Ecuaciones diferenciales de orden Superior

PROBLEMA CON VALORES INICIALES En la sección 1.2 se definió un problema con valores iniciales para una ecuación diferencial de n-ésimo orden. Para una ecuación diferencial lineal, un **problema con valores iniciales de n-ésimo orden** es

$$\textit{Resuelva:} \qquad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

$$\textit{Sujeta a:} \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Recuerde que para un problema como éste se busca una función definida en algún intervalo I, que contiene a x_0, que satisface la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales que se especifican en x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Ya hemos visto que en el caso de un problema con valores iniciales de segundo orden, una curva solución debe pasar por el punto (x_0, y_0) y tener pendiente y_1 en este punto.

TEOREMA 4.1.1 Existencia de una solución única

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales (1) existe en el intervalo y es única.

EJEMPLO 1 Solución única de un PVI

El problema con valores iniciales

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

tiene la solución trivial $y = 0$. Debido a que la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se cumplen las condiciones del teorema 4.1.1. Por tanto $y = 0$ es la *única* solución en cualquier intervalo que contiene a $x = 1$. ■

EJEMPLO 2 Solución única de un PVI

Se debe comprobar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

Ahora la ecuación diferencial es lineal; los coeficientes, así como $g(x) = 12x$, son continuos y $a_2(x) = 1 \neq 0$ en algún intervalo I que contenga a $x = 0$. Concluimos del teorema 4.1.1 que la función dada es la única solución en I. ■

PROBLEMA CON VALORES EN LA FRONTERA Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial lineal de orden dos o mayor en que la variable dependiente y o sus derivadas se específican en *diferentes puntos*. Un problema tal como

$$\textit{Resuelva:} \qquad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeto a:} \qquad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se llama **problema con valores en la frontera (PVF)**. Los valores prescritos $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_1$ se llaman **condiciones en la frontera**. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I, que contiene a a y b, cuya gráfica pasa por los puntos (a, y_0) y (b, y_1). Véase la figura 4.1.1.

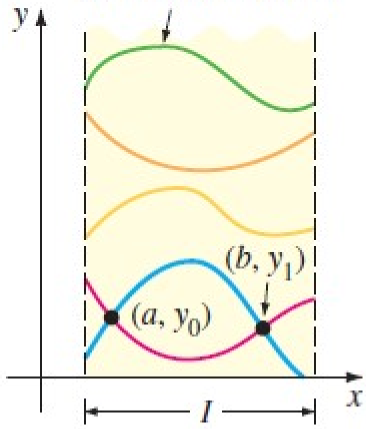


FIGURA 4.1.1 Curvas solución de un PVF que pasan a través de dos puntos.

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser

$$y'(a) = y_0, \qquad y(b) = y_1$$

$$y(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1$$

$$y'(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1,$$

donde y_0 y y_1 denotan constantes arbitrarias. Estos pares de condiciones son sólo casos especiales de las condiciones en la frontera generales.

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

En el ejemplo siguiente se muestra que aun cuando se cumplen las condiciones del teorema 4.1.1, un problema con valores en la frontera puede tener varias soluciones (como se sugiere en la figura 4.1.1), una solución única o no tener ninguna solución.

EJEMPLO 3 Un PVF puede tener muchas, una o ninguna solución

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 vimos que la familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación diferencial $x'' + 16x = 0$ es

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t. \tag{2}$$

a) Suponga que ahora deseamos determinar la solución de la ecuación que satisface más condiciones en la frontera $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$. Observe que la primera condición $0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$ implica que $c_1 = 0$, por tanto $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$. Pero cuando $t = \pi/2$, $0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi$ se satisface para cualquier elección de c_2 ya que $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. Por tanto el problema con valores en la frontera

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

tiene un número infinito de soluciones. En la figura 4.1.2 se muestran las gráficas de algunos de los miembros de la familia uniparamétrica $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ que pasa por los dos puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

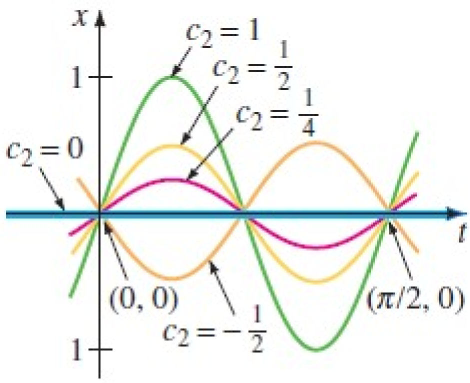


FIGURA 4.1.2 Algunas curvas solución de (3)

b) Si el problema con valores en la frontera en (3) se cambia a

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, \tag{4}$$

entonces $x(0) = 0$ aún requiere que $c_1 = 0$ en la solución (2). Pero aplicando $x(\pi/8) = 0$ a $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ requiere que $0 = c_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = c_2 \cdot 1$. Por tanto $x = 0$ es una solución de este nuevo problema con valores en la frontera. De hecho, se puede demostrar que $x = 0$ es la *única* solución de (4).

c) Por último, si se cambia el problema a

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \tag{5}$$

se encuentra de nuevo de $x(0) = 0$ que $c_1 = 0$, pero al aplicar $x(\pi/2) = 1$ a $x = c_2$ sen $4t$ conduce a la contradicción $1 = c_2$ sen $2\pi = c_2 \cdot 0 = 0$. Por tanto el problema con valores en la frontera (5) no tiene solución. ■

4.1.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

se dice que es **homogénea**, mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{7}$$

con $g(x)$ no igual a cero, se dice que es **no homogénea**. Por ejemplo, $2y'' + 3y' - 5y = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, mientras que $x^3y''' + 6y' + 10y = e^x$ es una ecuación diferencial lineal de tercer orden no homogénea. La palabra *homogénea* en este contexto no se refiere a los coeficientes que son funciones homogéneas, como en la sección 2.5.

Se harán las siguientes suposiciones:

- las funciones coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $g(x)$ son continuas;
- $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

TEOREMA 4.1.2 Principio de superposición; ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x),$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Se demuestra el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial que se definió en (8) y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Si se define $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene que

$$L(y) = L\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\} = c_1\,L(y_1) + c_2\,L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$ ■

COROLARIOS DEL TEOREMA 4.1.2

A) Un múltiplo constante $y = c_1y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.
B) Una ecuación diferencial lineal homogénea tiene siempre la solución trivial $y = 0$.

EJEMPLO 4 Superposición; ED homogénea

Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Por el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

es también una solución de la ecuación en el intervalo. ■

La función $y = e^{7x}$ es una solución de $y'' - 9y' + 14y = 0$. Debido a que la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el múltiplo constante $y = ce^{7x}$ es también una solución. Para varios valores de c se ve que $y = 9e^{7x}$, $y = 0$, $y = -\sqrt{5}e^{7x}$, . . . son todas soluciones de la ecuación.

DEPENDENCIA LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL Los dos conceptos son básicos para el estudio de ecuaciones diferenciales lineales.

DEFINICIÓN 4.1.1 Dependencia e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero, tales que

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo I si las únicas constantes para las que

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo son $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

EJEMPLO 5 **Conjunto de funciones linealmente dependiente**

El conjunto de funciones $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \tan^2 x$ es linealmente dependiente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ porque

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \operatorname{sen}^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$$

donde $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$. Aquí se usa $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. ■

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo si por lo menos una función se puede expresar como una combinación lineal de las otras funciones.

EJEMPLO 6 **Conjunto de funciones linealmente dependientes**

El conjunto de funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x^2$ es linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$ porque f_2 puede escribirse como una combinación lineal de f_1, f_3 y f_4. Observe que

$$f_2(x) = 1 \cdot f_1(x) + 5 \cdot f_3(x) + 0 \cdot f_4(x)$$

para toda x en el intervalo $(0, \infty)$. ■

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Estamos interesados principalmente en funciones linealmente independientes o con más precisión, soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque se podría apelar siempre en forma directa a la definición 4.1.1, resulta que la cuestión de si el conjunto de n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) es linealmente independiente se puede establecer en forma un poco mecánica usando un determinante.

DEFINICIÓN 4.1.2 **Wronskiano**

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tiene al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas, se llama el **Wronskiano** de las funciones.

TEOREMA 4.1.3 Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en el intervalo I. El conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I si y sólo si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

DEFINICIÓN 4.1.3 Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

La respuesta a la cuestión básica sobre la existencia de un conjunto fundamental de soluciones para una ecuación lineal está en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I.

Similar al hecho de que cualquier vector en tres dimensiones se puede expresar como una combinación lineal de los vectores *linealmente independientes* **i**, **j**, **k**, cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I se expresa como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes en I. En otras palabras, n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son los bloques básicos para la solución general de la ecuación.

TEOREMA 4.1.5 Solución general; ecuaciones homogéneas

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en el intervalo I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 7 Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección las soluciones son linealmente independientes en el eje x. Este hecho se corrobora al observar que el Wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y por tanto, $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo. ■

EJEMPLO 8 Una solución obtenida de una solución general

La función $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo 7. (Compruebe esto.) Aplicando el teorema 4.1.5, debe ser posible obtener esta solución a partir de la solución general $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$. Observe que si se elige $c_1 = 2$ y $c_2 = -7$, entonces $y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$ puede rescribirse como

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

Esta última expresión se reconoce como $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{-3x}$. ■

EJEMPLO 9 Solución general de una ED homogénea

Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ satisfacen la ecuación de tercer orden $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Puesto que

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de x, las funciones y_1, y_2 y y_3 forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. Se concluye que $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo. ■

4.1.3 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

Cualquier función y_p libre de parámetros arbitrarios, que satisface (7) se dice que es una **solución particular** o **integral particular** de la ecuación. Por ejemplo, es una tarea directa demostrar que la función constante $y_p = 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 9y = 27$.

Ahora si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de (6) en un intervalo I y y_p es cualquier solución particular de (7) en I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x) + y_p \tag{10}$$

es también una solución de la ecuación no homogénea (7). Si piensa al respecto, esto tiene sentido, porque la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x)$ se transforma en 0 por el operador $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$, mientras que y_p se convierte en $g(x)$. Si se usa $k = n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación de n-ésimo orden (6), entonces la expresión en (10) se convierte en la solución general de (7).

TEOREMA 4.1.6 Solución general; ecuaciones no homogéneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I, y sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (6) en I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p,$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACIÓN Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si se define $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Así por el teorema 4.1.5, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$, y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

o

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x). \qquad \blacksquare$$

FUNCIÓN COMPLEMENTARIA Vemos en el teorema 4.1.6 que la solución general de una ecuación lineal no homogénea está compuesta por la suma de dos funciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$, que es la solución general de (6), se llama **función complementaria** para la ecuación (7). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se encuentra una solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

$$\begin{aligned} y &= \textit{función complementaria} + \textit{cualquier solución particular} \\ &= y_c + y_p. \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Solución general de una ED no homogénea

Por sustitución, se demuestra con facilidad que la función $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x. \tag{11}$$

Para escribir la solución general de (11), también se debe poder resolver la ecuación homogénea asociada

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Pero en el ejemplo 9 vimos que la solución general de esta última ecuación en el intervalo $(-\infty, \infty)$ fue $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$. Por tanto la solución general de (11) en el intervalo es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$ ■

TEOREMA 4.1.7 Principio de superposición; ecuaciones no homogéneas

Sean $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_k}$ k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, se supone que y_{p_i} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x), \qquad (12)$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x) \qquad (13)$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x). \qquad (14)$$

La demostración es obvia, ya que cada uno de los remplazos es nulo. Lo vemos claramente con un ejemplo:

EJEMPLO 11 Superposición, ED no homogénea

Usted debe comprobar que

$y_{p_1} = -4x^2$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$,

$y_{p_2} = e^{2x}$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$,

$y_{p_3} = xe^x$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$.

Se tiene de (13) del teorema 4.1.7 que la superposición de y_{p_1}, y_{p_2}, y y_{p_3},

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^x,$$

es una solución de

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^2 + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^x - e^x}_{g_3(x)}.$$ ■

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

INTRODUCCIÓN Como un medio para motivar el análisis en esta sección se tratan nuevamente las ecuaciones diferenciales de primer orden más específicamente, las ecuaciones lineales, *homogéneas* $ay' + by = 0$, donde los coeficientes $a \neq 0$ y b son constantes. Este tipo de ecuación se resuelve ya sea por variables separables o con ayuda de un factor integrante, pero hay otro método de solución, uno que sólo utiliza álgebra. Antes de mostrar este método alternativo, hacemos una observación: despejando y' de la ecuación $ay' + by = 0$ se obtiene $y' = ky$, donde k es una constante. Esta observación revela la naturaleza de la solución desconocida y; la única función elemental no trivial cuya derivada es una constante múltiple de sí misma es la función exponencial e^{mx}. Ahora el nuevo método de solución: si sustituimos $y = e^{mx}$ y $y' = me^{mx}$ en $ay' + by = 0$, se obtiene

$$ame^{mx} + be^{mx} = 0 \quad \text{o} \quad e^{mx}(am + b) = 0.$$

Como e^{mx} nunca es cero para valores reales de x, la última ecuación se satisface sólo cuando m es una solución o raíz de la ecuación polinomial de primer grado $am + b = 0$. Para este único valor de m, $y = e^{mx}$ es una solución de la ED. Para mostrar esto, considere la ecuación de coeficientes constantes $2y' + 5y = 0$. No es necesario realizar la derivación y la sustitución de $y = e^{mx}$ en la ED; sólo se tiene que formar la ecuación $2m + 5 = 0$ y despejar m. De $m = -\frac{5}{2}$ se concluye que $y = e^{-5x/2}$ es una solución de $2y' + 5y = 0$, y su solución general en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es $y = c_1e^{-5x/2}$.

En esta sección veremos que el procedimiento anterior genera soluciones exponenciales para las ED lineales homogéneas de orden superior,

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales y $a_n \neq 0$.

ECUACIÓN AUXILIAR Se empieza por considerar el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2}$$

donde a, b y c son constantes. Si se intenta encontrar una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces después de sustituir $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, la ecuación (2) se convierte en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como en la introducción se argumenta que debido a que $e^{mx} \neq 0$ para toda x, es obvio que la única forma en que $y = e^{mx}$ puede satisfacer la ecuación diferencial (2) es cuando se elige m como una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3}$$

Esta última ecuación se llama **ecuación auxiliar** de la ecuación diferencial (2). Como las dos raíces de (3) son $m_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ y $m_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, habrá tres formas de la solución general de (2) que corresponden a los tres casos:

- m_1 y m_2 reales y distintas $(b^2 - 4ac > 0)$,
- m_1 y m_2 reales e iguales $(b^2 - 4ac = 0)$, y
- m_1 y m_2 números conjugados complejos $(b^2 - 4ac < 0)$.

Analicemos cada uno de estos casos.

CASO 1: RAÍCES REALES Y DISTINTAS Bajo la suposición de que la ecuación auxiliar (3) tiene dos raíces reales desiguales m_1 y m_2, encontramos dos soluciones, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Vemos que estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y, por tanto, forman un conjunto fundamental. Se deduce que la solución general de (2) en este intervalo es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \tag{4}$$

CASO II: RAÍCES REALES REPETIDAS Cuando $m_1 = m_2$, necesariamente se obtiene sólo una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1 x}$. De la fórmula cuadrática se encuentra que $m_1 = -b/2a$ puesto que la única forma en que se tiene que $m_1 = m_2$ es tener $b^2 - 4ac = 0$. Tenemos de (5) en la sección 4.2 que una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}\, dx = e^{m_1 x} \int dx = xe^{m_1 x}. \qquad (5)$$

En (5) hemos usado el hecho de que $-b/a = 2m_1$. La solución general es entonces

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}. \qquad (6)$$

CASO III: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS Si m_1 y m_2 son complejas, entonces se puede escribir $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales $i^2 = -1$. De manera formal, no hay diferencia entre este caso y el caso I y, por tanto,

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales en lugar de exponenciales complejas. Con este fin se usa la **fórmula de Euler:**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es cualquier número real.* Se tiene de esta fórmula que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x, \qquad (7)$$

donde se usaron $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. Observe que si primero se suma y luego se restan las dos ecuaciones en (7), se obtiene, respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{y} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}\beta x.$$

Puesto que $y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ es una solución de (2) para alguna elección de las constantes C_1 y C_2, las elecciones $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ dan, a su vez, dos soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Pero
$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$
y
$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x.$$

Por tanto, del corolario A) del teorema 4.1.2, los dos últimos resultados muestran que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones reales de (2). Además, estas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$. Por tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x). \qquad (8)$$

EJEMPLO 1 ED de segundo orden

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ **b)** $y'' - 10y' + 25y = 0$ **c)** $y'' + 4y' + 7y = 0$

SOLUCIÓN Se dan las ecuaciones auxiliares, las raíces y las soluciones generales correspondientes.

a) $2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3) = 0, \quad m_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = 3$

De (4), $y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{3x}$.

b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0, \quad m_1 = m_2 = 5$

De (6), $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$.

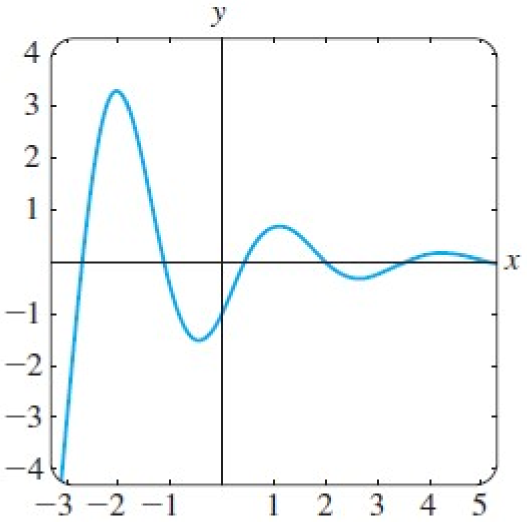
c) $m^2 + 4m + 7 = 0, \; m_1 = -2 + \sqrt{3}i, \quad m_2 = -2 - \sqrt{3}i$

De (8) con $\alpha = -2, \beta = \sqrt{3}$, $y = e^{-2x}(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x)$. ■

EJEMPLO 2 Un problema con valores iniciales

Resuelva $4y'' + 4y' + 17y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula cuadrática tenemos que las raíces de la ecuación auxiliar $4m^2 + 4m + 17 = 0$ son $m_1 = -\frac{1}{2} + 2i$ y $m_2 = -\frac{1}{2} - 2i$. Por tanto, de la ecuación (8) se tiene que $y = e^{-x/2}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$. Aplicando la condición $y(0) = -1$, se observa de $e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) = -1$ que $c_1 = -1$. Derivando $y = e^{-x/2}(-\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$ y después usando $y'(0) = 2$, se obtiene $2c_2 + \frac{1}{2} = 2$ o $c_2 = \frac{3}{4}$. Por tanto, la solución del PVI es $y = e^{-x/2}(-\cos 2x + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2x)$. En la figura 4.3.1 vemos que la solución es oscilatoria, pero $y \to 0$ conforme $x \to \infty$ y $|y| \to \infty$ conforme $x \to -\infty$. ■



ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR En general, para resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden (1) donde $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, se debe resolver una ecuación polinomial de n-ésimo grado

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0. \tag{12}$$

Si todas las raíces de (12) son reales y distintas, entonces la solución general de (1) es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}.$$

Es un poco difícil resumir los análogos de los casos II y III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos ocurren en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado podría tener cinco raíces reales distintas, o tres raíces reales distintas y dos complejas, o una real y cuatro complejas, o cinco raíces reales pero iguales, o cinco raíces reales pero dos de ellas iguales, etc. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de n-ésimo grado (es decir, k raíces son iguales a m_1), es posible demostrar que las soluciones linealmente independientes son

$$e^{m_1x}, \quad xe^{m_1x}, \quad x^2e^{m_1x}, \ldots, \quad x^{k-1}e^{m_1x}$$

y la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}.$$

Por último, se debe recordar que cuando los coeficientes son reales, las raíces complejas de una ecuación auxiliar siempre se presentan en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener a lo más dos raíces complejas.

EJEMPLO 3 ED de tercer orden

Resuelva $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

SOLUCIÓN Debe ser evidente de la inspección de $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$ que una raíz es $m_1 = 1$, por tanto, $m - 1$ es un factor de $m^3 + 3m^2 - 4$. Dividiendo se encuentra que

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$

así las raíces son $m_2 = m_3 = -2$. Así, la solución general de la ED es $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$.

EJEMPLO 4 ED de cuarto orden

Resuelva $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$ tiene raíces $m_1 = m_3 = i$ y $m_2 = m_4 = -i$. Así, del caso II la solución es

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix} + C_3xe^{ix} + C_4xe^{-ix}.$$

Por la fórmula de Euler el grupo $C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$ se puede rescribir como

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

después de redefinir de nuevo las constantes. De manera similar, $x(C_3e^{ix} + C_4e^{-ix})$ se puede expresar como $x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. Por tanto, la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x.$$

Ecuación diferencial no homogénea

COEFICIENTES INDETERMINADOS: MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN*

INTRODUCCIÓN Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \tag{1}$$

se debe hacer dos cosas:

- encontrar la función complementaria y_c y
- encontrar alguna solución particular y_p de la ecuación no homogénea (1).

Entonces, como se explicó en la sección 4.1, la solución general de (1) es $y = y_c + y_p$. La función complementaria y_c es la solución general de la ED homogénea asociada de (1), es decir,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

En la sección 4.3 vimos cómo resolver esta clase de ecuaciones cuando los coeficientes eran constantes. Así, el objetivo en esta sección es desarrollar un método para obtener soluciones particulares.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS La primera de las dos formas que se consideran para obtener una solución particular y_p de una ED lineal no homogénea se llama **método de coeficientes indeterminados**. La idea fundamental detrás de este método es una conjetura acerca de la forma de y_p, en realidad una intuición educada, motivada por las clases de funciones que forman la función de entrada $g(x)$. El método general se limita a ED lineales como (1) donde

- los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes y
- $g(x)$ es una constante k, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$, una función seno o coseno sen βx o cos βx o sumas finitas y productos de estas funciones.

NOTA Estrictamente hablando, $g(x) = k$ (constante) es una función polinomial. Puesto que probablemente una función constante no es lo primero en que se piensa cuando se consideran funciones polinomiales, para enfatizar continuaremos con la redundancia "funciones constantes, polinomios, . . . ".

Las siguientes funciones son algunos ejemplos de los tipos de entradas $g(x)$ que son apropiadas para esta descripción:

$$g(x) = 10, \quad g(x) = x^2 - 5x, \qquad g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x},$$
$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x, \qquad g(x) = xe^x \operatorname{sen} x + (3x^2 - 1)e^{-4x}.$$

Es decir, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la clase

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad P(x)\, e^{\alpha x}, \quad P(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \quad \text{y} \quad P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde n es un entero no negativo y α y β son números reales. El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones de la forma (1) cuando

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan x, \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

etcétera. Las ecuaciones diferenciales en las que la entrada $g(x)$ es una función de esta última clase se consideran en la sección 4.6.

El conjunto de funciones que consiste en constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos tiene la notable propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son de nuevo sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. Debido a que la combinación lineal de derivadas $a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser idéntica a $g(x)$, parece razonable suponer que y_p *tiene la misma forma que* $g(x)$.

En los dos ejemplos siguientes se ilustra el método básico.

EJEMPLO 1 Solución general usando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$. (2)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Se resuelve primero la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. De la fórmula cuadrática se encuentra que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 4m - 2 = 0$ son $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Por tanto, la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Paso 2. Ahora, debido a que la función $g(x)$ es un polinomio cuadrático, supongamos una solución particular que también es de la forma de un polinomio cuadrático:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Se busca determinar coeficientes *específicos* A, B y C para los cuales y_p es una solución de (2). Sustituyendo y_p y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \quad \text{y} \quad y_p'' = 2A$$

en la ecuación diferencial (2), se obtiene

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6.$$

Como se supone que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de los exponentes semejantes a x deben ser iguales:

igual

$$\boxed{-2A}\,x^2 + \boxed{8A - 2B}\,x + \boxed{2A + 4B - 2C} = 2x^2 - 3x + 6$$

Es decir, $-2A = 2, \quad 8A - 2B = -3, \quad 2A + 4B - 2C = 6.$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen los valores $A = -1$, $B = -\frac{5}{2}$ y $C = -9$. Así, una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Solución particular usando coeficientes indeterminados

Encuentre una solución particular de $y'' - y' + y = 2 \text{ sen } 3x$.

SOLUCIÓN Una primera suposición natural para una solución particular sería A sen $3x$. Pero debido a que las derivadas sucesivas de sen $3x$ producen sen $3x$ y cos $3x$, se puede suponer una solución particular que incluye ambos términos:

$$y_p = A \cos 3x + B \text{ sen } 3x.$$

Derivando y_p y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial, se obtiene, después de reagrupar,

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B) \cos 3x + (3A - 8B) \text{ sen } 3x = 2 \text{ sen } 3x$$

o

igual

$$\boxed{-8A - 3B} \cos 3x + \boxed{3A - 8B} \text{ sen } 3x = 0 \cos 3x + 2 \text{ sen } 3x.$$

Del sistema de ecuaciones resultante,

$$-8A - 3B = 0, \qquad 3A - 8B = 2,$$

se obtiene $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Una solución particular de la ecuación es

$$y_p = \frac{6}{73} \cos 3x - \frac{16}{73} \text{ sen } 3x. \qquad \blacksquare$$

Como se mencionó, la forma que se supone para la solución particular y_p es una intuición educada; no es una intuición a ciegas. Esta intuición educada debe considerar no sólo los tipos de funciones que forman a $g(x)$ sino también, como se verá en el ejemplo 4, las funciones que conforman la función complementaria y_c.

EJEMPLO 3 Formando y_p por superposición

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$. (3)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Primero, se encuentra que la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$ es $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Paso 2. A continuación, la presencia de $4x - 5$ en $g(x)$ indica que la solución particular incluye un polinomio lineal. Además, debido a que la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, se supone también que la solución particular incluye tanto a xe^{2x} como a e^{2x}. En otras palabras, g es la suma de dos clases básicas de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \textit{polinomio} + \textit{exponenciales}.$$

Por lo que, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.1.7) indica que se busca una solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituyendo

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación (3) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \qquad (4)$$

De esta identidad obtenemos las cuatro expresiones

$$-3A = 4, \qquad -2A - 3B = -5, \qquad -3C = 6, \qquad 2C - 3E = 0.$$

La última ecuación en este sistema es resultado de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el miembro derecho de (4) es cero. Resolviendo, se encuentra que $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$ $C, = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}. \qquad ■$$

En vista del principio de superposición (teorema 4.1.7) se puede aproximar también el ejemplo 3 desde el punto de vista de resolver dos problemas más simples. Se debe comprobar que sustituyendo

$$y_{p_1} = Ax + B \qquad \text{en} \qquad y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

y

$$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \qquad \text{en} \qquad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

se obtiene, a su vez, $y_{p_1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9}$ y $y_{p_2} = -(2x + \frac{4}{3})e^{2x}$. Entonces, una solución particular de (3) es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

En el siguiente ejemplo se ilustra que algunas veces la suposición “obvia” para la forma de y_p no es una suposición correcta.

EJEMPLO 4 Una falla imprevista del método

Encuentre una solución particular de $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

SOLUCIÓN Derivando e^x no se obtienen nuevas funciones. Así, si se procede como se hizo en los ejemplos anteriores, se puede suponer razonablemente que una solución particular de la forma $y_p = Ae^x$. Pero sustituir esta expresión en la ecuación diferencial da como resultado la expresión contradictoria $0 = 8e^x$, por lo que claramente se hizo la conjetura equivocada para y_p.

La dificultad aquí es evidente al examinar la función complementaria $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Observe que la suposición Ae^x ya está presente en y_c. Esto significa que e^x es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada y un múltiplo constante Ae^x cuando se sustituye en la ecuación diferencial necesariamente da cero.

¿Entonces cuál debe ser la forma de y_p? Inspirados en el caso II de la sección 4.3, vemos que sí se puede encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x.$$

Sustituyendo $y_p' = Axe^x + Ae^x$ y $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial y simplificando, se obtiene

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

De la última igualdad se ve que el valor de A ahora se determina como $A = -\frac{8}{3}$. Por tanto, una solución particular de la ecuación dada es $y_p = -\frac{8}{3}xe^x$. ■

CASO I Ninguna función de la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En la tabla 4.1 se muestran algunos ejemplos específicos de $g(x)$ en (1) junto con la forma correspondiente de la solución particular. Por supuesto, se da por sentado que ninguna función de la solución particular supuesta y_p se duplica por una función en la función complementaria y_c.

TABLA 4.1 Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

EJEMPLO 5 Formas de soluciones particulares. Caso I

Determine la forma de una solución particular de

a) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ **b)** $y'' + 4y = x \cos x$

SOLUCIÓN **a)** Se puede escribir $g(x) = (5x^3 - 7)e^{-x}$. Usando el elemento 9 de la tabla como modelo, suponemos una solución particular de la forma

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{-x}.$$

Observe que no hay duplicación entre los términos en y_p y los términos en la función complementaria $y_c = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

b) La función $g(x) = x \cos x$ es similar al elemento 11 de la tabla 4.1 excepto, por supuesto, que se usa un polinomio lineal en vez de uno cuadrático y $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en lugar de $\cos 4x$ y $\operatorname{sen} 4x$ en la forma de y_p:

$$y_p = (Ax + B) \cos x + (Cx + E) \operatorname{sen} x.$$

Nuevamente observe que no hay duplicación de términos entre y_p y $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$. ■

Si $g(x)$ consiste en una suma de, digamos, m términos de la clase listada en la tabla, entonces (como en el ejemplo 3) la suposición para una solución particular y_p consiste en la suma de las formas de prueba $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_m}$ correspondientes a estos términos:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}.$$

El enunciado anterior se puede escribir de otra forma:

Regla de forma para el caso I *La forma de y_p es una combinación lineal de las funciones linealmente independientes que se generan mediante derivadas sucesivas de $g(x)$.*

EJEMPLO 6 Formación de y_p por superposición. Caso I

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5 \operatorname{sen} 2x + 7xe^{6x}.$$

SOLUCIÓN

Se supone que a $3x^2$ le corresponde $\quad y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C.$

Se considera que a $-5 \operatorname{sen} 2x$ le corresponde $\quad y_{p_2} = E \cos 2x + F \operatorname{sen} 2x.$

Se supone que a $7xe^{6x}$ le corresponde $\quad y_{p_3} = (Gx + H)e^{6x}.$

Entonces la presunción para la solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + E \cos 2x + F \operatorname{sen} 2x + (Gx + H)e^{6x}.$$

En esta suposición ningún término duplica un término de $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x}$. ■

EJEMPLO 7 Solución particular. Caso II

Encuentre una solución particular de $y'' - 2y' + y = e^x$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Como en el ejemplo 4, la suposición $y_p = Ae^x$ falla, puesto que es evidente de y_c que e^x es una solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. Además, no es posible encontrar una solución particular de la forma $y_p = Axe^x$, ya que el término xe^x también se duplica en y_c. A continuación se prueba

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se obtiene $2Ae^x = e^x$, así $A = \frac{1}{2}$. Así una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$. ■

Nuevamente suponga que $g(x)$ consiste en m términos de la clase que se proporciona en la tabla 4.1 y suponga además que la presunción usual para una solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m},$$

donde las y_{p_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ son las formas de solución particular de prueba correspondientes a estos términos. Bajo las circunstancias descritas en el caso II, se puede formar la siguiente regla general.

Regla de multiplicación para el caso II *Si alguna y_{p_i} contiene términos que duplican los términos de y_c, entonces esa y_{p_i} se debe multiplicar por x^n, donde n es el entero positivo más pequeño que elimina esa duplicación.*

EJEMPLO 8 Un problema con valores iniciales

Resuelva $y'' + y = 4x + 10 \operatorname{sen} x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$.

SOLUCIÓN La solución de la ecuación homogénea asociada $y'' + y = 0$ es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Debido a que $g(x) = 4x + 10 \operatorname{sen} x$ es la suma de un polinomio lineal y una función seno, la suposición normal para y_p, de las entradas 2 y 5 de la tabla 4.1, sería la suma de $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = C \cos x + E \operatorname{sen} x$:

$$y_p = Ax + B + C \cos x + E \operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Pero hay una duplicación obvia de los términos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en esta forma supuesta y dos términos de la función complementaria. Esta duplicación se elimina simplemente multiplicando y_{p_2} por x. En lugar de (5) ahora se usa

$$y_p = Ax + B + Cx \cos x + Ex \operatorname{sen} x. \tag{6}$$

Derivando esta expresión y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y_p'' + y_p = Ax + B - 2C \operatorname{sen} x + 2E \cos x = 4x + 10 \operatorname{sen} x,$$

y por tanto $A = 4$, $B = 0$, $-2C = 10$, y $2E = 0$. Las soluciones del sistema son inmediatas: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$, y $E = 0$. Por tanto de la ecuación (6) se obtiene $y_p = 4x - 5x \cos x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

Ahora se aplican las condiciones iniciales prescritas a la solución general de la ecuación. Primero, $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \operatorname{sen} \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0$ produce $c_1 = 9\pi$ puesto que $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$. Ahora, de la derivada

$$y' = -9\pi \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + 4 + 5x \operatorname{sen} x - 5 \cos x$$

y $$y'(\pi) = -9\pi \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \operatorname{sen} \pi - 5 \cos \pi = 2$$

encontramos $c_2 = 7$. La solución del problema con valores iniciales es entonces

$$y = 9\pi \cos x + 7 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

EJEMPLO 9 Uso de la regla de multiplicación

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Y así, con base en los elementos 3 y 7 de la tabla 4.1, la suposición usual para una solución particular sería

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}.$$

La inspección de estas funciones muestra que un término en y_{p_2} se duplica en y_c. Si multiplicamos y_{p_2} por x, se nota que el término xe^{3x} aún es parte de y_c. Pero multiplicando y_{p_2} por x^2 se eliminan las duplicaciones. Así la forma operativa de una solución particular es

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2 e^{3x}.$$

Derivando esta última forma y sustituyendo en la ecuación diferencial, agrupando términos semejantes se obtiene

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

De esta identidad se tiene que $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$ y $E = -6$. Por tanto la solución general $y = y_c + y_p$ es $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2 e^{3x}$.

EJEMPLO 10 ED de tercer orden. Caso I

Resuelva $y''' + y'' = e^x \cos x$.

SOLUCIÓN De la ecuación característica $m^3 + m^2 = 0$ encontramos que $m_1 = m_2 = 0$ y $m_3 = -1$. Así la función complementaria de la ecuación es $y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$. Con $g(x) = e^x \cos x$, se ve de la entrada 10 de la tabla 4.1 que se debe suponer

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Debido a que no hay funciones en y_p que dupliquen las funciones de la solución complementaria, procedemos de la manera usual. De

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x$$

se obtiene $-2A + 4B = 1$ y $-4A - 2B = 0$. De este sistema se obtiene $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$, así que una solución particular es $y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x.$$

EJEMPLO 11 ED de cuarto orden. Caso II

Determine la forma de una solución particular de $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2 e^{-x}$.

SOLUCIÓN Comparando $y_c = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x}$ con la suposición normal para una solución particular

$$y_p = \underbrace{A}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^2 e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}}_{y_{p_2}},$$

vemos que las duplicaciones entre y_c y y_p se eliminan cuando y_{p_1}, se multiplica por x^3 y y_{p_2} se multiplica por x. Así la suposición correcta para una solución particular es $y_p = Ax^3 + Bx^3 e^{-x} + Cx^2 e^{-x} + Exe^{-x}$.