پاسخنامه

کوییز شماره ۱. ساختمان داده ها. گروه ۱. دانشگاه صنعتی ارومیه. ۹۵/۸/۳

۱. زمان و مرتبه اجرای الگوریتم زیر را به دست آورید.

```
sum = 1
for i=1 to n
    do for j=1 to i^2
        do if j mod i = 0
            then for k=1 to j
                do sum = sum + 1
```

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i^2} \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i^2} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 (i^2+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$\boxed{T(n) = O(n^5)}$$

پاسخنامه

۲. با استفاده از روش تکرار و جایگذاری جواب رابطه بازگشتی زیر را به دست آورید.

$T(n) = T(2n/3) + \lg^2 n$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{1.5}\right) + \lg^2 n$$

$$= T\left(\frac{n}{1.5^2}\right) + \lg^2 \frac{n}{1.5} + \lg^2 n$$

$$= T\left(\frac{n}{1.5^3}\right) + \lg^2 \frac{n}{1.5^2} + \lg^2 \frac{n}{1.5} + \lg^2 n$$

$$\vdots$$

$$= T\left(\frac{n}{1.5^k}\right) + \lg^2 \frac{n}{1.5^{k-1}} + \cdots + \lg^2 \frac{n}{1.5} + \lg^2 \frac{n}{(1.5)^0}$$

$$\Rightarrow n = (1.5)^k \rightarrow k = \lg_{1.5} n$$

$$T(n) = T(1) + \lg^2 1.5 + \lg^2 1.5^2 + \cdots + \lg^2 (1.5)^k$$

$$\lg^2 a^b = (\lg a^b \times \lg a^b) = b^2 \lg^2 a$$

$$T(n) = 1 + \lg^2 1.5 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2)$$

$$= 1 + \lg^2 1.5 \left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right)$$

$$= 1 + \lg^2 1.5 \left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right]$$

$$= O(k) = O(\lg^3 n)$$

پاسخنامه

کوییز شماره ۱. ساختمان داده ها. گروه ۲. دانشگاه صنعتی ارومیه. ۹۵/۸/۳

۱. زمان و مرتبه اجرای الگوریتم زیر را به دست آورید.

```
i = n
while i>=1
        do j = i
                while j <= n
                        do j = 2j
                i = [i/2]
```

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\lg n} \sum_{j=i}^{\lg n} 1$$

$$= \sum_{i=1}^{\lg n} (\lg n - i + 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{\lg n} \lg n - \sum_{i=1}^{\lg n} i + \sum_{i=1}^{\lg n} 1$$

$$= \lg^2 n - \frac{\lg n (\lg n + 1)}{2} + \lg n$$

$$= O(\lg^2 n)$$

پاسخنامه

۲. جواب رابطه بازگشتی زیر را به دست آورید.

T(n) = 4T(n-1) – 3T(n-2)

$x^2 - 4x + 3 = 0$ معادله مشخصه

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$

$f_n = t_1 (1)^n + t_2 (3)^n$

$$\begin{cases} f_0 = 0 = t_1 + t_2 \\ f_1 = 1 = t_1 + 3t_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} t_1 &= -\frac{1}{2} \\ t_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f_n = -\frac{1}{2} 1^n + \frac{1}{2} 3^n$

$= O(3^n)$