Projet d'épidemiologie

Célestin BIGARRÉ

24 juillet 2020

1 Exercice 1

On cherche dans cet excercice modeliser une épidemie de rage dans une population de renards. On propose le modèle schématisé à la Figure 1. Le système d'équations associé est :

$$\begin{cases} \frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} = a(S+E+I) - bS - \gamma(S+E+I)S - \beta IS \\ \frac{\mathtt{d}E}{\mathtt{d}t} = \beta IS - bE - \gamma(S+E+I)E - \sigma E \\ \frac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} = \sigma E - bI - \gamma(S+E+I)I - \alpha I \end{cases}$$

1.1 Étude de l'équilibre sain

On cherche maintenant un état d'équilibre non nul $(\tilde{S}, \tilde{E}, \tilde{I})$ sans maladie (DFE). C'est-à-dire vérifiant,

$$\begin{cases} \frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t}(\tilde{S}) = 0 \\ \tilde{E} = 0 \\ \tilde{I} = 0 \end{cases}$$

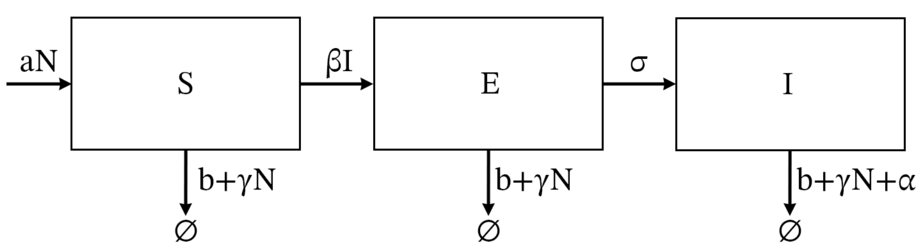


FIGURE 1 – Schéma du modèle de la rage dans une population de renards

On obtient pour ce système l'équation logistique bien connue,

$$\begin{aligned}\frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t}(\tilde{S}) &= (a-b)S - \gamma S^2 \\ &= (a-b)S(1-\frac{\gamma}{a-b})\end{aligned}$$

Le seul équilibre non nul pour cette équation est, $\tilde{S} = \frac{a-b}{\gamma} = K$. Le seul DFE pour le système étudié est donc $(K, 0, 0)$.

Connaissant cet équilibre sain, on peut calculer le taux de reproduction de base, $R0$.

Commencons par chercher une matrice M_1 telle que,

$$\frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} = M_1(S, E, I) \cdot \begin{pmatrix} S-K \\ E \\ I \end{pmatrix}.$$

Or, on a,

$$\begin{aligned}dtS &= (a-b)S - \gamma S(S+E+I) - \beta IS + aE + aI \\ &= (a-b-\gamma N-\gamma K)(S-K) + \frac{a-b}{\gamma}(a-b-\gamma N(K+E+I)) - \beta SI + a(E+I) \\ &= -\gamma N(S-K) + bE + (b-\beta S)I\end{aligned}$$

D'où, $M_1 = \begin{pmatrix} -\gamma N & b & b-\beta S \end{pmatrix}$.

On pose de plus $M_1 = [M_{11} \quad M_{12}]$ avec :

$$M_{11} = (-\gamma N) \text{ et } M_{12} = \begin{pmatrix} b & b-\beta S \end{pmatrix}$$

On cherche aussi M_{22} telle que,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathtt{d}E}{\mathtt{d}t} \\ \frac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} \end{pmatrix} = M_{22}(S, E, I) \cdot \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}$$

De manière évidente, $M_{22} = \begin{pmatrix} -b-\sigma-\gamma(S+E+I) & \beta S \\ \sigma & -b-\alpha-\gamma(S+E+I) \end{pmatrix}$

Ainsi la jacobienne du système au point $(K, 0, 0)$ s'écrit,

$$\begin{aligned}J(K,0,0) &= \begin{bmatrix} M_{11}(K,0,0) & M_{12}(K,0,0) \\ 0 & M_{22}(K,0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\gamma K & b & b \\ 0 & -b-\sigma-\gamma K & \beta K \\ 0 & \sigma & -b-\alpha-\gamma K \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mais aussi,

$$J(K,0,0) = \begin{bmatrix} M_{11}(K,0,0) & M_{12}(K,0,0) \\ 0 & \begin{pmatrix} -b-\sigma-\gamma K & 0 \\ \sigma & -b-\alpha-\gamma K \end{pmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & \beta K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

En posant,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -b-\sigma-\gamma K & 0 \\ \sigma & -b-\alpha-\gamma K \end{pmatrix}$$

et comme $F \geq 0$, V est de Metzler et que $M_{22} = F + V$, on a par définition :

$$R_0 = \rho(-FV^{-1})$$

On a $\det V = (-b-\sigma-\gamma K)(-b-\alpha-\gamma K)$ donc,

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-b-\sigma-\gamma K} & 0 \\ \frac{\sigma}{(-b-\sigma-\gamma K)(-b-\alpha-\gamma K)} & \frac{\beta K}{-b-\alpha-\gamma K} \end{pmatrix}$$

et par suite,

$$-FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\beta K\sigma}{(-b-\sigma-\gamma K)(-b-\alpha-\gamma K)} & \frac{\beta K}{-b-\alpha-\gamma K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où le polynôme caracteristique de $-FV^{-1}$ est $-\lambda\left(\frac{-\beta K\sigma}{(-b-\sigma-\gamma K)(-b-\alpha-\gamma K)} - \lambda\right)$ donc $\mathrm{sp}(-FV^{-1}) = \{0, \frac{-\beta K\sigma}{(-b-\sigma-\gamma K)(-b-\alpha-\gamma K)}\}$ et

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{-\beta K\sigma}{(-b-\sigma-\gamma K)(-b-\alpha-\gamma K)} \\ &= \frac{\beta(a-b)\sigma}{\gamma(a+\alpha)(a+\sigma)} \\ &= K\frac{\beta\sigma}{(a+\alpha)(a+\sigma)} \end{aligned}$$

1.2 Équilibre endémique

On s'intéresse mainenant à l'équilibre endémique. On cherche donc $(\tilde{S}, \tilde{E}, \tilde{I})$ avec $\tilde{E} \neq 0$ et $\tilde{I} \neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t}(\tilde{S}) = 0 \\ \frac{\mathtt{d}E}{\mathtt{d}t}(\tilde{E}) = 0 \\ \frac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t}(\tilde{I}) = 0 \end{cases}$$

Pour trouver cet équilibre, on effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \bar{S} = \dfrac{S}{S+E+I} \\ \bar{I} = \dfrac{I}{S+E+I} \\ N = S+E+I \end{cases}$$

La formule des dérivées composées donne alors,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}\bar{S}}{\mathtt{d}t} = \dfrac{N\frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} - S\frac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t}}{N^2} \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{E}}{\mathtt{d}t} = \dfrac{N\frac{\mathtt{d}E}{\mathtt{d}t} - E\frac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t}}{N^2} \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{I}}{\mathtt{d}t} = \dfrac{N\frac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} - I\frac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t}}{N^2} \\ \dfrac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t} = \dfrac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} + \dfrac{\mathtt{d}E}{\mathtt{d}t} + \dfrac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}\bar{S}}{\mathtt{d}t} = -b\bar{S} + a - \gamma N\bar{S} - \beta N\bar{I}\bar{S} - \bar{S}\left((a-b) - \gamma N - \alpha\bar{I}\right) \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{E}}{\mathtt{d}t} = \beta N\bar{I}\bar{S} - (b+\sigma)\bar{E} - \gamma N\bar{E} - \bar{E}\left((a-b) - \gamma N - \alpha\bar{I}\right) \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{I}}{\mathtt{d}t} = \sigma\bar{E} - (b+\alpha)\bar{I} - \gamma N\bar{I} - \bar{I}\left((a-b) - \gamma N - \alpha\bar{I}\right) \\ \dfrac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t} = (a-b)N - \gamma N^2 - \alpha N\bar{I} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}\bar{S}}{\mathtt{d}t} = a - \left(a - \alpha\bar{I} + \beta N\bar{I}\right)\bar{S} \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{E}}{\mathtt{d}t} = \beta N\bar{I}\bar{S} - (a+\sigma-\alpha\bar{I})\bar{E} \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{I}}{\mathtt{d}t} = \sigma\bar{E} - (a+\alpha-\alpha\bar{I})\bar{I} \\ \dfrac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t} = (a-b)N - \gamma N^2 - \alpha N\bar{I} \end{cases}$$

Le système est entierement décrit par $\bar{S}, \bar{E}$ et N car $\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} = 1$. Trouver l'équilibre endémique revient à résoudre,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}\bar{S}}{\mathtt{d}t} = 0 \\ \dfrac{\mathtt{d}\bar{I}}{\mathtt{d}t} = 0 \\ \dfrac{\mathtt{d}N}{\mathtt{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = a - \left(a - \alpha\bar{I} + \beta N\bar{I}\right)\bar{S} \\ 0 = \sigma\bar{E} - (a+\alpha-\alpha\bar{I})\bar{I} \\ 0 = (a-b)N - \gamma N^2 - \alpha N\bar{I} \end{cases}$$

On peut facilement exprimer $\bar{N}$ et $\bar{S}$ en fonction de $\bar{I}$, en effet

$$
\begin{cases}
\bar{S} = \dfrac{a}{a - \alpha\bar{I} + \beta N\bar{I}} \\
0 = \sigma(1 - \bar{S} - barI) - (a + \alpha - \alpha\bar{I})\bar{I} \\
0 = a - b - \gamma N - \alpha\bar{I}
\end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases}
\bar{S} = \dfrac{a}{a - \alpha\bar{I} + \beta N\bar{I}} \\
0 = \sigma(1 - \bar{S} - \bar{I}) - (a + \alpha - \alpha\bar{I})\bar{I} \\
N = \dfrac{a - b - \alpha\bar{I}}{\gamma}
\end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases}
\bar{S} = \dfrac{a}{a - \alpha\bar{I} + \beta N\bar{I}} \\
\bar{S} = 1 - \dfrac{(a + \sigma + \alpha - \alpha\bar{I})\bar{I}}{\sigma} \\
N = \dfrac{a - b - \alpha\bar{I}}{\gamma}
\end{cases}
$$

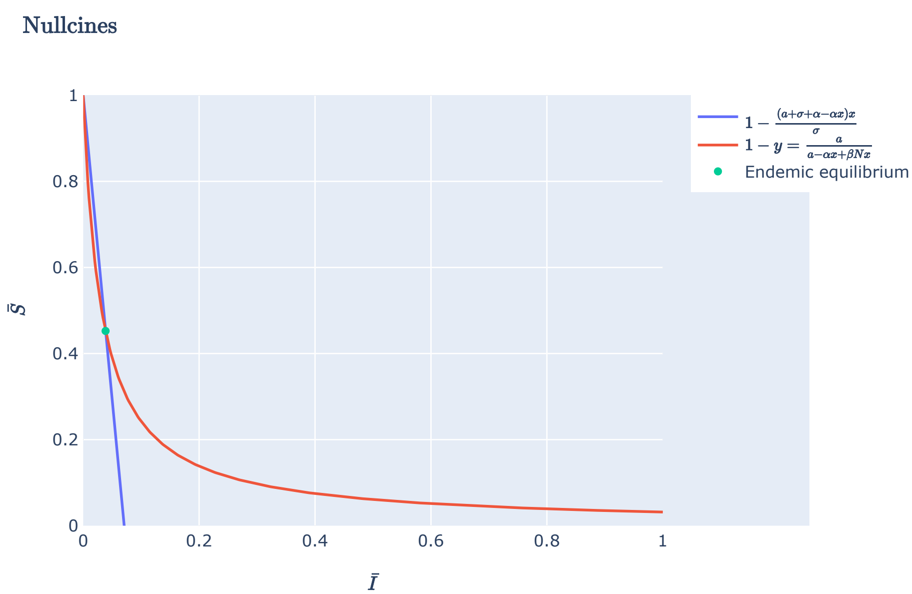


FIGURE 2 – Équilibre endémique de l'épidemie pour $b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{1}{13}, \alpha = \frac{1}{73}, \beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{5000}$

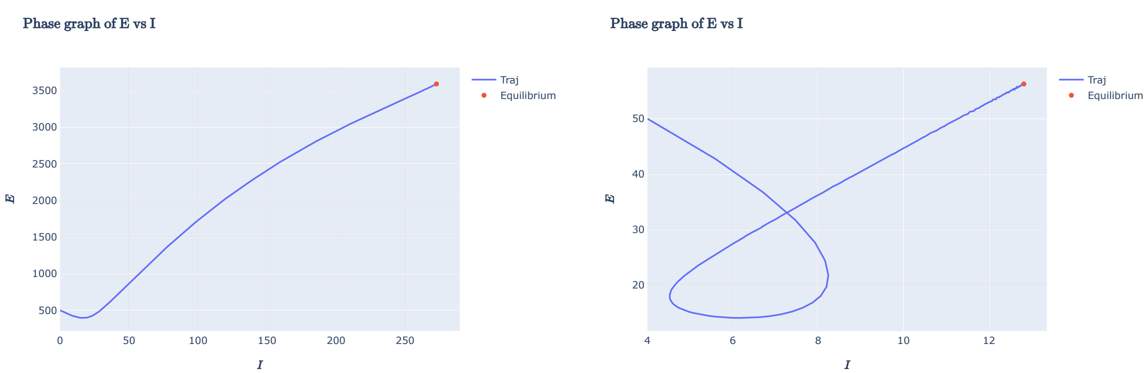
Le système ne peut malheureusement pas être résolu simplement (la combinaison des deux premières équations donne un polynôme de degré 4 en $\bar{I}$). Cette ecriture permet néanmoins de determiner graphiquement ou numériquement l'équilibre endémique. Il suffit pour cela de determiner si les courbes

$$y = \frac{a}{a - \alpha x + \beta N x} \quad \text{et} y = 1 - \frac{(a + \sigma + \alpha - \alpha x)x}{\sigma}$$

se croisent sur le pavé $]0,1[\times]0,1[$ (cf Figure 2). Le point $(0,1)$ représentant le DFE est bien entendu toujours un point d'intersection. Lorsqu'on a determié $\bar{I}$ on peut calculer N. Il ne reste plus ensuite qu'à reexprimer les variables du sytème initial : $S = N\bar{S}, E = N(1 - \bar{S} - \bar{I})$ et $I = N\bar{I}$.

1.3 Stabilité de l'équilibre endémique

Pour étudier la stabilité de l'équilibre endémique, on explore numériquement le portrait de phase de E en fonction de I et le comportement de la trajectoire par rapport à l'équilibre endémique. La Figure 3 propose ce portrait de phase pour deux jeux de paramètres conduisant $R_0 > 1$.



(a) $b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{1}{13}, \alpha = \frac{1}{73}$, $\beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{10000}$
$S_0 = 1000, E_0 = 500, I_0 = 0$

(b) $b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{3}{13}, \alpha = \frac{1}{73}$, $\beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{1000}$
$S_0 = 0, E_0 = 50, I_0 = 4$

FIGURE 3 – Étude de la stabilité de l'équilibre endémique, portrait de phase E en fonction de I

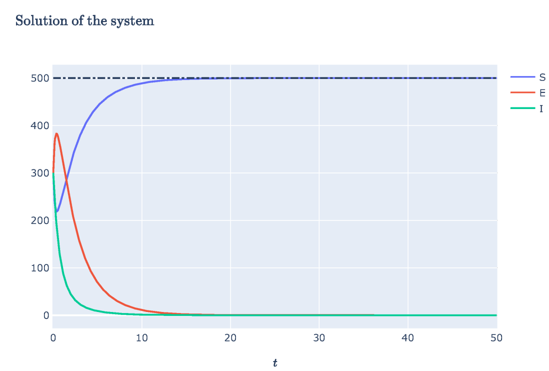
Sur la Figure 3a, pour une situation initiale comportant quelques exposés et aucun infectés, on peut voir que la trajectoire est, hormis une legère inflexion, quasiment directe de la condition initiale vers l'équilibre. Le nombre d'infectés ne fait qu'augmenter, et après une legère baisse le nombre d'exposés augmente lui aussi jusqu'a atteindre l'état d'équlibre.

Sur la Figure 3b en revanche, bien que l'équilibre soit aussi attracteur, la forme de la trajectoire diffère completement. Sur cette figure, γ supérieur est d'un ordre de grandeur, mais surtout la situation initiale comporte beaucoup d'exposés, très peu d'infectés et aucun suceptibles. On observe une trajectoire en "boucle" qui se croise sans être périodique (ceci n'étant possible que par la présence d'une dimension non représentée surt le portrait de phase). La trajectoire pourrait se décomposer en deux phases, une première phase de pic ou Le nombre d'exposés et d'infectés augmente puis diminue, suivi d'une phase de croissance jusqu'à l'équilibre qui fait penser à la trajectoire de la Figure 3a.

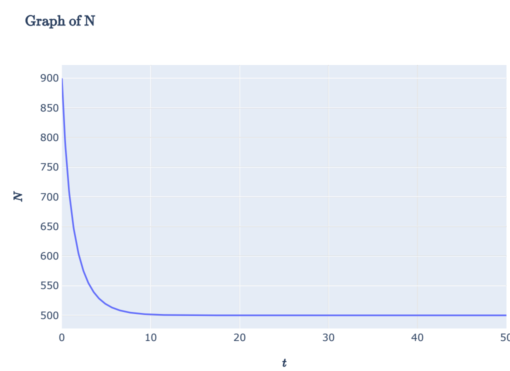
En testant plusieurs jeux de paramètres conduisant à $R_0 > 1$, on remarque que les trajectoires sont toujours attirées par l'équilibre endémique. on peut supposer que celui-ci est globalement assymptotiquement stable.

1.4 Étude numérique

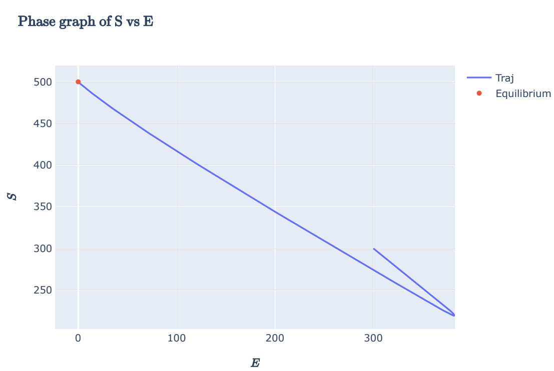
On se propose maintenant de regarder en détails le comportement de la trajectoire lorsque $R_0 < 1$ puis lorsque $R_0 > 1$.



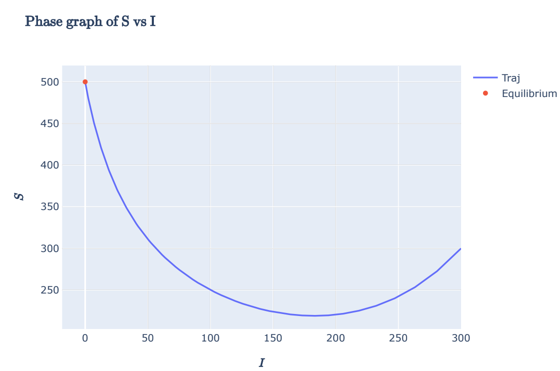
(a) Solution du système au cours du temps



(b) Évolution de la population totale au cours du temps



(c) Portait de phase S en fonction de E



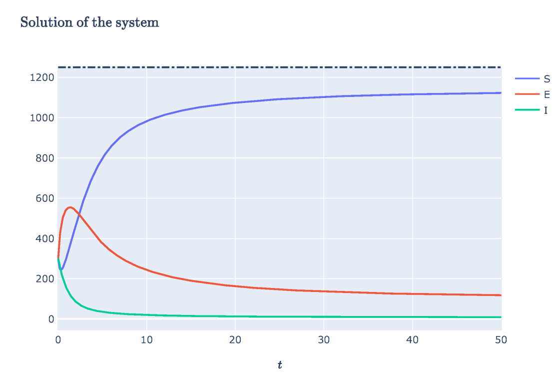
(d) Portait de phase S en fonction de I

FIGURE 4 – Étude numérique du système pour $R_0 < 1$, $S_0 = 300, E_0 = 300, I_0 = 300$ $b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{1}{13}, \alpha = \frac{1}{73}, \beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{10000}$

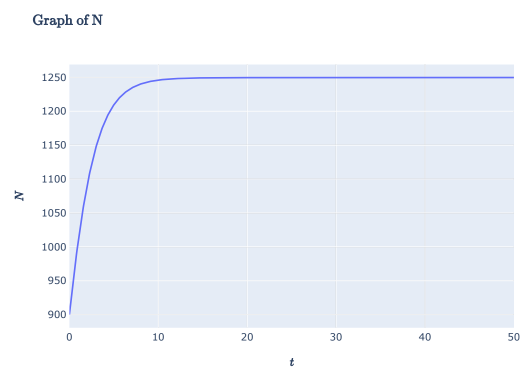
Sur la Figure 4 on représenté la trajectoire et différents portraits de phases pour $S_0 = 300, E_0 = 300, I_0 = 300, b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{1}{13}, \alpha = \frac{1}{73}, \beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{10000}$ ce qui donne $R_0 \approx 0.44$.

Comme $R_0 < 1$ on s'attend à atteindre le DFE (représenté par la ligne en pointillés sur la Figure 4a). En effet on peut voir sur la Figure 4a que le nombre d'individus susceptibles est croissant et tend vers K. On observe également que le nombre d'infectés est strictement décroissant, alors que que le nombre d'exposés croit légérement avnt de commencer à décroitre (Cela se voit aussi sur la Figure 4c).

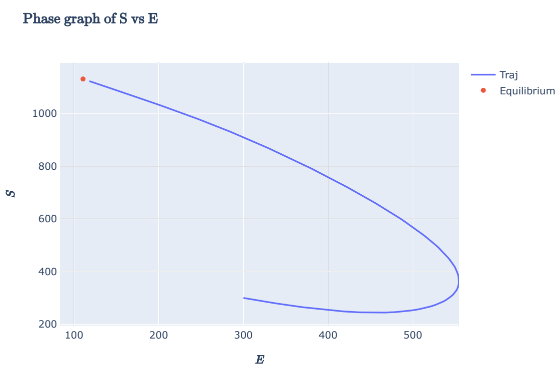
Sur la figure 4b on observe que la population totale décroit ce qui est normal car le nombre initial d'individus infectés et exposés était élevé par rapport à la capacité du milieu.



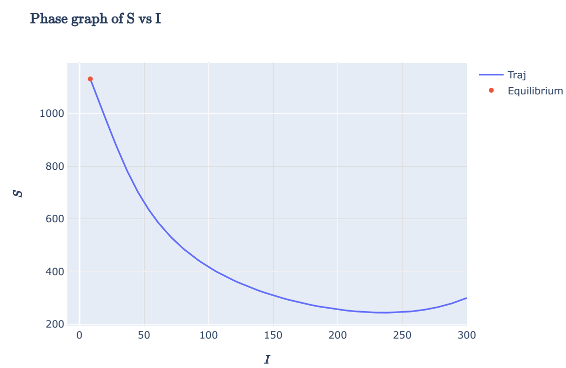
(a) Solution du système au cours du temps



(b) Évolution de la population totale au cours du temps



(c) Portait de phase S en fonction de E



(d) Portait de phase S en fonction de I

FIGURE 5 – Étude numérique du système pour $R_0 > 1$, $S_0 = 300, E_0 = 300, I_0 = 300$ $b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{1}{13}, \alpha = \frac{1}{73}, \beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{2500}$

Sur la Figure 5, on a effectué la même étude pour $S_0 = 300, E_0 = 300, I_0 = 300, b = 0.5, a = 1, \sigma = \frac{1}{13}, \alpha = \frac{1}{73}, \beta = \frac{1}{79.69}$ et $\gamma = \frac{1}{2500}$ ($R_0 \approx 1.11$).

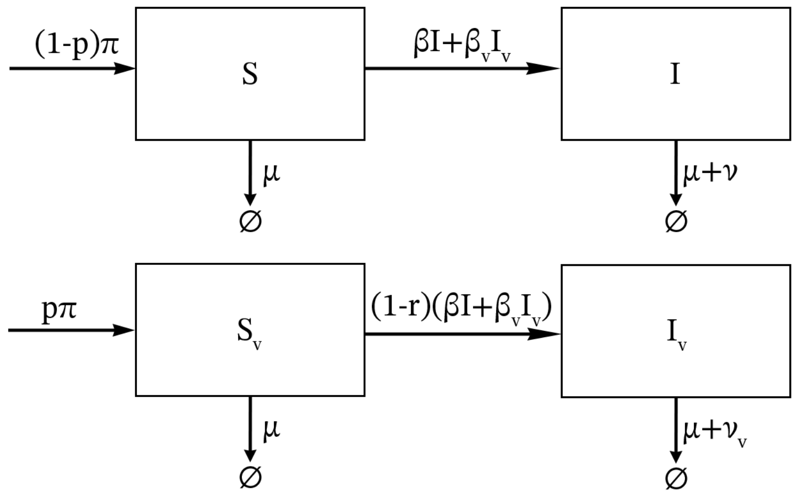


FIGURE 6 – Schéma du modèle de vaccination

Cette fois-ci, on s'attend à ce que les trajectoires soient attirées par l'équilibre endémique. C'est effectivement ce aue l'on observe sur les figures 5c et 5d. La trajectoire est de fait très proche de celle de la Figure 4, excepté que le système se stabilise dans un état non nul pour E et S.

On remarque aussi que cette fois, comme la population intiale était très inférieure à la capacité du milieu, la populaion totale augmente au cours du temps.

2 Modèle de vaccination

On étudie maintenant le modèle SI avec vaccination dont le schéma est présenté à la Figure 6 :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} = (1-p)\pi - \mu S - \beta I + \beta_v I_v)S \\ \dfrac{\mathtt{d}S_v}{\mathtt{d}t} = p\pi - \mu S_v - (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v \\ \dfrac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} = (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I \\ \dfrac{\mathtt{d}I_v}{\mathtt{d}t} = (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu_v)I_v \end{cases}$$

2.1 Interpretation du modèle

Les parametres du modèle peuvent s'interpreter de la façon suivante :

π Croissance fixe de la population

p taux de vaccination des nouveaux-nés

μ taux de mortalité dans la population (hors maladie)

β taux de transmission lors d'un contact entre un individu infecté non vacciné et un individu suceptible

β_v taux de transmission lors d'un contact entre un individu infecté vacciné et un individu suceptible

r taux de résistance à la contamination des individus vaccinés

ν taux de mortalité lié à la maladie dans la population non vaccinée

ν_v taux de mortalité lié à la maladie dans la population vaccinée

2.2 Équilibre sain

On cherche un équilibre sain, c'est-à-dire un point $(\tilde{S}, \tilde{S}_v, \tilde{I}, \tilde{I}_v)$ tel que,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}\tilde{S}}{\mathtt{d}t} = 0 \\ \dfrac{\mathtt{d}\tilde{S}_v}{\mathtt{d}t} = 0 \\ \tilde{I} = 0 \\ \tilde{I}_v = 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} 0 = (1-p)\pi - \mu\tilde{S} \\ 0 = p\pi - \mu\tilde{S}_v \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \tilde{S} = \dfrac{(1-p)\pi}{\mu} \\ \tilde{S}_v = \dfrac{p\pi}{\mu} \end{cases}$$

2.3 Calcul du R_0

On cherche ensuite à calculer le taux de reproduction de base (R_0). Pour cela on commence par réécrire le système sous forme matricielle. On cherche donc $M_1(S, S_v, I, I_v)$ telle que,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} \\ \frac{\mathtt{d}S_v}{\mathtt{d}t} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} S - \tilde{S} \\ S_v - \tilde{S}_v \\ I \\ I_v \end{pmatrix}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}t} &= (1-p)\pi - \mu S - (\beta I + \beta_v I_v)S \\ &= (1-p)\pi - \mu\left(S - (1-p)\frac{\pi}{\mu}\right) + \mu(1-p)\frac{\pi}{\mu} - \beta SI - \beta_v SI_v \\ &= -\mu\left(S - (1-p)\frac{\pi}{\mu}\right) - \beta SI - \beta_v SI_v \end{aligned}$$

Et

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathtt{d}S_v}{\mathtt{d}t} &= P\pi - \mu S_v - (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v \\
&= p\pi - \mu\left(S_v - p\frac{\pi}{\mu}\right) + \mu p\frac{\pi}{\mu} - (1-r)(\beta I - \beta_v I_v)S_v \\
&= -\mu\left(S_v - p\frac{\pi}{\mu}\right) - (1-r)(\beta I - \beta_v I_v)S_v
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
M_1 = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta S & -\beta_v S \\ 0 & -\mu & -(1-r)\beta S_v & -(1-r)\beta_v S_v \end{pmatrix}
$$

On pose de plus, $M_1 = [M_{11}, M_{12}]$ avec :

$$
M_1 = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\beta S & -\beta_v S \\ (1-r)\beta S_v & -(1-r)\beta_v S_v \end{pmatrix}
$$

On cherche également $M22$ telle que,

$$
\begin{pmatrix} \frac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} \\ \frac{\mathtt{d}I_v}{\mathtt{d}t} \end{pmatrix} = M_{22} \cdot \begin{pmatrix} I \\ I_v \end{pmatrix}
$$

Or comme,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathtt{d}I}{\mathtt{d}t} &= (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I \\
&= (\beta S - \mu - \nu)I + \beta_v S I_v
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathtt{d}I_v}{\mathtt{d}t} &= (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu_v)I_v \\
&= ((1-r)\beta_v S_v - \mu - \nu_v)I_v + (1-r)\beta S_v I
\end{aligned}
$$

on a :

$$
M_{22} = \begin{pmatrix} \beta S - \mu - \nu & \beta_v S \\ (1-r)\beta S_v & (1-r)\beta_v S_v - \mu - \nu_v \end{pmatrix}
$$

On peut réécrire cette matrice sous la forme $F + V$ en posant :

$$
\begin{aligned}
F &= \begin{pmatrix} \beta S & \beta_v S \\ (1-r)\beta S_v & (1-r)\beta_v S_v \end{pmatrix} \\
V &= \begin{pmatrix} -\mu - \nu & 0 \\ 0 & -\mu - \nu_v \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On obtient alors une décomposition régulière, avec F positive et V de Metzler. Par définition le taux de reproduction de base est alors (les matrices étant prises en $(\tilde{S}, \tilde{S_v})$:

$$R_0 = \rho(-FV^{-1})$$

De plus,

$$\det V = (-\mu - \nu)(-\mu - \nu_v)$$

donc

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{-\mu-\nu_v}{(-\mu-\nu)(-\mu-\nu_v)} & 0 \\ 0 & \frac{-\mu-\nu}{(-\mu-\nu)(-\mu-\nu_v)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu - \nu & 0 \\ 0 & -\mu - \nu_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et,

$$-FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S}{\mu+\nu} & \frac{\beta_v S}{\mu+\nu_v} \\ (1-r)\frac{\beta S_v}{\mu+\nu} & (1-r)\frac{\beta_v S_v}{\mu+\nu_v} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\det(-FV^{-1} - \lambda I) = \left(\frac{\beta S}{\mu+\nu} - \lambda\right)\left((1-r)\frac{\beta_v S_v}{\mu+\nu_v} - \lambda\right) - (1-r)\frac{\beta S_v}{\mu+\nu}\frac{\beta_v S}{\mu+\nu_v}$$

Les valeurs propres de $-FV^{-1}$ sont donc les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\beta S}{\mu+\nu} - \lambda\right)\left((1-r)\frac{\beta_v S_v}{\mu+\nu_v} - \lambda\right) - (1-r)\frac{\beta S_v}{\mu+\nu}\frac{\beta_v S}{\mu+\nu_v} \\ &= \frac{(\beta S - (\mu+\nu)\lambda)\left((1-r)\beta_v S_v - (\mu+\nu_v)\lambda\right) - (1-r)\beta_v S \beta S_v}{(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \\ \iff \quad 0 &= (\beta S - (\mu+\nu)\lambda)\left((1-r)\beta_v S_v - (\mu+\nu_v)\lambda\right) - (1-r)\beta_v S \beta S_v \\ &= (1-r)\beta_v S \beta S_v - \beta S(\mu+\nu_v)\lambda - (\mu+\nu)\beta_v S_v \lambda + (\mu+\nu)(\mu+\nu_v)\lambda^2 - (1-r)\beta_v S \beta S_v \\ &= (\mu+\nu)(\mu+\nu_v)\lambda^2 - (\beta S(\mu+\nu_v) + (\mu+\nu)\beta_v S_v)\lambda \\ &= \lambda((\mu+\nu)(\mu+\nu_v)\lambda - (\beta S(\mu+\nu_v) + (\mu+\nu)\beta_v S_v)) \\ \iff \quad & \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou } \lambda = \dfrac{(\beta S(\mu+\nu_v) + (\mu+\nu)\beta_v S_v)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)\lambda} \\ \qquad = \dfrac{\beta S}{\mu+\nu} + \dfrac{(1-r)\beta_v S_v}{\mu+\nu_v} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc, puisque la valeur propre non nulle est toujours positive que,

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta \tilde{S}}{\mu+\nu} + \frac{(1-r)\beta_v \tilde{S_v}}{\mu+\nu_v} \\ &= \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{(1-p)\beta}{\mu+\nu} + \frac{p(1-r)\beta_v}{\mu+\nu_v}\right) \end{aligned}$$

2.4 Réécriture de R_0

En posant,

$$
\begin{aligned}
\beta_{uu} &= \beta \\
\beta_{uv} &= \beta_v \\
\beta_{vu} &= (1-r)\beta \\
\beta_{vv} &= (1-r)\beta_v
\end{aligned}
$$

On peut réécrire R_0 sous la forme :

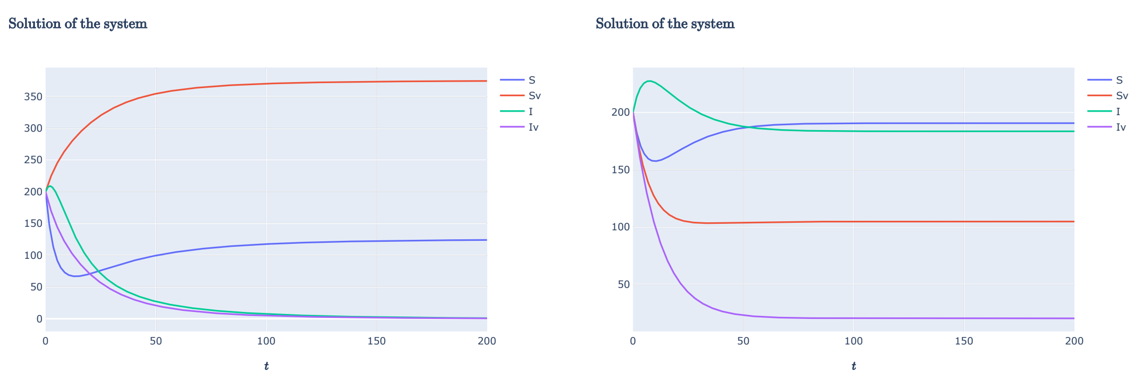
$$
R_0 = \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{(1-p)\beta_{uu}}{\mu+\nu} + \frac{p\beta_{vv}}{\mu+\nu_v}\right)
$$

Et la condition $R_0 < 1$ peut se réécrire :

$$
\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{(1-p)\beta_{uu}}{\mu+\nu} + \frac{p\beta_{vv}}{\mu+\nu_v}\right) < 1 \\
\iff \quad & \frac{\pi(1-p)\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} < \frac{\pi p \beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \\
\iff \quad & \beta_{uu} < \frac{p}{1-p}\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu_v}\beta_{vv} \\
\iff \quad & \beta_{vv} > \frac{1-p}{p}\frac{\mu+\nu_v}{\mu+\nu}\beta_{uu}
\end{aligned}
$$

2.5 Simulations numériques

On présente ici quelques simulations numériques du modèle.



(a) $p = 3/4, r = 8/10, \pi = 50, \mu = 1/10$
$\nu = 1/2000, \nu_v = 1/4000, R_0 \approx 0.81$

(b) $p = 1/4, r = 8/10, \pi = 50, \mu = 1/10$
$\nu = 1/2000, \nu_v = 1/4000, R_0 \approx 1.93$

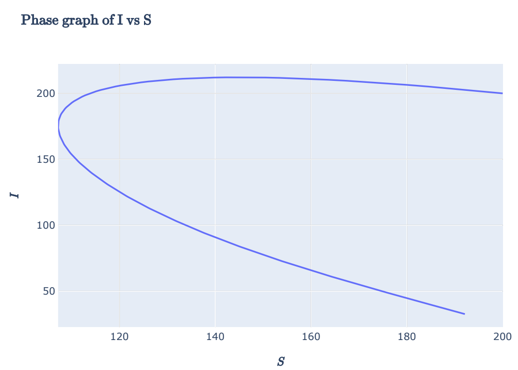
FIGURE 7 – Évolution du système au cours du temps pour $R_0 < 1$ et $R_0 > 1$

La Figure 7 Présente l'évolution en temps du modèle pour deux jeux de paramètres menant à $R_0 < 1$ ou $R_0 > 1$. Entre ces deux jeux de paramètres seul le taux de vaccination change ($p = 3/4$ pour la Figure 7a et $p = 1/4$ pour la Figure 7b).

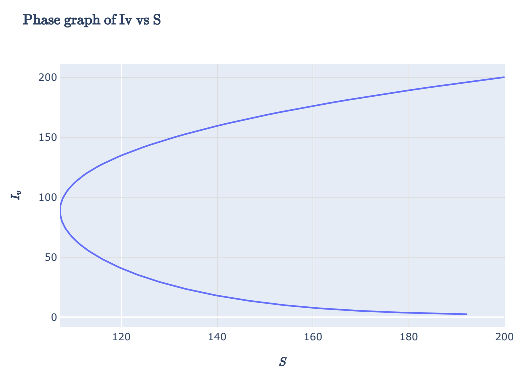
Dans un cas $R_0 < 1$ et l'épidémie s'éteint dans l'autre $R_0 > 1$ et la maladie est endémique. De plus même dans le cas où $R_0 > 1$ les individus vaccinés sont moins touchés par la maladie que les individus non vaccinés.

Selon ce modèle, la vaccination est un outils majeur dans la prévention et le contrôle sde cette épidémie.

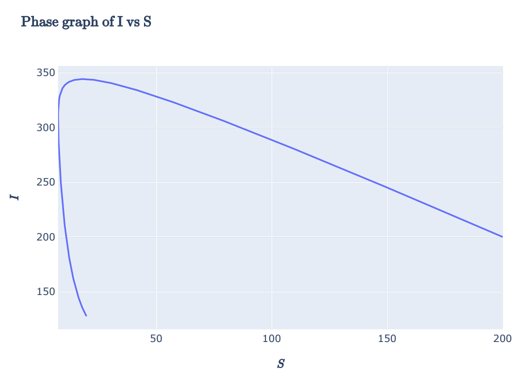
La Figure 8 présente l'évolution de I en fonction de S ainsi que de I_v en fonction de S. La Figure 9 présente quant à elle des portraits de phases I_v en fonction de I et S_v en fonction de S pour différentes conditions initiales.



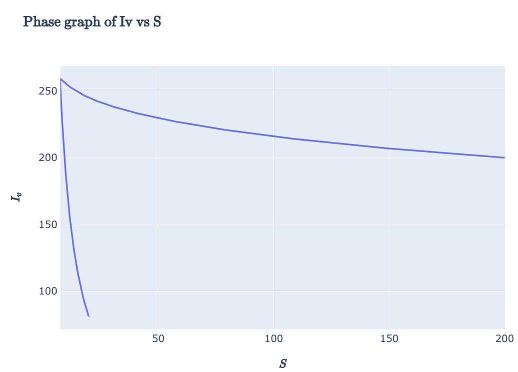
(a) $p = 1/4, r = 8/10, \pi = 30, \mu = 1/10$
$\nu = 1/2000, \nu_v = 1/4000, R_0 \approx 1.16$



(b) $p = 1/4, r = 8/10, \pi = 30, \mu = 1/10$
$\nu = 1/2000, \nu_v = 1/4000, R_0 \approx 1.16$

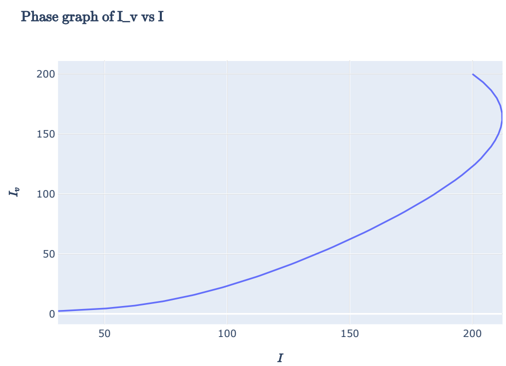


(c) $p = 1/2, r = 8/10, \pi = 30, \mu = 1/10$
$\nu = 1/500, \nu_v = 1/200, R_0 \approx 7.26$

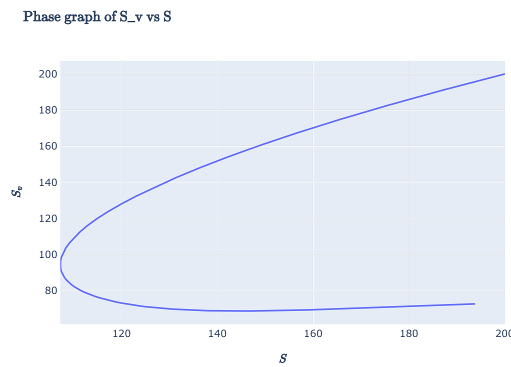


(d) $p = 1/4, r = 8/10, \pi = 30, \mu = 1/10$
$\nu = 1/500, \nu_v = 1/200, R_0 \approx 7.26$

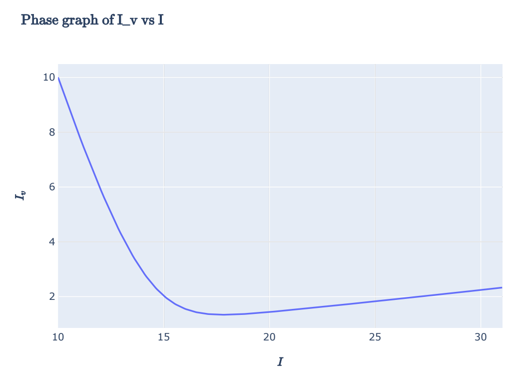
FIGURE 8 – Portraits de Phase I en fonction de S et I_v en fonction de S.



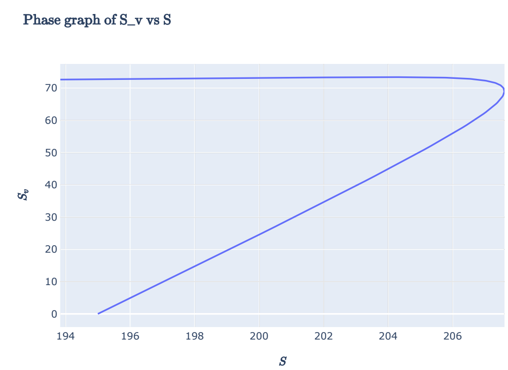
(a) $S_0 = 200, S_{v0} = 200, I_0 = 200, I_{v0} = 200$



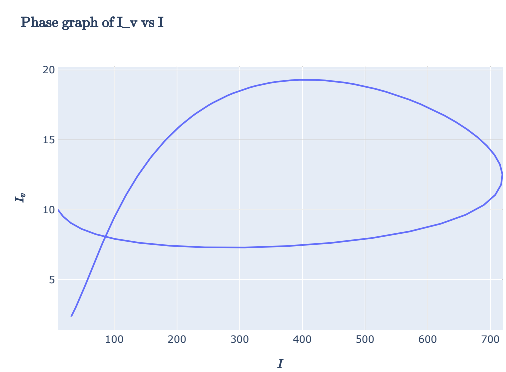
(b) $S_0 = 200, S_{v0} = 200, I_0 = 200, I_{v0} = 200$



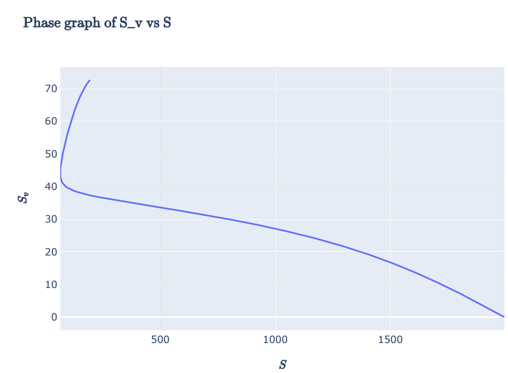
(c) $S_0 = 195, S_{v0} = 0, I_0 = 10, I_{v0} = 10$



(d) $S_0 = 195, S_{v0} = 0, I_0 = 10, I_{v0} = 10$



(e) $S_0 = 1995, S_{v0} = 0, I_0 = 10, I_{v0} = 10$



(f) $S_0 = 1995, S_{v0} = 0, I_0 = 10, I_{v0} = 10$

FIGURE 9 – Portraits de Phase I_v en fonction de I et S_v en fonction de S.
$p = 1/4, r = 8/10, \pi = 30, \mu = 1/10, \nu = 1/2000, \nu_v = 1/4000. R_0 \approx 1.16$

Code source

Les simulations ont été réalisées sous python grâce aux bibliothèques `scipy`[1] et `numpy`[2], les figures ont été generées par la bibliothèque `plotly`[3].

Un dépot contenant le code source utilisé pour les simulations ainsi que pour générer ce rapport est disponnible à l'adresse `https://github.com/celbig/projet_epidemio_m2`.

1. `https://www.scipy.org/`
2. `https://numpy.org/`
3. `https://plotly.com/python/`