Optimisation d'un lanceur spatial

Objectif du projet

La mission d'un lanceur spatial est d'amener un satellite en orbite. La mise en orbite est définie en termes d'altitude et de vitesse à atteindre. L'objectif du projet est de trouver le lanceur le plus léger possible permettant d'amener un satellite de masse donnée sur une orbite donnée.

Modèle orbital

- La Terre est sphérique de rayon R_t.
- L'orbite visée est circulaire à l'altitude H_c.
- Le rayon de l'orbite est : $R_c = R_t + H_c$
- La vitesse sur l'orbite est : $V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_c}}$

  μ est la constante gravitationnelle terrestre.

Valeurs numériques : $R_t = 6378137$ m

$\mu = 3.986\ 10^{14}$ m^3/s^2

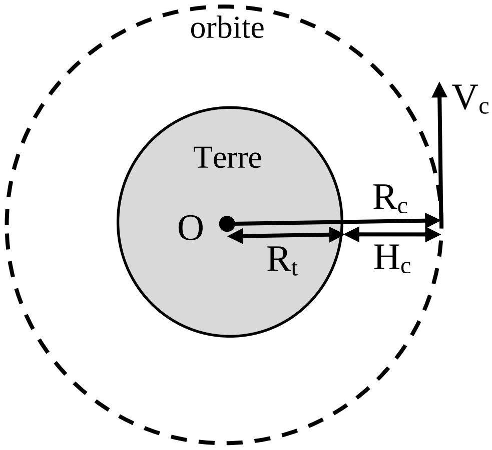


Figure 1 : Orbite circulaire

L'optimisation simultanée de la configuration du lanceur et de sa trajectoire étant difficile (optimisation multidisciplinaire), on adopte une approche itérative en découplant les deux problèmes.

- Le **problème d'étagement** détermine la configuration pour une vitesse propulsive V_p donnée, en utilisant un modèle simplifié du lanceur.
- Le **problème de trajectoire** détermine la vitesse réelle V_r que peut atteindre la configuration, en utilisant un simulateur de la trajectoire.

On itère sur la vitesse propulsive V_p jusqu'à ce que la vitesse réelle V_r soit égale à la vitesse cible V_c.

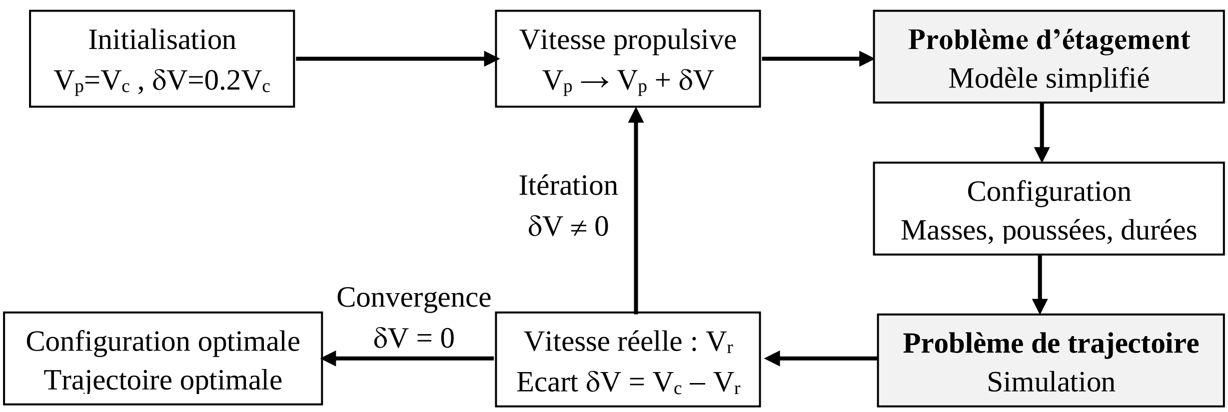


Figure 2 : Itérations sur la configuration

Le problème d'étagement (PE) et le problème de trajectoire (PT) se formulent comme des problèmes d'optimisation non linéaire sous contraintes (NLP). La formulation mathématique de ces deux problèmes est présentée respectivement aux parties §1 et §2 de ce document.

Ces problèmes seront résolus numériquement par l'algorithme d'optimisation à développer dans le cadre du projet. Cet algorithme (méthode SQP) est présenté sous forme de planches dans le document dédié fourni par ailleurs.

Travail à réaliser

La mission (masse m_u du satellite, altitude H_c de l'orbite) est différente pour chaque binôme.

Le travail à réaliser comprend :

- La réalisation d'un optimiseur non linéaire sous contraintes (méthode SQP)
- La résolution analytique du problème d'étagement
- La résolution numérique du problème d'étagement avec l'optimiseur SQP
- La réalisation d'un simulateur de la trajectoire du lanceur
- La résolution numérique du problème de trajectoire avec l'optimiseur SQP
- Les itérations sur la vitesse propulsive pour obtenir la configuration optimale

Les résultats attendus sont :

- La configuration du lanceur pour la mission demandée
- La trajectoire de ce lanceur du sol à l'orbite
- Les logiciels développés (optimiseur, simulateur) à fournir en même temps que le rapport
- Une démonstration de ces logiciels lors de la soutenance

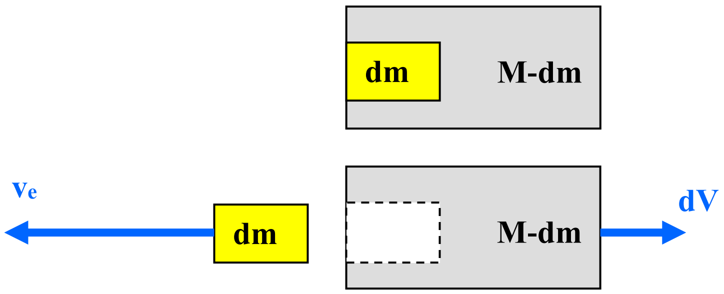
Ces résultats sont à présenter sous forme d'un rapport (10 à 15 pages) au format pdf, puis d'une soutenance (15 minutes).

1. Configuration du lanceur

1.1 Propulsion par réaction

L'objectif du lanceur est de communiquer au satellite la vitesse requise pour la mise en orbite. L'acquisition de vitesse utilise le principe de la propulsion par réaction, Lorsqu'une masse dm de propergol est éjectée à vitesse v_e, le lanceur reçoit un accroissement de vitesse dV.

- Avant éjection de masse :
- Après éjection de masse



Par conservation de la quantité de mouvement : $dm.v_e = (M - dm).dV$
La variation de masse M du lanceur est : $dM = -dm$

$$\left.\begin{array}{l} dm.v_e = (M - dm).dV \\ dM = -dm \end{array}\right\} \Rightarrow dV = -v_e \frac{dM}{M}$$

L'accroissement de vitesse entre l'instant d'allumage (masse M_i , vitesse V_i) et l'instant d'extinction (masse M_f , vitesse V_f) s'obtient en intégrant chaque membre :

$$\boxed{V_f - V_i = v_e \ln \frac{M_i}{M_f}}$$

(« équation de la fusée », Constantin Tsiolkovski 1903)

1.2 Etagement

Afin de réduire la masse totale du lanceur, on répartit les ergols dans 3 étages propulsifs. Les étages fonctionnent successivement. Lorsque tous les ergols d'un étage ont été brûlés, l'étage vide est largué ce qui permet d'alléger le lanceur avant d'allumer l'étage suivant.

Notations

- Masses des étages (notation m)

  $m_{e,j}$ = masse d'ergols de l'étage j
  $m_{s,j}$ = masse de structure de l'étage j

  $$\boxed{m_{s,j} = k_j \, m_{e,j}}$$

  (k_j est l'indice constructif de l'étage j)

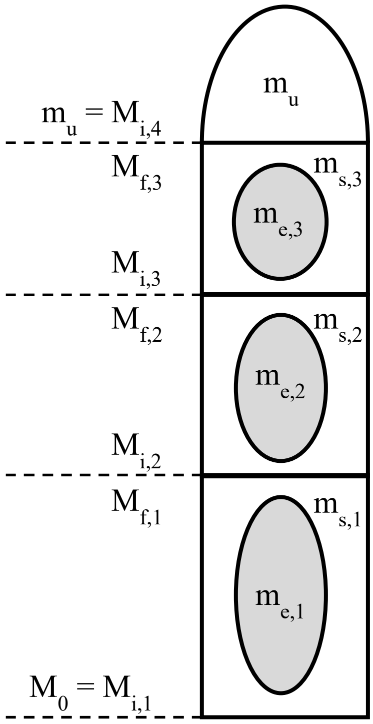
- Masses du lanceur (notation M)

  $M_{i,j}$ = masse lanceur en début de fonctionnement étage j
  $M_{f,j}$ = masse lanceur en fin de fonctionnement étage j

  $$\boxed{\begin{array}{l} M_{f\,j} = M_{i,j} - m_{e,j} \\ M_{i,j+1} = M_{f\,j} - m_{s,j} \end{array}}$$

  (consommation des ergols étage j)
  (séparation de l'étage j vide)

  $M_0 = M_{i,1}$ = masse du lanceur au décollage
  $m_u = M_{i,4}$ = masse du satellite (étage fictif 4)



1.3 Formulation du problème d'étagement

On cherche le lanceur le plus léger possible permettant d'atteindre une vitesse propulsive donnée V_p pour un satellite de masse m_u.

Ce problème d'optimisation se formule se formule en termes de critère, contrainte, variables.

- Critère : Maximiser le rapport entre la masse m_u du satellite et la masse M_0 du lanceur.
- Contrainte : Fournir un accroissement de vitesse V_p au satellite.
- Variables : Les masses d'ergols m_{e1}, m_{e2} ,m_{e3} des 3 étages

$$\boxed{\max_{m_{e,1}, m_{e,2}, m_{e,3}} \quad J = \frac{m_u}{M_0} \quad \text{sous} \quad V = V_p} \quad \rightarrow \text{ Problème noté (PE)}$$

Le rapport J est le critère de performance du lanceur (généralement de l'ordre de 1%).

La vitesse propulsive V est la somme des contributions des 3 étages.

$$V = v_{e1} \ln \frac{M_{i,1}}{M_{f,1}} + v_{e2} \ln \frac{M_{i,2}}{M_{f,2}} + v_{e3} \ln \frac{M_{i,3}}{M_{f,3}}$$

Remarque

Cette vitesse propulsive serait effectivement celle atteinte en fin de vol si la combustion était instantanée. Il s'agit d'une vitesse impulsionnelle servant à dimensionner le lanceur. La combustion n'étant pas instantanée, des pertes de vitesse apparaissent au cours de la trajectoire dues aux autres forces (gravité, trainée) et au non alignement de la poussée avec la vitesse.

Il faut donc dimensionner le lanceur sur une vitesse propulsive V_p supérieure à la vitesse à atteindre V_c, en incluant dans le dimensionnement les pertes δV qui seront rencontrées au cours de la trajectoire. La valeur de ces pertes n'est initialement pas connue, car elle dépend de la trajectoire suivie. Elle ne sera constatée qu'après simulation de la trajectoire du lanceur (partie 2). C'est pourquoi il sera nécessaire d'itérer sur la configuration en recalant la vitesse propulsive.

Les données du problème sont :

- Les indices constructifs des étages : k_1, k_2, k_3
- Les vitesses d'éjection des étages : v_{e1}, v_{e2} ,v_{e3}
- La vitesse propulsive : V_d
- La masse du satellite : m_u

Valeurs numériques (Ariane 1)

Etage	Indice constructif k	Vitesse d'éjection v_e (m/s)
EP1	0,10	2600
EP2	0,15	3000
EP3	0,20	4400

Les valeurs de masse utile m_u sont différentes pour chaque projet.
La vitesse propulsive dépend de l'orbite à atteindre, également différente pour chaque projet.

1.4 Résolution du problème d'étagement

Le problème d'étagement (PE) est à résoudre par 2 approches :

- Une approche analytique présentée ci-dessous (1.4.1 à 1.4.4)
- Une approche numérique en appliquant directement l'algorithme SQP (1.4.5)

1.4.1 Montrer que l'on peut reformuler le problème (PE) de la façon suivante.

$$\min_{x_1,x_2,x_3} f(x_1,x_2,x_3) \quad \text{sous} \quad c(x_1,x_2,x_3) = 0$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) = -\left(\dfrac{1+k_1}{x_1}-k_1\right)\left(\dfrac{1+k_2}{x_2}-k_2\right)\left(\dfrac{1+k_3}{x_3}-k_3\right) \\ c(x_1,x_2,x_3) = v_{e1}\ln x_1 + v_{e2}\ln x_2 + v_{e3}\ln x_3 - V_p \end{cases}$$

Indications

- Poser : $x_j = \dfrac{M_{i,j}}{M_{f,j}}$
- Ecrire le critère de performance J comme : $J = \dfrac{m_u}{M_0} = \dfrac{M_{i,4}}{M_{i,1}} = \dfrac{M_{i,4}}{M_{i,3}} \times \dfrac{M_{i,3}}{M_{i,2}} \times \dfrac{M_{i,2}}{M_{i,1}}$
- Exprimer $\dfrac{M_{i,j+1}}{M_{i,j}}$ en fonction de x_j en utilisant les relations entre les masses et les indices.

1.4.2 Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1 (conditions KKT p158).

Montrer que la solution des conditions KKT vérifie : $v_{ej}\left(1-\Omega_j x_j\right) = \text{cte}$ avec $\Omega_j = \dfrac{k_j}{1+k_j}$

Indications

- Poser : $y_j = \dfrac{1+k_j}{x_j} - k_j$ et exprimer f en fonction de y_1, y_2, y_3.
- Exprimer la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ en fonction de f, x_j et y_j

1.4.3 En déduire que le problème se ramène à résoudre une équation à une inconnue.

Indications

- Choisir comme inconnue x_3 et exprimer x_j en fonction de x_{j+1}.
- Ecrire la contrainte comme une équation en x_3.

1.4.4 Résoudre cette équation par la méthode de Newton (p227) ou de la sécante (p235).
En déduire les masses d'ergols des étages et la masse totale du lanceur.
Calculer le multiplicateur de la contrainte et vérifier les conditions KKT d'ordre 1.

Indication

- Le multiplicateur s'obtient à partir de la constante dans $v_{ej}\left(1-\Omega_j x_j\right) = \text{cte}$

1.4.5 Reprendre la résolution du problème (PE) avec l'optimiseur SQP.
Vérifier que l'on retrouve le résultat obtenu par l'approche analytique.

2. Trajectoire du lanceur

2.1 Equations du mouvement

Le lanceur décolle de la surface terrestre et doit amener le satellite sur l'orbite circulaire demandée.

On se place dans un repère géocentrique galiléen Oxy.

- L'origine O est le centre de la Terre supposée sphérique de rayon R_t.
- La trajectoire est supposée plane dans le plan xy.
- Le point de décollage est à la surface de la Terre sur l'axe Ox.
- L'orbite visée est circulaire de rayon R_c . La vitesse sur cette orbite est V_c.
- Le point d'injection en orbite est libre.

La figure 3 représente la trajectoire du lanceur dans le repère 0xy, depuis le décollage jusqu'à l'injection en orbite.

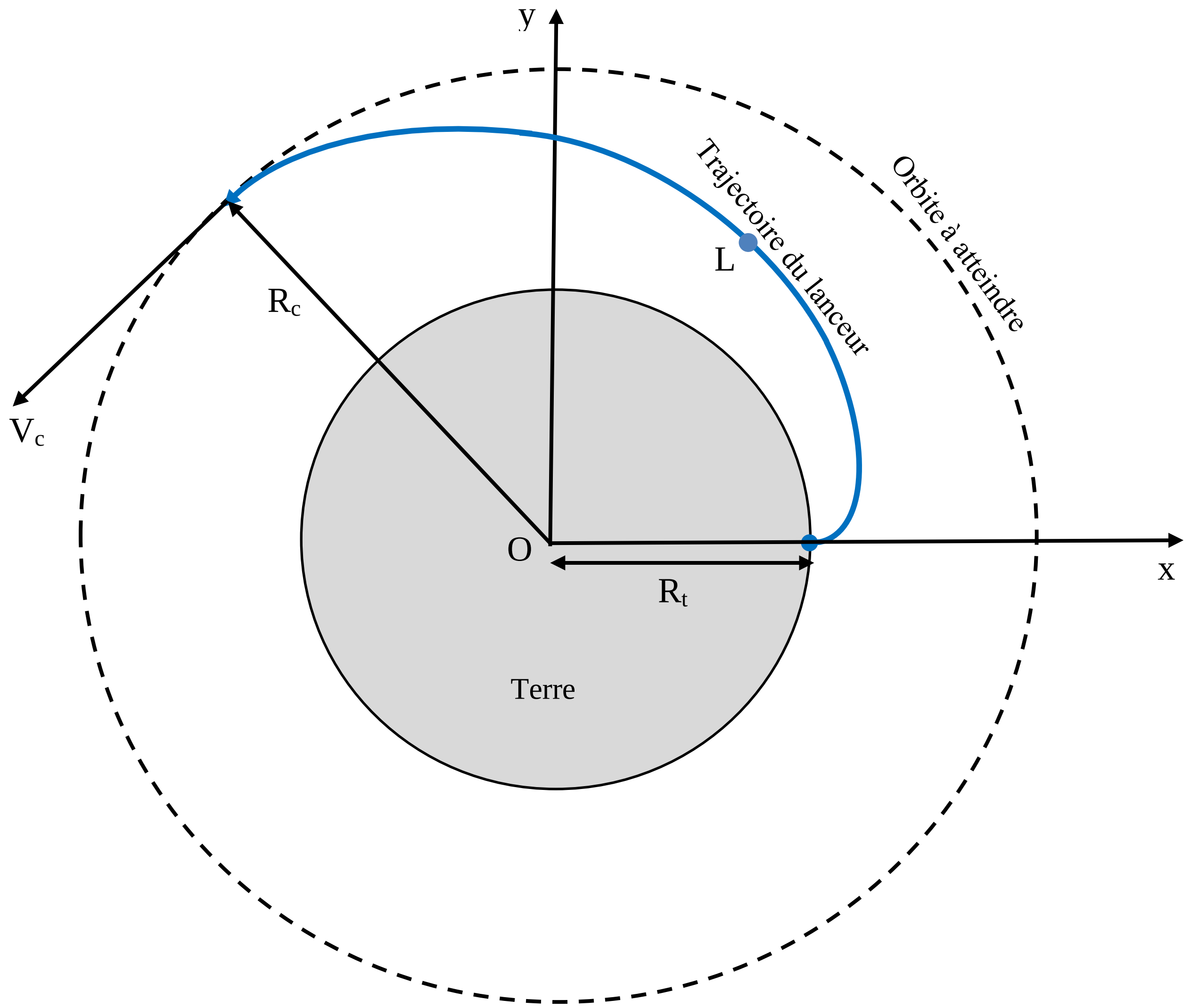
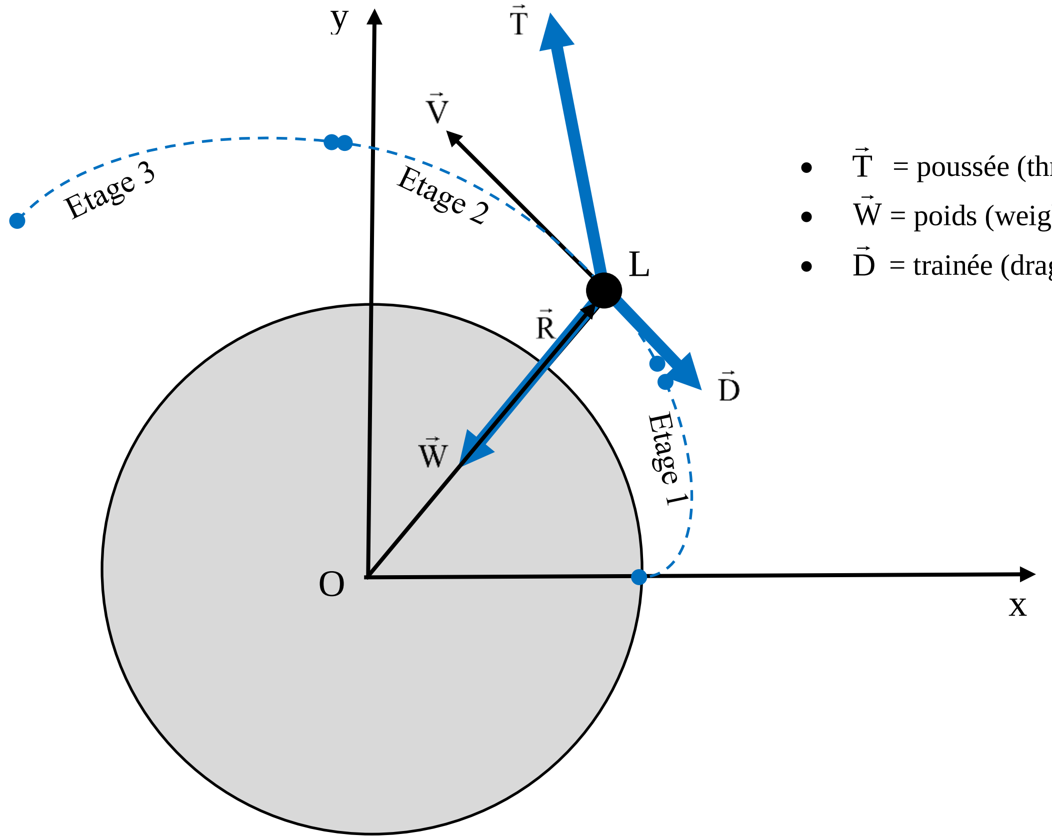


Figure 3 : Trajectoire du lanceur

Le lanceur est considéré comme un point matériel L de position $\vec{R}$,de vitesse $\vec{V}$ et de masse M.
Les coordonnées de la position et de la vitesse dans le repère Oxy sont :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Le lanceur est soumis à 3 forces : la poussée $\vec{T}$, le poids $\vec{W}$, la trainée $\vec{D}$. Ces forces sont représentées sur la figure 4.



- $\vec{T}$ = poussée (thrust)
- $\vec{W}$ = poids (weight)
- $\vec{D}$ = trainée (drag)

Figure 4 : Forces appliquées au lanceur

Les équations du mouvement dans le repère galiléen Oxy sont :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\vec{R}} = \vec{V} \\ \dot{\vec{V}} = \dfrac{\vec{T} + \vec{W} + \vec{D}}{M} \\ \dot{M} = -q \qquad \text{(débit massique)} \end{cases}}$$

Les expressions des forces et du débit sont :

$$\begin{cases} \vec{W} = -\mu \dfrac{\vec{R}}{R^3} M \\ \vec{D} = -c_x \rho V \vec{V} \\ \vec{T} = T\vec{u} \\ q = \dfrac{T}{v_e} \end{cases}$$

Les modèles des forces appliquées sont explicités en §2.2.

2.2 Forces appliquées et commande

Le poids $\vec{W}$ et la trainée $\vec{D}$ sont calculés avec les modèles et valeurs numériques suivantes.

- μ = constante gravitationnelle terrestre (μ= 3.986 10^{14} m^3/s^2)
- c_x = coefficient de trainée du lanceur (c_x = 0.1)
- ρ = densité de l'atmosphère (en kg/m^3)

On considère le modèle de densité exponentielle en fonction de l'altitude : $\rho = \rho_0 e^{-\frac{R-R_t}{H}}$

- ρ_0 = densité au sol (= 1.225 kg/m^3)
- H = facteur d'échelle (= 7000 m)
- R_t = rayon terrestre (= 6378137 m)

La poussée $\vec{T}$ du lanceur est de module T et orientée suivant la direction $\vec{u}$. Chaque étage du lanceur a son propre niveau de poussée constant. Le niveau de poussée T_j de l'étage numéro j est déterminé à partir de la masse du lanceur à l'allumage de l'étage (cette masse est notée $M_{i,j}$ dans la partie étagement §1.2) de façon à réaliser un niveau d'accélération donné α_j à l'allumage de l'étage.

- $M_{i,j}$ = masse du lanceur à l'allumage de l'étage j (en kg)
- α_j = accélération demandée à l'allumage de l'étage j (en m/s^2)
- T_j = poussée de l'étage j (en N)

$$\boxed{\rightarrow\ T_j = \alpha_j M_{i,j}}$$

Le débit massique q_j de l'étage numéro j est calculé à partir de sa poussée T_j et sa vitesse d'éjection v_{ej}.

- v_{ej} = vitesse d'éjection de l'étage j (en m/s)
- q_j = débit massique de l'étage j (en kg/s)

$$\boxed{\rightarrow\ q_j = \frac{T_j}{v_{ej}}}$$

La durée de combustion t_{cj} de l'étage j est obtenue à partir de sa masse d'ergols m_{ej} et de son débit q_j.

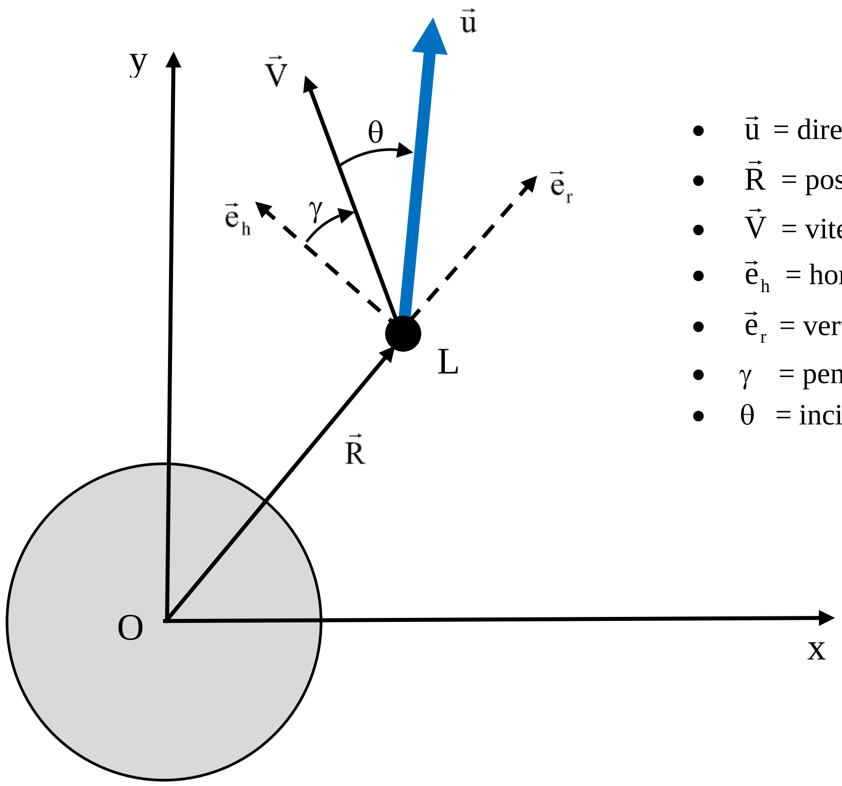
- m_{ej} = masse d'ergols de l'étage j (en kg)
- t_{cj} = durée de combustion de l'étage j (en s)

$$\boxed{\rightarrow\ t_{cj} = \frac{m_{ej}}{q_j}}$$

Valeurs numériques

Etage	Accélération initiale α (m/s^2)	Vitesse d'éjection v_e (m/s)
EP1	15	2600
EP2	10	3000
EP3	10	4400

La direction de poussée $\vec{u}$ varie au cours du vol et permet de commander la trajectoire du lanceur. Cette direction $\vec{u}$ est définie par son angle d'incidence θ avec la vitesse $\vec{V}$. L'angle θ est constant pendant le vol d'un étage. Sa valeur est différente pour chaque étage.



- $\vec{u}$ = direction de poussée
- $\vec{R}$ = position
- $\vec{V}$ = vitesse
- $\vec{e}_h$ = horizontale locale (unitaire)
- $\vec{e}_r$ = verticale locale (unitaire)
- γ = pente de la vitesse
- θ = incidence (angle vitesse-poussée)

Figure 5 : Direction de poussée

Les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans Oxy sont calculées à partir de la position $\vec{R}$ et la vitesse $\vec{V}$.

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

A partir de la position, on définit les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ (vertical) et $\vec{e}_h$ (horizontal).

$$\vec{e}_r = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_h = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

A partir de la position et la vitesse, on calcule la pente γ de la vitesse.

$$\sin\gamma = \frac{\vec{R}.\vec{V}}{RV} \qquad \rightarrow \quad -90 \text{ deg} \le \gamma \le +90 \text{ deg}$$

L'angle d'incidence θ étant donné, on en déduit $\vec{u}$: $\boxed{\vec{u} = \vec{e}_h \cos(\gamma+\theta) \; + \; \vec{e}_r \sin(\gamma+\theta)}$

2.3 Intégration numérique

La trajectoire du lanceur est découpée en 3 séquences correspondant au fonctionnement successif des étages propulsifs. Lorsqu'un étage a brûlé tous ses ergols, il est séparé avant l'allumage de l'étage suivant. La séparation est supposée instantanée. La figure suivante représente les séquences du vol.

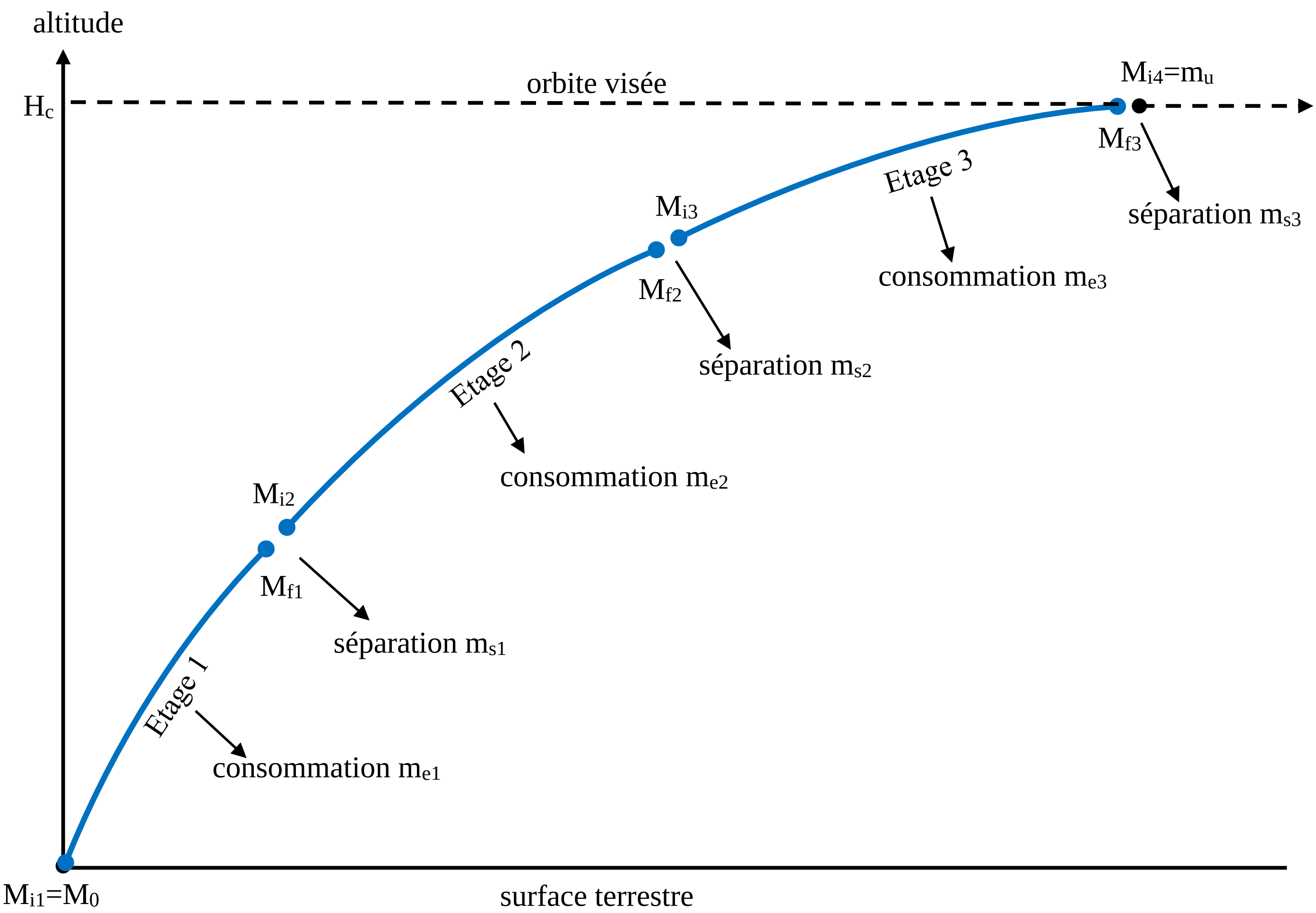


Figure 6 : Séquences de vol

La trajectoire du lanceur est calculée en intégrant numériquement les équations différentielles du mouvement à l'aide de d'un intégrateur numérique d'une librairie ODE. En raison des discontinuités de masse à la séparation des étages, des changements de poussée et d'angle de commande à chaque étage, il faut réaliser l'intégration par **3 appels successifs à l'intégrateur** correspondant aux 3 étages.

Entre chaque appel, la masse sèche de l'étage précédent est larguée, la poussée, le débit et l'angle de commande sont actualisés pour l'étage suivant.

Les conditions initiales à $t_0 = 0$ sont :

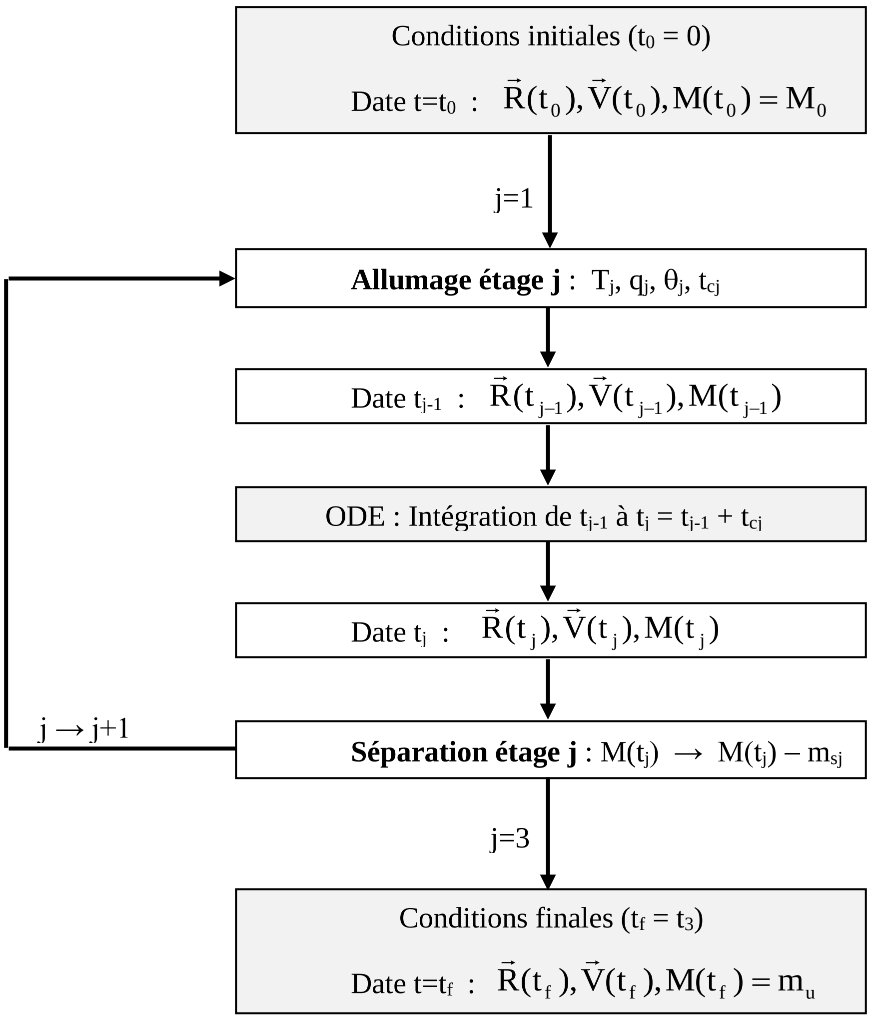
- Position : $\vec{R}(t_0) = \begin{pmatrix} R_t \\ 0 \end{pmatrix}$

- Vitesse : $\vec{V}(t_0) = V_0 \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$ avec $V_0 = 100$ m/s,
  θ_0 = incidence initiale à optimiser

- Masse : $M(t_0) = M_0$ masse totale du lanceur au décollage

Ces conditions initiales représentent l'état du lanceur après la phase de décollage vertical.

On note t_j la date de séparation de l'étage numéro j.
L'intégration numérique est réalisée en 3 appels d'ODE de t_0 à t_1, de t_1 à t_2 et de t_2 à t_3.



<u>Figure 7</u> : Intégration numérique de la trajectoire

2.4 Formulation du problème de trajectoire

On cherche à atteindre l'altitude de l'orbite en maximisant la vitesse fournie au satellite.

Ce problème d'optimisation se formule se formule en termes de critère, contraintes, variables.

- Critère : Maximiser la vitesse finale $V(t_f)$.
- Contrainte : Atteindre l'orbite de rayon R_c avec une vitesse horizontale
- Variables : Les angles θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 orientent la vitesse initiale et la poussée du lanceur pour chaque étage

$$\boxed{\max_{\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3} V(t_f) \quad \text{sous} \quad \begin{cases} R(t_f) = R_c \\ \vec{R}(t_f).\vec{V}(t_f) = 0 \end{cases}} \rightarrow \text{Problème noté (PT)}$$

La résolution de ce problème permet de connaître la vitesse maximale V_r atteignable par le lanceur et de vérifier si la configuration du lanceur est adaptée à la mission (cf figure 2).

- Si la vitesse maximale V_r est inférieure à la vitesse cible V_c, le lanceur est sous-performant. Il faut le redimensionner en augmentant sa vitesse propulsive V_p.
- Si la vitesse maximale V_r est supérieure à la vitesse cible V_c, le lanceur est sur-performant. Il faut le redimensionner en diminuant sa vitesse propulsive V_p.

L'itération sur la vitesse propulsive se poursuit jusqu'à ce que la vitesse atteinte V_r coïncide avec la vitesse cible V_r .

2.5 Résolution du problème de trajectoire

Le problème de trajectoire est résolu en branchant l'optimiseur SQP au simulateur de trajectoire.

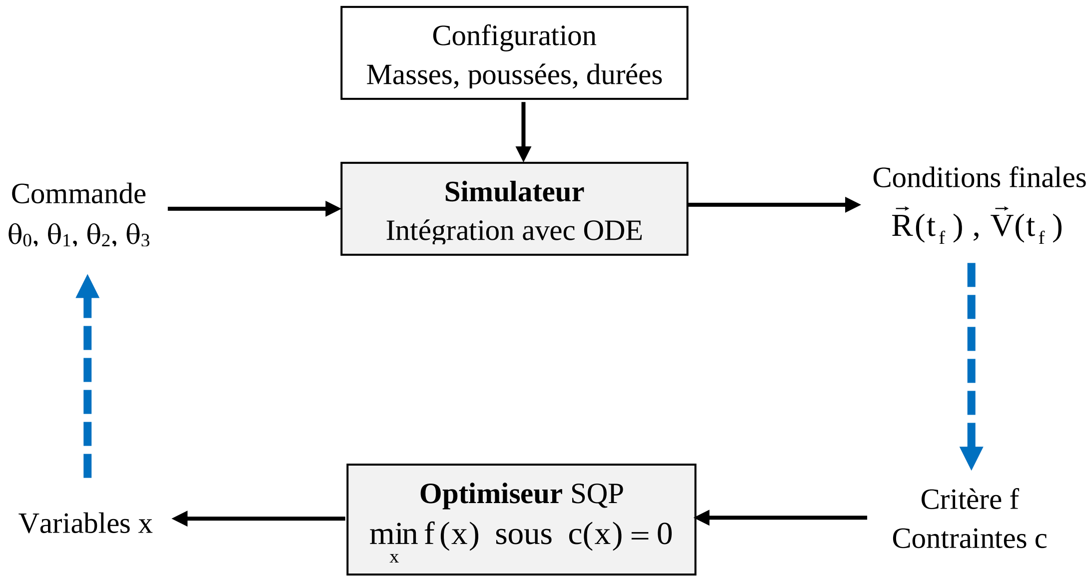


Figure 8 : Branchement optimiseur-simulateur

3 Conseils pratiques

Les conseils suivants permettent d'améliorer le comportement de l'optimiseur et de l'appliquer efficacement à différents problèmes. Ces réglages algorithmiques doivent être accessibles lors de l'appel de l'optimiseur afin que l'utilisateur puisse les modifier facilement.

- Prévoir des bornes sur les variables (chaque variable a ses propres bornes).
  Ceci évite que l'optimiseur essaie des solutions non physiques (→ dans Armijo).

- Prévoir des incréments différents sur les variables (→ dans Gradient).
  L'ordre de grandeur de l'incrément dépend de la valeur de la variable.

- Afficher à chaque itération les valeurs des variables, du critère, des contraintes, du gradient du lagrangien, ainsi que le nombre d'appels de la fonction.
  Ceci permet de vérifier le bon comportement de l'optimiseur.

- Prévoir un facteur d'échelle sur la fonction et les contraintes.
  Ceci est nécessaire pour que la fonction mérite tienne compte correctement du critère et des contraintes et que les essais ne soient pas rejetés systématiquement (→ dans Armijo).

- Partir d'un coefficient d'Armijo petit ($c_1=10^{-3}$) pour accepter les essais en début d'optimisation, puis l'augmenter ($c_1=10^{-1}$) pour obtenir une convergence plus rapide en fin d'optimisation.

- Acquérir les contraintes une à une en traitant des problèmes intermédiaires.
  Ceci permet d'initialiser chaque problème avec une solution admissible ce qui facilite la convergence. Pour cela, l'optimiseur doit pouvoir traiter un premier problème sans contrainte (fixer $c=0$, $\nabla c=0$, $\lambda_{QP}=0$ s'il n'y a pas de contrainte).

- Fixer les paramètres très sensibles (θ_0, θ_1) de façon expérimentale par des simulations (balayage), et réaliser une première optimisation en les laissant fixés. Puis essayer de les raffiner la solution trouvée, soit par un nouveau balayage, soit en les libérant.

- Choisir des précisions adaptées à chaque composante du vecteur d'état (R, V, M) pour l'intégration numérique (options ODE).