Tema 2: La interacción nuclear. El deuterón y la interacción nucleón-nucleón

César Fernández Ramírez
Departamento de Física Interdisciplinar
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

UNED Facultad de Ciencias

Contextualización dentro de la asignatura

- **Bloque I. Estructura nuclear**
  - Tema 1. Principales características del núcleo atómico
  - **Tema 2. La interacción nuclear. El deuterón y la interacción nucleón-nucleón**
  - Tema 3. Modelos nucleares
- Bloque II. Radioactividad y desintegraciones nucleares
  - Tema 4. Desintegración nuclear
  - Tema 5. Desintegración α, β y γ
- Bloque III. Reacciones nucleares e interacción radiación-materia
  - Tema 6. Reacciones nucleares
  - Tema 7. Interacción radiación-materia
- Bloque IV. Física subnuclear
  - Tema 8. El Modelo Estándar de partículas elementales
  - Tema 9. Quarks y hadrones

Cronograma

	L	M	X	J	V	S	D
Octubre		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31			
Noviembre					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	
Diciembre							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					
Enero			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31		

Bloque I
Tema 1
Tema 2
Tema 3
Bloque II
Tema 4
Tema 5
Bloque III
Tema 6
Tema 7
Bloque IV
Tema 8
Tema 9

Apertura foros
Apertura TE
PEC
Periodo vacacional
Cierre foros
Exámenes
Cierre TE

Material disponible

- Material disponible en el repositorio Github de la asignatura
  - https://github.com/cefera/FNyP

  - Esta presentación:
    - ./Presentaciones/Tema3.pdf

  - Código en Python asociado:
    - ./Notebooks/Tema2.ipynb

Esquema

- Introducción
- Deuterón
  - Momento dipolar magnético
  - Momento cuadrupolar eléctrico
  - Función de onda
- Dispersión nucleón-nucleón
  - Desarrollo de ondas parciales
  - Desfasajes
  - Aproximación de alcance efectivo
- Potencial de Yukawa

Objetivos específicos

- Justificar la necesidad de la presencia de fuerzas nucleares para explicar la existencia de los núcleos.
- Estudiar la interacción nuclear en estados ligados (deuterón) y en colisiones nucleón-nucleón.
- Describir las principales caracterísstticas de las fuerzas nucleares.

Introducción

Introducción

- Hemos visto las propiedades generales de los núcleos
  - Núcleos compuestos por nucleones
  - Radio nuclear, densidad de carga y materia
  - Masa y abundancia de los núcleos
  - Energía de ligadura. Estabilidad nuclear
  - Momentos nucleares, espín, isospín, paridad

- Vamos a estudiar
  - El sistema más simple de interacción nuclear: nucleón-nucleón
  - El estado nuclear ligado más simple: el deuterón
  - Propiedades de la interacción nucleón-nucleón

Deuterón

Propiedades generales

- Sistema ligado protón-neutrón. Descubierto en 1932
- Único núcleo estable formado por dos nucleones

$\Rightarrow$ Ideal para estudiar la interacción nucleón-nucleón

A, Z, N	J^P, T	Abundancia	Radio de carga	Energía de ligadura	Masa	Momento dipolar magnético	Momento cuadrupolar eléctrico
2, 1, 1	1^+, 0	0,0145 %	2,1421(88) fm	2,225 MeV	2014,10178 u.m.a. 1876,124 MeV	0,857μ_N	0,00286 b

$d= p + n$

- El momento angular total o espín total se puede escribir: $\vec{J} = \vec{s}_p + \vec{s}_n + \overrightarrow{L}$, donde $\overrightarrow{L}$ es el momento angular orbital entre el protón y el neutrón.
- La paridad viene dada por: $\mathscr{P}(d) = \mathscr{P}(p)\,\mathscr{P}(n)\,\mathscr{P}(L) = (+)(+)\mathscr{P}(L) = \mathscr{P}(L) \Rightarrow L =$ par
- Los espines del protón y el neutrón se pueden acoplar a $S = 0{,}1$
- Si $S = 0$, $|L| \leq J \leq |L|$, y como $J = 1$, entonces $L = 1$ que está prohibido por paridad
- Si $S = 1$, $|L - 1| \leq J \leq |L + 1|$ y como $J = 1$, $L = 0{,}1{,}2$
- Como $L = 1$ está prohibido por la paridad, $L = 0{,}2$

Momento angular

- Utilizando la notación espectroscópica $^{2S+1}L_J$ los dos posibles estados son:

$$L = 0 \text{ (onda } S) : \ ^3S_1 \quad \text{y} \quad L = 2 \text{ (onda } D) : \ ^3D_1$$

- La función del onda del deuterón será una mezcla de ambos estados de momento angular orbital relativo: 96% $^3S_1$ y 4% $^3D_1$
- La función de onda total del deuterón ha de ser antisimétrica bajo el intercambio de dos nucleones $|d\rangle = |\phi(\vec{r})\rangle \otimes |\chi\rangle_S \otimes |\chi\rangle_T$
- La componente de espín $|\chi\rangle_S$ es simétrica (triplete) y la componente espacial $|\phi(\vec{r})\rangle$ también (ondas S y D)
- La componente de isoespín $|\chi\rangle_T$ ha de ser **antisimétrica**

Isospín y función de onda

- El isopín del sistema *N-N* es:

$$|p\rangle = |T = \tfrac{1}{2}, T_3 = +\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|n\rangle = |T = \tfrac{1}{2} T_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|0{,}0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|p\rangle \otimes |n\rangle - |n\rangle \otimes |p\rangle\right]$$

$$|1{,}1\rangle = |p\rangle \otimes |p\rangle$$

$$|1{,}0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|p\rangle \otimes |n\rangle + |n\rangle \otimes |p\rangle\right]$$

$$|1,-1\rangle = |n\rangle \otimes |n\rangle$$

luego $|\chi\rangle_T = |T = 0, T_3 = 0\rangle$ y la f.d.o del deuterón se puede escribir:

$$|d\rangle = \left[a_S|\phi_S(r)\rangle \otimes |^3S_1\rangle + a_D|\phi_D(r)\rangle \otimes |^3D_1\rangle\right] \otimes |\chi\rangle_{S=1} \otimes |\chi\rangle_{T=0}$$

Momento dipolar magnético

- Hipótesis más simple $\mu_d = \langle \overrightarrow{\mu}_d \rangle = \mu_p + \mu_n = 0{,}87956(7)\,\mu_N$ que es mayor que el valor experimental $\mu_d = \langle \overrightarrow{\mu}_d \rangle = 0{,}857438231(5)\,\mu_N$
- El desacuerdo es, mayormente, consecuencia de que el deuterón no es un estado puro de onda *S*.

$$\mu_d = a_S^2\,\mu(^3S_1) + a_D^2\,\mu(^3D_1)$$

$$\mu(^3S_1) = \frac{1}{2}\left(g_s^{(p)} + g_s^{(n)}\right)\mu_N = \mu_p + \mu_n$$

$$\mu(^3D_1) = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(g_s^{(p)} + g_s^{(n)}\right)\right]\mu_N$$

- El valor experimental se obtiene si $a_S^2 = 0{,}96$ y $a_D^2 = 0{,}04$

Momento cuadrupolar eléctrico

- Según vimos en el Tema 1, el momento cuadrupolar eléctrico se escribe:

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \psi_d(\vec{r}) \,|\, r^2 Y^*_{20}(\theta, \phi) \,|\, \psi_d(\vec{r}) \rangle$$

- Como la función de onda del deuterón es una mezcla de estados S y D:

$$Q_d = a_S^2 \langle {}^3S_1 \,|\, Q_{20} \,|^3 S_1 \rangle + a_D^2 \langle {}^3D_1 \,|\, Q_{20} \,|^3 D_1 \rangle + 2a_S a_D \langle {}^3S_1 \,|\, Q_{20} \,|^3 D_1 \rangle$$

- Pero el término $\langle {}^3S_1 \,|\, Q_{20} \,|^3 S_1 \rangle = 0$ y el resultado final es:

$$Q_d = \frac{a_D a_S}{\sqrt{50}} \int u(r) v(r) r^2 dr - \frac{a_D^2}{20} \int v^2(r) r^2 dr = 0{,}00286 \text{ b}$$

Deformación

- La existencia de un momento cuadrupolar implica que el deuterón no es esférico
- Al ser $Q_d = 0{,}00286\,\mathrm{b} > 0$ el deuterón es prolato
- Dado que es un sistema de dos cuerpos, implica la existencia de fuerzas NO centrales

Función de onda

- Caso sencillo. Pozo de potencial central y onda S

  $r < R_0 u(r) = A \sin\left(k_1 r\right)$ $\qquad \hbar k_1 = \sqrt{2\mu\left(V_0 + E_d\right)}$

- $r > R_0 u(r) = C \exp\left(-k_2 r\right)$ $\qquad \hbar k_2 = \sqrt{-2\mu E_d}$

- La continuidad de la f.d.o. y su derivada imponen

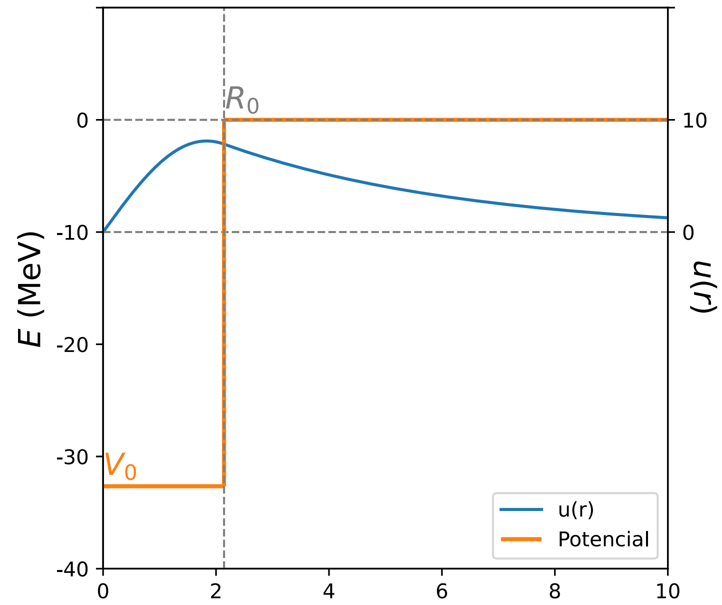
  $k_1 = -\, k_2 \tan\left(k_1 R_0\right)$

- Si $k_1 \gg k_2 \Rightarrow k_1 R_0$
- Si

  $R_0 = 2{,}14\ \text{fm} \Rightarrow V_0 = 32{,}65\ \text{MeV} \Rightarrow V_0 R_0^2 \simeq 150\ \text{MeV fm}^2$

- Para que haya estados ligados en onda S se ha de cumplir que

  $$V_0 R_0^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} = 102{,}33\ \text{MeV fm}^2$$



Dispersión nucleón-nucleón

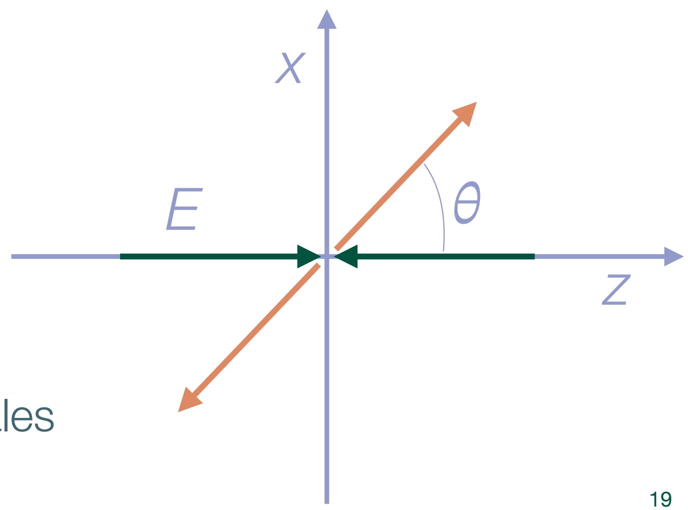
Dispersión elástica bajo potencial central

- Tenemos dos secciones eficaces, una para el estado singlete y otra para el triplete. En el sistema de referencia centro de masas $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{S=0} + \frac{3}{4}\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{S=1}$ y podemos analizar cada sección eficaz independientemente
- La amplitud de colisión entre dos partículas cuya interacción es invariante bajo rotaciones depende de dos variables cinemáticas
- La teoría de dispersión se basa en construir el operador de dispersión *S* que conecta los estados iniciales de dispersión con los finales. Dicho operador *S* cumple:

$$[S, H_0] = 0 \Rightarrow \text{Se conserva la energía}$$

$$[S, \vec{p}_{\text{cm}}] = \vec{0} \Rightarrow \text{Se conserva el momento lineal total}$$

$$[S, \vec{L}^2] = 0 \Rightarrow \text{Se conserva el momento angular total}$$



- Se puede expandir *S* en una base de momento angular: ondas parciales

Desarrollo en ondas parciales

- $S\left|E,\ell,m\right\rangle = S_\ell(E)\left|E,\ell,m\right\rangle$ donde $S_\ell(E) = \mathrm{e}^{2i\delta_\ell(k)}$; teniendo presente: $(\hbar k)^2 = p^2 = E^2 - m^2$

- La amplitude de dispersión se puede escribir:

$$f(k,\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(2j+1\right)\left(S_\ell(k)-1\right)P_\ell(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(2j+1\right)f_\ell(k)P_\ell(\cos\theta)$$

$$f_\ell(k) = \frac{S_\ell(k)-1}{2ik} = \frac{\sin\delta_\ell(k)\mathrm{e}^{i\delta_\ell(k)}}{k}$$

- $$\sigma(k) = \int d\Omega\,\left|f(k,\theta\right|^2 = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\left|f_\ell(k)\right|^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sigma_\ell \text{ donde } \sigma_\ell = 4\pi\left(2\ell+1\right)\frac{\sin^2\delta_\ell(k)}{k^2}$$

- Los desfasajes $\delta_\ell(k)$ contienen toda la información sobre la interacción

Teorema óptico

- Cota de unitaridad: $\sigma_\ell(k) \leq \dfrac{4\pi(2\ell+1)}{k^2}$
- Si $\delta_\ell(k) = \dfrac{\pi}{2} \mod \pi \Rightarrow \sin^2\delta_\ell(k) = 1$ y se satura la cota de unitaridad y se dice que la onda parcial es resonante

- Si calculamos la amplitud a ángulo cero:

$$\mathrm{Im}\left[f(k,0)\right] = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\mathrm{Im}\left[f_\ell(k)\right] = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\frac{\sin^2\delta_\ell(k)}{k} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{k}{4\pi}\sigma_\ell(k) = \frac{k}{4\pi}\sigma(k)$$

se obtiene el denominado teorema óptico

Dispersión a baja energía

- A baja energía sólo contribuyen unas pocas ondas parciales
- Si R_0 es el alcance del potencial (donde es apreciable) solo contribuyen las ondas tales que $\ell < kR_0$
- A muy baja energía $kR_0 \ll 1$sólo contribuye la onda $\ell = 0$

$f(k,\theta) \simeq f_0(k) = \dfrac{e^{\delta_0(k)} \sin \delta_0(k)}{k}$ luego $\sigma(k) \simeq \sigma_0(k) = 4\pi \dfrac{\sin^2 \delta_0(k)}{k^2}$ y

$\dfrac{d\sigma}{d\Omega} \simeq |f_0(k)|^2 = \dfrac{\sin^2 \delta_0(k)}{k^2}$ es isótropa

Relación entre el desfasaje y el potencial

- Tomamos de nuevo el pozo cuadrado

$$r < R_0 \rightarrow u_1(r) = A \sin\left(k_1 r\right) \qquad \hbar k_1 = \sqrt{2\mu(V_0 + E)}$$

donde

$$r > R_0 \rightarrow u_2(r) = C \sin\left(k_2 r + \delta\right) \qquad \hbar k_2 = \sqrt{2\mu E}$$

- Bajo la hipótesis de que la colisión es a baja energía y se pueden utilizar relaciones no relativistas $E = \dfrac{p^2}{2\mu} = \dfrac{\hbar k_2^2}{2\mu}$
- Aplicando la ecuación de continuidad en R_0:

$k_1 \tan\left(k_2 R_0 + \delta\right) = k_2 \tan\left(k_1 R_0\right)$ de donde se obtiene el desfasaje δ
- SI $E = 0$, $u_2(r) = A + Br$

Aproximación de alcance efectivo

- Para el límite $E \to 0$ se puede, se obtiene $\sigma \to 4\pi a^2$ donde a es la «longitud de dispersión» y cumple $a = \dfrac{\sin \delta_0}{k}$ ya que sólo contribuye $\ell = 0$

- Si se normaliza $u_2(0) = 1$, se puede escribir

$$u_2(r) = 1 - \frac{r}{a}; \quad k_2 = 0$$

$$u_2(r) = \frac{\sin\left(k_2 r + \delta_0\right)}{\sin \delta_0}; \quad k_2 > 0$$

- La dependencia del desfasaje con la energía la proporciona el alcance efectivo r_e a través de $k \cot \delta_0 = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2} r_e k^2$

- La sección eficaz queda: $\sigma = 4\pi a^2 \left[\left(1 - \dfrac{a r_e k^2}{2} \right)^2 + a^2 k^2 \right]^{-1}$

Parámetros de dispersión nucleón-nucleón

		$T=1$	$T=0$
pp	a	-17,1(2) fm	-
	R_0	2,794(15) fm	-
nn	a	-16,6(6) fm	-
	R_0	2,84(3) fm	-
np	a	-23,715(15) fm	5,423(5) fm
	R_0	2,73(3) fm	1,738(2) fm

- Simetría de carga
- Si a>0 existe un estado ligado
  Si a<0 la interacción no es lo suficientemente fuerte para ligar el sistema
- Dependencia de la interacción con el isospín

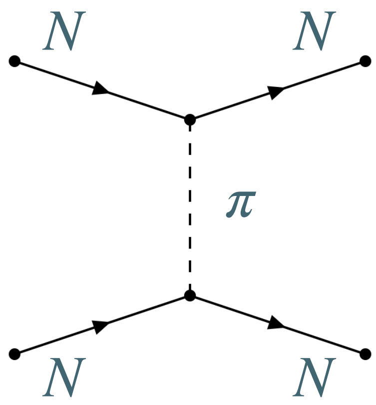
Desfasajes

- Para los sistemas *pp* y *nn*, el isospín es 1, luego hay dos posibilidades:
  $S=0 \rightarrow L$ par ($^1S_0$, $^1D_2$, ...)
  $S=1 \rightarrow L$ impar ($^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$, ...)
- Para el sistema *np*, si el isospín es 1, los casos son los mismos que antes
- Para el sistema *np*, si el isospín es 0, hay dos posibilidades:
  $S=0 \rightarrow L$ impar ($^1P_1$, ...)
  $S=1 \rightarrow L$ par ($^3S_1$, $^3D_1$, $^3D_2$, $^3D_3$, ...)

Potencial de Yukawa

- Desde el punto de vista clásico, el potencial crea un campo con el que se produce la interacción
- Yukawa introdujo la idea de que la interacción era debido al intercambio de cuantos de campo (mesones)
- Esto dió lugar al modelo OPEP (*one pion exchange potential*)
- El pión intercambiado es virtual ya que no cumple la relación $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$

$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-r/r_0}}{r}$$



- donde $r_0 = \hbar/mc$
- La masa del pión es $m_\pi = 139{,}57$ MeV$/c^2$ implicando $r_0 \sim 1{,}4$ fm

Potencial nucleón-nucleón

- Atractivo
- Corto alcance
- Existe saturación
- Energía de ligadura por nucleón promedio 8 MeV
- Tiene un core impenetrable (repulsivo)
- Hay dependencia con el isospín (como se ve por la diferencia entre el singlete y el triplete en el deuterón)
- Hay dependencia con el espín
- Es necesaria una fuerza tensorial que explique el momento cuadrupolar eléctrico del deuterón
- A gran distancia el potencial se puede explicar como el intercambio de un pión (Yukawa)

Potencial nucleón-nucleón (II)

- El potencial más general contiene 12 términos

$$V(r) = V_c(r) V_s(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_{LS}(r) \overrightarrow{L} \left(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 \right) + V_T(r) S_{12}$$

$$+ V_Q(r) \left[\left(\vec{\sigma}_1 \cdot \overrightarrow{L} \right) \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \overrightarrow{L} \right) + \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \overrightarrow{L} \right) \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \overrightarrow{L} \right) \right]$$

$$+ V_{PP} \left[\left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \right) \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} \right) \right]$$

donde $S_{12} = \dfrac{3}{r^2} \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{r} \right)^2 - \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$ a los que hay que añadir otros 6 términos dependientes del isospín $V_\tau(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + V_{s\tau}(r) \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) \left(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right) + \ldots$

Resumen

- Los núcleos existen debido a la existencia de «fuerzas nucleares»
- El mejor sitio para empezar a entender las fuerzas nucleares son los sistemas de dos nucleones y el sistema ligado más sencillo, el deuterón
- Las principales características de la fuerza nuclear son:
  - Es muy intensa, permite superar la repulsión Coulombiana
  - Depende del espín
  - Tiene una componente tensorial
  - Tiene corto alcance
  - Es independiente de la carga eléctrica
  - La energía de ligadura por nucleón satura