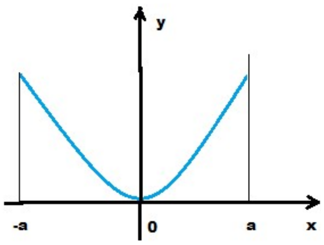
# Series de Fourier

## Funciones Pares e Impares

### Propiedades

Una función f(x) se dice **par** en un intervalo [-a,a] si se verifica que f(x)=f(-x) (Simetría respecto del eje "y")

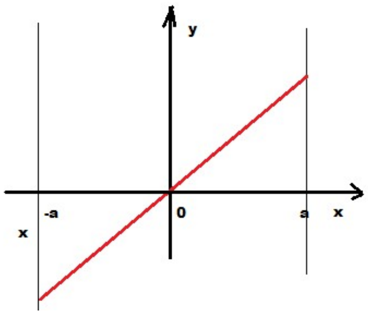
Ejemplo: f(x)= cosx, $x^2$




Las funciones pares tienen la propiedad que: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

Por el contrario, una función g(x) se dice **impar** en un ciento intervalo [-a,a] si se verifica que g(x) = -g(-x) (simetría respecto del origen)

Ejemplo: g(x)= x, senx




Las funciones impares tienen la propiedad que: $\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$

Producto de funciones:

- Sea "f" una función par en cierto intervalo "I", mientras que "g" también es una función par en el mismo intervalo, entonces el producto f.g es una función par en dicho intervalo
- Sea "f" una función impar en cierto intervalo "I", mientras que "g" también es una función impar en el mismo intervalo, entonces el producto f.g es una función par en dicho intervalo
- Sea "f" una función par en cierto intervalo "I", mientras que "g" es una función impar en el mismo intervalo, entonces el producto f.g es una función impar en dicho intervalo.

De acuerdo a esto podemos concluir que si f es una función par entonces el desarrollo de Fourier tendrá solo coficientes ak, mientras que los coeficientes bk serán todos nulos (ya que la integral de una función impar en dicho intervalo simétrico será nula)

$$ak = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos kx.dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos kx.dx \qquad bk = 0 \qquad \forall k$$

En consecuencia el desarrollo de Fourier tendrá la forma:

$$f(x) \approx \frac{ao}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ak.\cos kx \quad \text{(serie de cosenos)}$$

Mientras que si la función f en estudio es impar, todos los coeficientes ak (incluido ao) serán nulos y la serie tendrá sólo coeficientes bk

$$bk = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).senkx.dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).senkx.dx \qquad ak = 0 \qquad \forall k$$

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} bk.senkx \qquad \text{(serie de senos)}$$

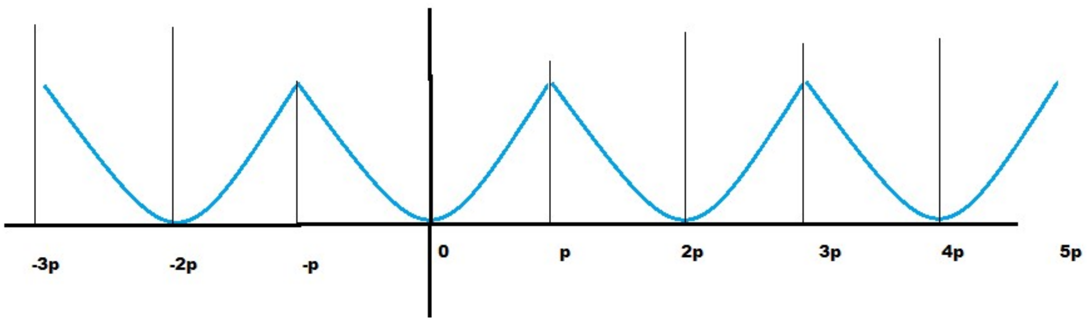
<u>Definición:</u>
Una función se dice que es seccionalmente lisa cuando la función y su derivada son seccionalmente continuas

<u>Extensión periódica de una función:</u>
Dada un función definida en el intervalo [-Π,Π] podemos extender periódicamente la función fuera del intervalo de la siguiente manera:

$$f(x) = f(x + 2n\pi) \quad para \quad -\pi \le x \le \pi \quad con \quad n \in Z \ (números\ enteros)$$

<u>Ejemplo:</u>

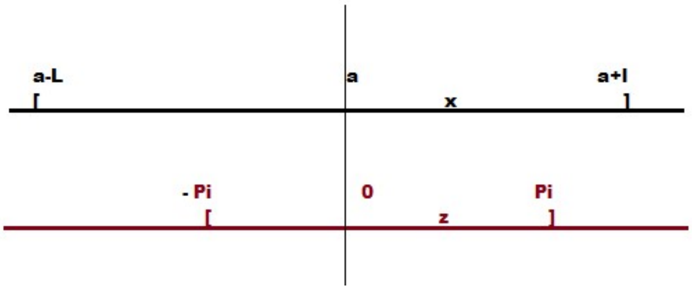
$$f(x) = x^2 \quad con\, x \in [-\pi, \pi]$$




Desarrollos particulares de la Serie de Fourier

a) Sea la función **"f"** definida en el intervalo [0,Π] seccionalmente lisa, entonces podemos extender la función **f** en el intrvalo [-Π,Π] definiendo para todo x que pertenezca al intervalo [-Π,0) como: f(-x)=f(x), es decir hemos definido a la función de manera par, agregándole valores a ese período donde la función no estaba definida. De esta manera, la serie de Fourier asociada a ella tendrá solo coeficientes $\mathbf{a_k}$. También podríamos haberla definido de manera impar, como f(-x)=-f(x), de esta manera, el desarrollo de Fourier asociada a ella tendría sólo coeficientes $\mathbf{b_k}$

b) Función periódica de período 2L: En este caso tenemos una función cuyo período puede ser cualquiera y que además no está centrada en el origen. Entonces mediante una sustitución conveniente (traslación y cambio de escala en la medida del eje x) la llevamos a las condiciones del teorema de Fourier visto




Sustitución:

$$x = a + \frac{l}{\pi} z$$

$$f(x) = f(a + \frac{l}{\pi} z) = F(z)$$

Si x=a+L -> z=Π
Si x=a-L -> z=-Π

Si f(x) es desarrollaba, entonces F(z) también es desarrollable por Fourier (composición lineal de funciones)

$$F(z) = \frac{ao}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ak.\cos kz + bk.senkz$$

$$ak = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z).\cos kz.dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + \frac{L}{\pi} z).\cos kz.dz \qquad si \quad x = a + \frac{l}{\pi} z \Rightarrow dz = \frac{\pi}{L} dx$$

$$ak = \frac{1}{\pi}\int_{a-L}^{a+L} f(x).\cos k\frac{\pi}{L}(x-a).\frac{\pi}{L} dx = \frac{1}{L}\int_{a-L}^{a+L} f(x).\cos\frac{k\pi(x-a)}{L}.dx$$

Análogamente:

$$bk = \frac{1}{L}\int_{a-L}^{a+L} f(x).sen\frac{k\pi(x-a)}{L}.dx$$

Por lo que la serie así definida, queda:

$$f(x) = \frac{ao}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ak.\cos\frac{k\pi(x-a)}{L} + bk.senk\frac{k\pi(x-a)}{L}$$