Series de Fourier

Conceptos previos

Las series de Fourier son series de términos coseno y seno y surgen en la tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Como aplicación constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

La teoría de las series de Fourier es bastante complicada, pero la aplicación de estas series es simple. Las series de Fourier son, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones periódicas discontinuas pueden desarrollarse en serie de Fourier, pero, desde luego, no tienen representaciones en serie de Taylor.

La introducción de las series de Fourier (y de las integrales de Fourier) fue uno de los mayores avances jamas realizados en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería, ya que las series de Fourier (y las integrales de Fourier) son probablemente la herramienta más importante en la solución de problemas con valores en la frontera. Esto se explicará en el capítulo siguiente.

Funciones periódicas:

Diremos que una función $f(t)$ es periódica, o p–periódica, si está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y si existe $p > 0$, tal que

$$f(t+p) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Al número p lo llamaremos periodo de $f(t)$. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p.

Ejemplo 1 *Las funciones* $\sin t$ *y* $\cos t$ *son funciones periódicas de periodo* 2π. *Las funciones constantes son funciones periódicas de cualquier periodo (en el sentido de la definición).*

Ejemplo de funciones que no son periódicas son t, t^2, e^t *y* $\ln t$.

Si $f(t)$ y $g(t)$ tienen periodo p, entonces la función

$$h(t) = af(t) + bg(t)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, también tiene periodo p. Por (2.1) se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$f(t+np) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

por tanto,

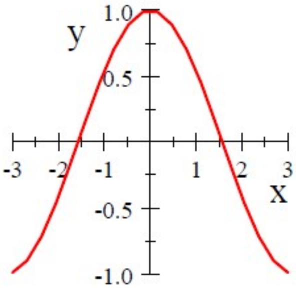
$$p, 2p, 3p, \ldots$$

también son periodos[1] de $f(t)$.

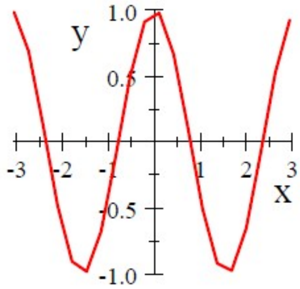
El problema principal de este capítulo será la representación de varias funciones de periodo $p = 2\pi$ en términos de las funciones simples, de periodo 2π,

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots\}$$

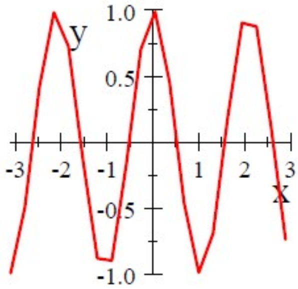
llamado **sistema trigonométrico**.



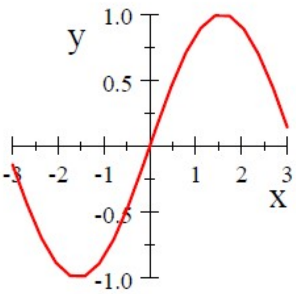
$\cos x$



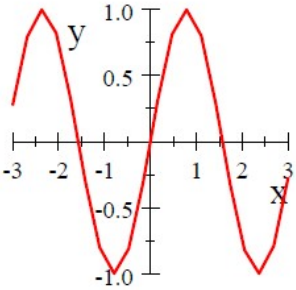
$\cos 2x$



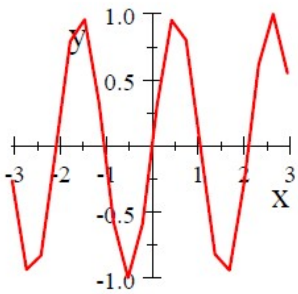
$\cos 3x$



$\sin x$



$\sin 2x$



$\sin 3x$

El sistema trigonométrico

$$1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots$$

Definición:

El sistema trigonométrico

$$1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots$$

es **ortogonal** en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (y, en consecuencia, en cualquier intervalo de longitud 2π, debido a la periodicidad).

Por definición esto significa que la integral del producto[2] de cualesquiera dos de estas funciones diferentes sobre dicho intervalo es cero, es decir, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(nt)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(nt)\ dt = 0 \tag{2.2}$$

También valen las siguientes igualdades:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)\ \ dt = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\ \ dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\ \ dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Con esto, vamos a proponer la siguiente serie o Polinomio Trigonométrico, que como veremos más adelante, bajo ciertas condiciones, su suma, converge a la función "f" que queremos aproximar:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) \tag{2.6}$$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$ son constantes reales. Estas series se llaman **series trigonométricas**[3] y a los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se les llama **coeficientes de la serie**.

Cada término de la serie (2.6) tiene periodo 2π. Por tanto si la serie (2.6) converge, su suma será una función de periodo 2π.

Serie de Fourier:

Las funciones periódicas que se presentan en problemas prácticos con frecuencia son bastante complicadas y es deseable representarlas en términos de funciones periódicas simples. Se verá que casi cualquier función periódica $f(t)$ de periodo 2π que aparezca en las aplicaciones (por ejemplo, con relación a vibraciones) puede representarse por una serie trigonométrica la cual se denominará serie de Fourier de f.

Supongamos que $f(t)$ es una función periódica de periodo 2π que puede representarse por una serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right), \tag{2.7}$$

es decir, se supone que esta serie converge y que tiene a $f(t)$ como su suma. Dada una función $f(t)$ como esta, quieren determinarse los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica correspondiente.

Determinemos a_0.
Al integrar ambos miembros de (2.7) se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)\right] dt.$$

Si es posible realizar la integración término a término de la serie[4], se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\;dt &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\;dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\;dt\right).\end{aligned}$$

Claramente el primer término del segundo miembro

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi a_0.$$

Además sabemos de (2.2) que las integrales del segundo miembro son cero. Consecuentemente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\;dt = a_0\pi,$$

es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\;dt$$

Determinemos ahora $a_1, a_2, ...$ y $b_1, b_2, ...$
Multipliquemos (2.7) por $\cos(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$, e integremos de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)\right)\cos(mt)\,dt$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$\begin{aligned}&a_0\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\;dt \\ &+_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\;dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,dt\right).\end{aligned}$$

Sabemos de (2.2) que la primera integral es cero. Además de (2.4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\;dt = a_m\pi$$

y de (2.3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt)\ \ dt = 0.$$

Consecuentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\ \ dt = a_m \pi$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

Para determinar $b_1, b_2, ...$ se razona de manera análoga a lo anterior pero ahora multiplicando (2.7) por $\sin(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$

Al escribir n en lugar de m, se obtienen las llamadas **fórmulas de Euler**

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \text{ para todo } n > 0. \end{aligned}} \tag{2.8}$$

Los números dados por (2.8) se denominan **coeficientes de Fourier** de $f(t)$. La serie trigonométrica

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{2.9}$$

con coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dados por (2.8) se denomina **serie de Fourier de** $f(t)$ (sin atender la convergencia, ésta la discutiremo más adelante)

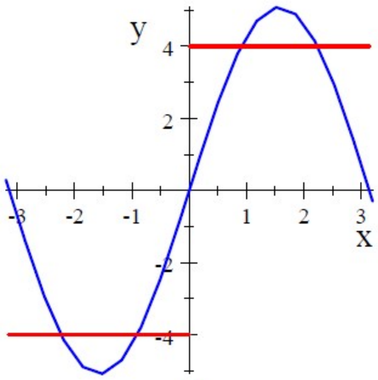
Ejemplo: Onda cuadrada

Determinar los coeficientes de Fourier de la función[5]

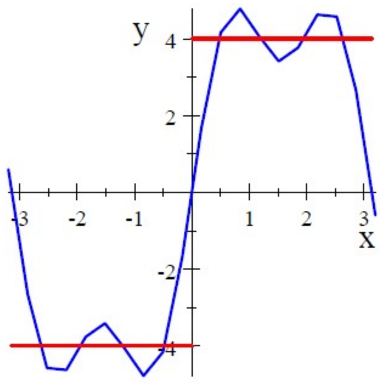
$$f(t) = \begin{cases} -k & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0, \\ \\ k & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

Las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{4}$ de la Serie

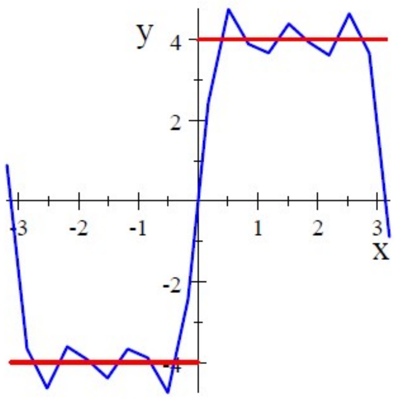
de Fourier de esta serie son



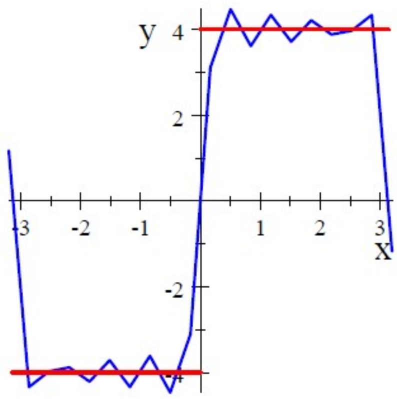
$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \operatorname{sen} x$$



$$S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right)$$



$$S_3 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} (2n+1) x$$



$$S_4 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} (2n+1) x$$

Convergencia de la Serie de Fourier

Supongamos que $f(t)$ es cualquier función periódica dada de periodo 2π para la que existen las integrales de (2.8); por ejemplo, $f(t)$ es continua o tan sólo continua a trozos. Entonces pueden calcularse los coeficientes de Fourier (2.8) de $f(t)$ y utilizarlos para formar la serie de Fourier (2.9) de $f(t)$. Sería muy conveniente que la serie así obtenida convergiera y tuviera la suma[6] $f(t)$. La mayoría de las funciones que se presentan en las aplicaciones son tales que esto se cumple (salvo en los saltos de $f(t)$, los cuales discutiremos a continuación). En este caso, cuando la serie de Fourier $S(t)$ de $f(t)$ representa a $f(t)$, se escribe

$$f(t) = S(t)$$

con un signo de igualdad. Si la serie de Fourier de $f(t)$ no tiene la suma $f(t)$ o no converge, escribiremos

$$f(t) \sim S(t)$$

con una tilde $\sim$, lo que indica que la serie trigonométrica del segundo miembro tiene los coeficientes de Fourier de $f(t)$ como coeficientes[7], por lo que se trata de la serie de Fourier de $f(t)$.

El siguiente paso es plantear el problema de la convergencia de la serie de Fourier: hasta qué punto la serie de Fourier de una función es una representación válida de la misma. Nuestro propósito es presentar de manera adecuada un conjunto de condiciones que garanticen que la serie de Fourier de una función no solamente converja, sino que además *converja* a la función considerada.

Condición suficiente de convergencia puntual de una serie de Fourier

Sea $f(t)$ una función 2π-periódica[8]*, continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi[$ y que tiene derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de dicho intervalo. Entonces la serie de Fourier de $f(t)$ converge y su suma*[9] *es*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

(la serie converge a la semisuma de los límites laterales)