实变函数与测度论基础

Chapter 0: 数学分析知识点回顾

杜水淼 dushuimiao@shu.edu.cn

上海大学中欧工程技术学院

Trimestre d'hiver 2024-2025

什么是实数?

实数理论的建立趋于公理化

- 有理数 $\cup$ 无理数
- 代数数 $\cup$ 超越数
- 阿基米德全序域
- 戴德金无端分划
- 有理数 Cauchy 列等价类

1. 实数的完备性
   - 实数集与确界原理
   - 实数列的极限
   - 实数上的开集、闭集、自密集与稠密集
2. 函数的极限与函数的连续性
3. 微/积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数

实数完备性的六大等价定理

1. 确界原理

设 S 为 $\mathbb{R}$ 上的非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

2. 单调有界原理

在实数系中，有界的单调数列必有极限.

3. Cantor 闭区间套定理

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套，则在实数系中存在唯一的点 ξ，使得 $\xi \in [a_n, b_n]$，$\forall n \in \mathbb{Z}$.

4. Heine-Borel 有限覆盖定理

有界闭集的任一无限开覆盖中存在有限开覆盖.

实数完备性的六大等价定理

5(a). Weierstrass 聚点定理

实数系中的任一有界无限点集 S 至少存在一个聚点.

5(b). Bolzano-Weierstrass 致密性定理

任何有界实数列必有收敛子列.

6. Cauchy 收敛定理

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$，使得 $n, m > N_\varepsilon$ 时有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

实数完备性定理等价性的证明：参考《数学分析》，华东师范大学数学系，高等教育出版社，2010.

实数集与确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 的几个重要性质

- $\mathbb{R}$ 对加法构成群，对乘法构成环，对加法和乘法构成域.
- $\mathbb{R}$ 对加法和数乘构成线性空间.
- $\mathbb{R}$ 是全序集.
- $\mathbb{R}$ 具有阿基米德性.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{若} b > a > 0, \text{则存在正整数} n, \text{使得} na > b$$

- $\mathbb{R}$ 具有稠密性：任意两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.
- 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中稠密.

实数集与确界原理

数集 S 的上确界

设 $S \subset \mathbb{R}$，实数 η 满足：

1. $\forall x \in S$，有 $x \leqslant \eta$，即 η 是 S 的上界；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$，即 η 又是 S 的最小上界，

则称 η 为 S 的上确界，记作 $\eta = \sup S$. 类似地，下确界 $\inf S$ 定义为 S 的最大下界.

实数集与确界原理

确界的几个性质

1. 存在性（确界原理）;
2. 唯一性;
3. 极限保号性 $\inf S \leqslant \sup S$;
4. 确界可能属于 S，也可能不属于 S.

推广的确界原理

任一非空实数集必有上下确界（正常的或非正常的）.

1. 实数的完备性
   - 实数集与确界原理
   - 实数列的极限
   - 实数上的开集、闭集、自密集与稠密集
2. 函数的极限与函数的连续性
3. 微/积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数

实数列的极限

实数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

设 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$，$a \in \mathbb{R}$. 若对任给的正数 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，实数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限.

实数列收敛的等价刻画

任给正数 $\varepsilon > 0$，若在邻域 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多有有限个，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

实数列的极限

实数列发散于无穷

若数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正数 $M>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$a_n > M (a_n < -M)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正（负）无穷，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

实数列的极限

极限的保号性

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$（或 < 0），则对任何 $a' \in (0, a)$ (或 $a' \in (a, 0)$)，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时有 $a_n > a'$ (或 $a_n < a'$).

极限的保不等式性

设 $\{a_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 均为收敛数列. 若存在正整数 N_0，使得当 $n > N_0$ 时有 $a_n \leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

实数列的极限

实数列的上下极限

设 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. 定义 $\{a_n\}$ 的上极限为:

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim}\{a_n\} &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} max(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{a_k\} \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n} a_k
\end{aligned}
$$

实数列的极限

实数列的上下极限

设 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. 定义 $\{a_n\}$ 的下极限为:

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\{a_n\} &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} min(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\{a_k\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n} a_k\end{aligned}$$

实数列的极限

定理（存在性）

设 $\{a_n\}$ 为实数列，则其上下极限必存在.

定理（收敛）

若实数列 $\{a_n\}$ 的上下极限相等，则 $\{a_n\}$ 存在极限.

实数上的开集

实数集上的环境

实数中包含 x_0 的任何一个开区间 (α, β) 称为 x_0 的一个环境. 特别地，如果 ε 是一个正实数，称 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 为 x_0 的 ε-环境，记为 $O(x_0, \varepsilon)$.

注：在拓扑空间中统称环境，在赋距空间、赋范空间、内积空间等中又称邻域.

内点

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上一个非空点集, 如果存在 x_0 的环境 $(\alpha, \beta) \subset A$，那么称 x_0 为点集 A 的内点.

实数上的开集

实数中的开集

设 G 是 $\mathbb{R}$ 上一个非空点集，如果 G 中的没一点都是 G 的内点，则称 G 为开集.

开集的基本性质

- 空集 $\emptyset$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 是开集;
- 开集的任意并是开集;
- 开集的有限交是开集.

实数中开集的构造定理

实数中的构成区间

设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的开集. 如果开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$ 而且端点 $\alpha,\beta\notin G$, 那么称 (α,β) 为 G 的一个构成区间.

实数中开集的构造定理

$\mathbb{R}$ 上的任意一个非空开集可以表示成有限个或可列个互不相交的构成区间的并集. 当非空开集表示成互不相交的开区间的并集时，这些区间必是构成区间.

实数中的闭集

实数中集的聚点

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的点集，x_0 是 $\mathbb{R}$ 中的一点（不一定属于 A），如果在 x_0 的任何一个环境 (α, β) 中，总含有集 A 中不同于 x_0 的点，即 $((\alpha, \beta) \cap \{x_0\}) \neq \emptyset$，那么称 x_0 为点集 A 的聚点，或极限点.

实数中集的导集

点集 A 的聚点全体所成的集称为 A 的导集，记为 A'.

实数中的闭集

实数中的闭集

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的点集，若 $A' \subset A$，则称 A 为闭集.

闭集的充要条件 1.

点集 A 为闭集的充要条件是 A 中任何一个收敛点列的极限必属于 A.

实数中的闭集

闭集的基本性质

- 空集 $\emptyset$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 是闭集;
- 闭集的有限并是闭集;
- 闭集的任意交是闭集.

注: $\mathbb{R}$ 中既是开集又是闭集的集只有 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}$.

实数中的闭集

集的闭包

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的点集，称 $A \cup A'$ 为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$.

闭包的性质

- 集 A 的闭包是闭集；
- $x \in \overline{A}$ 的充要条件是 x 的每个环境 (α, β) 与 A 相交.

闭集的充要条件 2.

集 A 是闭集的充要条件是 $A = \overline{A}$.

实数中的完全集

自密集

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的点集，若 $A \subset A'$, 则称 A 是自密集.

完全集

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的点集，若 $A = A'$, 则称 A 是完全集.
注：完全集就是自密闭集.

实数中的稠密集和疏朗集

稠密集

设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 上的两个点集，若 B 中每个点的任一环境中必有 A 的点，则称 A 在 B 中稠密. 当 B 是全直线 $\mathbb{R}$ 时，称 A 是稠密集.

疏朗集

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的点集，若 A 在每个不空的开集中都不稠密，则称 A 是疏朗集.

1. 实数的完备性
2. 函数的极限与函数的连续性
   - 函数与函数列的极限
   - 函数的连续性
3. 微/积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数

函数的极限

函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

函数的极限

局部有界性

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有界.

局部保号性

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a>0$，则对任何正数 $r<a$，存在 $U^\circ(x_0)$，使得对一切 $x\in U^\circ(x_0)$ 有 $f(x)>r>0$.

保不等式性

设 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

函数的极限

Heine 定理（归结原则）

设 f 在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 上有定义. 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：对任何含于 $U^\circ(x_0;\delta)$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在且相等.

Cauchy 收敛准则

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的充要条件：存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任何 $\delta > 0$（无论 δ 多么小），总可以找到 $x_1, x_2 \in U^\circ(x_0;\delta)$，使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$$

函数列的极限

函数列的上极限函数

设 $\{f_n(x)\}$ 为实函数列，其上极限函数定义为：

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\{f_n(x)\} &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} max(f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots, f_{n+m}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}\{f_m(x)\} \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{m\geq n} f_m(x)\end{aligned}$$

函数列的极限

函数列的下极限函数

设 $\{f_n(x)\}$ 为实函数列，其下极限函数定义为：

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\{f_n(x)\} &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} min(f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots, f_{n+m}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geq n}\{f_m(x)\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{m\geq n} f_m(x)\end{aligned}$$

函数列的极限

定理（存在性）

设 $\{f_n(x)\}$ 为实函数列，则其上下限函数必存在.

定理（收敛）

若实函数列 $\{f_n(x)\}$ 的上下限函数相等，则称 $\{f_n(x)\}$ 存在极限函数.

函数的连续性

连续性的定义（函数值的极限等于极限的函数值）

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

最值定理

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

介值定理

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$. 若 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得

$$f(x_0)=\mu$$

函数的连续性

一致连续性的定义

设 f 为定义在区间 I 上的函数. 若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对任何 $x_1, x_2 \in I$，只要 $|x_1 - x_2| < \delta$，就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

则称 f 在区间 I 上一致连续.

一致连续性定理

有界闭区间上的连续函数一致连续.

1 实数的完备性

2 函数的极限与函数的连续性

3 微/积分中值定理
   - 微分中值定理
   - 积分中值定理

4 数项级数与函数项级数

微分中值定理

Rolle 中值定理

若函数 f 满足如下条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
2. 在开区间 (a,b) 上可导;
3. $f(a)=f(b)$,

则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0$$

微分中值定理

Lagrange 中值定理

若函数 f 满足如下条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
2. 在开区间 (a,b) 上可导;

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

微分中值定理

Darboux 中值定理

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，k 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = k$$

微分中值定理

Cauchy 中值定理

若函数 f 和 g 满足如下条件:

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续;
2. 在开区间 (a, b) 上都可导;
3. $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不同时为零;
4. $g(a) \neq g(b)$,

则存在 $\xi \in (a, b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

微分中值定理

L'Hospital 中值定理

若函数 f 和 g 满足如下条件:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$;
2. 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 上二者都可导，且 $g'(x) \neq 0$;
3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$;

则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

微分中值定理

Taylor 中值定理

若函数 f 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶的连续导函数，在 (a,b) 上存在 $(n+1)$ 阶导函数，则对任意给定的 $x,x_0\in[a,b]$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

1. 实数的完备性
2. 函数的极限与函数的连续性
3. 微/积分中值定理
   - 微分中值定理
   - 积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数

积分中值定理

积分第一中值定理

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

推广的积分第一中值定理

若函数 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上连续，且 g 在 $[a,b]$ 上不变号，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

积分中值定理

积分第二中值定理

设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积。

1. 若函数 g 在 $[a,b]$ 上递减，且 $g(x)\geqslant 0$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$
2. 若函数 g 在 $[a,b]$ 上递增，且 $g(x)\geqslant 0$，则存在 $\eta\in[a,b]$，使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\,dx$$

积分中值定理

微积分基本定理（Newton-Leibniz 定理）

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，定义

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$$

那么函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导，且

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),\quad x\in[a,b]$$

可积性

可积的必要条件

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上必定有界。

可积的充分条件 1

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

可积的充分条件 2

若函数 f 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

可积的充分条件 3

若函数 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

1. 实数的完备性
2. 函数的极限与函数的连续性
3. 微/积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数
    - 数项级数
    - 函数项级数

1. 实数的完备性
2. 函数的极限与函数的连续性
3. 微/积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数
   - 数项级数
   - 函数项级数

数项级数

级数收敛的 Cauchy 准则

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m > N$ 以及对任意的正整数 p，都有：

$$\left|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}\right| < \varepsilon$$

数项级数

级数收敛的 Cauchy 准则（推论）

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不收敛的充要条件是：存在正数 ε_0，对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0(> N)$ 和 p_0，使得

$$\left|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}\right| \geqslant \varepsilon_0$$

级数收敛的 Cauchy 准则（推论）

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

数项级数

级数的绝对收敛

设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$$

那么任意改变求和顺序，级数仍绝对收敛，且极限不变.

1. 实数的完备性
2. 函数的极限与函数的连续性
3. 微/积分中值定理
4. 数项级数与函数项级数
   - 数项级数
   - 函数项级数

函数项级数

函数列的极限函数

设 $\{f_n\}$ 为定义在数集 E 上的函数列，$D \subset E$ 为函数列的收敛域. 设 f 为 D 上的函数. 若对每一固定的 x，任给正数 ε，恒存在正整数 $N(\varepsilon, x)$，使得当 $n > N(\varepsilon, x)$ 时，总有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

那么称 f 为函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数，记为

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D$$

函数项级数

函数列的一致收敛（定义）

设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上，若对任给的正数 ε，恒存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对一切 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

那么称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

函数列一致收敛的 Cauchy 准则

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛的充要条件是：对任给正数 ε，恒存在正整数 N，使得当 $m, n > N$ 时，对一切 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

函数项级数

函数列一致收敛的 Cauchy 准则（推论 1）

函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$$

函数列一致收敛的 Cauchy 准则（推论 2）

函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上不一致收敛于 f 的充要条件是：存在点列 $\{x_n\}\subseteq D$，使得 $|f_n(x_n)-f(x_n)|$ 不收敛于 0.

函数项级数

一些定义

函数项级数 $S(x)$，部分和函数 $S_n(x)$，余项函数 $R_n(x)$：

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x),\quad S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad R_n(x)=S(x)-S_n(x)$$

函数项级数一致收敛的充要条件

函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0$$

函数项级数

函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则

函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是：对任给正数 ε，恒存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对一切 $x \in D$ 和一切正整数 p，都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则（推论）

函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

极限函数的连续性、可积性、可微性

连续性 1

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上一致收敛于 $f(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

连续性 2

若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛，且每一项都连续，则其极限函数 $f(x)$ 在 I 上也连续.

连续性 3

若连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 I 上连续.

极限函数的连续性、可积性、可微性

可积性

若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

极限函数的连续性、可积性、可微性

可微性

设 $\{f_n\}$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的函数列，若 $x_0 \in [a,b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点，$\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

可微性（推论）

设函数列 $\{f_n\}$ 定义在区间 I 上，若 $x \in I$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点，且 $\{f_n'\}$ 在 I 上内闭一致收敛，则 f 在 I 上可导，且

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

函数项级数的连续性、可积性、可微性

连续性（逐项求和）

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，则其和函数在 $[a,b]$ 上连续：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$$

函数项级数的连续性、可积性、可微性

可积性（逐项积分）

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx$$

函数项级数的连续性、可积性、可微性

可积性（逐项微分）

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上每一项都有连续的导函数，$x \in [a, b]$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} u_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)$$

以上为本课程的先修知识，详细内容可参考：

- 《数学分析教程》，常庚哲，史济怀，中国科学技术大学出版社，2012.
- 《卓里奇数学分析教程》，卓里奇，世界图书出版公司，2020.
- 《数学分析讲义》，阿黑波夫等，王昆扬译，高等教育出版社，2006.
- 《数学分析》，周民强，科学出版社，2021.
- 《数学分析》，华东师范大学数学系，高等教育出版社，2019.

以上文献从不同角度对实数理论进行了阐释。