Modelado con Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Modelos Lineales. Problemas con valores iniciales

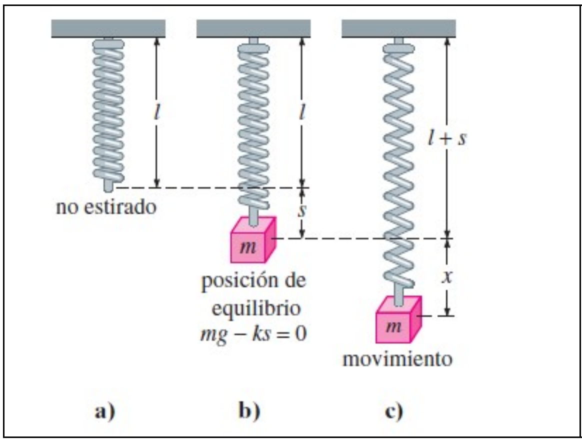
INTRODUCCIÓN En esta sección, se van a considerar varios sistemas dinámicos lineales en los que cada modelo matemático es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes junto con condiciones iniciales especificadas en un tiempo que tomaremos como $t = 0$:

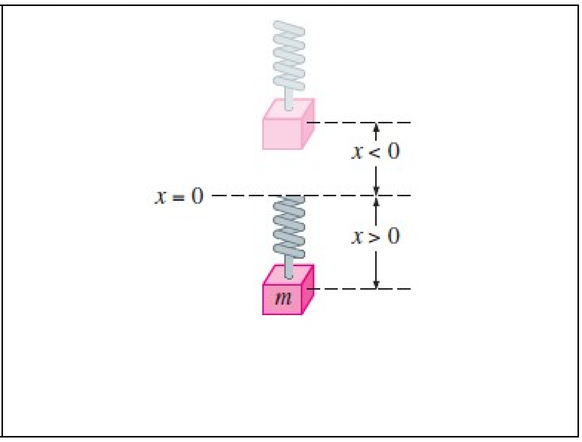
$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Recuerde que la función g es la **entrada**, **función de conducción** o **función forzada** del sistema. Una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial en un intervalo I que contiene a $t = 0$ que satisface las condiciones iniciales se llama **salida** o **respuesta** del sistema.

Sistema Resorte-Masa: Movimiento libre no amortiguado:

LEY DE HOOKE Suponga que un resorte se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa m a su extremo libre. Por supuesto, la cantidad de alargamiento o elongación del resorte depende de la masa; masas con pesos diferentes alargan el resorte en cantidades diferentes. Por la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s y es expresada en forma simple como $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante de resorte**. El resorte se caracteriza en esencia por el número k. Por ejemplo, si una masa que pesa 10 libras hace que un resorte se alargue $\frac{1}{2}$ pie, entonces $10 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que $k = 20$ lb/pie. Entonces necesariamente una masa que pesa, digamos, 8 libras alarga el mismo resorte sólo $\frac{2}{5}$ pie.





SEGUNDA LEY DE NEWTON Después de que se une una masa m a un resorte, ésta alarga el resorte una cantidad s y logra una posición de equilibrio en la cual su peso W se equilibra mediante la fuerza restauradora ks. Recuerde que el peso se define mediante $W = mg$, donde la masa se mide en slugs, kilogramos o gramos y $g = 32$ pies/s^2, 9.8 m/s^2, o bien 980 cm/s^2, respectivamente. Como se indica en la figura 5.1.1b, la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza por una cantidad x de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora del resorte es entonces $k(x + s)$. Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúan sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas —**movimiento libre**— se puede igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta o resultante de la fuerza restauradora y el peso.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + \underbrace{mg - ks}_{\text{cero}} = -kx. \qquad (1)$$

El signo negativo en (1) indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la dirección de movimiento. Además, se adopta la convención de que los desplazamientos medidos abajo de la posición de equilibrio son positivos.

ED DE UN MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO

Dividiendo (1) entre la masa m, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$, o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad (2)$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple** o **movimiento libre no amortiguado**. Dos condiciones iniciales obvias relacionadas con (2) son $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$, el desplazamiento inicial y la velocidad inicial de la masa, respectivamente. Por ejemplo, si $x_0 > 0$, $x_1 < 0$, la masa parte de un punto *abajo* de la posición de equilibrio con una velocidad impartida hacia *arriba*. Cuando $x'(0) = 0$, se dice que la masa se libera a partir del reposo. Por ejemplo, si $x_0 < 0$, $x_1 = 0$, la masa se libera desde el *reposo* de un punto $|x_0|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio.

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para resolver la ecuación (2), se observa que la solución de su ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos $m_1 = \omega_i$, $m_2 = -\omega_i$. Así de (8) de la sección 4.3 se encuentra la solución general de (2) es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \qquad (3)$$

El **periodo** del movimiento descrito por la ecuación (3) es $T = 2\pi/\omega$. El número T representa el tiempo (medido en segundos) que tarda la masa en ejecutar un ciclo de movimiento. Un ciclo es una oscilación completa de la masa, es decir, la masa m que se mueve, por ejemplo, al punto mínimo abajo de la posición de equilibrio hasta el punto más alto arriba de la misma y luego de regreso al punto mínimo. Desde un punto de vista gráfico, $T = 2\pi/\omega$ segundos es la longitud del intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos (o mínimos) de $x(t)$. Recuerde que un máximo de $x(t)$ es el desplazamiento positivo correspondiente a la masa que alcanza su distancia máxima debajo de la posición de equilibrio, mientras que un mínimo de $x(t)$ es el desplazamiento negativo correspondiente a la masa que logra su altura máxima arriba de la posición de equilibrio. Se hace referencia a cualquier caso como un **desplazamiento extremo** de la masa. La **frecuencia** de movimiento es $f = 1/T = \omega/2\pi$ y es el número de ciclos completado cada segundo. Por ejemplo, si $x(t) = 2 \cos 3\pi t - 4 \operatorname{sen} 3\pi t$, entonces el periodo es $T = 2\pi/3\pi = 2/3$ s y la frecuencia es $f = 3/2$ ciclos/s. Desde un punto de vista esquemático la gráfica de $x(t)$ se repite cada $\frac{2}{3}$ de segundo, es decir, $x\left(t + \frac{2}{3}\right) = x(t)$, y $\frac{3}{2}$ ciclos de la gráfica se completan cada segundo (o, equivalentemente, tres ciclos de la gráfica se completan cada dos segundos). El número $\omega = \sqrt{k/m}$ (medido en radianes por segundo) se llama **frecuencia circular** del sistema. Dependiendo de qué libro lea, tanto $f = \omega/2\pi$ como ω se conocen como **frecuencia natural** del sistema. Por último, cuando se emplean las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 en (3), se dice que la solución particular resultante o respuesta es la **ecuación de movimiento**.

EJEMPLO 1 **Movimiento libre no amortiguado**

Una masa que pesa 2 libras alarga 6 pulgadas un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pie/s. Determine la ecuación de movimiento.

SOLUCIÓN Debido a que se está usando el sistema de unidades de ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir en pies: 6 pulg $= \frac{1}{2}$ pie; 8 pulg $= \frac{2}{3}$ pie. Además, se deben convertir las unidades de peso dadas en libras a unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos que $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, de la ley de Hooke, $2 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que la constante de resorte es $k = 4$ lb/pie. Por lo que, de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo en la última condición es una consecuencia del hecho de que a la masa se le da una velocidad inicial en la dirección negativa o hacia arriba.

Ahora $\omega^2 = 64$ o $\omega = 8$, por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t. \tag{4}$$

Aplicando las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{5}$$ ■

<u>Nota:</u> Para utilizar el sistema MKS podemos pensar que la masa vale 1/16 kg y que la constante del resorte es de 4N/m. El tiempo seguirá estando en segundos y x en metros

FORMA ALTERNATIVA DE $X(t)$ Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la **amplitud** A de las vibraciones libres no es evidente a partir de la inspección de la ecuación (3). Por ejemplo, aunque la masa del ejemplo 1 se desplaza inicialmente $\frac{2}{3}$ pie más allá de la posición de equilibrio, la amplitud de las vibraciones es un número mayor que $\frac{2}{3}$. Por tanto, suele ser conveniente convertir una solución de la forma (3) en una forma más simple

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y ϕ es un **ángulo de fase** definido por

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{7}$$

FORMA ALTERNATIVA DE $X(t)$ Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la **amplitud** A de las vibraciones libres no es evidente a partir de la inspección de la ecuación (3). Por ejemplo, aunque la masa del ejemplo 1 se desplaza inicialmente $\frac{2}{3}$ pie más allá de la posición de equilibrio, la amplitud de las vibraciones es un número mayor que $\frac{2}{3}$. Por tanto, suele ser conveniente convertir una solución de la forma (3) en una forma más simple

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y ϕ es un **ángulo de fase** definido por

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sen}\,\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{7}$$

Para comprobar esto se desarrolla la ecuación (6) usando la fórmula de suma para la función seno:

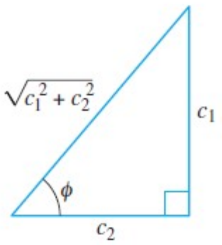
$$A\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\phi = (A\,\mathrm{sen}\,\phi)\cos\omega t + (A\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{8}$$

Se deduce de la figura 5.1.3 que si ϕ está definida por

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \qquad \cos\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A},$$

entonces la ecuación (8) se convierte en

$$A\frac{c_1}{A}\cos\omega t + A\frac{c_2}{A}\,\mathrm{sen}\,\omega t = c_1\cos\omega t + c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t = x(t).$$

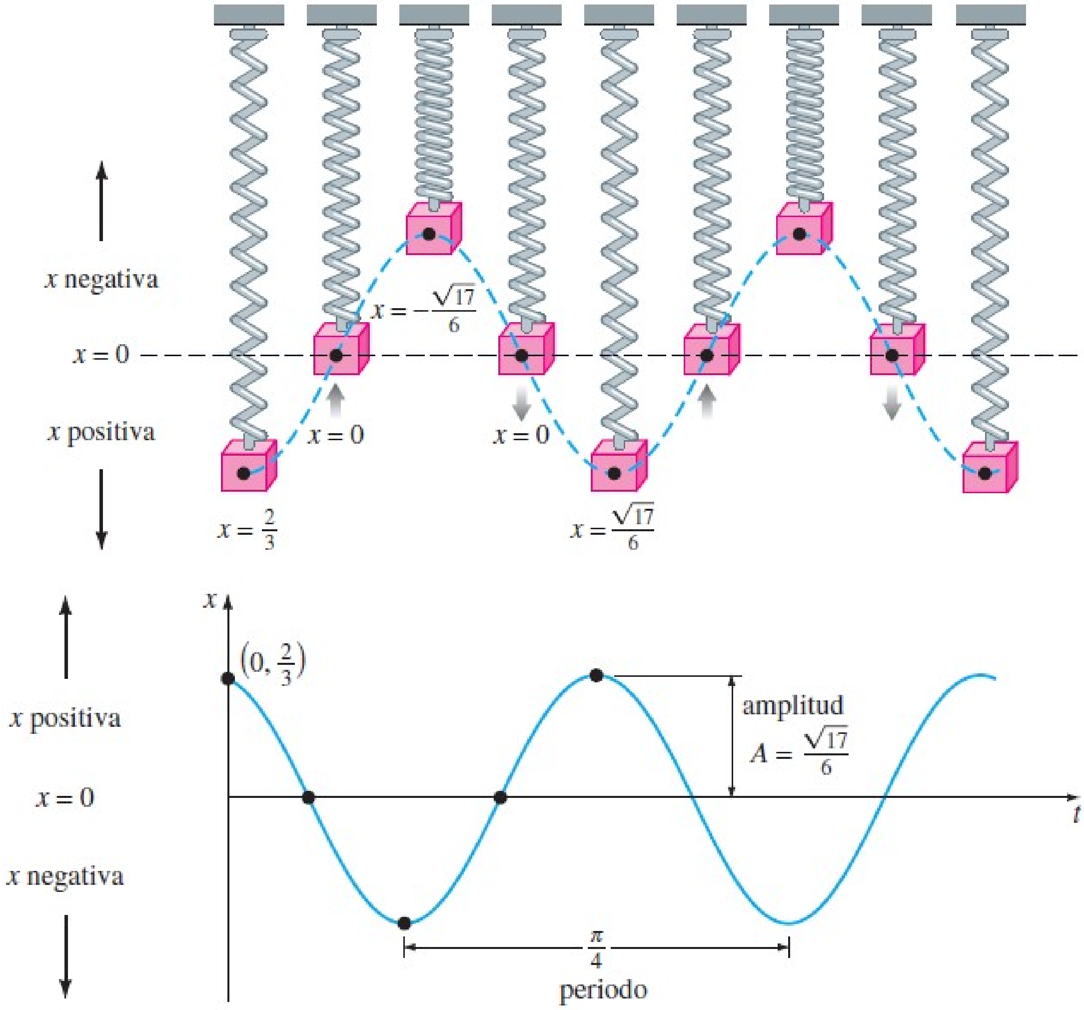


EJEMPLO 2 Forma alternativa de solución (5)

En vista de la descripción anterior, se puede escribir la solución (5) en la forma alternativa $x(t) = A\,\mathrm{sen}(8t + \phi)$. El cálculo de la amplitud es directo, $A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} \approx 0.69$ pies, pero se debe tener cuidado al calcular el ángulo de fase ϕ definido por (7). Con $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$ se encuentra $\tan\phi = -4$ y, con una calculadora se obtiene $\tan^{-1}(-4) = -1.326$ rad. Este *no* es el ángulo de fase, puesto que $\tan^{-1}(-4)$ se localiza en el *cuarto cuadrante* y por tanto contradice el hecho de que $\mathrm{sen}\,\phi > 0$ y $\cos\phi < 0$ porque $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$. Por tanto, se debe considerar que ϕ es un ángulo del *segundo cuadrante* $\phi = \pi + (-1.326) = 1.816$ rad. Así la ecuación (5) es igual a

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\,\mathrm{sen}(8t + 1.816). \tag{9}$$

El periodo de esta función es $T = 2\pi/8 = \pi/4$ s. ■



Movimiento libre amortiguado

El concepto de movimiento armónico libre es un poco irreal, puesto que el movimiento que describe la ecuación (1) supone que no hay fuerzas retardadoras actuando sobre la masa en movimiento. A menos que la masa se suspenda en un vacío perfecto, habrá por lo menos una fuerza de resistencia debida al medio circundante. Como se muestra en la figura 5.1.5, la masa podría estar suspendida en un medio viscoso o unida a un dispositivo amortiguador.

ED DE UN MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO En el estudio de la mecánica, las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a una potencia de la velocidad instantánea. En particular, en el análisis posterior se supone que esta fuerza está dada por un múltiplo constante de dx/dt. Cuando ninguna otra fuerza actúa en el sistema, se tiene de la segunda ley de Newton que

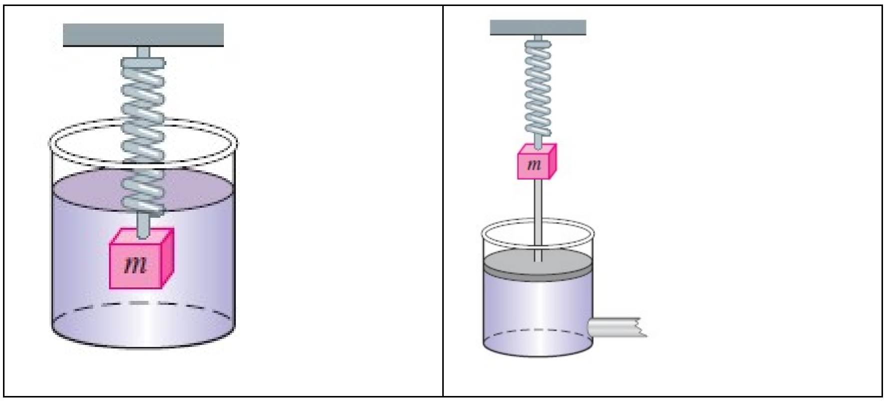
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es una consecuencia del hecho de que la fuerza de amortiguamiento actúa en una dirección opuesta al movimiento.

Dividiendo la ecuación (10) entre la masa m, se encuentra que la ecuación diferencial del **movimiento libre amortiguado** es $d^2x/dt^2 + (\beta/m)dx/dt + (k/m)x = 0$ o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{11}$$

donde
$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{12}$$



donde
$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{12}$$

El símbolo 2λ se usa sólo por conveniencia algebraica, porque la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y las raíces correspondientes son entonces

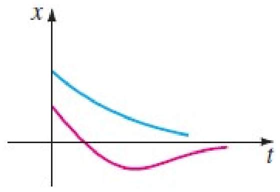
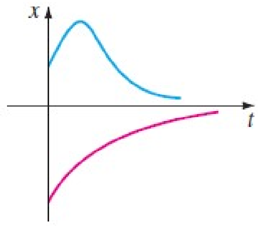
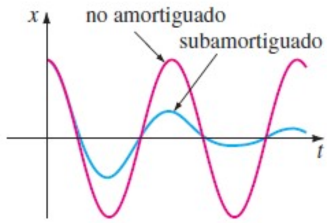
$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Ahora se pueden distinguir tres casos posibles dependiendo del signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$. Puesto que cada solución contiene el *factor de amortiguamiento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, los desplazamientos de la masa se vuelven despreciables conforme el tiempo t aumenta.

CASO I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ En esta situación el sistema está **sobreamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento β es grande comparado con la constante del resorte k. La solución correspondiente de (11) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right). \tag{13}$$

Esta ecuación representa un movimiento uniforme y no oscilatorio. En la figura 5.1.6 se muestran dos gráficas posibles de $x(t)$.

		
Movimiento sobre-amortiguado	Movimiento Críticamente amortiguado	Movimiento sub-amortiguado

CASO II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ Este sistema está **críticamente amortiguado** porque cualquier ligera disminución en la fuerza de amortiguamiento daría como resultado un movimiento oscilatorio. La solución general de (11) es $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t). \tag{14}$$

En la figura 5.1.7 se presentan algunas gráficas típicas de movimiento. Observe que el movimiento es bastante similar al de un sistema sobreamortiguado. También es evidente de (14) que la masa puede pasar por la posición de equilibrio a lo más una vez.

CASO III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ En este caso el sistema está **subamortiguado** puesto que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces m_1 y m_2 ahora son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i.$$

Así que la ecuación general de la ecuación (11) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t\right). \tag{15}$$

Como se indica en la figura 5.1.8, el movimiento descrito por la ecuación (15) es oscilatorio; pero debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración $\to 0$ cuando $t \to \infty$.

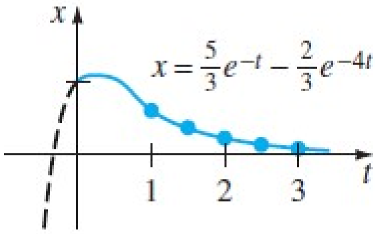
EJEMPLO 3 Movimiento sobreamortiguado

Se comprueba fácilmente que la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$$

es

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}. \tag{16}$$



t	$x(t)$
1	0.601
1.5	0.370
2	0.225
2.5	0.137
3	0.083

EJEMPLO 4 Movimiento críticamente amortiguado

Una masa que pesa 8 libras alarga 2 pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 pies/s.

SOLUCIÓN De la ley de Hooke se ve que $8 = k(2)$ da $k = 4$ lb/pie y que $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug. La ecuación diferencial de movimiento es entonces

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0. \tag{17}$$

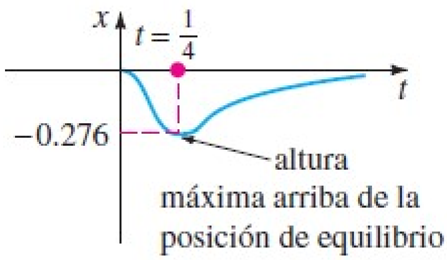
La ecuación auxiliar para (17) es $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$, así que $m_1 = m_2 = -4$. Por tanto el sistema está críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}. \tag{18}$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$, se encuentra, a su vez, que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Por tanto la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}. \tag{19}$$

Para graficar $x(t)$, se procede como en el ejemplo 3. De $x'(t) = -3e^{-4t}(1 - 4t)$ vemos que $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$. El desplazamiento extremo correspondiente es $x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{4}\right)e^{-1} = -0.276$ pies. Como se muestra en la figura 5.1.10, este valor se interpreta para indicar que la masa alcanza una altura máxima de 0.276 pies arriba de la posición de equilibrio. ■



EJEMPLO 5 Movimiento subamortiguado

Una masa que pesa 16 libras se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio el resorte mide 8.2 pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.

SOLUCIÓN La elongación del resorte después que se une la masa es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, así que se deduce de la ley de Hooke que $16 = k(3.2)$ o $k = 5$ lb/pie. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug, por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \tag{20}$$

SOLUCIÓN La elongación del resorte después que se une la masa es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, así que se deduce de la ley de Hooke que $16 = k(3.2)$ o $k = 5$ lb/pie. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug, por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \tag{20}$$

Procediendo, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo que significa que el sistema está subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t). \tag{21}$$

Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ producen $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, por lo que la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2 \cos 3t - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3t\right). \tag{22}$$ ■

FORMA ALTERNATIVA DE $x(t)$ De una manera idéntica al procedimiento usado en la página 184, se puede escribir cualquier solución

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t\right)$$

en la forma alternativa

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + \phi\right), \tag{23}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y el ángulo de fase ϕ se determina de las ecuaciones

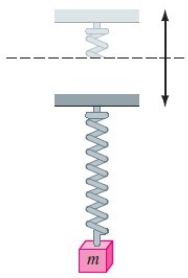
$$\operatorname{sen} \phi = \frac{c_1}{A}, \qquad \cos \phi = \frac{c_2}{A}, \qquad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}.$$

El coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ en ocasiones se llama **amplitud amortiguada** de vibraciones. Debido a que (23) no es una función periódica, el número $2\pi/\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ se llama **cuasi periodo** y $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}/2\pi$ es la **cuasi frecuencia**. El cuasi periodo es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de $x(t)$. Se debe comprobar, para la ecuación de movimiento del ejemplo 5, que $A = 2\sqrt{10}/3$ y $\phi = 4.391$. Por tanto, una forma equivalente de (22) es

$$x(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3} e^{-t} \operatorname{sen}(3t + 4.391).$$

Sistema Masa – Resorte – Movimiento Forzado

ED DE MOVIMIENTO FORZADO CON AMORTIGUAMIENTO Suponga que ahora se toma en consideración una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre una masa vibrante en un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza motriz que causa un movimiento vertical oscilatorio del soporte del resorte. Véase la figura 5.1.11. La inclusión de $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton da la ecuación diferencial de **movimiento forzado** o **dirigido**:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t). \tag{24}$$

Dividiendo la ecuación (24) entre m, se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \tag{25}$$

donde $F(t) = f(t)/m$ y, como en la sección anterior, $2\lambda = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$. Para resolver la última ecuación homogénea, se puede usar ya sea el método de coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

EJEMPLO 6 Interpretación de un problema con valores iniciales

Interprete y resuelva el problema con valores iniciales

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0. \tag{26}$$

SOLUCIÓN Se puede interpretar el problema para representar un sistema vibratorio que consiste en una masa ($m = \frac{1}{5}$ slug o kilogramo) unida a un resorte ($k = 2$ lb/pie o N/m). La masa se libera inicialmente desde el reposo $\frac{1}{2}$ unidad (pie o metro) abajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado ($\beta = 1.2$) y está siendo impulsado por una fuerza periódica externa ($T = \pi/2$ s) comenzando en $t = 0$. De manera intuitiva, se podría esperar que incluso con amortiguamiento el sistema permaneciera en movimiento hasta que se "desactive" la función forzada, en cuyo caso disminuirían las amplitudes. Sin embargo, como se plantea en el problema, $f(t) = 5\cos 4t$ permanecerá "activada" por siempre.

Primero se multiplica la ecuación diferencial en (26) por 5 y se resuelve

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

por los métodos usuales. Debido a que $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$, se deduce que $x_c(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$. Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $x_p(t) = A \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$. Derivando $x_p(t)$ y sustituyendo en la ED, se obtiene

$$x_p'' + 6x_p' + 10x_p = (-6A + 24B) \cos 4t + (-24A - 6B) \operatorname{sen} 4t = 25 \cos 4t.$$

El sistema de ecuaciones resultante

$$-6A + 24B = 25, \qquad -24A - 6B = 0$$

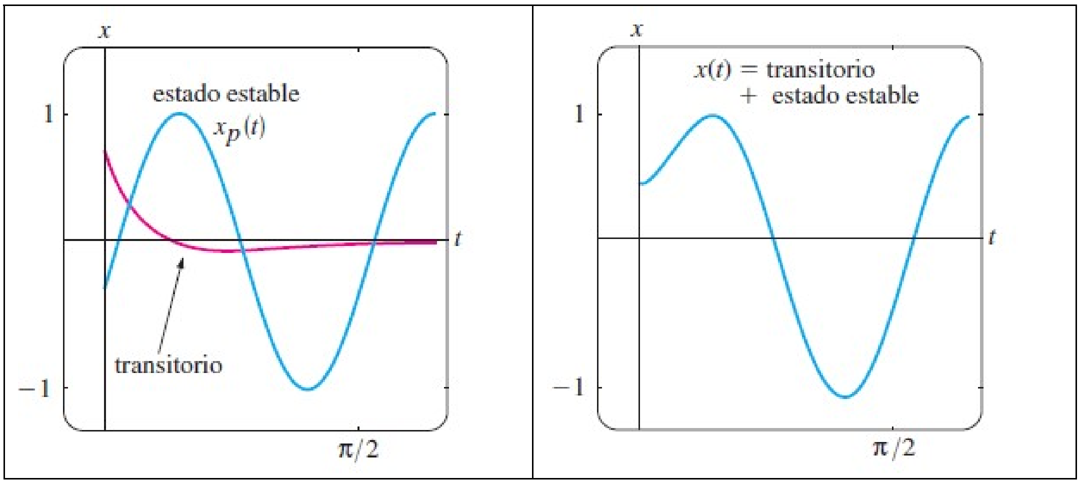
se cumple en $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. Se tiene que

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \operatorname{sen} 4t. \tag{27}$$

Cuando se hace $t = 0$ en la ecuación anterior, se obtiene $c_1 = \frac{38}{51}$. Derivando la expresión y haciendo $t = 0$, se encuentra también que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \operatorname{sen} 4t. \tag{28}$$ ■

TÉRMINOS TRANSITORIO Y DE ESTADO ESTABLE Cuando F es una función periódica, como $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$ o $F(t) = F_0 \cos \gamma t$, la solución general de (25) para $\lambda > 0$ es la suma de una función no periódica $x_c(t)$ y una función periódica $x_p(t)$. Además $x_c(t)$ se desvanece conforme se incrementa el tiempo, es decir, $\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0$. Así, para valores grandes de tiempo, los desplazamientos de la masa se aproximan mediante la solución particular $x_p(t)$. Se dice que la función complementaria $x_c(t)$ es un **término transitorio** o **solución transitoria** y la función $x_p(t)$, la parte de la solución que permanece después de un intervalo de tiempo, se llama **término de estado estable** o **solución de estado estable**. Por tanto, observe que el efecto de las condiciones iniciales en un sistema resorte/masa impulsado por F es transitorio. En la solución particular (28), $e^{-3t}\left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \operatorname{sen} t\right)$ es un término transitorio y $x_p(t) = -\frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \operatorname{sen} 4t$ es un término de estado estable. Las gráficas de estos dos términos y la solución (28) se presentan en las figuras 5.12a y 5.12b, respectivamente.



EJEMPLO 7 Soluciones de estado transitorio y de estado estable

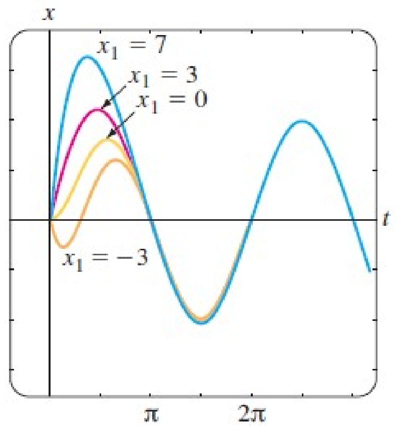
La solución del problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\,\text{sen}\,t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = x_1,$$

donde x_1 es constante, está dada por

$$x(t) = (x_1 - 2)\underbrace{e^{-t}\,\text{sen}\,t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\,\text{sen}\,t}_{\text{estado estable}}.$$

Las curvas solución para valores seleccionados de la velocidad inicial x_1 aparecen en la figura 5.1.13. Las gráficas muestran que la influencia del término transitorio es despreciable para un valor aproximado de $t > 3\pi/2$. ■

	Gráfica de la solución del ejemplo 7 para diferentes valores de x1

ED DE MOVIMIENTO FORZADO SIN AMORTIGUAMIENTO Cuando se ejerce una fuerza periódica sin fuerza de amortiguamiento, no hay término transitorio en la solución de un problema. También se ve que una fuerza periódica con una frecuencia cercana o igual que la frecuencia de las vibraciones libres amortiguadas causa un problema grave en un sistema mecánico oscilatorio.

EJEMPLO 8 Movimiento no amortiguado forzado

Resuelva el problema con valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0\,\text{sen}\,\gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \tag{29}$$

donde F_0 es una constante y $\gamma \neq \omega$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $x_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2\,\text{sen}\,\omega t$. Para obtener una solución particular se supone $x_p(t) = A\cos\gamma t + B\,\text{sen}\,\gamma t$, por lo que

$$x_p'' + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\,\text{sen}\,\gamma t = F_0\,\text{sen}\,\gamma t.$$

Igualando los coeficientes se obtiene de inmediato $A = 0$ y $B = F_0/(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a la solución general

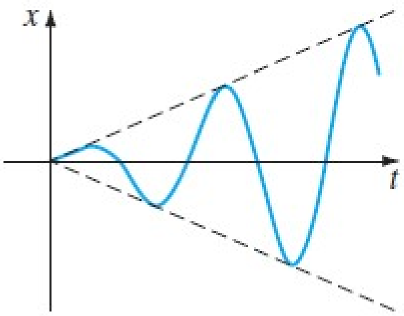
$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. Por tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t), \qquad \gamma \neq \omega \qquad (30)$$

RESONANCIA PURA Aunque la ecuación (30) no se define para $\gamma = \omega$, es interesante observar que su valor límite conforme $\gamma \to \omega$ se obtiene al aplicar la regla de L'Hôpital. Este proceso límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza impulsora ($\gamma/2\pi$) con la frecuencia de vibraciones libres ($\omega/2\pi$). De una manera intuitiva, se espera que en un espacio de tiempo se deban poder incrementar en forma sustancial las amplitudes de vibración. Para $\gamma = \omega$ se define la solución como

$$x(t) = \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} = F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\dfrac{d}{d\gamma}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t)}{\dfrac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega\gamma^2)}$$



$$\begin{aligned} &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} \\ &= F_0 \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t}{-2\omega^2} \\ &= \frac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \end{aligned} \qquad (31)$$

En conclusión, se debe observar que no hay necesidad real de usar un proceso límite en (30) para obtener la solución para $\gamma = \omega$. Alternativamente, la ecuación (31) se deduce resolviendo el problema con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

en forma directa por métodos convencionales.

Si realmente una función, como la ecuación (31) describiera los desplazamientos de un sistema resorte/masa, el sistema necesariamente fallaría. Las oscilaciones grandes de la masa forzarán en algún momento el resorte más allá de su límite elástico. Se podría argumentar también que el modelo resonante presentado en la figura 5.1.14 es por completo irreal, porque no se toman en cuenta los efectos retardadores de las fuerzas de amortiguamiento que siempre están presentes. Aunque es verdad que la resonancia pura no puede ocurrir cuando se toma en consideración la cantidad pequeña de amortiguamiento, las amplitudes de vibración grandes e igualmente destructivas pueden ocurrir (aunque acotadas conforme $t \to \infty$). Véase el problema 43 de los ejercicios 5.1.

Analogía con un circuito RLC serie

CIRCUITOS *LRC* EN SERIE Como se mencionó en la introducción de este capítulo, muchos sistemas físicos diferentes se describen mediante una ecuación diferencial de segundo orden similar a la ecuación diferencial de movimiento forzado con amortiguamiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{32}$$

Si $i(t)$ denota la corriente en el **circuito eléctrico en serie *LRC*** que se muestra en la figura 5.1.15, entonces las caídas de voltaje en el inductor, resistor y capacitor son como se muestra en la figura 1.3.3. Por la segunda ley de Kirchhoff, la suma de estos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ aplicado al circuito; es decir,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{33}$$

Pero la carga $q(t)$ en el capacitor se relaciona con la corriente $i(t)$ con $i = dq/dt$, así la ecuación (33) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{34}$$

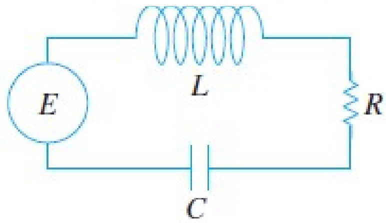
La nomenclatura usada en el análisis de circuitos es similar a la que se emplea para describir sistemas resorte/masa.

Si $E(t) = 0$, se dice que las **vibraciones eléctricas** del circuito están **libres**. Debido a que la ecuación auxiliar para (34) es $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, habrá tres formas de solución con $R \neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2 - 4L/C$. Se dice que el circuito es

sobreamortiguado si $R^2 - 4L/C > 0$.

críticamente amortiguado si $R^2 - 4L/C = 0$,

subamortiguado si $R^2 - 4L/C < 0$.



En cada uno de estos tres casos, la solución general de (34) contiene el factor $e^{-Rt/2L}$, así $q(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. En el caso subamortiguado cuando $q(0) = q_0$, la carga en el capacitor oscila a medida que ésta disminuye; en otras palabras, el capacitor se carga y se descarga conforme $t \to \infty$. Cuando $E(t) = 0$ y $R = 0$, se dice que el circuito no está amortiguado y las vibraciones eléctricas no tienden a cero conforme t crece sin límite; la respuesta del circuito es **armónica simple**.

EJEMPLO 9 **Circuito en serie subamortiguado**

Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito *LRC* cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que $1/C = 1000$, la ecuación (34) se convierte en

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0 \quad \text{o} \quad q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Resolviendo esta ecuación homogénea de la manera usual, se encuentra que el circuito es subamortiguado y $q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t)$. Aplicando las condiciones iniciales, se encuentra $c_1 = q_0$ y $c_2 = \frac{1}{3}q_0$. Por tanto

$$q(t) = q_0 e^{-20t}\left(\cos 60t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 60t\right).$$

Usando (23), podemos escribir la solución anterior como

$$q(t) = \frac{q_0\sqrt{10}}{3}e^{-20t}\operatorname{sen}(60t + 1.249).$$ ■

Cuando se aplica un voltaje $E(t)$ al circuito, se dice que las vibraciones eléctricas son **forzadas**. En el caso cuando $R \neq 0$, la función complementaria $q_c(t)$ de (34) se llama **solución transitoria**. Si $E(t)$ es periódica o una constante, entonces la solución particular $q_p(t)$ de (34) es una **solución de estado estable**.

EJEMPLO 10 Corriente de estado estable

Encuentre la solución de estado estable $q_p(t)$ y la **corriente de estado estable** en un circuito LRC en serie cuando el voltaje aplicado es $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \gamma t$.

SOLUCIÓN La solución de estado estable $q_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Con el método de coeficientes indeterminados, se supone una solución particular de la forma $q_p(t) = A \operatorname{sen} \gamma t + B \cos \gamma t$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e igualando coeficientes, se obtiene

$$A = \frac{E_0\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}, \qquad B = \frac{E_0 R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}.$$

Es conveniente expresar A y B en términos de algunos nuevos símbolos.

Si $\qquad X = L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}, \qquad$ entonces $\qquad Z^2 = L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2}$.

Si $\qquad Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \qquad$ entonces $\qquad Z^2 = L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$

Por tanto $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, así que la carga de estado estable es

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

Ahora la corriente de estado estable está dada por $i_p(t) = q'_p(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{X}{Z}\cos\gamma t\right). \tag{35}$$

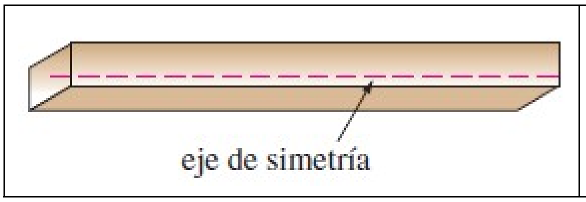
Las cantidades $X = L\gamma - 1/C\gamma$ y $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ definidas en el ejemplo 11 se llaman **reactancia** e **impedancia** del circuito, respectivamente. Tanto la reactancia como la impedancia se miden en ohms.

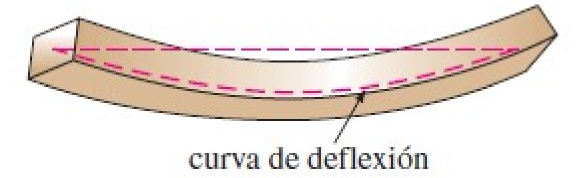
Modelos lineales – Problemas con valores en la Frontera

DEFLEXIÓN DE UNA VIGA Muchas estructuras se construyen usando trabes o vigas y estas vigas se flexionan o deforman bajo su propio peso o por la influencia de alguna fuerza externa. Como veremos a continuación, esta deflexión $y(x)$ está gobernada por una ecuación diferencial lineal de cuarto orden relativamente simple.

Para empezar, supongamos que una viga de longitud L es homogénea y tiene secciones transversales uniformes a lo largo de su longitud. En ausencia de carga en la viga (incluyendo su peso), una curva que une los centroides de todas sus secciones transversales es una recta conocida como **eje de simetría**. Véase la figura 5.2.1a. Si se aplica una carga a la viga en un plano vertical que contiene al eje de simetría, la viga, como se muestra en la figura 5.2.1b, experimenta una distorsión y la curva que conecta los centroides de las secciones transversales se llama **curva de deflexión** o **curva elástica**. La curva de deflexión se aproxima a la forma de una viga. Ahora suponga que el eje x coincide con el eje de simetría y que la deflexión $y(x)$, medida desde este eje, es positiva si es hacia abajo. En la teoría de elasticidad se muestra que el momento de flexión $M(x)$ en un punto x a lo largo de la viga se relaciona con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x). \tag{1}$$





Además, el momento de flexión $M(x)$ es proporcional a la curvatura κ de la curva elástica

$$M(x) = EI\kappa, \tag{2}$$

donde E e I son constantes; E es el módulo de Young de elasticidad del material de la viga e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga (respecto a un eje conocido como el eje neutro). El producto EI se llama **rigidez f1exional** de la viga.

Ahora, del cálculo, la curvatura está dada por $\kappa = y''/[1 + (y')^2]^{3/2}$. Cuando la deflexión $y(x)$ es pequeña, la pendiente $y' \approx 0$, y por tanto $[1 + (y')^2]^{3/2} \approx 1$. Si se permite que $\kappa \approx y''$, la ecuación (2) se convierte en $M = EI\, y''$. La segunda derivada de esta última expresión es

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d^2}{dx^2}y'' = EI\frac{d^4y}{dx^4}. \tag{3}$$

Si se utiliza el resultado en (1) para reemplazar d^2M/dx^2 en (3), se ve que la deflexión $y(x)$ satisface la ecuación diferencial de cuarto orden

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \tag{4}$$

Las condiciones de frontera asociadas con la ecuación (4) dependen de cómo estén apoyados los extremos de la viga. Una viga en voladizo está **empotrada** o **fija** en un extremo y libre en el otro. Un trampolín, un brazo extendido, un ala de avión y un balcón son ejemplos comunes de tales vigas, pero incluso árboles, astas de banderas, rascacielos y monumentos, actúan como vigas en voladizo, debido a que están empotrados en un extremo y sujetos a la fuerza de flexión del viento. Para una viga en voladizo la deflexión $y(x)$ debe satisfacer las siguientes dos condiciones en el extremo fijo $x = 0$:

- $y(0) = 0$ porque no hay flexión y
- $y'(0) = 0$ porque la curva de deflexión es tangente al eje x (en otras palabras, la pendiente de la curva de deflexión es cero en este punto).

		
Empotrada en ambos extremos	Viga en voladizo: empotrada en un extremo y libre en el otro	Apoyada simplemente en ambos extremos

Extremos de la viga	Condiciones frontera
empotrados	$y = 0, \quad y' = 0$
libres	$y'' = 0, \quad y''' = 0$
apoyados simplemente o abisagrados	$y = 0, \quad y'' = 0$

En $x = L$ las condiciones de extremo libre son

- $y''(L) = 0$ porque el momento de flexión es cero y
- $y'''(L) = 0$ porque la fuerza de corte es cero.

La función $F(x) = dM/dx = EI\, d^3y/dx^3$ se llama fuerza de corte. Si un extremo de la viga está **apoyado simplemente** o **abisagrado** (a lo que también se conoce como **apoyo con perno** o **fulcro**) entonces se debe tener $y = 0$ y $y'' = 0$ en ese extremo. En la tabla 5.1 se resumen las condiciones en la frontera que se relacionan con (4). Véase la figura 5.2.2.

EJEMPLO 1 **Una viga empotrada**

Una viga de longitud L está empotrada en ambos extremos. Encuentre la deflexión de la viga si una carga constante w_0 está uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, es decir, $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

SOLUCIÓN De (4) vemos que la deflexión $y(x)$ satisface

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0.$$

Debido a que la viga está empotrada tanto en su extremo izquierdo ($x = 0$) como en su extremo derecho ($x = L$), no hay deflexión vertical y la recta de deflexión es horizontal en estos puntos. Así, las condiciones en la frontera son

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(L) = 0, \qquad y'(L) = 0.$$

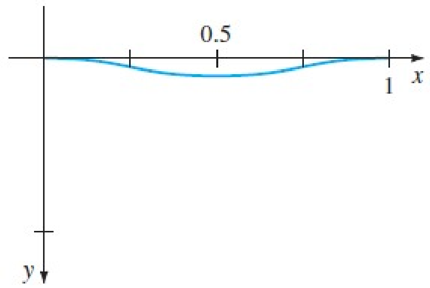
Se puede resolver la ecuación diferencial no homogénea de la manera usual (determinar y_c observando que $m = 0$ es raíz de multiplicidad cuatro de la ecuación auxiliar $m^4 = 0$ y luego encontrar una solución particular y_p por coeficientes indeterminados) o simplemente se integra la ecuación $d^4y/dx^4 = w_0/EI$ sucesivamente cuatro veces. De cualquier modo, se encuentra la solución general de la ecuación $y = y_c + y_p$ que es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Ahora las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ dan, a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, mientras que las condiciones restantes $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$ aplicadas a $y(x) = c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$ producen las ecuaciones simultáneas

$$c_3L^2 + c_4L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$2c_3L + 3c_4L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$



Resolviendo este sistema se obtiene $c_3 = w_0L^2/24EI$ y $c_4 = -w_0L/12EI$. Así que la deflexión es

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$$

o $y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2$. Eligiendo $w_0 = 24EI$, y $L = 1$, obtenemos la curva de deflexión de la figura 5.2.3. ■

EIGENVALORES Y FUNCIONES PROPIAS Muchos problemas de aplicación requieren que se resuelva un problema con valores en la frontera en dos puntos (PVF) en los que interviene una ecuación diferencial lineal que contiene un parámetro λ. Se buscan los valores de λ para los que el problema con valores en la frontera tiene soluciones *no triviales*, es decir, *no nulas*.

EJEMPLO 2 Soluciones no triviales de un PVF

Resuelva el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

SOLUCIÓN Consideraremos tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

CASO I: Para $\lambda = 0$ la solución de $y'' = 0$ es $y = c_1 x + c_2$. Las condiciones $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$ aplicadas a esta solución implican, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$. Por tanto, para $\lambda = 0$ la única solución del problema con valores en la frontera es la solución trivial $y = 0$.

CASO II: Para $\lambda < 0$ es conveniente escribir $\lambda = -\alpha^2$, donde α denota un número positivo. Con esta notación las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - \alpha^2 = 0$ son $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. Puesto que el intervalo en el que se está trabajando es finito, se elige escribir la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$ como $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$. Ahora $y(0)$ es

$$y(0) = c_1 \cosh 0 + c_2 \operatorname{senh} 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1,$$

y por tanto, $y(0) = 0$ significa que $c_1 = 0$. Así $y = c_2 \operatorname{senh} \alpha x$. La segunda condición $y(L) = 0$ requiere que $c_2 \operatorname{senh} \alpha L = 0$. Para $\alpha \neq 0$, $\operatorname{senh} \alpha L \neq 0$; en consecuencia, se está forzado a elegir $c_2 = 0$. De nuevo la solución del PVF es la solución trivial $y = 0$.

CASO III: Para $\lambda > 0$ se escribe $\lambda = \alpha^2$, donde α es un número positivo. Debido a que la ecuación auxiliar $m^2 + \alpha^2 = 0$ tiene raíces complejas $m_1 = i\alpha$ y $m_2 = -i\alpha$, la solución general de $y'' + \alpha^2 y = 0$ es $y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Como antes, $y(0) = 0$ produce $c_1 = 0$ y por tanto $y = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Ahora la última condición $y(L) = 0$, o

$$c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0,$$

se satisface al elegir $c_2 = 0$. Pero esto significa que $y = 0$. Si se requiere $c_2 \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} \alpha L = 0$ se satisface siempre que αL sea un múltiplo entero de π.

$$\alpha L = n\pi \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \text{o} \quad \lambda_n = \alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Por tanto, para cualquier número real c_2 distinto de cero, $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es una solución del problema para cada n. Debido a que la ecuación diferencial es homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución también es una solución, así que si se desea se podría simplemente tomar $c_2 = 1$. En otras palabras, para cada número de la sucesión

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}, \qquad \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}, \ \ldots,$$

la función *correspondiente* en la sucesión

$$y_1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x, \qquad y_2 = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x, \qquad y_3 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \cdots,$$

es una solución no trivial del problema original. ■

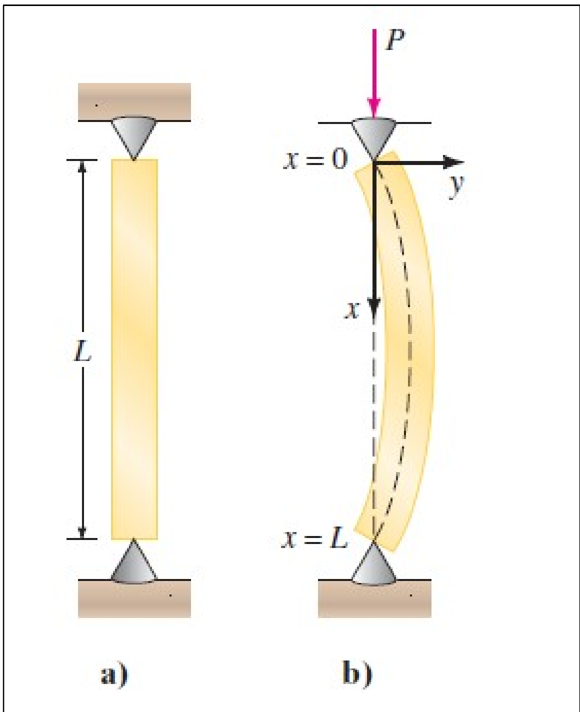
Los números $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ para los cuales el problema con valores en la frontera del ejemplo 2 tiene soluciones no triviales que se conocen como **eigenvalores** (valores propios). Las soluciones no triviales que dependen de estos valores de λ_n, $y_n = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ o simplemente $y_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, se llaman **funciones propias** (eigenfunciones).

PANDEO DE UNA COLUMNA VERTICAL DELGADA En el siglo XVIII, Leonhard Euler fue uno de los primeros matemáticos en estudiar un problema con eigenvalores y analizar cómo se pandea una columna elástica delgada bajo una fuerza axial compresiva.

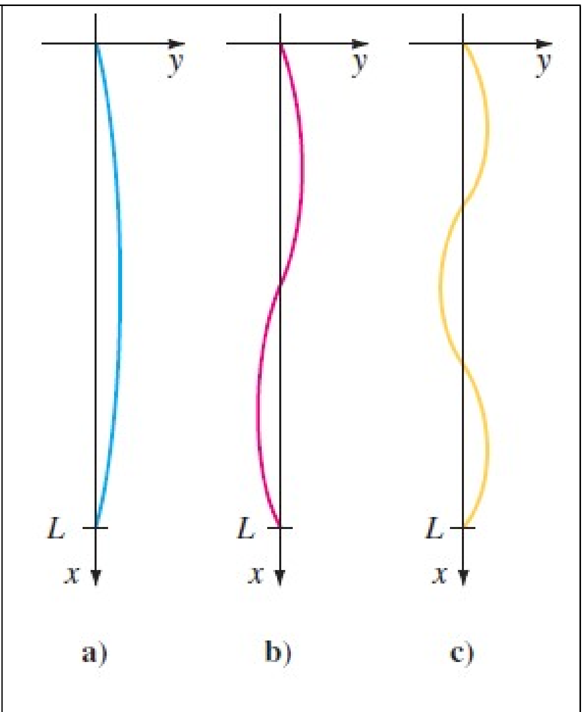
Considere una columna vertical larga y delgada de sección transversal uniforme y longitud L. Sea $y(x)$ la deflexión de la columna cuando se aplica en la parte superior una fuerza compresiva vertical constante, una carga P, como se muestra en la figura 5.2.4. Al comparar los momentos de flexión en algún punto a lo largo de la columna, se obtiene

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad \text{o} \quad EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \tag{5}$$

donde E es el módulo de Young para la elasticidad e I es el momento de inercia de una sección transversal respecto a una recta vertical por su centroide.



Pandeo de una columna elástica bajo una fuerza compresiva



Curvas de deflexión que corresponden a las fuerzas compresivas P1, P2 y P3

EJEMPLO 3 La carga de Euler

Encuentre la deflexión de una columna homogénea vertical y delgada de longitud L sujeta a una carga axial constante P si la columna se fija con bisagras en ambos extremos.

SOLUCIÓN El problema con valores en la frontera por resolver es

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

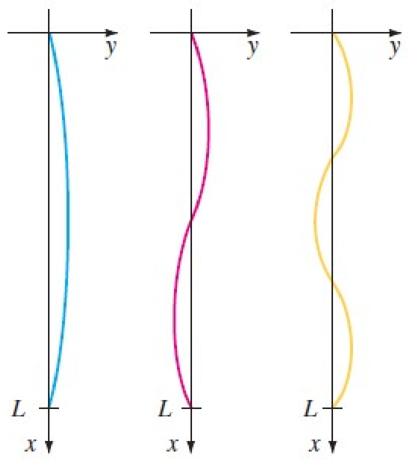
Primero observe que $y = 0$ es una solución muy buena de este problema. Esta solución tiene una simple interpretación intuitiva: Si la carga P no es suficientemente grande, no hay deflexión. Entonces la pregunta es ésta: ¿para qué valores de P se dobla la columna? En términos matemáticos: ¿para qué valores de P el problema con valores en la frontera tiene soluciones no triviales?

Al escribir $\lambda = P/EI$, vemos que

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

es idéntico al problema del ejemplo 2. Del caso III de esa descripción se ve que las deflexiones son $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ que corresponden a los eigenvalores $\lambda_n = P_n/EI = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Desde el punto de vista físico, esto significa que la columna experimenta flexión sólo cuando la fuerza compresiva es uno de los valores $P_n = n^2\pi^2EI/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Estas fuerzas diferentes se llaman **cargas críticas**. La deflexión correspondiente a la carga crítica más pequeña $P_1 = \pi^2EI/L^2$, llamada **carga de Euler**, es $y_1(x) = c_2 \operatorname{sen}(\pi x/L)$ y se conoce como **primer modo de pandeo**. ■

Las curvas de deflexión del ejemplo 3 que corresponden a $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ se muestran en la figura 5.2.5. Observe que si la columna original tiene alguna clase de restricción física en $x = L/2$, entonces la carga crítica más pequeña será $P_2 = 4\pi^2EI/L^2$, y la curva de deflexión será como se muestra en la figura 5.2.5b. Si se ponen restricciones a la columna en $x = L/3$ y en $x = 2L/3$, entonces la columna no se pandea hasta que se aplica la carga crítica $P_3 = 9\pi^2EI/L^2$ y la curva de deflexión será como se muestra en la figura 5.2.5c. Véase el problema 23 de los ejercicios 5.2.



CUERDA ROTANDO La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{6}$$

se presenta una y otra vez como un modelo matemático. En la sección 5.1 vimos que la ecuación (6) en las formas $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ y $d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$ son modelos para el movimiento armónico simple de un sistema resorte/masa y la respuesta armónica simple de un circuito en serie, respectivamente. Es evidente cuando el modelo para la deflexión de una columna delgada en (5) se escribe como $d^2y/dx^2 + (P/EI)y = 0$ que es lo mismo que (6). Se encuentra la ecuación básica (6) una vez más en esta sección: como un modelo que define la curva de deflexión o la forma $y(x)$ que adopta una cuerda rotatoria. La situación física es similar a cuando dos personas sostienen una cuerda para saltar y la hacen girar de una manera sincronizada. Véase la figura 5.2.6a y 5.2.6b.

Suponga que una cuerda de longitud L con densidad lineal constante ρ (masa por unidad de longitud) se estira a lo largo del eje x y se fija en $x = 0$ y $x = L$. Suponga que la cuerda se hace girar respecto al eje a una velocidad angular constante ω. Considere una porción de la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, donde Δx es pequeña. Si la magnitud T de la tensión $\mathbf{T}$ que actúa tangencial a la cuerda, es constante a lo largo de ésta, entonces la ecuación diferencial deseada se obtiene al igualar dos formulaciones distintas de la fuerza neta que actúa en la cuerda en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Primero, vemos en la figura 5.2.6c se ve que la fuerza vertical neta es

$$F = T\,\text{sen}\,\theta_2 - T\,\text{sen}\,\theta_1. \tag{7}$$

Cuando los ángulos θ_1 y θ_2 (medidos en radianes) son pequeños, se tiene sen $\theta_2 \approx \tan \theta_2$ y sen $\theta_1 \approx \tan \theta_1$. Además, puesto que $\tan \theta_2$ y $\tan \theta_1$, son, a su vez, pendientes de las rectas que contienen los vectores $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_1$ también se puede escribir

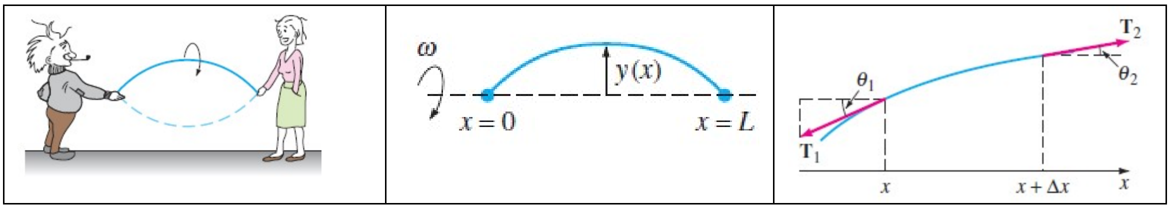
$$\tan \theta_2 = y'(x + \Delta x) \quad \text{y} \quad \tan \theta_1 = y'(x).$$

Por tanto, la ecuación (7) se convierte en

$$F \approx T[y'(x + \Delta x) - y'(x)]. \tag{8}$$

Segundo, se puede obtener una forma diferente de esta misma fuerza neta usando la segunda ley de Newton, $F = ma$. Aquí la masa del resorte en el intervalo es $m = \rho\,\Delta x$; la aceleración centrípeta de un cuerpo que gira con velocidad angular ω en un círculo de radio r es $a = r\omega^2$. Con Δx pequeña se toma $r = y$. Así la fuerza vertical neta es también aproximadamente igual a

$$F \approx -(\rho\,\Delta x)y\omega^2, \tag{9}$$



donde el signo menos viene del hecho de que la aceleración apunta en la dirección opuesta a la dirección y positiva. Ahora, al igualar (8) y (9), se tiene

$$T[y'(x + \Delta x) - y'(x)] = -(\rho \Delta x) y \omega^2 \qquad \text{o} \qquad T \underbrace{\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x}}_{\text{cociente de diferencias}} + \rho \omega^2 y = 0. \tag{10}$$

Para Δx cercana a cero el cociente de diferencias en (10) es aproximadamente la segunda derivada d^2y/dx^2. Por último, se llega al modelo

$$T\frac{d^2 y}{dx^2} + \rho \omega^2 y = 0. \tag{11}$$

Puesto que la cuerda está anclada en sus extremos en $x = 0$ y $x = L$, esperamos que la solución $y(x)$ de la ecuación (11) satisfaga también las condiciones frontera $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$.

Modelos no lineales

Analizaremos aquí algunos modelos no lineales que pueden resolverse por sustitución, reduciendo en este caso el orden de la ecuación diferencial

Resortes no lineales

En la sección anterior vimos el modelo de un resorte lineal de la forma:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + F(x) = 0, \tag{1}$$

donde $F(x) = kx$. Debido a que x denota el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio, $F(x) = kx$ es la ley de Hooke, es decir, la fuerza ejercida por el resorte que tiende a restaurar la masa a la posición de equilibrio. Un resorte que actúa bajo una fuerza restauradora lineal $F(x) = kx$ se llama **resorte lineal**. Pero los resortes pocas veces son lineales. Dependiendo de cómo esté construido y del material utilizado, un resorte puede variar desde "flexible" o suave, hasta "rígido" o duro, por lo que su fuerza restauradora puede variar respecto a la ley lineal. En el caso de movimiento libre, si se supone que un resorte en buen estado tiene algunas características no lineales, entonces podría ser razonable suponer que la fuerza restauradora de un resorte, es decir, $F(x)$ en la ecuación (1), es proporcional al cubo del desplazamiento x de la masa más allá de su posición de equilibrio o que $F(x)$ es una combinación lineal de potencias del desplazamiento como el que se determina mediante la función no lineal $F(x) = kx + k_1x^3$. Un resorte cuyo modelo matemático incorpora una fuerza restauradora no lineal, como

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + kx^3 = 0 \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2 x}{dt^2} + kx + k_1 x^3 = 0, \tag{2}$$

se llama **resorte no lineal**. Además, se examinan modelos matemáticos en los que el amortiguamiento impartido al movimiento era proporcional a la velocidad instantánea dx/dt y la fuerza restauradora de un resorte está dada por la función lineal $F(x) = kx$. Pero estas fueron suposiciones muy simples; en situaciones más reales, el amortiguamiento podría ser proporcional a alguna potencia de la velocidad instantánea dx/dt. La ecuación diferencial no lineal

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \left|\frac{dx}{dt}\right| \frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3}$$

es un modelo de un sistema libre resorte/masa en el que la fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad. Así que es posible imaginar otras clases de modelos: amortiguamiento lineal y fuerza restauradora no lineal, amortiguamiento no lineal y fuerza restauradora no lineal, etcétera. El punto es que las características no lineales de un sistema físico dan lugar a un modelo matemático que es no lineal.

PÉNDULO NO LINEAL Cualquier objeto que oscila de un lado a otro se llama **péndulo físico**. El **péndulo simple** es un caso especial del péndulo físico y consiste en una varilla de longitud l a la que se fija una masa m en un extremo. Al describir el movimiento de un péndulo simple en un plano vertical, se hacen las suposiciones de simplificación de que la masa de la varilla es despreciable y que ninguna fuerza externa de amortiguamiento o motriz actúa sobre el sistema. El ángulo de desplazamiento θ del péndulo, medido desde la vertical, como se ilustra en la figura 5.3.3, se considera positivo cuando se mide a la derecha de OP y negativo a la izquierda de OP. Ahora recuerde que el arco s de un círculo de radio l se relaciona con el ángulo central θ por la fórmula $s = l\theta$. Por tanto, la aceleración angular es

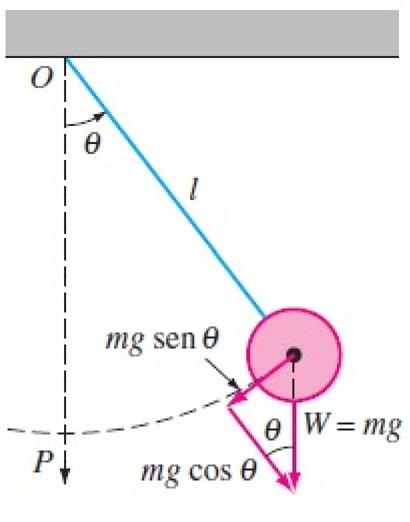
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$F = ma = ml\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De la figura 5.3.3 se ve que la magnitud de la componente tangencial de la fuerza debida al peso W es mg sen θ. En cuanto a dirección esta fuerza es $-mg$ sen θ porque apunta a la izquierda para $\theta > 0$ y a la derecha para $\theta < 0$. Se igualan las dos versiones distintas de la fuerza tangencial para obtener $ml\ d^2\theta/dt^2 = -mg$ sen θ, o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{6}$$



LINEALIZACIÓN Como resultado de la presencia de sen θ, el modelo en (6) es no lineal. En un intento por entender el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, en ocasiones se trata de simplificar el problema sustituyendo términos no lineales por ciertas aproximaciones. Por ejemplo, la serie de Maclaurin para sen θ, está dada por

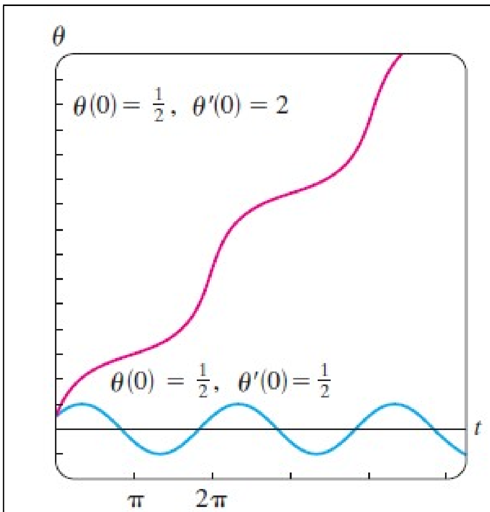
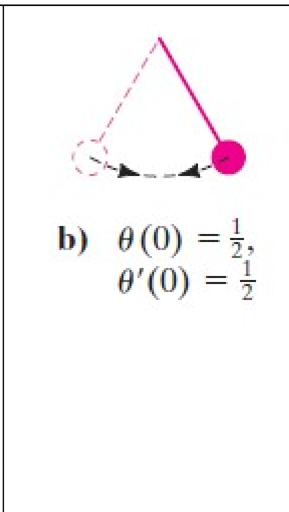
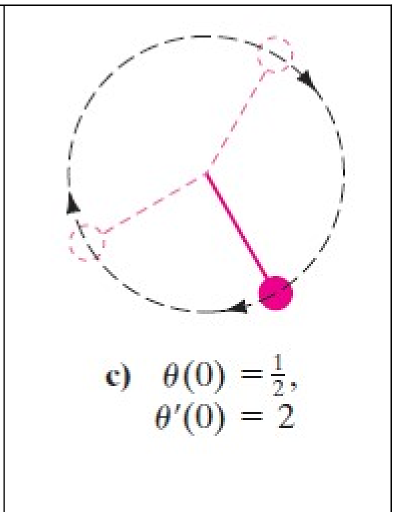
$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

así que si se usa la aproximación sen $\theta \approx \theta - \theta^3/6$, la ecuación (6) se convierte en $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta - (g/6l)\theta^3 = 0$. Observe que esta última ecuación es la misma que la segunda ecuación lineal en (2) con $m = 1$, $k = g/l$ y $k_1 = -g/6l$. Sin embargo, si se supone que los desplazamientos θ son suficientemente pequeños para justificar el uso de la sustitución sen $\theta \approx \theta$, entonces la ecuación (6) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{7}$$

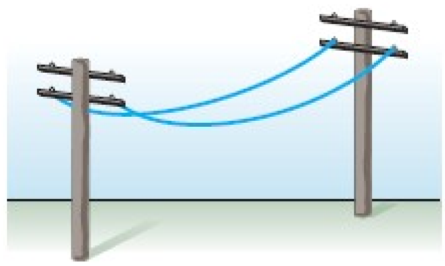
Ejemplo: Dos problemas con valores iniciales

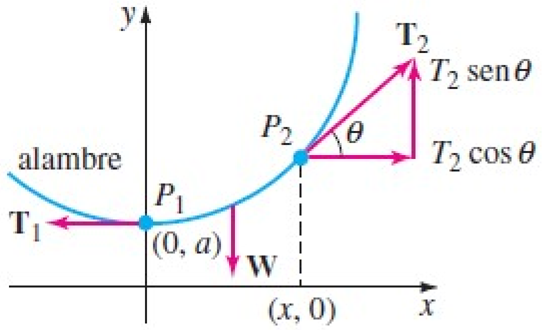
Las gráficas de la figura 5.3.4a se obtuvieron con ayuda de un programa de solución numérica y representan curvas solución de la ecuación (6) cuando $\omega^2 = 1$. La curva azul ilustra la solución de (6) que satisface las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = \frac{1}{2}$, mientras que la curva roja es la solución de (6) que satisface $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = 2$. La curva azul representa una solución periódica, el péndulo que oscila en vaivén como se muestra en la figura 5.3.4b con una amplitud aparente $A \leq 1$. La curva roja muestra que θ crece sin límite cuando aumenta el tiempo, el péndulo comenzando desde el mismo desplazamiento inicial recibe una velocidad inicial de magnitud suficientemente grande para enviarlo hasta arriba; en otras palabras, el péndulo gira respecto a su pivote como se ilustra en la figura 5.3.4c. En ausencia de amortiguamiento, el movimiento en cada caso continúa de forma indefinida. ■

		
Comparación de ambos péndulos	Péndulo oscilante	Péndulo giratorio

CABLES SUSPENDIDOS Suponga un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales. Ejemplos físicos de esto podría ser uno de los dos cables que soportan el firme de un puente de suspensión como el que se muestra en la figura 1.3.6a o un cable telefónico largo entre dos postes como el que se muestra en la figura 1.3.6b. Nuestro objetivo es construir un modelo matemático que describa la forma que tiene el cable.

Comenzaremos por acordar en examinar sólo una parte o elemento del cable entre su punto más bajo P_1 y cualquier punto arbitrario P_2. Señalado en color azul en la figura 1.3.7, este elemento de cable es la curva en un sistema de coordenada rectangular eligiendo al eje y para que pase a través del punto más bajo P_1 de la curva y eligiendo al eje x para que pase a a unidades debajo de P_1. Sobre el cable actúan tres fuerzas: las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en el cable que son tangentes al cable en P_1 y P_2, respectivamente, y la parte $\mathbf{W}$ de la carga total vertical entre los puntos P_1 y P_2. Sea que $T_1 = |\mathbf{T}_1|$, $T_2 = |\mathbf{T}_2|$, y $W = |\mathbf{W}|$ denoten las magnitudes de estos vectores. Ahora la tensión $\mathbf{T}_2$ se





descompone en sus componentes horizontal y vertical (cantidades escalares) $T_2 \cos\theta$ y T_2 sen θ. Debido al equilibrio estático podemos escribir

$$T_1 = T_2 \cos\theta \qquad \text{y} \qquad W = T_2 \operatorname{sen}\theta.$$

Al dividir la ultima ecuación entre la primera, eliminamos T_2 y obtenemos tan $\theta = W/T_1$. Pero puesto que $dy/dx = \tan\theta$, llegamos a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}. \tag{16}$$

Esta sencilla ecuación diferencial de primer orden sirve como modelo tanto para modelar la forma de un alambre flexible como el cable telefónico colgado bajo su propio peso, como para modelar la forma de los cables que soportan el firme de un puente suspendido.

CABLES TELEFÓNICOS La ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = W/T_1$ es la ecuación (17) de la sección 1.3. Esta ecuación diferencial, establecida con la ayuda de la figura 1.3.7 en la página 25, sirve como modelo matemático para la forma de un cable flexible suspendido entre dos soportes verticales cuando el cable lleva una carga vertical. En la sección 2.2 se resuelve esta ED simple bajo la suposición de que la carga vertical que soportan los cables de un puente suspendido era el peso de la carpeta asfáltica distribuida de modo uniforme a lo largo del eje x. Con $W = \rho x$, ρ el peso por unidad de longitud de la carpeta asfáltica, la forma de cada cable entre los apoyos verticales resultó ser parabólica. Ahora se está en condiciones de determinar la forma de un cable flexible uniforme que cuelga sólo bajo su propio peso, como un cable suspendido entre dos postes telefónicos. Ahora la carga vertical es el cable y por tanto, si ρ es la densidad lineal del alambre (medido, por ejemplo, en libras por pie) y s es la longitud del segmento P_1P_2 en la figura 1.3.7, entonces $W = \rho s$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho s}{T_1}. \tag{8}$$

Puesto que la longitud de arco entre los puntos P_1 y P_2 está dada por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{9}$$

del teorema fundamental del cálculo se tiene que la derivada de (9) es

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{10}$$

Derivando la ecuación (8) respecto a x y usando la ecuación (10) se obtiene la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\frac{ds}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

En el ejemplo siguiente se resuelve la ecuación (11) y se muestra que la curva del cable suspendido es una **catenaria**. Antes de proceder, observe que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden (11) es una de las ecuaciones que tienen la forma $F(x, y', y'') = 0$ analizadas en la sección 4.9. Recuerde que hay posibilidades de resolver una ecuación de este tipo al reducir el orden de la ecuación usando la sustitución $u = y'$.

EJEMPLO 3 Un problema con valores iniciales

De la posición del eje y en la figura 1.3.7 es evidente que las condiciones iniciales relacionadas con la segunda ecuación diferencial en (11) son $y(0) = a$ y $y'(0) = 0$. Si se sustituye $u = y'$, entonces la ecuación en (11) se convierte en $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\rho}{T_1}\sqrt{1 + u^2}$. Separando las variables se encuentra que

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\rho}{T_1}\int dx \quad \text{se obtiene} \quad \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{\rho}{T_1}x + c_1.$$

Ahora, $y'(0) = 0$ es equivalente a $u(0) = 0$. Puesto que $\operatorname{senh}^{-1} 0 = 0$, $c_1 = 0$ y por tanto, $u = \operatorname{senh}(\rho x/T_1)$. Por último, integrando ambos lados de

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{\rho}{T_1}x, \quad \text{obtenemos} \quad y = \frac{T_1}{\rho}\cosh\frac{\rho}{T_1}x + c_2.$$

Con $y(0) = a$, $\cosh 0 = 1$, se deduce de la última ecuación que $c_2 = a - T_1/\rho$. Por tanto vemos que la forma del cable que cuelga está dada por $y = (T_1/\rho)\cosh(\rho x/T_1) + a - T_1/\rho$. ■

CUERPOS EN CAÍDA Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se mueve en un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con la segunda ley de Newton. Recordemos de la física elemental, la **primera ley del movimiento** de Newton establece que un cuerpo permanecerá en reposo o continuará moviéndose con una velocidad constante, a menos que sea sometido a una fuerza externa. En los dos casos, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas $F = \sum F_k$, esto es, la fuerza *neta* o fuerza resultante, que actúa sobre el cuerpo es cero, la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley del movimiento** de Newton indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración a o, más exactamente, $F = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

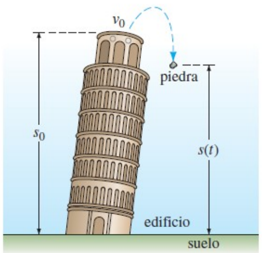
Supongamos ahora que se arroja una piedra hacia arriba desde el techo de un edificio como se muestra en la figura 1.3.4. ¿Cuál es la posición $s(t)$ de la piedra respecto al suelo al tiempo t? La aceleración de la piedra es la segunda derivada d^2s/dt^2. Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva y que no hay otra fuerza, además de la fuerza de la gravedad, que actúe sobre la piedra, entonces utilizando la segunda ley de Newton se tiene que

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g. \tag{12}$$

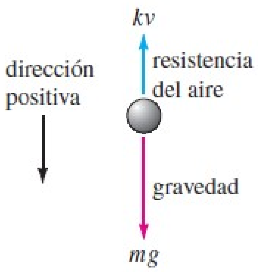
En otras palabras, la fuerza neta es simplemente el peso $F = F_1 = -W$ de la piedra cerca de la superficie de la Tierra. Recuerde que la magnitud del peso es $W = mg$, donde m es la masa del cuerpo y g es la aceleración debida a la gravedad. El signo menos en la ecuación (12) se usa porque el peso de la piedra es una fuerza dirigida hacia abajo, que es opuesta a la dirección positiva. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la roca es v_0, entonces s se determina a partir del problema con valores iniciales de segundo orden

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \quad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0. \tag{13}$$

Aunque no hemos indicado soluciones de las ecuaciones que se han formulado, observe que la ecuación 13 se puede resolver integrando dos veces respecto a t la constante $-g$. Las condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración. De la física elemental podría reconocer la solución de la ecuación (13) como la fórmula $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$.



CUERPOS EN CAÍDA Y RESISTENCIA DEL AIRE Antes del famoso experimento de la torre inclinada de Pisa de Galileo generalmente se creía que los objetos más pesados en caída libre, como una bala de cañón, caían con una aceleración mayor que los objetos ligeros como una pluma. Obviamente, una bala de cañón y una pluma cuando se dejan caer simultáneamente desde la misma altura realmente *caen* en tiempos diferentes, pero esto no es porque una bala de cañón sea más pesada. La diferencia en los tiempos es debida a la resistencia del aire. En el modelo que se presentó en la ecuación (13) se despreció la fuerza de la resistencia del aire. Bajo ciertas circunstancias, un cuerpo que cae de masa m, tal como una pluma con densidad pequeña y forma irregular, encuentra una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea v. Si en este caso, tomamos la dirección positiva dirigida hacia abajo, entonces la fuerza neta que está actuando sobre la masa está dada por $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$ del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, que se llama de **amortiguamiento viscoso,** que actúa en la dirección contraria o hacia arriba. Véase la figura 1.3.5. Ahora puesto que v está relacionada con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton será $F = ma = m\,dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ del cuerpo al tiempo t,



$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{14}$$

Aquí k es una constante positiva de proporcionalidad. Si $s(t)$ es la distancia que el cuerpo ha caído al tiempo t desde su punto inicial o de liberación, entonces $v = ds/dt$ y $a = dv/dt = d^2s/dt^2$. En términos de s, la ecuación (14) es una ecuación diferencial de segundo orden.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt} \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} = mg. \tag{15}$$

MOVIMIENTO DE UN COHETE En la sección 1.3 se vio que la ecuación diferencial de un cuerpo de masa m en caída libre cerca de la superficie de la Tierra está dada por

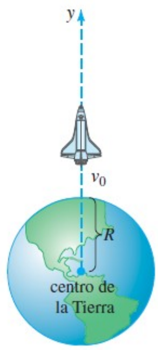
$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg, \qquad \text{o simplemente} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g,$$

donde s representa la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el objeto y se considera que la dirección positiva es hacia arriba. Dicho de otra forma, la suposición básica en este caso es que la distancia s al objeto es pequeña cuando se compara con el radio R de la Tierra; en otras palabras, la distancia y desde el centro de la Tierra al objeto es aproximadamente la misma que R. Si, por otro lado, la distancia y al objeto, por ejemplo un cohete o una sonda espacial, es grande comparada con R, entonces se combina la segunda ley de Newton del movimiento y su ley de gravitación universal para obtener una ecuación diferencial en la variable y.

Suponga que se lanza verticalmente hacia arriba un cohete desde el suelo como se ilustra en la figura 5.3.5. Si la dirección positiva es hacia arriba y se desprecia la resistencia del aire, entonces la ecuación diferencial de movimiento después de consumir el combustible es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{Mm}{y^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{M}{y^2}\,, \tag{12}$$

donde k es una constante de proporcionalidad, y es la distancia desde el centro de la Tierra al cohete, M es la masa de la Tierra y m es la masa del cohete. Para determinar la constante k, se usa el hecho de que cuando $y = R$, $kMm/R^2 = mg$ o $k = gR^2/M$. Así que la última ecuación en (12) se convierte en



$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}. \tag{13}$$

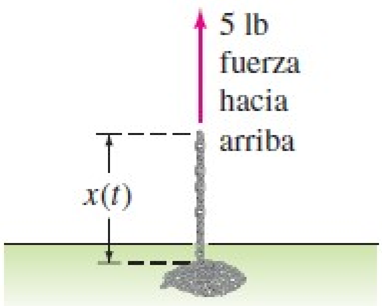
MASA VARIABLE Observe en la explicación anterior que se describe el movimiento del cohete después de que ha quemado todo su combustible, cuando supuestamente su masa m es constante. Por supuesto, durante su ascenso la masa total del cohete propulsado varía a medida que se consume el combustible. La segunda ley del movimiento, como la adelantó Newton en un principio, establece que cuando un cuerpo de masa m se mueve por un campo de fuerza con velocidad v, la rapidez de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento mv del cuerpo es igual a la fuerza aplicada o neta F que actúa sobre el cuerpo:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)\,. \tag{14}$$

Si m es constante, entonces la ecuación (14) produce la forma más familiar $F = m\,dv/dt = ma$, donde a es la aceleración. En el siguiente ejemplo se usa la forma de la segunda ley de Newton dada en la ecuación (14), en la que la masa m del cuerpo es variable.

EJEMPLO 4 Cadena jalada hacia arriba por una fuerza constante

Una cadena uniforme de 10 pies de largo se enrolla sin tensión sobre el piso. Un extremo de la cadena se jala verticalmente hacia arriba usando una fuerza constante de 5 libras. La cadena pesa 1 libra por pie. Determine la altura del extremo sobre el nivel de suelo al tiempo t. Véase la figura 5.3.6.



SOLUCIÓN Supongamos que $x = x(t)$ denota la altura del extremo de la cadena en el aire al tiempo t, $v = dx/dt$ y que la dirección positiva es hacia arriba. Para la porción de la cadena que está en el aire en el tiempo t se tienen las siguientes cantidades variables:

peso: $W = (x \text{ pie}) \cdot (1 \text{ lb/pie}) = x,$

masa: $m = W/g = x/32,$

fuerza neta: $F = 5 - W = 5 - x.$

Así de la ecuación (14) se tiene

regla del producto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{32}v\right) = 5 - x \qquad \text{o} \qquad x\frac{dv}{dt} + v\frac{dx}{dt} = 160 - 32x. \tag{15}$$

Debido a que $v = dx/dt$, la última ecuación se convierte en

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 32x = 160. \tag{16}$$

La segunda ecuación diferencial no lineal de segundo orden (16) tiene la forma $F(x, x', x'') = 0$, que es la segunda de las dos formas consideradas en la sección 4.9 que posiblemente se pueden resolver por reducción de orden. Para resolver la ecuación (16), se vuelve a (15) y se usa $v = x'$ junto con la regla de la cadena. De $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$ la segunda ecuación en (15) se puede escribir como

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 160 - 32x. \tag{17}$$

Al inspeccionar la ecuación (17) podría parecer de difícil solución, puesto que no se puede caracterizar como alguna de las ecuaciones de primer orden resueltas en el capítulo 2. Sin embargo, si se reescribe la ecuación (17) en la forma diferencial $M(x, v)dx + N(x, v)dv = 0$, se observa que, aunque la ecuación

$$(v^2 + 32x - 160)dx + xv\,dv = 0 \tag{18}$$

no es exacta, se puede transformar en una ecuación exacta al multiplicarla por un factor integrante. De $(M_y - N_x)/N = 1/x$ se ve de (13) de la sección 2.4 que un factor integrante es $e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$. Cuando la ecuación (18) se multiplica por $\mu(x) = x$, la ecuación resultante es exacta (compruebe). Identificando $\partial f/\partial x = xv^2 + 32x^2 - 160x$, $\partial f/\partial v = x^2v$ y procediendo después como en la sección 2.4, se obtiene

$$\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = c_1. \tag{19}$$

Puesto que se supuso que al principio toda la cadena está sobre el piso, se tiene $x(0) = 0$. Esta última condición aplicada a la ecuación (19) produce $c_1 = 0$. Resolviendo la ecuación algebraica $\frac{1}{2}x^2v^2 + \frac{32}{3}x^3 - 80x^2 = 0$ para $v = dx/dt > 0$, se obtiene otra ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{160 - \frac{64}{3}x}.$$

La última ecuación se puede resolver por separación de variables. Se debe comprobar que

$$-\frac{3}{32}\left(160-\frac{64}{3}x\right)^{1/2}=t+c_2. \tag{20}$$

Esta vez la condición inicial $x(0) = 0$ indica que $c_2 = -3\sqrt{10}/8$. Por último, elevando al cuadrado ambos lados de (20) y despejando x, llegamos al resultado deseado,

$$x(t)=\frac{15}{2}-\frac{15}{2}\left(1-\frac{4\sqrt{10}}{15}t\right)^2. \tag{21}$$

La gráfica de la ecuación 21 que se presenta en la figura 5.3.7 no se debe, con bases físicas, aceptar tal cual. Véase el problema 15 de los ejercicios 5.3. ■

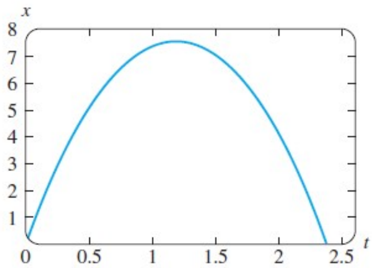


FIGURA 5.3.7 Gráfica de (21) para $x(t) \geq 0$.