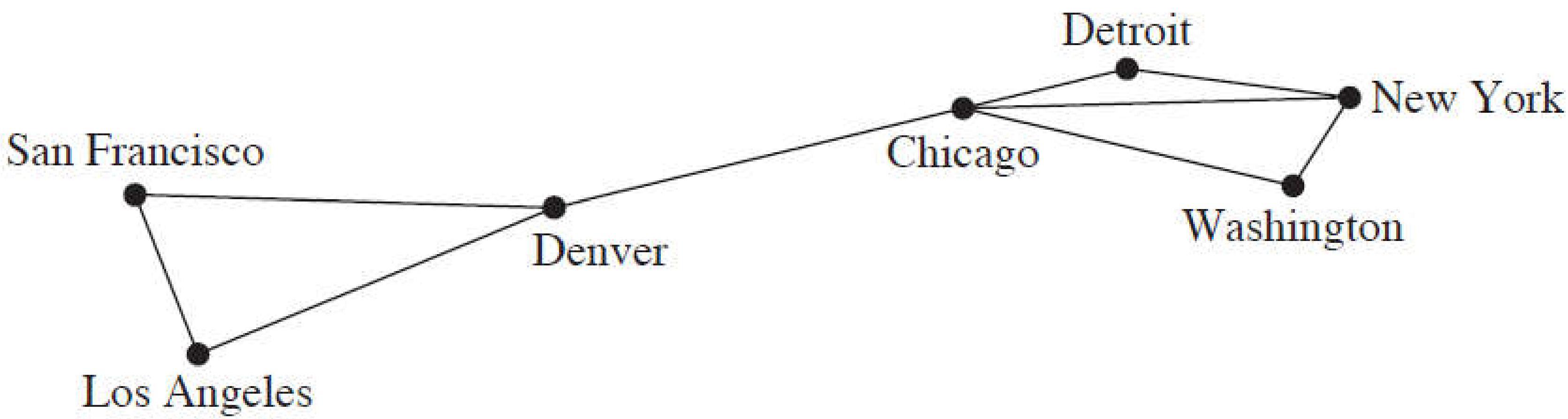
گراف

- گراف، ساختاری است که شامل رئوس (Vertices) و یال‌هایی (Edges) برای اتصال این رئوس است.
- با توجه به تفاوت در نوع و تعداد یال‌ها که رئوس را به هم وصل می‌کنند، انواع مختلفی گراف وجود دارد:
  - گراف ساده
  - گراف چندگانه
  - شبه‌گراف
  - گراف جهت‌دار
  - گراف جهت‌دار چندگانه

گراف ساده

- یک گراف ساده، $G = (V, E)$ شامل V یک مجموعه غیرتهی از رئوس است و E که مجموعه‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر V است که به آن یال گویند.



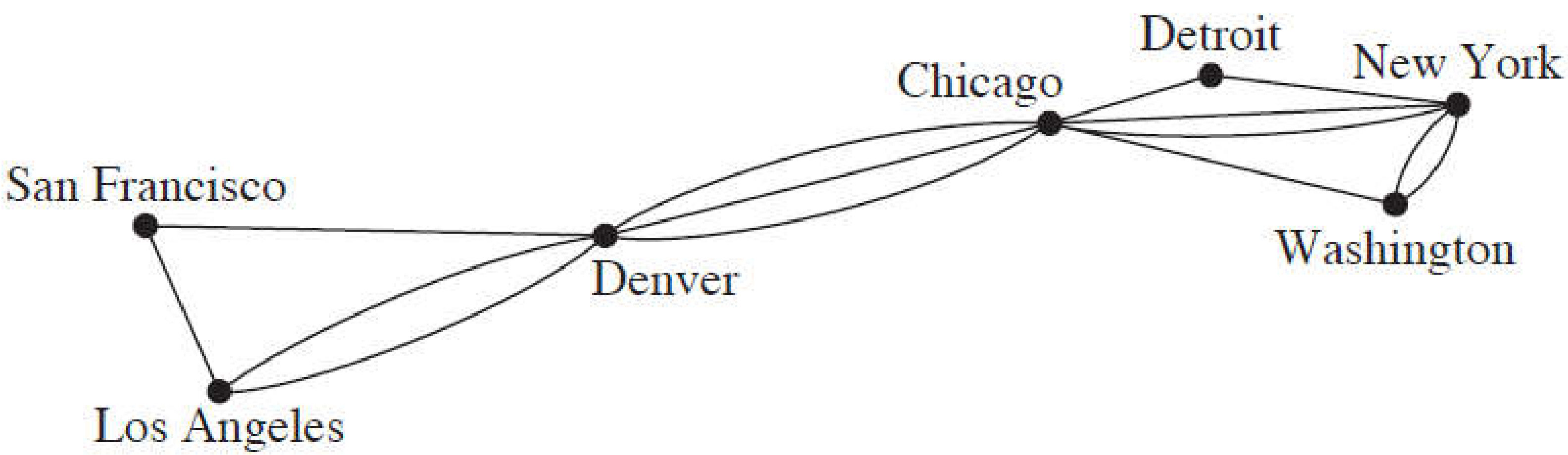
گراف چندگانه

- یک گراف چندگانه $G = (V, E)$، شامل مجموعه‌ای از رئوس V و مجموعه‌ای از یال‌های E و یک تابع f از E به مجموعه زیر است:

$$\{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$$

- یال‌های e_1 و e_2 را یال موازی یا چندگانه گویند هرگاه داشته باشیم:

$$f(e_1) = f(e_2)$$



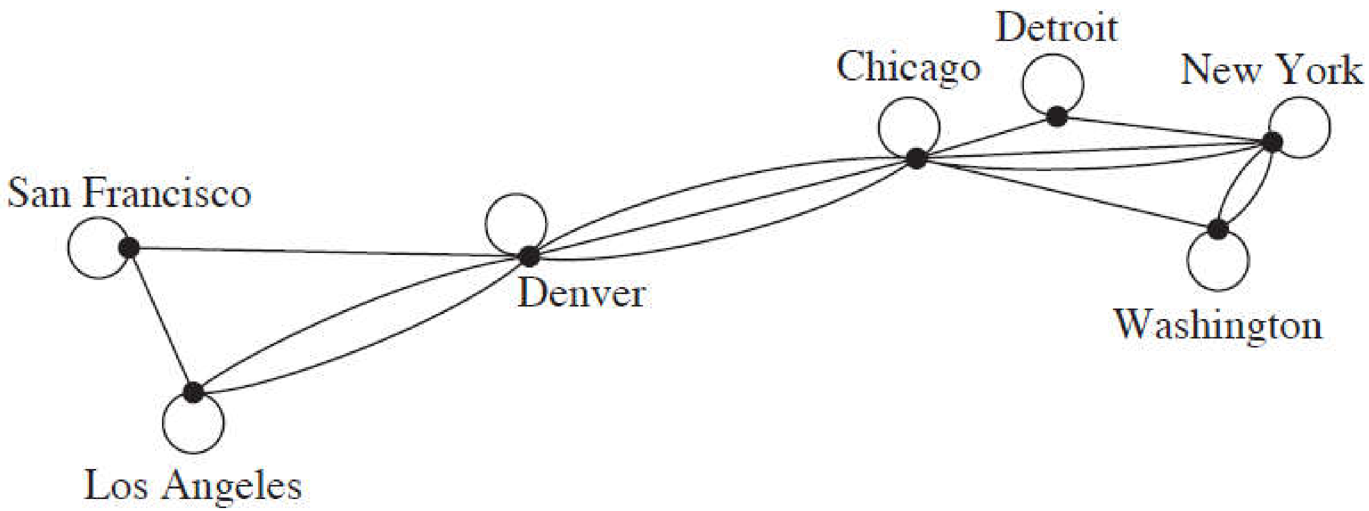
شبه گراف

- یک شبه گراف $G=(V,E)$، شامل مجموعه‌ای از رئوس V و مجموعه‌ای از یال‌های E است و تابع f از E به مجموعه‌ی زیر:

$$\{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$$

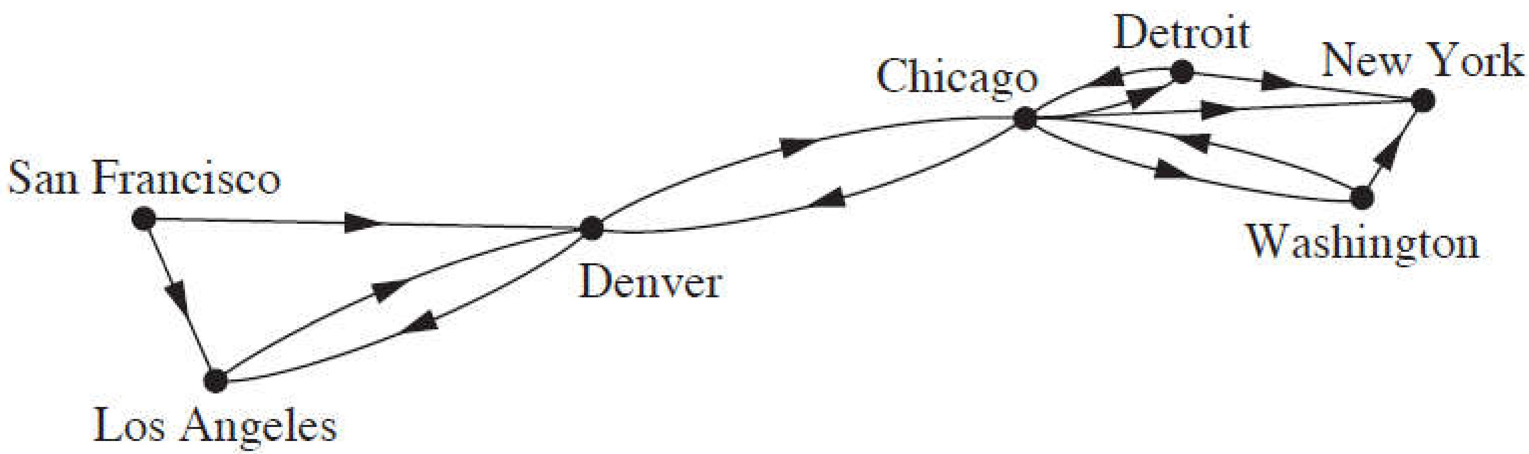
- یک یال را حلقه گویند هرگاه به ازای برخی از رئوس u متعلق به V داشته باشیم:

$$f(e)=\{u,u\}=\{u\}$$



گراف جهتدار

- گراف جهتدار (V, E) شامل مجموعه‌ای از رئوس V و مجموعه‌ای از یال‌های E است که زوج مرتبی از اعضای V می‌باشد.
- یال از رأس u به v را بصورت (u, v) نمایش می‌دهند.



- حداکثر تعداد یال‌ها در یک گراف جهتدار $G = (V, E)$ چند است؟

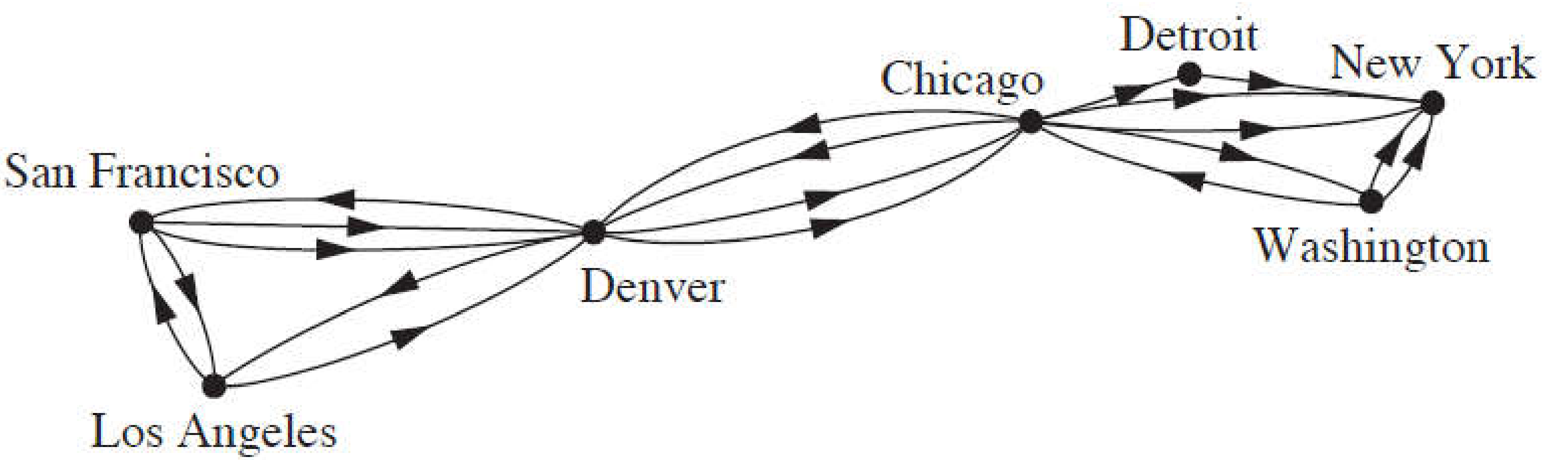
گراف جهتدار چندگانه

- گراف چندگانه $G=(V,E)$، شامل مجموعه‌ای از رئوس V و مجموعه‌ای از یال‌های E است و یک تابع f از E به مجموعه زیر است:

$$\{(u,v) \mid u,v \in V\}$$

- یال‌های e_1 و e_2 را یال‌های چندگانه گوییم هرگاه

$$f(e_1)=f(e_2)$$



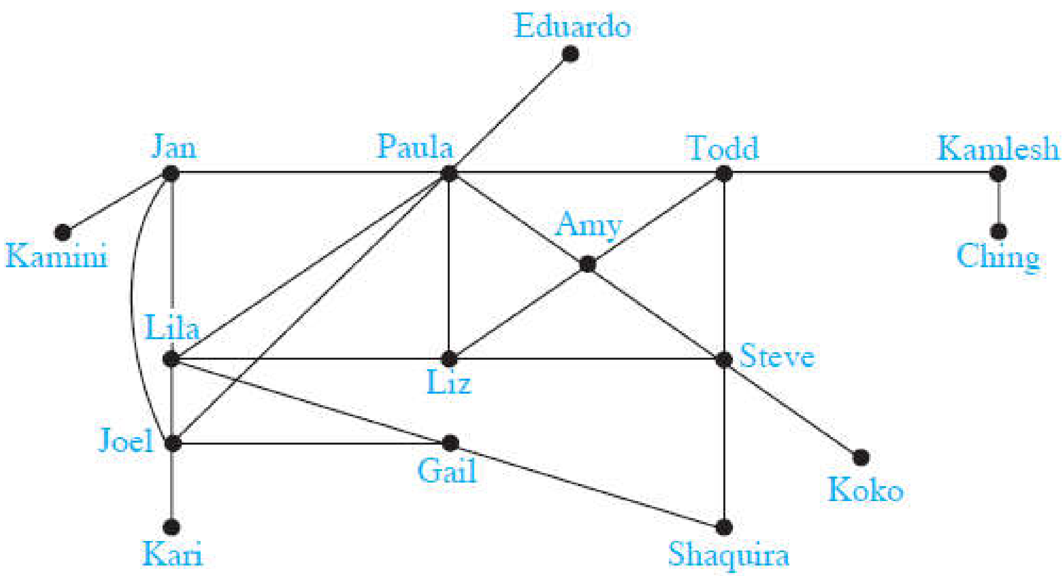
گراف (ادامه)

Graph Terminology.

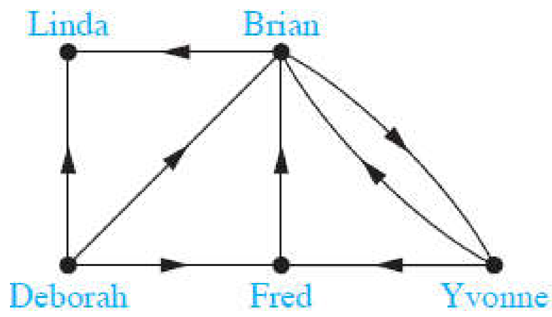
Type	*Edges*	*Multiple Edges Allowed?*	*Loops Allowed?*
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Simple directed graph	Directed	No	No
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes
Mixed graph	Directed and undirected	Yes	Yes

کاربردها و مدل‌های گراف

- شبکه‌های اجتماعی: مدلسازی ساختارهای اجتماعی براساس روابط گوناگون بین افراد و گروه‌ها
  - افراد یا سازمان‌ها، رئوس
  - ارتباط بین آن‌ها، یال



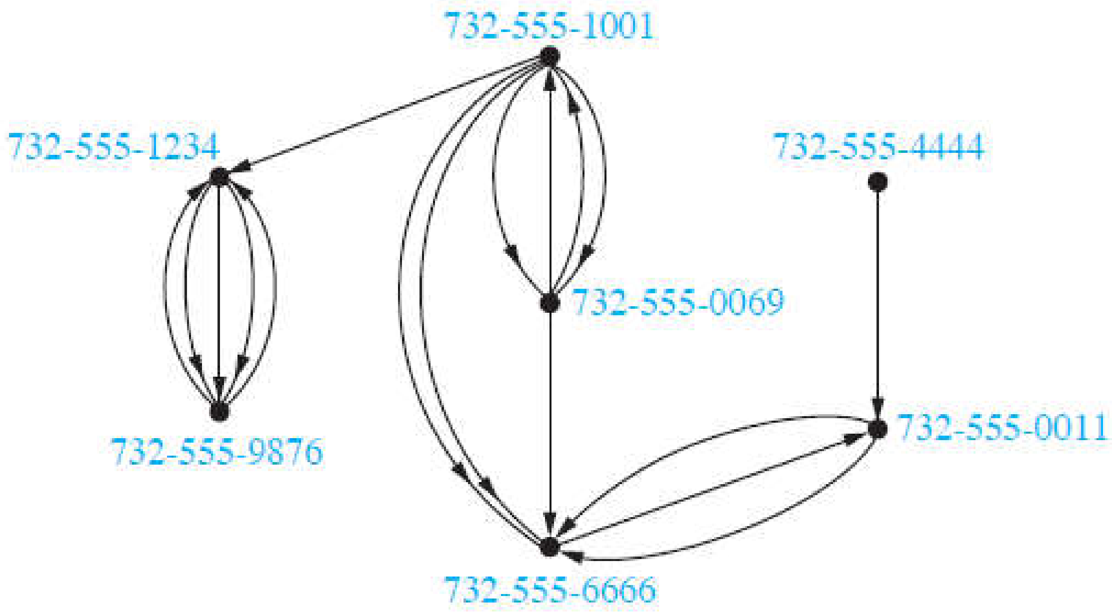
An Acquaintanceship Graph.



An Influence Graph.

کاربردها و مدل‌های گراف (ادامه)

- شبکه‌های ارتباطی: ابزارها به عنوان رئوس و یال‌ها به عنوان نوع ارتباط بین ابزارها.

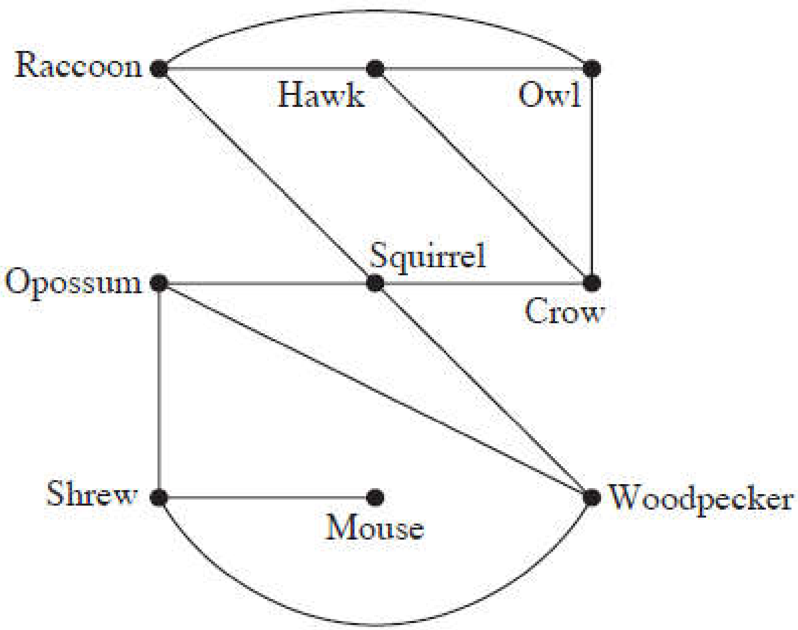


A Call Graph.

کاربردها و مدل‌های گراف (ادامه)

- شبکه‌های حمل و نقل: می‌توان از گراف‌ها برای مدل‌سازی انواع گوناگون شبکه‌های حمل و نقل از جمله جاده، هوایی، ریلی و دریایی استفاده کرد.

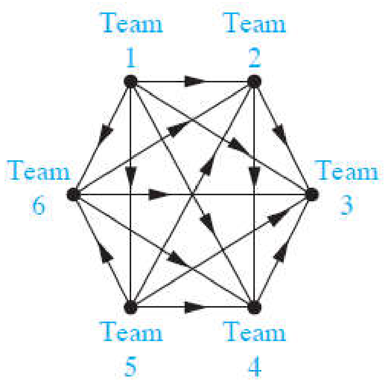
- شبکه‌های بیولوژیکی
  - گراف هم‌پوشانی نیچه در اکولوژی
  - گراف برهم‌کنش پروتئین



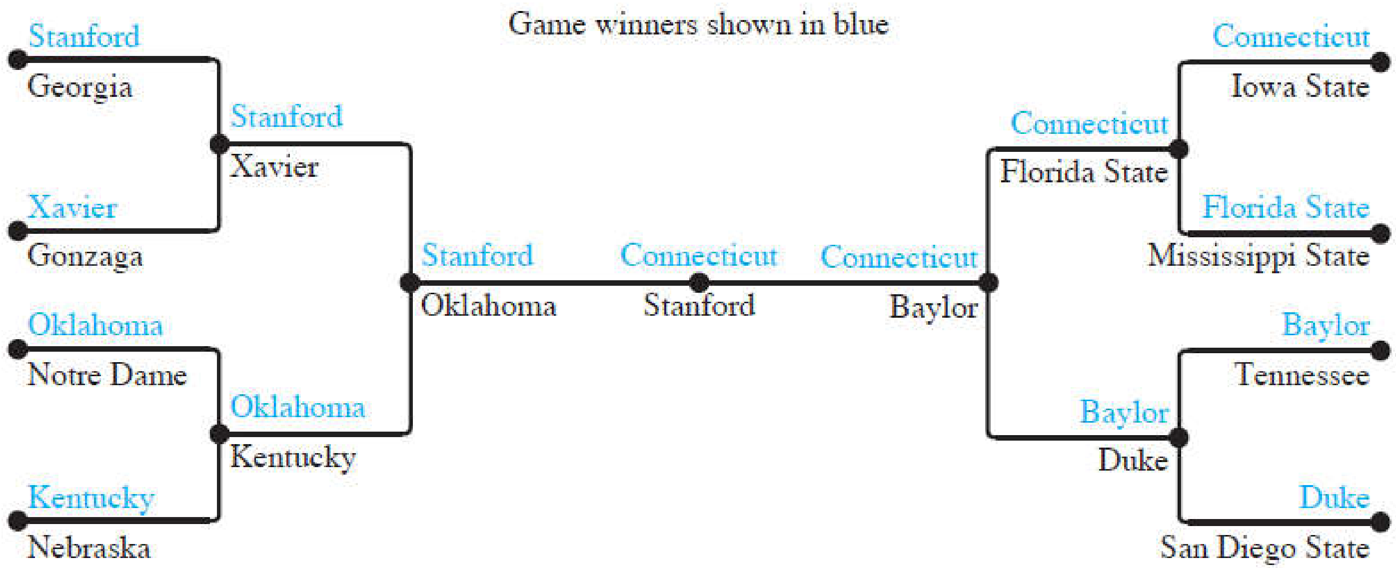
A Niche Overlap Graph.

کاربردها و مدل‌های گراف (ادامه)

- تورنمنت‌ها و مسابقات: مدلسازی انواع گوناگون مسابقات



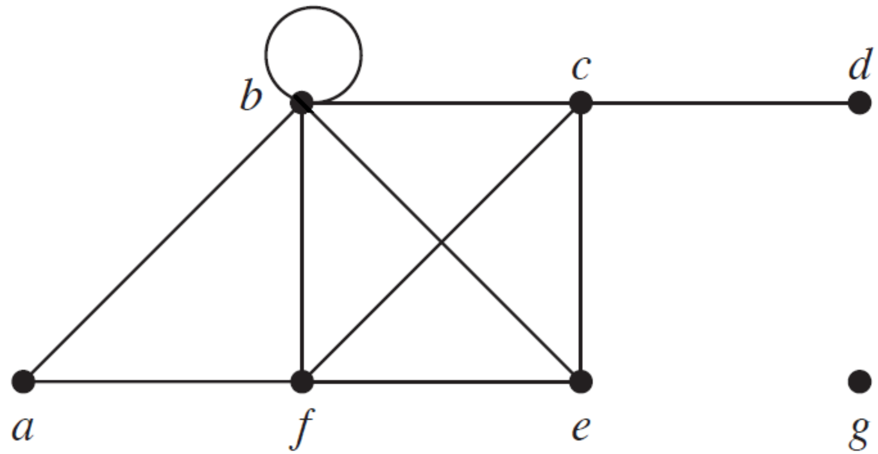
A Graph Model of a Round-Robin Tournament.



A Single-Elimination Tournament.

اصطلاحات پایه در گراف

- دو رأس u و v در گراف بدون جهت G را مجاور (یا همسایه) گویند هر گاه u و v رئوس پایانی یال e در G باشند.
- درجه یک رأس در یک گراف بدون جهت برابر است با تعداد یال‌هایی که آن رأس دارد، بجز حلقه که دو درجه محسوب می‌گردد. درجه رأس v را با $deg(v)$ نمایش می‌دهند.
- رأس با درجه صفر را ایزوله و با درجه یک را معلق گویند.



اصطلاحات پایه در گراف (ادامه)

- **لم ۱، لم دست دادن:** اگر $G=(V,E)$ یک گراف با m یال باشد، آنگاه،

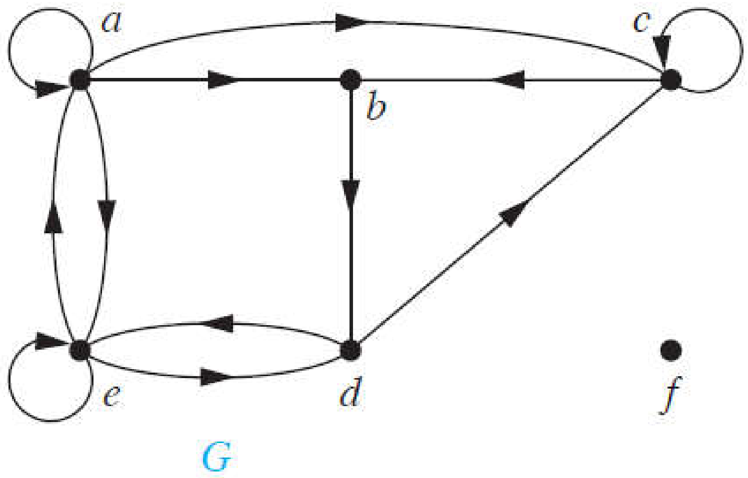
$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- **لم ۲:** در گراف غیرجهت‌دار تعداد رئوس با درجه فرد، زوج است.
- اگر V_1 و V_2 به ترتیب شامل رئوس با درجه زوج و درجه فرد باشد و m برابر با تعداد کل یال‌ها باشد، آنگاه:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

اصطلاحات پایه در گراف (ادامه)

- زمانی که (u, v) یک یال در گراف جهتدار G باشد، رأس u را رأس ابتدایی/شروع یال و v را رأس پایانی/ترمینال یال گویند.
- در گراف جهتدار، درجه داخلی رأس v را با $deg^{-}(v)$ نمایش می‌دهند و شامل تعداد یال‌هایی است که v رأس پایانی آن است.
- در گراف جهتدار، درجه خارجی رأس v را با $deg^{+}(v)$ نمایش می‌دهند و برابر با تعداد یال‌هایی است که رأس v، رأس ابتدایی آن است.



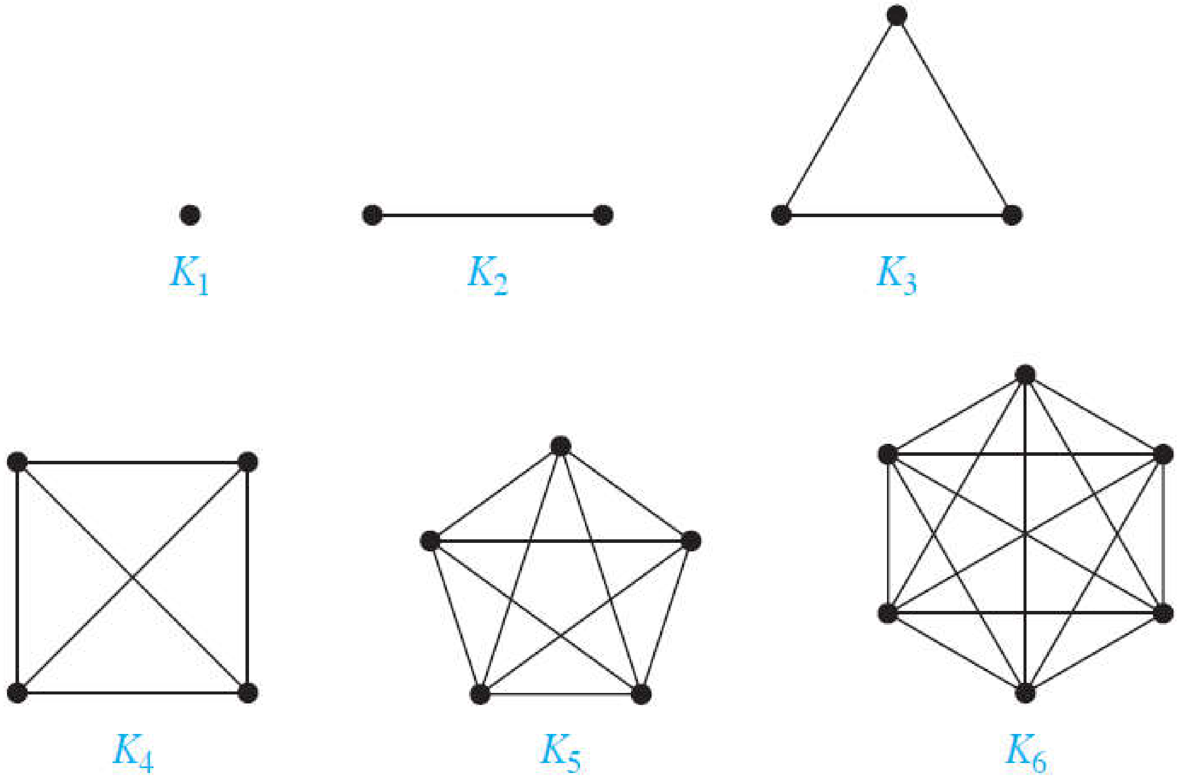
اصطلاحات پایه در گراف (ادامه)

- **لم ۳:** اگر $G=(V,E)$ جهتدار باشد آنگاه

$$\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=|E|$$

چند گراف خاص – گراف کامل

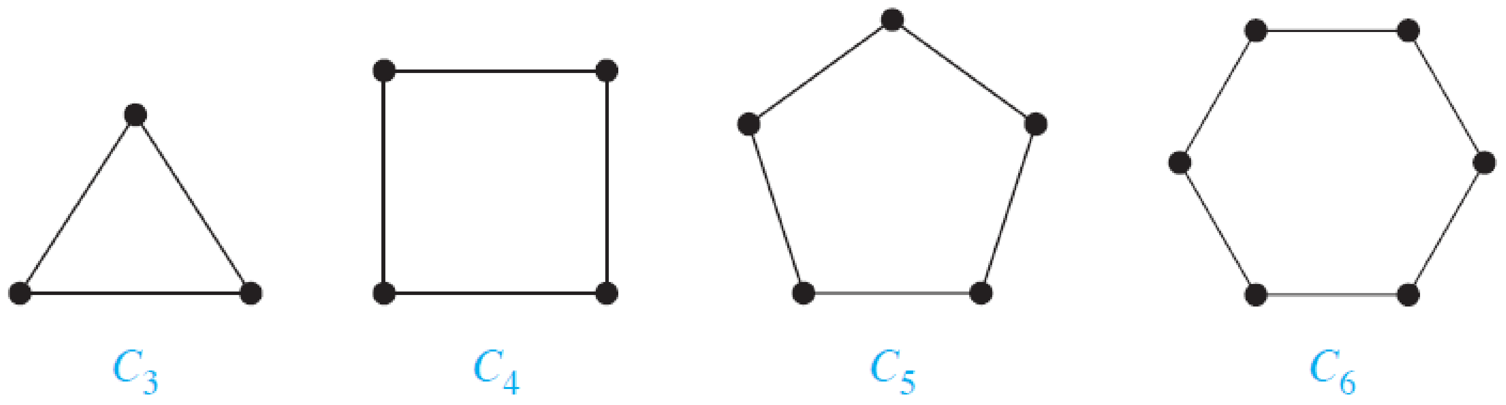
- گرافی را کامل گویند که بین هر دو جفت رأس جدا دقیقاً یک یال وجود داشته باشد.
- گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهند.



چند گراف خاص – گراف سیکل

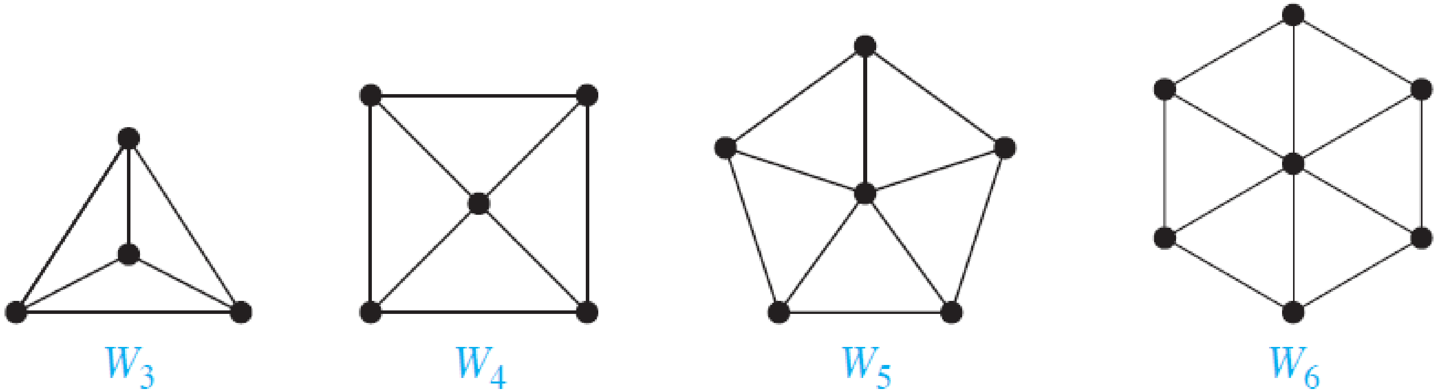
- یک سیکل C_n شامل n رأس است به طوریکه $n \geq 3$ و یال‌های آن شامل موارد زیر است:

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$$



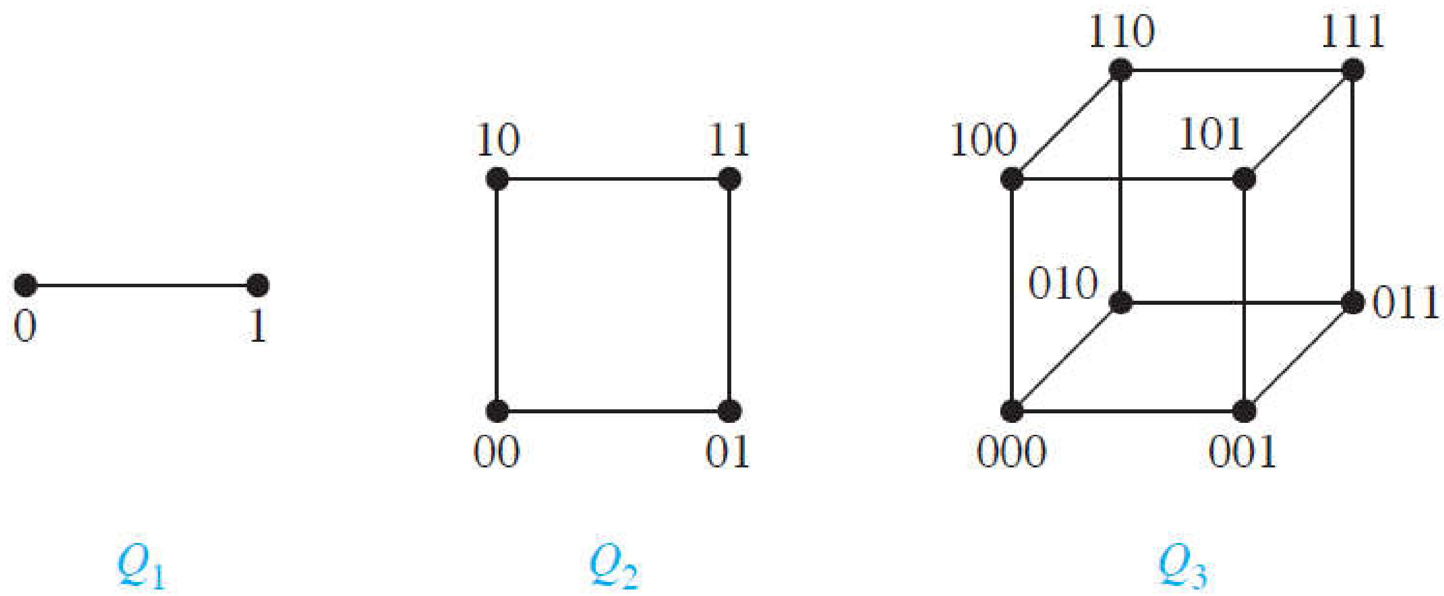
چند گراف خاص – گراف چرخ

- یک چرخ W_n به گرافی گفته می‌شود که به گراف سیکل C_n یک رأس اضافه کرده و از آن رأس به تمامی رئوس یالی رسم کنیم.



چند گراف خاص - گراف n–مکعب

- یک ابرمکعب n بعدی یا n-مکعب که با Q_n نمایش داده می‌شود گرافی است که رئوس آن نشان‌دهنده 2^n رشته بیتی به طول n است.
- دو رأس زمانی مجاور هستند که تنها فقط در یک بیت با هم متفاوت باشند.



زیرگراف

- گاهی اوقات برای حل یک مسئله نیازمند بخشی از گراف هستیم.
- زیرگراف، گراف $G = (V, E)$ گرافی مانند $H = (W, F)$ است به طوری که داشته باشیم:

$$W \subseteq V \qquad\qquad F \subseteq E$$

- یک زیرگراف مناسب، زیرگرافی است که

$$G \neq H$$

اتصالات در گراف

- مسائلی که در آن به دنبال مسیر کارا هستیم از جمله، تحویل نامه، جمع‌آوری آشغال‌ها در سطح شهر، شبکه‌های کامپیوتری و غیره نیازمند بهره‌گیری از مدل‌هایی است که شامل مسیر در گراف است.

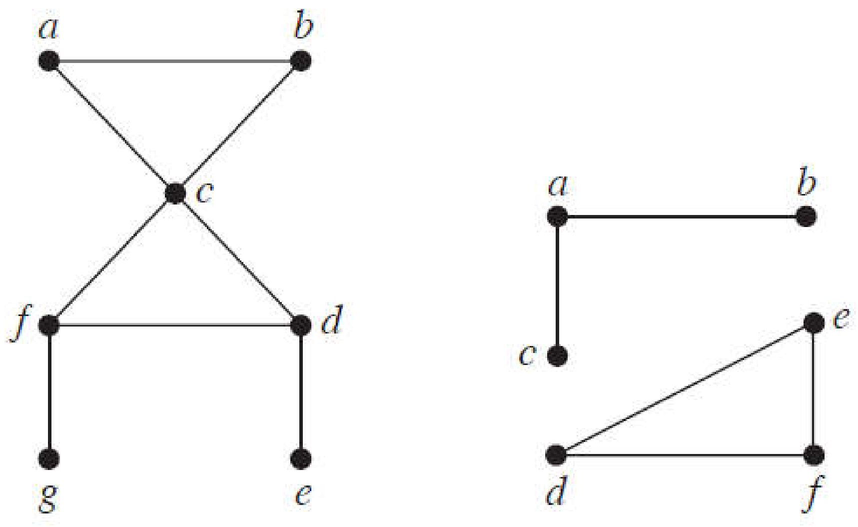
- مسیر (path): یک مسیر از رأس u به رأس v، دنباله‌ای از رئوس و یال‌هاست که از u شروع و به v ختم می‌شود. به آن walk هم گویند.

- یک مسیر را مدار (circuit) یا دور (cycle) گویند هرگاه از یک رأس شروع و در همان رأس خاتمه یابد (رأس شروع و پایان یکی باشد). به آن closed walk هم گویند.

- یک مسیر یا مدار را ساده گویند هرگاه همه رئوس آن متمایز باشند (بیش از یک‌بار از لبه‌ای نگذرد). به آن trail هم گویند.

اتصالات در گراف (ادامه)

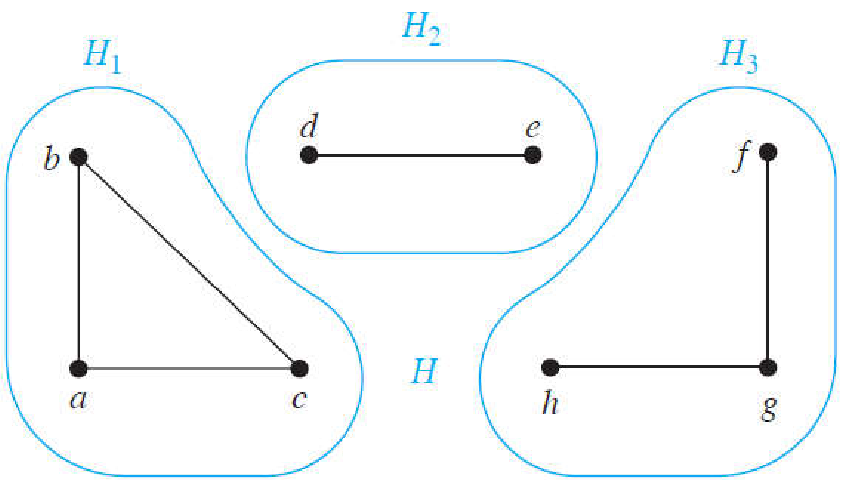
- گراف غیرجهتدار را متصل/همبند (connected) گویند هر گاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.
  - برای مثال زمانی که بتوان یک پیام را به تمامی کامپیوترها در شبکه فرستاد.
- گرافی که همبند نباشد را ناهمبند گویند!



G_1 G_2

اتصالات در گراف (ادامه)

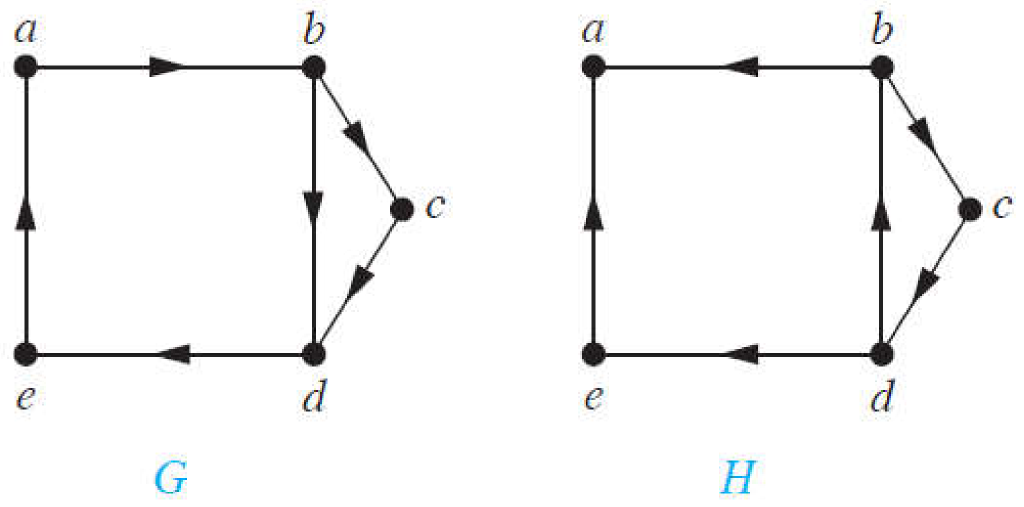
- مؤلفه‌های همبند یک گراف G، زیرگرافی همبند از G است که زیرگرافِ زیرگراف همبند دیگر G نمی‌باشد.
- یک گراف ناهمبند دارای دو یا بیشتر مؤلفه همبند است که از هم مستقل هستند و اجتماع آن‌ها گراف G را بوجود می‌آورد.



The Graph H and Its
Connected Components H_1, H_2, and H_3.

اتصالات در گراف (ادامه)

- یک گراف جهتدار را قویاً همبند گویند (strongly connected) اگر به ازای هر دو رأس a و b، از a به b و از b به a مسیری وجود داشته باشد (به ازای هر دو رأس بتوان از هر کدام به دیگری رسید).
- یک گراف جهتدار را ضعیفاً همبند یا همبند ضعیف گویند (weakly connected) هرگاه بین دو رأس در گراف غیرجهتدار معادل آن مسیری وجود داشته باشد (اگر جهت‌ها را برداریم بین هر دو رأس مسیر وجود داشته باشد).



گراف تنک vs. گراف متراکم

- سوال: ماکزیمم و مینیمم تعداد یال در یک گراف ساده همبند بدون جهت چند است؟

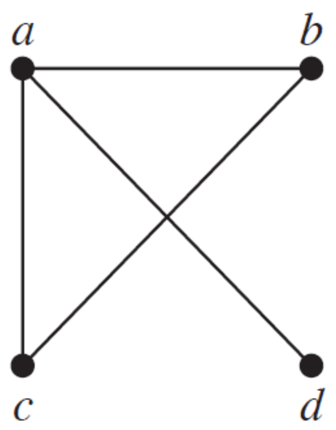
گراف تنک vs. گراف متراکم

- سوال: ماکزیمم و مینیمم تعداد یال در یک گراف ساده همبند بدون جهت چند است؟
  - مینیمم $\Omega(n)$
  - ماکزیمم $O(n^2)$
- گرافی را تنک (sparse) گویند که تعداد یال‌ها به مقدار $\Omega(n)$ نزدیک باشد.
- گرافی را متراکم (dense) گویند که تعداد یال‌ها به مقدار $O(n^2)$ نزدیک باشد.

نمایش گراف‌ها – ماتریس مجاورت

- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف n رأسی است. ماتریس مجاورت $A=[a_{ij}]$، ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های صفر و یک است که به صورت زیر پر می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



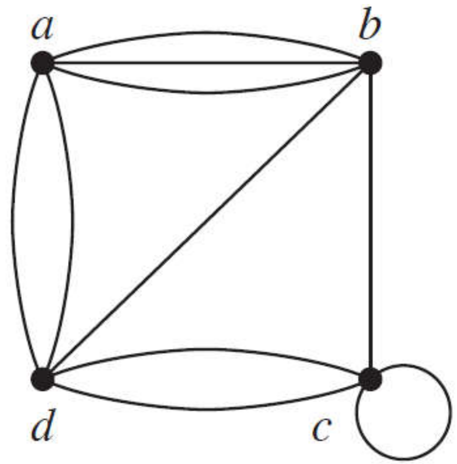
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش گراف‌ها – ماتریس مجاورت (ادامه)

- در ماتریس مجاورت گراف ساده:
  - ماتریس متقارن است.
  - قطر اصلی صفر است.
- مقدار حافظه موردنیاز برای ذخیره ماتریس؟
- اشکال؟
- حداقل چند بیت برای ذخیره ماتریس مجاورت گراف ساده نیاز است؟

نمایش گراف‌ها – ماتریس مجاورت (ادامه)

- در ماتریس مجاورت گراف دارای حلقه و یال چندگانه:
  - اگر رأس i حلقه داشته باشد مکان a_{ii} در ماتریس برابر با یک خواهد بود.
  - و مکان a_{ij} برابر با تعداد یال‌هایی است که رأس i را به j متصل می‌کند.



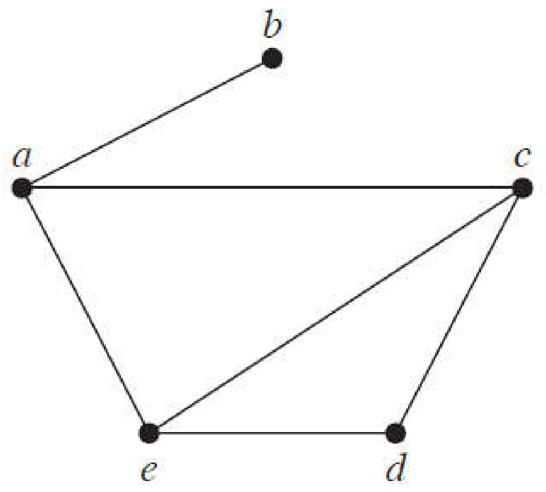
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش گراف‌ها – ماتریس مجاورت (ادامه)

- ماتریس مجاورت یک گراف جهتدار ساده:
  - ممکن است متقارن نباشد.
  - یک ماتریس با درایه‌های صفر و یک است.
- یک گراف جهتدار چندگانه را می‌توان با ماتریس مجاورت نمایش داد. این ماتریس همانند نوع غیرجهتدار آن، یک گراف صفر و یک نیست.

نمایش گراف‌ها – لیست مجاورت

- به ازای هر رأس در گراف یک لیست خواهیم داشت که نودهای لیست iام رئوسی هستند که رأس i با آن‌ها مجاور است.

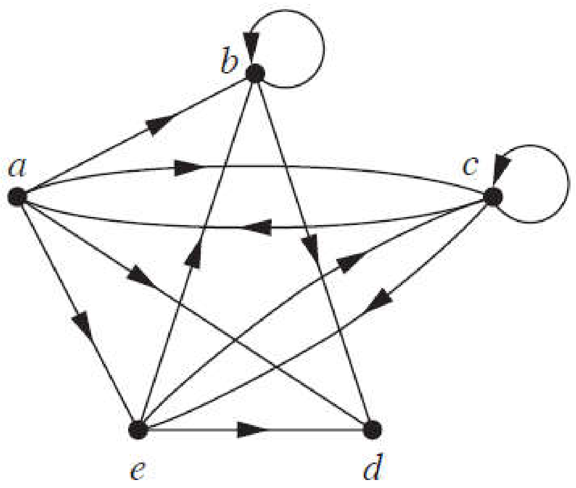


A Simple Graph.

An Adjacency List for a Simple Graph.	
Vertex	*Adjacent Vertices*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

نمایش گراف‌ها – لیست مجاورت (ادامه)

- اگر گراف جهتدار باشد، رئوس لیست i رئوسی هستند که از رأس i خارج می‌شوند.



A Directed Graph.

An Adjacency List for a Directed Graph.

Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

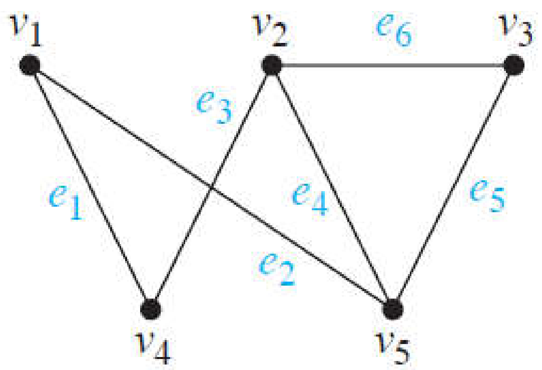
نمایش گراف‌ها – لیست مجاورت (ادامه)

- مجموع طول همه‌ی لیست‌ها در یک گراف جهتدار برابر با چه مقداری است؟
- مجموع طول همه لیست‌ها در گراف بدون جهت برابر با چه مقداری است؟
- مقدار حافظه موردنیاز برای لیست مجاورت؟
- لیست مجاورت یا ماتریس مجاورت؟

نمایش گراف – ماتریس برخورد (incidence)*

- فرض کنید که $G = (V, E)$ گرافی با n رأس و m یال باشد. ماتریس برخورد $M=[m_{ij}]$، ماتریسی $n \times m$ با درایه‌های صفر و یک است که به صورت زیر پر می‌شود:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

* بر اساس تعریف کتاب Discrete Mathematics and Its Application از Kenneth H. Rosen

نمایش گراف – ماتریس برخورد (incidence)*

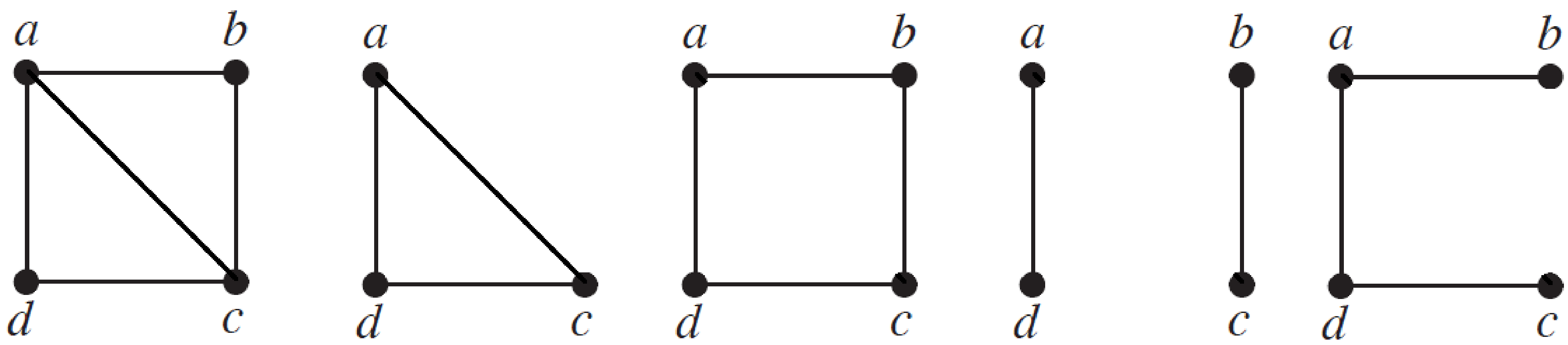
- ماتریس برخورد یک گراف جهتدار $G = (V, E)$ بدون حلقه یک ماتریس $B = [b_{ij}]$ با اندازه $|V| \times |E|$ است به طوری که

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if edge } j \text{ leaves vertex } i \text{ ,} \\ 1 & \text{if edge } j \text{ enters vertex } i \text{ ,} \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases}$$

* براساس تعریف کتاب CLRS، تمرین ۲۲.۱-۷

درخت پوشا

- گراف همبند بدون دور را درخت گویند.
- اگر G یک گراف ساده باشد، درخت پوشای G، زیرگرافی از G است که درخت می‌باشد و همه‌ی رئوس گراف را نیز در بر دارد.



The END