KND Control 2

(1) Utilice el método Delta para justificar que si

$$\sigma_y^2 \propto [E(y)]^3$$

$Y = 1/\sqrt{y}$ es la transformación que estabiliza la varianza.

Sea $h(y) = 1/\sqrt{y}$ y $\mu = E(y)$ tenemos que $h \in C^2(\mathbb{R})$.

Como $\sigma_y^2 \propto E(y)^3$, entonces $\exists\, k \in \mathbb{R}$ .t.

$$\sigma^2 = k \cdot E(y)^3 = k \cdot \mu^3$$

luego

$$\begin{aligned} Var(Y) = Var(h(y)) &= \left\{\frac{\partial}{\partial\mu} h(\mu)\right\}^2 \cdot \sigma^2 \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial\mu} \mu^{-\frac{1}{2}}\right\}^2 \cdot \sigma^2 \\ &= -\left\{\frac{1}{2} \mu^{-3/2}\right\}^2 \cdot \sigma^2 \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\mu^3} \\ &= -\frac{k\mu^3}{2\mu^3} \\ &= -\frac{k}{2} = c \end{aligned}$$

Una vez que

$$Var(Y) = c$$

concluimos que la transformación $Y = 1/\sqrt{y}$ estabiliza la varianza de y $\blacksquare$

(2) Muestre que la transformación potencia Box - Cox

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{y^\lambda - 1}{\lambda \dot{y}^{\lambda-1}} & \lambda \neq 0 \\ \dot{y}\log(y) & \lambda = 0 \end{cases}$$

como función de λ es continua en $\lambda = 0$. Donde

$$\dot{y} = \left\{\prod_{i=1}^{n} y_i\right\}^{1/n}$$

Tenemos que

$$y^{(0)} = \dot{y}\log(y)$$

por el otro lado

$$\lim_{\lambda\to 0} y^{(\lambda)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda \dot{y}^{\lambda-1}}$$

una vez que $f(\lambda) = y^\lambda - 1$ ^ $g(\lambda) = \lambda \dot{y}^{\lambda-1}$ son continuas y diferenciables podemos usar la regla de l'Hopital

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda \dot{y}^{\lambda-1}} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{y^\lambda \log(y)}{\dot{y}^{\lambda-1} + \lambda \dot{y}^{\lambda-1}\log(\dot{y})}$$

$$= \frac{\cancel{y^0}^{1} \log(y)}{\dot{y}^{-1}\{1 + \cancel{0\log(\dot{y})}^{0}\}}$$

$$= \dot{y}\log(y)$$

Vemos que

$$\lim_{\lambda\to 0} y^{(\lambda)} = \dot{y}\log(y) = y^{(0)}$$

por lo tanto $y^{(\lambda)}$ es continua en $\lambda = 0$.

■