

Hamiltonian MPS 粒子法による Reissner-Mindlin シェルの解析モデル

An Hamiltonian MPS formulation for Reissner-Mindlin shell

邵 陽¹, 伊藤広貴¹, 柴田和也¹, 越塚誠一¹

Yang SHAO, Hirotaka ITO, Kazuya SHIBATA, Seiichi KOSHIZUKA

¹ 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

An MPS formulation for Reissner-Mindlin shell is developed in the framework of Hamiltonian particle dynamics. The model conserves linear momentum, angular momentum and total energy of the system. Free vibration of a free-fixed end square plate is tested for the convergence of the formulation. Moreover, the computation time is reduced from cubic of the resolution that total three-dimensional process is needed to quadratic by using this model.

Key Words: Hamiltonian MPS, Reissner-Mindlin, shell, Hamilton, Free-fixed plate, Vibration

1. 序 論

シェルとは一方向の長さが他の方向より非常に短い構造体のことである⁽¹⁾。自動車や飛行機、船舶などにおいてはシェルの部品を多く含んでいる。また、映像の分野においても、服、紙、布などシェルのシミュレーション技術が必要である^(2,3)。理論的にはシェルを3次元構造物としてシミュレーションすることは可能であるが、厚さが非常に薄いため、通常の3次元数値計算手法では計算のコストが高くなり、現実的な解像度では適切に近似できない可能性がある⁽¹⁾。したがって、シェルを解析するためには専用の計算モデルが必要である。

粒子法/メッシュフリー法^(4,5)は、流体、固体などの連続体の運動を離散粒子群の運動によって近似する計算手法である。したがって、構造物をメッシュ化する必要がなく、また流体の分裂や合体、固体の破壊など複雑に変化する境界を伴う問題でも比較的容易に扱うことができるなどの利点がある。現在までに、SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)^(6,7)、MPS (Moving Particle Simulation)^(8,9)、EFG (Element Free Galerkin)^(10,11)などの手法が提案されている。例えば固体解析の分野では、弾丸の衝突による金属板の破壊⁽¹²⁾など複雑な界面変化を伴い、格子を用いる手法では計算が困難な現象にも適用が試みられている。

シェル計算モデルについて、野口ら⁽¹³⁾はEFG法でReissner-Mindlinシェルの解析モデルを提案した。Maurelら⁽¹⁴⁾はSPH法の計算モデルを提案し、流体とシェ

ルの連成解析を行った⁽¹⁵⁾が、エネルギーの保存性は検証していない。田中ら^(16,17)はSPHで弱形式の支配方程式を離散する方法を用いて、シェルの解析モデルを提案した。一方、MPS法においては近藤ら⁽¹⁸⁾がKirchhoffシェルを対象にして定式化を行っているが、厚肉に対応できない問題点がある。また、Leeら⁽¹⁹⁾はMPS法で流体とシェルの連成解析を行ったが、シェルは格子法で計算した。Reissner-MindlinシェルのMPS解析モデルは未だ提案されていない。Kirchhoffシェルと比べて、Reissner-Mindlinシェルは厚肉シェルにも対応できる利点があり、従来の格子法の商用コードにおいても多く用いられている。そこで、本研究ではMPS法のReissner-Mindlinシェル解析モデルを開発する。

2. Hamiltonian MPS 法

MPS法は微分方程式の微分演算子を直接モデル化し、微分方程式を離散化する手法である。従来のMPS法微分演算子モデルでは、境界部での精度の低下と2次微分の計算モデルがHamilton系ではないという問題があった。これらについて、鈴木ら^(20,21)は厚肉弾性体に対するHamiltonian MPS法を提案した。本研究はこの方法論を引き継ぎ、1階微分は粒子点で展開した最小自乗近似で計算することにより、境界部においても1次精度を持たせる。また、全体系のHamiltonianを定義し、Hamiltonianを粒子上で定式化することにより微分方程式を離散化する。この手法は、無限次元のHamilton系を有限次元のHamilton系に近似することにより、連続体の離散化を実現している。従って、線形運動量、角運動量、全力学エネルギーが保存されるだけでなく、収束性も理論的に保証される。

3. Reissner-Mindlin シェル

* 原稿受付 2012 年 04 月 03 日, 改訂 2012 年 06 月 15 日, 発行 2012 年 07 月 19 日. ©2012 年 日本計算工学会.

Manuscript received, April 03, 2012; final revision, June 15, 2012; published, July 19, 2012. Copyright ©2012 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

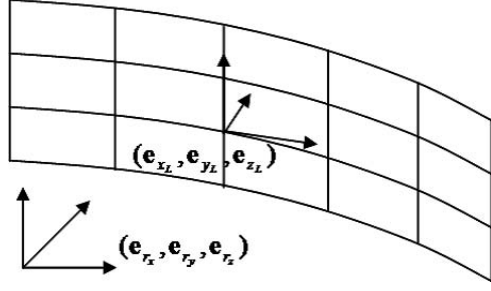


Fig.1 Local coordinate and global coordinate

シェルは3次元物体であるが、厚さが薄いことに着目すれば簡略化が可能であり、2次元の問題に単純化することができる。複数のシェル理論の中で、最も簡潔で基本的なシェル理論はKirchhoff理論である。Kirchhoff理論はKirchhoff仮定と呼ばれる多くの仮定を基に成立しており、これらの仮定をひとつずつ取り除くことにより、Reissner-Mindlin理論やKarman理論など多くの理論が確立できる。そのKirchhoff仮定は以下の5つである。

(1) 微小変形

$$w \ll h, \left(\frac{\partial w}{\partial x_L}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{\partial w}{\partial y_L}\right)^2 \ll 1 \quad (1)$$

(2) 中立面の不伸張変形

$$\varepsilon_{x_L}|_{z_L=0} = 0, \varepsilon_{y_L}|_{z_L=0} = 0, \varepsilon_{z_L}|_{z_L=0} = 0 \quad (2)$$

(3) 法線保持

$$\gamma_{z_L x_L} = 0, \gamma_{z_L y_L} = 0 \quad (3)$$

(4) 法線の長さは一定

$$\varepsilon_{z_L} = 0 \quad (4)$$

(5) 法線方向の応力は省略

$$\sigma_{z_L} \approx 0 \quad (5)$$

ただし、 $(\mathbf{e}_{x_L}, \mathbf{e}_{y_L}, \mathbf{e}_{z_L})$ はシェルの曲面局所座標系である (Fig.1)。基準面 (通常はシェルの両表面から等距離にある中立面が用いられる) における x_L, y_L, z_L 方向の変位をそれぞれ $u(x_L, y_L), v(x_L, y_L), w(x_L, y_L)$ とし、シェルの厚さを h とし、 $\varepsilon_{x_L}, \varepsilon_{y_L}, \varepsilon_{z_L}$ は直ひずみ、 $\gamma_{x_L}, \gamma_{y_L}, \gamma_{z_L}$ はせん断ひずみ、 $\sigma_{x_L}, \sigma_{y_L}, \sigma_{z_L}$ は直応力、 $\tau_{x_L}, \tau_{y_L}, \tau_{z_L}$ はせん断応力である。上記5つの仮定の中で、Reissner-Mindlin理論と最も関係深い仮定は(3)の法線保持である。それは2つの内容を含んでいる。つまり、変形後において、

(a) 法線は基準面と直交する (直交保持)

(b) 法線は直線を保持する (直線保持) である。

Kirchhoff理論では、上記の2つの内容を仮定して支配方程式を導いた。それに対して、Reissner-Mindlin理論では、(b) 直線保持のみを仮定して、法線の回転角を独立に定義し、面外せん断応力をせん断変形から算

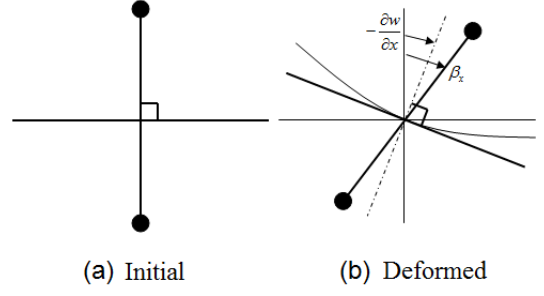


Fig.2 Reissner-Mindlin assumption

出する (Fig.2)。したがって、Reissner-Mindlin理論はKirchhoff理論と比べると独立変数は増えるが、支配方程式の階数を2階まで減らすことができる。Reissner-Mindlin理論に基づく基礎方程式は次式で与えられる。

$$M_{x_L} = D \left(\frac{\partial \beta_{x_L}}{\partial x_L} + \nu \frac{\partial \beta_{y_L}}{\partial y_L} \right) \quad (6)$$

$$M_{y_L} = D \left(\frac{\partial \beta_{y_L}}{\partial y_L} + \nu \frac{\partial \beta_{x_L}}{\partial x_L} \right) \quad (7)$$

$$M_{x_L y_L} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_{y_L}}{\partial x_L} + \frac{\partial \beta_{x_L}}{\partial y_L} \right) \quad (8)$$

$$Q_{x_L} = Ghs \left(\frac{\partial w}{\partial x_L} + \beta_{x_L} \right) \quad (9)$$

$$Q_{y_L} = Ghs \left(\frac{\partial w}{\partial y_L} + \beta_{y_L} \right) \quad (10)$$

$$\rho I_{y_L} \frac{\partial^2 \beta_{x_L}}{\partial t^2} = \frac{\partial M_{x_L}}{\partial x_L} + \frac{\partial M_{x_L y_L}}{\partial y_L} - Q_{x_L} \quad (11)$$

$$\rho I_{x_L} \frac{\partial^2 \beta_{y_L}}{\partial t^2} = \frac{\partial M_{y_L}}{\partial y_L} + \frac{\partial M_{x_L y_L}}{\partial x_L} - Q_{y_L} \quad (12)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_{x_L}}{\partial x_L} + \frac{\partial Q_{y_L}}{\partial y_L} \quad (13)$$

ここで、 $w(x_L, y_L)$ は垂直方向の変位、 β_{x_L}, β_{y_L} はそれぞれ法線の x_L, y_L 方向の回転角度、 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ は曲げ剛性、 E は材料のヤング率、 ν は材料のポアソン比、 Ghs はエネルギーの視点より評価したせん断剛性係数、 h はシェルの厚さ、 M_{x_L}, M_{y_L} は曲げモーメント、 $M_{x_L y_L}$ は捩じりモーメント、 Q_{x_L}, Q_{y_L} はせん断力、 I_{x_L}, I_{y_L} はそれぞれ x_L, y_L 軸にまわりの断面二次モーメント、 ρ は材料の単位面積密度である。

4. 離散解析モデル

粒子法は強形式の微分方程式をそのまま離散化しているので、数値積分を行う必要はない。そのため、

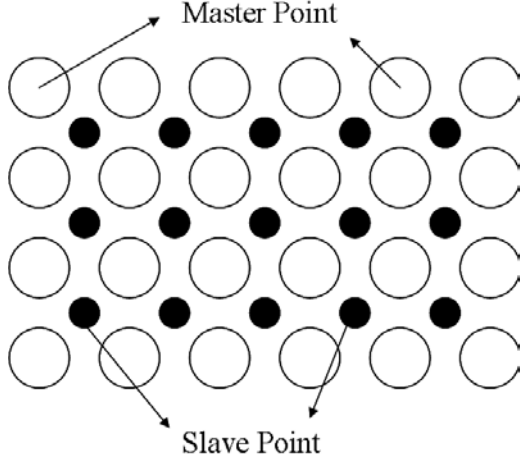


Fig.3 Master points and slave points

ロッキング問題は発生しないが、低減数値積分有限要素モデルと同じく、1 階および 2 階微分をともに同じ粒子（計算点）上で計算すると、エネルギーの増加を引き起こさない変形モードすなわち Zero Energy Mode と呼ばれる数値振動が起こる。SPH 法⁽¹⁴⁾では Stress Point (Slave Point)^(22,23) と呼ばれる構造物を表現する際に用いる粒子とは異なる種類の粒子を使って、Stress Point の位置で 1 階微分を計算することによりこの問題を解決した。本研究もその解決策を採用する。

具体的には、まず 2 種類の粒子を定義する (Fig.3)。一つは Master Point と呼ばれ、位置、速度、加速度、法線方向、回転速度、回転加速度の情報を持つ。もう一つは Slave Point と呼ばれ、変形勾配テンソル、歪テンソル、応力テンソル、曲率テンソル、曲げトルクテンソル、Hamiltonian、ポテンシャルエネルギーの情報を持つ。なお、Master Point の位置情報 $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$ と法線方向情報 $\theta(\theta_x, \theta_y)$ は自由変数である。ただし、 $(\mathbf{e}_{r_x}, \mathbf{e}_{r_y}, \mathbf{e}_{r_z})$ は全域基準座標系である (Fig.1)。全域基準座標系と曲面局所座標系の間は回転行列 \mathbf{R} を使って、 $\mathbf{r}_L = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_G$ で変換する。なお、回転行列 \mathbf{R} は初期条件として、それぞれの粒子に与えている。また、Slave Point の位置と法線方向は影響半径 r_e 内の Master Point の平均値とする。

次に、全ての Slave Point i_s に全ポテンシャルエネルギー

$$\begin{aligned} U_{i_s} &= U_{i_s}^s + U_{i_s}^b \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_{i_s} : \mathbf{F}_{i_s} \Delta V_{i_s} + \frac{1}{2} \mathbf{M}_{i_s} : \mathbf{C}_{i_s} \Delta V_{i_s} \end{aligned} \quad (14)$$

を与える。ここで、 $U_{i_s}^s$ は粒子 i_s のせん断ポテンシャルエネルギー、 $U_{i_s}^b$ は粒子 i_s の曲げポテンシャルエネルギー、 \mathbf{F}_{i_s} は粒子 i_s の変形勾配テンソル、 $\mathbf{\Pi}_{i_s}$ は粒子 i_s の第一 Kirchhoff 応力テンソル、 \mathbf{M}_{i_s} は粒子 i_s の曲げトルクテンソル、 \mathbf{C}_{i_s} は粒子 i_s の曲率テンソル、 ΔV_{i_s} は粒子 i_s が占める体積である。

そして、2 段階の定式化を示す。第 1 段階は位置情報を表す自由変数 $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$ を更新する。そのために、

まず、Slave Point の位置で変形勾配テンソル \mathbf{F}_{i_s} を最小自乗近似で計算する。Slave Point i_s の変形勾配テンソルの計算式は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i_s} &= \sum_{j_m} [(\mathbf{r}_{j_m} - \mathbf{r}_{i_s}) \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)] \\ &\cdot \sum_{j_m} [(\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0) \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)]^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

で示す。ここで、 j_m は粒子 i_s の影響半径 r_e 内の全ての Master Point である。 $\mathbf{r}_{j_m}^0$ は粒子 j_m の初期位置、 \mathbf{r}_{j_m} は粒子 j_m における位置である。そして、シェルの場合、粒子は一層のみで z_L 軸の方向に近傍粒子は存在しないため、変形勾配テンソルは

$$\mathbf{F}_{i_s} = \begin{bmatrix} x_{x_L} & y_{x_L} & 0 \\ x_{y_L} & y_{y_L} & 0 \\ x_{z_L} & y_{z_L} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

になる。ここで、 $\begin{bmatrix} x_{x_L} & y_{x_L} & x_{z_L} \end{bmatrix}^T$ は変形後の x_L 軸の単位ベクトル、 $\begin{bmatrix} y_{x_L} & y_{y_L} & y_{z_L} \end{bmatrix}^T$ は変形後の y_L 軸の単位ベクトルである。そして、 \mathbf{F}_{i_s} の z_L 軸の方向の変形を加えるため、影響半径 r_e 内の Master Point の法線方向の平均を取って、Slave Point の法線方向を計算する。計算式は

$$\theta_{i_s} = \sum_{j_m} \theta_{j_m} / n \quad (17)$$

で表し、ここで、 n は Slave Point i_s の影響半径 r_e 内の Master Point の数である。そして、Slave Point i_s の法線方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{N}_{i_s} = \begin{bmatrix} \theta_{i_s}^x \\ \theta_{i_s}^y \\ (1 - \theta_{i_s}^2)^{0.5} \end{bmatrix} \quad (18)$$

で示す。これより、Slave Point i_s の変形勾配テンソル \mathbf{F}_{i_s} は

$$\mathbf{F}_{i_s} = \begin{bmatrix} x_{x_L} & y_{x_L} & \theta_{i_s}^x \\ x_{y_L} & y_{y_L} & \theta_{i_s}^y \\ x_{z_L} & y_{z_L} & (1 - \theta_{i_s}^2)^{0.5} \end{bmatrix} \quad (19)$$

になる。

次に Slave Point i_s の Green-Lagrangian 歪テンソル \mathbf{E} を

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (20)$$

と計算する。ここで、 \mathbf{I} は単位行列である。そして、Slave Point i_s の第二 Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} を

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Trace}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (21)$$

と計算する。ここで、 λ, μ は材料の Lamé 定数である。これより、Slave Point i_s の第一 Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{\Pi}$ は

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \mathbf{S} \quad (22)$$

で計算できる．

そして，(14) 式で定義したポテンシャルエネルギーから Hamilton 方程式により，Master Point j_m の加速度を計算する計算式は

$$\begin{aligned}\Delta m_{j_m} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{j_m}}{\partial t^2} &= \sum_{i_s} \frac{\partial U_{i_s}^s}{\partial \mathbf{r}_{j_m}} \\ &= \sum_{i_s} \frac{\partial U_{i_s}^s}{\partial \mathbf{F}_{i_s}} \frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \mathbf{r}_{j_m}} \\ &= \sum_{i_s} \mathbf{\Pi}_{i_s} : \frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \mathbf{r}_{j_m}} \Delta V_{i_s} \quad (23)\end{aligned}$$

で表す．ここで， Δm_{j_m} は粒子 j_m の質量である．そして，(15) 式により，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \mathbf{r}_{j_m}} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \mathbf{r}_{j_m} - \mathbf{r}_{i_s}} \frac{\partial \mathbf{r}_{j_m} - \mathbf{r}_{i_s}}{\partial \mathbf{r}_{j_m}} \\ &= [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)] \\ &\quad \cdot \sum_{j_m} [(\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0) \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)]^{-1} \quad (24) \\ &\quad \cdot \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

が導けるので，これを (23) 式に代入すると，Master Point j_m の曲面局所座標系の加速度が計算できる．そして， $\mathbf{r}_G = \mathbf{R}\mathbf{r}_L$ で全域基準座標系に戻し，Master Point j_m の全域基準座標系の加速度が得られる．そして，Master Point の速度と位置をシンプレクティック陽解法スキーム

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}\right)^n \Delta t \quad (25)$$

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \mathbf{v}^n \Delta t \quad (26)$$

で更新して，Slave Point の位置も影響半径内の Master Point の平均として更新できる．

第 2 段階は Master Point の法線方向を表す独立変数 $\theta(\theta_x, \theta_y)$ を更新する．このために，まず，Slave Point i_s の曲率テンソル \mathbf{C} を計算する．計算式は

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{i_s} &= \sum_{j_m} [(\theta_{j_m} - \theta_{i_s}) \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)] \\ &\quad \cdot \sum_{j_m} [(\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0) \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)]^{-1} \quad (27)\end{aligned}$$

で表す．ここで， $\theta(\theta_x, \theta_y)$ は粒子の法線方向を表す角度ベクトルであり， $\mathbf{r}_{j_m}^0(r_x^0, r_y^0)$ は粒子 j_m の初期曲面位置である．

次は，Slave Point i_s の曲げトルクテンソル \mathbf{M} を計算する．計算式は

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}\mathbf{C} \quad (28)$$

である．ここで，

$$\mathbf{K} = D \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1-v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-v & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (29)$$

は四階係数テンソルである．

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (30)$$

は曲げ剛性係数である．

そして，(14) 式で定義したポテンシャルエネルギーから Hamilton 方程式により，Master Point j_m の法線方向を表す角度の角加速度を計算する，計算式は

$$\begin{aligned}\Delta I_{j_m} \frac{\partial^2 \theta_{j_m}}{\partial t^2} &= \sum_{i_s} \frac{\partial U_{i_s}^s}{\partial \theta_{j_m}} + \sum_{i_s} \frac{\partial U_{i_s}^b}{\partial \theta_{j_m}} \\ &= \sum_{i_s} \frac{\partial U_{i_s}^s}{\partial \mathbf{F}_{i_s}} \frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} + \sum_{i_s} \frac{\partial U_{i_s}^b}{\partial \mathbf{C}_{i_s}} \frac{\partial \mathbf{C}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} \\ &= \sum_{i_s} \mathbf{\Pi}_{i_s} : \frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} \Delta V_{i_s} \\ &\quad + \sum_{i_s} \mathbf{M}_{i_s} : \frac{\partial \mathbf{C}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} \Delta V_{i_s} \quad (31)\end{aligned}$$

である．ここで，(19) 式と (27) 式により

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{i_s}}{\partial \theta_{i_s}} \frac{\partial \theta_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\theta_{i_s}^x}{(1-\theta_{i_s}^2)^{0.5}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\theta_{i_s}^y}{(1-\theta_{i_s}^2)^{0.5}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{n} \quad (32)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{C}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} &= \frac{\partial \mathbf{C}_{i_s}}{\partial \theta_{j_m} - \theta_{i_s}} \frac{\partial \theta_{j_m} - \theta_{i_s}}{\partial \theta_{j_m}} \\ &= [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)] \\ &\quad \cdot \sum_{j_m} [(\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0) \otimes (\mathbf{r}_{j_m}^0 - \mathbf{r}_{i_s}^0)]^{-1} \quad (33) \\ &\quad \cdot \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

になるので，式 (31) に代入すると，Master Point j_m の法線方向を表す角度の角加速度が計算できる．

最後に Master Point の法線方向の角速度と角度をシンプレクティック陽解法スキーム

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right)^n \Delta t \quad (34)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \omega^n \Delta t \quad (35)$$

で更新して，Slave Point の法線方向を表す角度も影響半径内の Master Point の平均として更新できる．

5. 検証計算

検証計算として，2種類の境界条件を持つ片持ち平板の自由振動を数値計算した．計算体系を Fig.4 に示す．片持ち平板の長さは10m，幅は10m，厚さは2mとした．初期条件として，変位ゼロおよび自由振動の速度分布

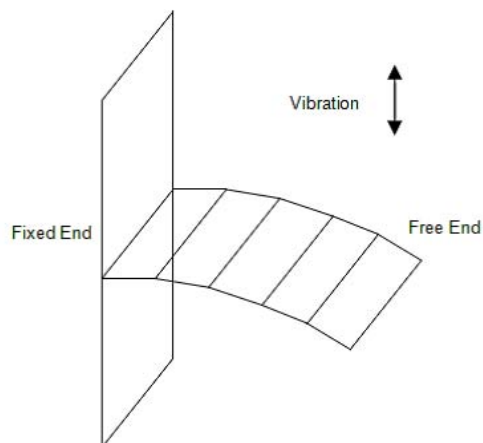


Fig.4 Vibration of free-fixed end plate

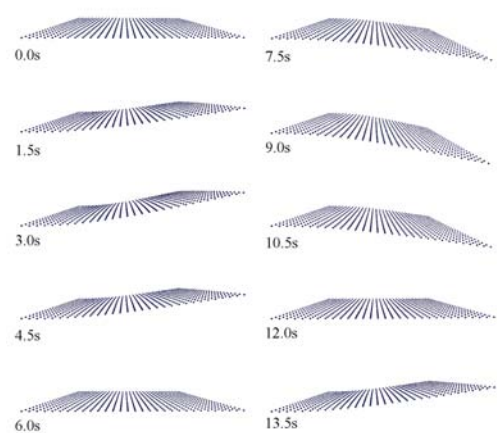


Fig.5 Capture of simulation

を各粒子に与えた．平板のヤング率は $1.0 \times 10^6 \text{Pa}$ ，ポアソン比は 0.4 とした．計算モデルの影響半径は粒子間距離の 1.5 倍を取った．

Fig.5 は平均粒子間距離を 0.33m とした場合，1.5 秒ぶつ々の計算結果を示している．材料のポアソン比が零ではないため，x 軸方向の曲げが y 軸方向の曲げに変換されていることが分かる．Fig.6 は振幅の数値解と平均粒子間距離の関係である．解像度が上がるにつれ，振幅の数値解が線形に収束していることが分かる．Fig.7 は半振動周期の数値解と平均粒子間距離の関係である．解像度が上がるにつれ，振動周期の数値解が線形に収束していることが分かる．数値解の収束解と理論解は差があるが，理論解は Kirchhoff 理論により導いた結果であるからだと考えられる．Kirchhoff 理論はせん断剛性を無限であると仮定しているので，Reissner-Mindlin 理論よりシェルは硬くなる．Fig.8 は長時間の計算をした際のエネルギーの保存性と計算の安定性を示している．完全 3 次元モデルと比べると，2 次元である本モデルが必要な計算時間は解像度の 3 乗から 2 乗に減らすことができる．

6. 結論

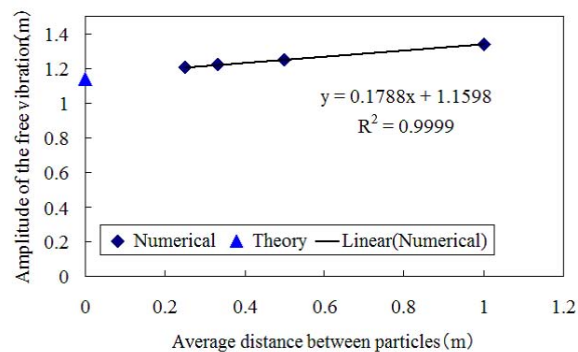


Fig.6 Convergence of amplitude

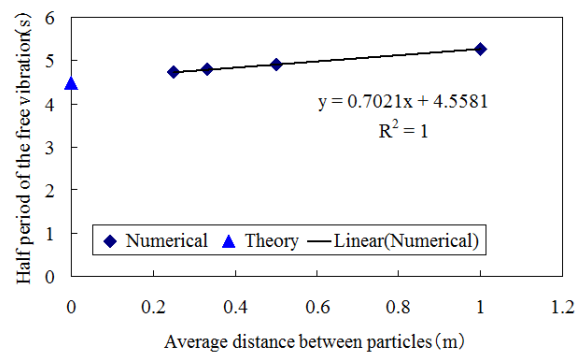


Fig.7 Convergence of period

本研究では Hamiltonian MPS 法により Reissner-Mindlin シェルの解析モデルを開発した．片持ち平板の自由振動を計算し，本手法の収束性と安定性を示した．本モデルによって粒子法を薄肉シェルだけではなく厚肉シェルにも対応可能にした．無限次元の Hamilton 系を有限次元の Hamilton 系に近似し微分方程式を離散化することにより，線形運動量と角運動量，全力学的エネルギーを保存させることに成功した．3 次元計算モデルと比較すると，計算時間は解像度の 3 乗から 2 乗に減らすことができた．

参考文献

- (1) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, 5th edn., Elsevier, 2000.
- (2) 越塚誠一，粒子法シミュレーション，培風館，2008.
- (3) House, D.H., Breen, D.E., *Cloth Modeling and Animation*, A K Peters, 2000.
- (4) 越塚誠一，粒子法，丸善，2005.
- (5) Li, S.F., Liu, W.K., *Meshfree Particle Methods*, Springer, 2004.
- (6) Lucy, L.B., A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The Astronomical Journal*, **82**, 1977, pp. 1013–1024.

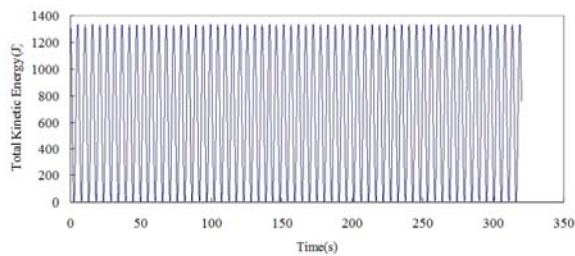


Fig.8 Conservation of energy

- (7) Gingold, R.A., Monaghan, J.J., Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non Spherical Stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **181**, 1977, pp. 375–389.
- (8) Koshizuka, S., Tamako, H., Oka, Y., A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation, *Computational Fluid Dynamics*, **4**, 1995, pp. 29–46.
- (9) Koshizuka, H., Oka, Y., Moving-Particle Semi-Implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, *Nuclear Science and Engineering*, **123**, 1996, pp. 421–434.
- (10) Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, **10**, 1992, pp. 307–318.
- (11) Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., Element-Free Galerkin Methods, *International journal for numerical methods in engineering*, **37**, 1994, pp. 229–256.
- (12) Libersky, L.D., Petschek, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R., Allahdadi, F.A., High Strain Lagrangian Hydrodynamics, a Three-dimensional SPH Code for Dynamic Material Response, *Journal of Computational Physics*, **109**, 1993, pp. 67–75.
- (13) Noguchi, H., Kawashima, T., Miyamura, T., Element free analysis of shell and spatial structures, *International Journal for Numerical methods in Engineering*, **47**, 2000, pp. 1215–1240.
- (14) Maurel, B., Combescure, A., An SPH shell formulation for plasticity and fracture analysis in explicit dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **76**, 2008, pp. 949–971.
- (15) Maurel, B., Potapov, S., Fabis, J., Combescure, A., Full SPH fluid-shell interaction for leakage simulation in explicit dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **80**, 2009, pp. 210–234.
- (16) 田中智行, 貞本将太, 岡澤重信, 弱形式を用いた粒子法による固体/構造解析, 計算力学講演会講演論文集, **21**, 2008, pp. 185–186.
- (17) 貞本将太, 田中智行, 岡澤重信, 粒子法を用いたシェル理論の定式化に関する基礎的研究, 計算力学講演会講演論文集, **23**, 2010, pp. 60–61.
- (18) 近藤雅裕, 越塚誠一, ハミルトニアン粒子法による薄板計算モデルの開発, 日本計算工学会論文集, 2010, Paper No.201011061.
- (19) Lee, C.J.K., Noguchi, H., Koshizuka, S., Fluid-Shell Structure Interaction Analysis by Coupled Particle and Finite Element Method, *Computers and Structures*, **85**, 2007, pp. 688–697.
- (20) Suzuki, Y., Koshizuka, S., A Hamiltonian Particle Method for Non-linear Elastodynamics, *International Journal for Numerical methods in Engineering*, **74**-8, 2008, pp. 1344–1373.
- (21) 鈴木幸人, 越塚誠一, 非線型弾性体に対する粒子法の開発, 日本計算工学会論文集, 2007, Paper No.20070001.
- (22) Dyka, R., Randels, P.W., Ingel, R.P., Stress points for tension instability, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 1997, pp. 2325–2341.
- (23) Randels, P.W., Petschek, A.G., Libersky, L.D., Dyka, C.T., Stability of DPD and SPH, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **26**, 2002, pp. 339.