591 & -0.3905 \end{bmatrix}}_{G'_2}
\end{aligned}$$

De la misma manera se puede obtener $E_3(z^{-1})B(z^{-1})$ de donde se obtiene G_3 y G'_3 . De aquí que, las matrices G y G' son las siguientes

$$G = \begin{bmatrix} 0.0402 & 0.4758 & 0 & 0 \\ 0.0582 & 0.14458 & 0 & 0 \\ 0.0787 & 0.9063 & 0.0402 & 0.4758 \\ 0.1116 & 0.2786 & 0.0582 & 0.14458 \\ 0.1156 & 1.2958 & 0.0787 & 0.9063 \\ 0.1604 & 0.4029 & 0.1116 & 0.2786 \end{bmatrix}$$

$$G' = \begin{bmatrix} -0.0364 & -0.4558 \\ -0.0555 & -0.1361 \\ -0.1041 & -1.3049 \\ -0.1591 & -0.3905 \\ -0.1988 & -2.4915 \\ -0.3045 & -0.7472 \end{bmatrix}$$

Ya que se calcula G y G' , se puede calcular las salidas predichas mediante

$$\hat{y} = G_j(z^{-1})\Delta u(t + j - 1) + f_j$$

con $f_j = G_{jp}(z^{-1})\Delta u(t - 1) + F_j(z^{-1})y(t)$. Para ello se obtiene las matrices de peso R y Q .

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz k del controlador se obtiene como

$$k = (G^T R G + Q)^{-1} G^T R$$

de la cual, sólo se utilizan las primeras m filas, obteniendo $k1$

$$k1 = \begin{bmatrix} -0.0842 & 0.672 & -0.276 & 1.0047 & -0.4279 & 1.3484 \\ 1.0594 & 0.2584 & 0.4879 & 0.0352 & -0.0321 & -0.1710 \end{bmatrix}$$

Se debe definir las referencias, éstas deben ser la misma cantidad que las salidas. Para este ejemplo se utiliza

$$w = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & \cdots & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & \cdots & 0.3 \end{bmatrix}}_{N2}$$

El calculo de las u futuras se realiza *online* y puede ser calculado como

$$u = k(W - f)$$

el cual implica el calculo de la respuesta libre f , aquí, W debe ser del tamaño del horizonte de predicción, en el caso de este ejemplo

$$W = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

La respuesta libre también es calculada *online*. Las salidas, las referencias y las acciones de control se muestran en la siguiente figura

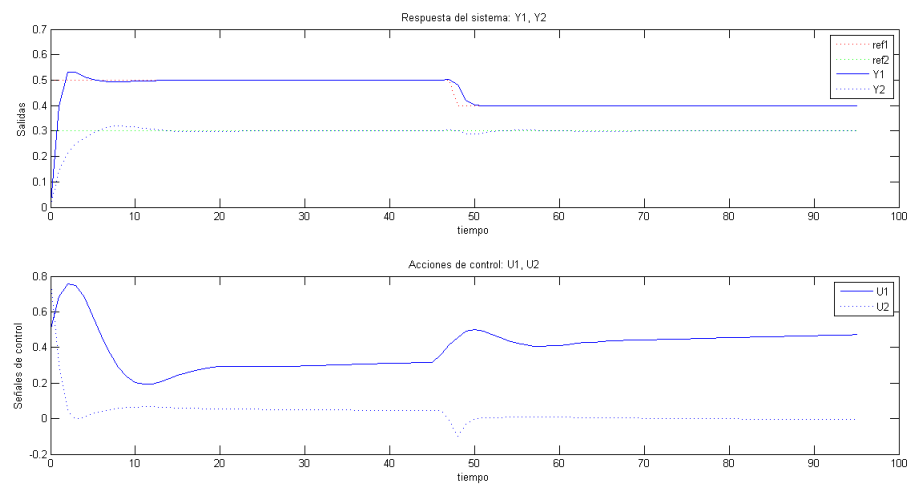


Figura 5: Acciones de control y respuesta del sistema

Referencias

- [1] D. L. Marruedo, “Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez,” Ph.D. dissertation, 2002.
- [2] E. F. Camacho and C. Bordons, “Control predictivo: Pasado, presente y futuro,” *RIAI*, vol. 1, no. 3, pp. 5–28, 2010.
- [3] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. Tuffs, “Generalized predictive control - part i. the basic algorithm,” *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 137–148, 1987.
- [4] D. W. Clarke, “Application of generalized predictive control to industrial processes,” *Control Systems Magazine, IEEE*, vol. 8, no. 2, pp. 49–55, 1988.
- [5] E. F. Camacho and C. Bordons, *Model predictive control*. Springer London, 2004, vol. 2.