O Teorema de Bayes e sua Aplicação à Estimativa do Viés de uma Moeda

Carlos Eduardo Gonçalves de Oliveira
LinkedIn: linkedin.com/in/cego669
GitHub: github.com/cego669

O teorema de Bayes

Aqui, exploramos o teorema de Bayes aplicando-o ao problema de estimar a função densidade de probabilidade de o viés de uma moeda ser igual a θ dada uma sequência de jogadas observadas. Neste experimento, realizamos n jogadas de uma moeda, das quais k resultam em "cara".

Assim, o teorema de Bayes fica:

$$f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k) = \frac{f_{\Theta}(\theta)P_{n,k|\theta}(n,k|\theta)}{P_{n,k}(n,k)}$$

Note que $f_{\Theta}(\theta)$ e $P_{n,k}(n,k)$ representam nosso conhecimento inicial (*a priori*) acerca de θ e do número de jogadas.

Mas o que sabemos sobre θ?

Não sabemos **nada** sobre θ antes de jogar a moeda. Portanto, é razoável assumirmos que todos os valores de θ entre 0 e 1 são igualmente prováveis. Nesse sentido, temos:

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta \leq 1, \\ 0, & \text{se } \theta < 0 \text{ ou } \theta > 1. \end{cases}$$

Certo, mas e em relação a $P_{n,k}(n,k)$?

Qual é o nosso conhecimento prévio acerca da função de probabilidade para n e k? Sim, é um pouco estranho pensar sobre isso, mas a verdade é que não precisamos. Basta aplicar a lei da probabilidade total, que nos diz o seguinte:

$$P(A) = \sum_{n} P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Portanto, dado que $f_{\Theta}(\theta)$ é uma função contínua, temos que trabalhar com uma integral em vez de um somatório, da seguinte forma:

$$P_{n,k}(n,k) = \int_0^1 P_{\Theta|n,k}(\theta|n,k)f_{\Theta}(\theta)\,d\theta$$

Perceba que a função $P_{n,k|\theta}(n,k|\theta)$ nada mais é do que a probabilidade da sequência de n jogadas da moeda com viés θ resultar em k caras: uma distribuição binomial. Nesse sentido:

$$P_{n,k|\theta}(n,k|\theta) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$$

Substituindo devidamente as funções, temos que resolver esta integral:

$$P_{n,k}(n,k) = \int_0^1 \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} \cdot 1\, d\theta$$

Como $\binom{n}{k}$ é uma constante em relação a θ, podemos colocá-la para fora da integral:

$$P_{n,k}(n,k) = \binom{n}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{n-k}\, d\theta$$

A integral que temos que resolver é conhecida como a forma normalizada da função beta. Seu resultado é dado da seguinte forma:

$$\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{n-k}\, d\theta = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama, que generaliza o fatorial para números reais, com a propriedade $\Gamma(x+1) = x!$ para números inteiros x.

Substituindo o valor da integral:

$$P_{n,k}(n,k) = \binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}$$

Utilizando a relação entre a função gama e o fatorial ($\Gamma(k+1) = k!$), temos:

$$P_{n,k}(n,k) = \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

Sabendo que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, podemos simplificar:

$$P_{n,k}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$P_{n,k}(n,k) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Portanto, temos:

$$P_{n,k}(n,k) = \frac{1}{n+1}$$

Conseguimos! Foi um caminho longo para chegarmos num resultado tão simples, não é mesmo!?

Substituindo tudo no teorema de Bayes

Agora que determinamos cada um dos termos no teorema de Bayes, podemos substituir tudo na equação inicial:

$$f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k) = \frac{1 \cdot \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}}{\frac{1}{n+1}}$$

Simplificando:

$$f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k) = (n+1)\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

Lembrando que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, podemos reescrever:

$$f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k) = (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

Interpretando o resultado

A função densidade de probabilidade condicional $f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k)$ nos dá a probabilidade de o viés da moeda ser θ, dado que observamos k caras em n jogadas. Note que este resultado corresponde a uma distribuição beta, definida como:

$$\text{Beta}(\theta;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \quad \text{para } 0 \le \theta \le 1.$$

No nosso caso, temos que:

$$\alpha = k+1 \quad \text{e} \quad \beta = n-k+1.$$

Portanto, $f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k)$ segue uma distribuição beta com parâmetros $\alpha = k+1$ e $\beta = n-k+1$:

$$f_{\Theta|n,k}(\theta|n,k) = \text{Beta}(\theta; k+1, n-k+1).$$

Conclusão

Aplicando o teorema de Bayes, mostramos que a densidade de probabilidade posterior do viés de uma moeda θ, dado o número de caras k em n jogadas, segue uma distribuição beta. Este é um resultado fundamental e interessantíssimo em inferência bayesiana, pois nos permite atualizar nossas crenças sobre θ com base em evidências observadas.