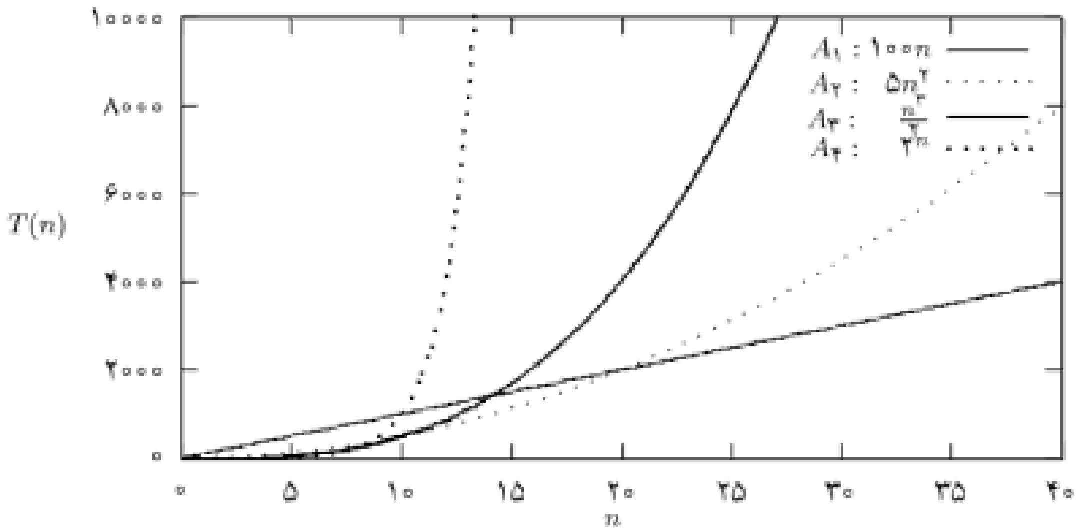
مروری بر نمادهای تحلیل مجانبی (تحلیل نرخ رشد)

تحلیل مجانبی

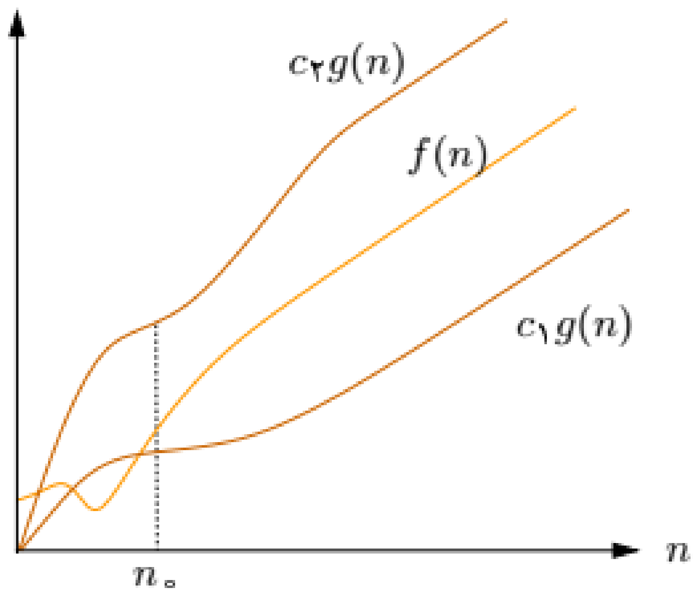


زمان‌های اجرای چهار الگوریتم برای یک مسئله.

تعریف

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1, c_2 > 0 \text{ and } n_0 > 0 \text{ such that } \forall n \geq n_0,\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

عبارت $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ به این معنی است که برای مقادیر بزرگ n درجه‌ی رشد f و g یکسان است.



$$f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

می‌گوییم:

تابع $g(n)$ کران بالای بسته‌ی مجانبی (asymptotically tight bound) برای $f(n)$ است.

به‌شکل ساده‌تر

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

در مورد الگوریتم مرتب‌ساز درجی، $T(n) = \Theta(n^2)$.

زیرا می‌توان مقادیر مثبتی برای c_1 و c_2 را طوری یافت که

$$c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c \leq c_2 n^2$$

مسئله: ثابت کنید که $100n^2 + 5n - 4 = \Theta(n^2)$.

مسئله: ثابت کنید که $100n^2 + 5n - 4 = \Theta(n^2)$.

حل:

اگر $c_1 = 1$ و $c_2 = 200$، برای همه‌ی مقادیر $n > 1$ داریم

$$c_1 n^2 \leq 100n^2 + 5n - 4 \leq c_2 n^2$$

مسئله: نشان دهید که $100n^2 + 5n - 4 \neq \Theta(n^3)$.

حل:

باید نشان دهیم که هیچ مقادیر مثبت برای c_1 و c_2 و یک مقدار برای n_0 پیدا نمی‌شود که رابطه‌ی

$$c_1 n^3 \leq 100n^2 + 5n - 4 \leq c_2 n^3$$

برای همه‌ی مقادیر $n > n_0$ برقرار باشد.

به‌وضوح به‌ازای هر مقدار $c_1 > 0$ و برای nهای بزرگ داریم $c_1 n^3 \not\leq 100n^2 + 5n - 4$.

در مورد مرتب‌ساز درجی داریم:

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^۲) \\ &= \Theta(۱۰۰n^۲) \\ &\neq \Theta(n^۳) \\ &\neq \Theta(n^۲ \lg n) \\ &\neq \Theta(n \lg n) \end{aligned}$$

برای اثبات $T(n) \neq \Theta(n \lg n)$ باید نشان داد که نمی‌توان ثابت‌های $c_۱$ و $c_۲$ را پیدا کرد که برای $n > n_۰$ داشته‌باشیم:

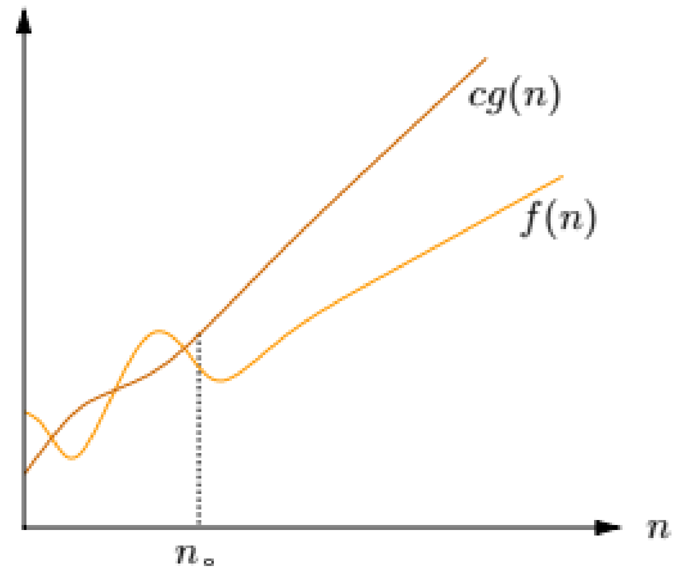
$$c_۱ n \lg n \leq n^۲ \leq c_۲ n \lg n$$

نماد O

برای $g(n)$ داده‌شده، $O(g(n))$ را به شکل مجموعه‌ی توابع زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \text{ and } n_0 \text{ such that } \forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

$g(n)$ کران بالای مجانبی (asymptotically upper bound) برای $f(n)$ است.



$$f(n) = O(g(n))$$

مثلاً در مورد مرتب‌ساز درجی، داریم

$$\begin{aligned} T(n) = \Theta(n^۲) &= \mathcal{O}(n^۲) \\ &= \mathcal{O}(۱۰۰n^۲) \\ &= \mathcal{O}(n^۳) \\ &= \mathcal{O}(n^۲ \lg n) \\ &\neq \mathcal{O}(n \lg n) \\ &\neq \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

می‌توان گفت مسئله از $O(n^{100})$ است، ولی این اطلاع چندان مفید نیست.

به‌همین جهت در حالت‌هایی که محاسبه‌ی Θ مشکل است، باید تابع داخل پرانتز O را تا حد امکان کوچک‌ترین باشد.

نکته: براساس تعریف روشن است که $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$.

نماد Ω

برای $g(n)$ داده‌شده، $\Omega(g(n))$ را به‌شکل مجموعه‌ی توابع زیر تعریف می‌کنیم:

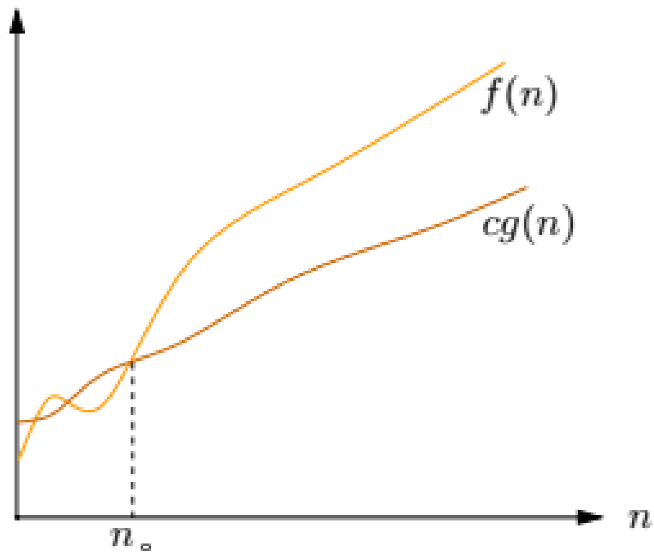
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \text{ and } n_0 \text{ such that } \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

$g(n)$ کران پایین مجانبی (asymptotically lower bound) برای $f(n)$ است.

مثلاً برای مرتب‌ساز درجی داریم

$$\begin{aligned} T(n) &= \Omega(n \lg n) \\ &= \Omega(n) \\ &= \Omega(n^۲) \\ &\neq \Omega(n^۲ \lg n) \end{aligned}$$

در عمل نماد Ω برای نشان دادن کران پایین یک تابع دیگر به‌کار می‌رود.



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

تابع Θ در واقع عطف $\mathcal{O}$ و Ω است یعنی

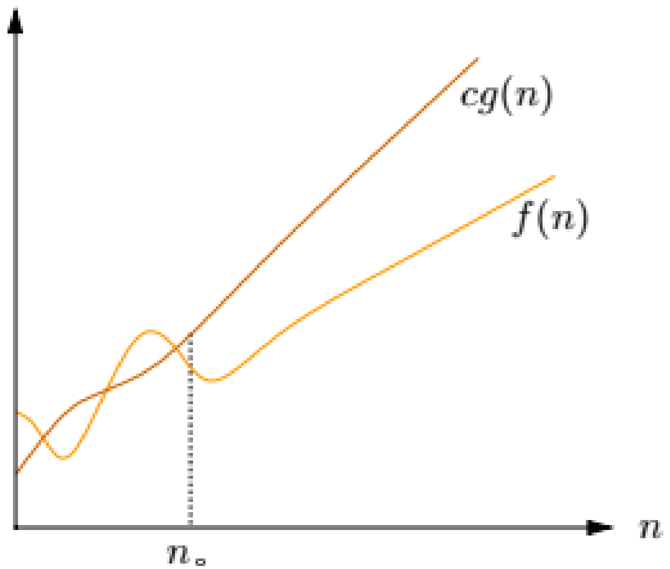
$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$$

یا

قضیه: شرط لازم و کافی برای $f(n) = \Theta(g(n)$ آن است که $f(n) = \mathcal{O}(g(n)$ و $f(n) = \Omega(g(n)$.

نماد o

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \quad \text{for any positive constant} \quad c > 0,$$
$$\exists n_0 > 0, s.t. \forall n > n_0 : 0 \leq f(n) < cg(n)\}$$



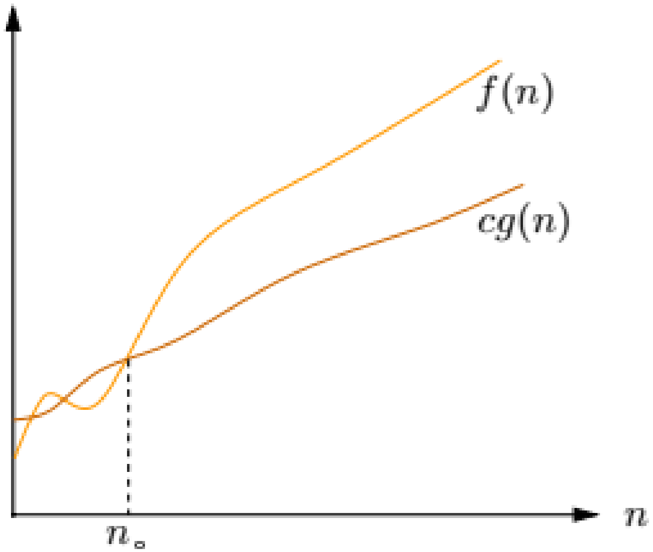
$$f(n) = o(g(n))$$

این نماد به O شبیه است، بااین تفاوت که درجه‌ی رشد $f(n)$ نمی‌تواند با $g(n)$ برابر باشد و باید الزاماً کوچک‌تر باشد.

نکته: اگر $f(n) = o(g(n))$، داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = ۰$

نماد ω

$$\omega(f(n)) = \{g(n) | \quad \text{for any positive constant} \quad c > 0, \exists n_0 > 0, \quad \text{such that} \quad \forall n > n_0, 0 \leq cg(n) < f(n)\}$$



$$f(n) = \omega(g(n))$$

رابطه‌ی ω با Ω مثل o با O است.

نکته: $f(n) = o(g(n))$ اگر و فقط اگر $g(n) = \omega(f(n))$.

نکته: اگر $f(n) = \omega(g(n))$، داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

مثلاً $n^۲/۲ = \omega(n)$ ولی $n^۲/۲ \neq \omega(n^۲)$.

نتیجه‌ای که از تعریف‌های فوق به‌دست می‌آید را در عبارت‌های زیر (هرچند نادقیق از نظر ریاضی) خلاصه می‌کنیم:

اگر F درجه‌ی رشد f و G درجه‌ی رشد g باشد،

$$f = \Theta(g) \iff F = G$$

$$f = \mathcal{O}(g) \iff F \leq G$$

$$f = o(g) \iff F < G$$

$$f = \Omega(g) \iff F \geq G$$

$$f = \omega(g) \iff F > G$$

خواص تابع‌های رشد

خاصیت تراگذری (transitive)

۱) از $f(n) = \Theta(g(n))$ و $g(n) = \Theta(h(n))$ نتیجه می‌شود که $f(n) = \Theta(h(n))$

۲) از $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ و $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ نتیجه می‌شود که $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

۳) از $f(n) = \Omega(g(n))$ و $g(n) = \Omega(h(n))$ نتیجه می‌شود که $f(n) = \Omega(h(n))$

۴) از $f(n) = o(g(n))$ و $g(n) = o(h(n))$ نتیجه می‌شود که $f(n) = o(h(n))$

۵) از $f(n) = \omega(g(n))$ و $g(n) = \omega(h(n))$ نتیجه می‌شود که $f(n) = \omega(h(n))$

خاصیت بازتابی (reflexive)

۱) $f(n) = \Theta(f(n))$

۲) $f(n) = \mathcal{O}(f(n))$

۳) $f(n) = \Omega(f(n))$

خاصیت تقارن (symmetry)

$f(n) = \Theta(g(n))$ اگر و فقط اگر $g(n) = \Theta(f(n))$

خاصیت تقارن ترانهاده (transpose symmetry)

۱) شرط لازم و کافی برای $f(n) = O(g(n))$ آن است که $g(n) = \Omega(f(n))$

۲) شرط لازم و کافی برای $f(n) = o(g(n))$ آن است که $g(n) = \omega(f(n))$

تمرین: همین‌جا حل کنید!

۱) آیا $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n))$ است؟

۲) آیا $f(n) = \Theta(f(n)/۲)$ است؟

۳) آیا $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$؟