# Electrocardiogramme

Rémi HERNANDEZ
Romuald MAKOSSO NOMBO
Amandine CAUT
Célia BOULTABI

Tuteur : Y.Courdiere

Université de Bordeaux

6 décembre 2017

# Table des matières

# Chapitre 1

# Étude théorique

L'électrophysiologie permet de modéliser la propagation de différentes ondes dans le cœur.
Pour cela nous allons utiliser cette équation :

$$\partial_t u(x,t) - \partial_x(a(x)\partial u(x,t)) = f(t,x)$$

Afin de résoudre cette équation il faut certaines conditions initiales et aux bords. Nos recherches dans différents livres et articles nous permettent alors de déduire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x(a(x)\partial u(x,t)) = f(t,x) \\ a(x)\partial_x u(x,t) = 0 \ sur \ \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \ t \in [0,T] \end{cases}$$

Il est nécessaire que $a(x) > 0$, afin que le phénomène ne soit pas réversible ! En effet, on ne peut inverser la diffusion de la chaleur.
On remarque par ailleurs que l'on a l'équation chaleur pour le cas $a(x) = 1$. On résoudra cette équation dans le chapitre 2.

2) Situation où l'on peut calculer des solutions analytiques :
dans le cas $(a(x) = 1)$ on a l'équation de la chaleur. De plus avec nos conditions aux bords, ie les dérivées sont nulles, on a deux cas, $f(x) \neq 0$ ou $f(x) = 0$. Ici, on prend le cas où $f(x) = 0$ :

la solution est la fonction u définie par :

$$u(x,t) = cos(k\pi x)exp(-k^2\pi^2 t)$$

Résolution du cas :
Nous allons résoudre le système par la méthode de séparation des variables.
On pose u(x,t) = f(x)g(t)
de ce fait :

$$\partial_t u(x,t) = f(x)g'(t)$$

et

$$\partial_{xx}^2 u(x,t) = f(x)''g(t)$$

On obtient :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = c$$

Et donc : $g(t) = \lambda exp(ct)$ avec c $<0$ sinon la solution explose ce qui est impossible.

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = c \Leftrightarrow f''(x) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = Pcos(x\sqrt{|c|}) + Qsin(x\sqrt{|c|})$$

par compilation on a alors,

$$u(x,t) = \lambda exp(ct)(Pcos(x\sqrt{|c|}) + Qsin(x\sqrt{|c|}))$$

or $\partial_x u(x,t) = 0 \ sur \ \partial\Omega$
donc on dérive l'expression et on remplace :

$$-P\sqrt{|c|}sin(x\sqrt{|c|}) + Q\sqrt{|c|}sin(x\sqrt{|c|}) = 0$$

quand $x = 0$ on a $q = 0$ et donc :

$$-P\sqrt{|c|}sin(x\sqrt{|c|}) = 0 \Rightarrow \sqrt{|c|} = k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

# Chapitre 2

# programmation dans un cas simplifié

## 2.1 Schémas numériques pour la résolution

Pour la résolution de cette équation, on utilise un maillage uniforme avec un pas de $\Delta t$ en temps et $\Delta x$ en espace.
La dérivée seconde en espace est approchée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \tag{2.1}$$

### 2.1.1 Euler explicite

On approche $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ par :

$$\frac{u(x_i, t_j + 1) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

On obtient le schéma suivant :

$$\frac{u(x_i, t_j + 1) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} = f(x_i, t_j) \tag{2.3}$$

Pour la suite on écrira $u_i^j$ à la place de $u(x_i, t_j)$.

Aussi on utilisera la notation : $U^j = \begin{pmatrix} u_0^j \\ u_1^j \\ \vdots \\ u_N^j \end{pmatrix}$

Le schéma s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{U^{j+1} - U^j}{\Delta t} + A_{\Delta x} U^j = F^j \tag{2.4}$$

Avec :

$$A_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0\ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Et on a $F^j = \begin{pmatrix} f(x_1, t_j) \\ f(x_2, t_j) \\ \vdots \\ f(x_N, t_j) \end{pmatrix}$

$$f(x+\Delta x, t) = f(x,t) + \Delta x \partial_x f(x,t) + \frac{(\Delta x)^2}{2}\partial^2_{xx} f(x,t) + \theta(\Delta x^3)$$

$$f(x-\Delta x, t) = f(x,t) - \Delta x \partial_x f(x,t) + \frac{(\Delta x)^2}{2}\partial^2_{xx} f(x,t) + \theta(\Delta x^3)$$

$$f(x+\Delta x, t) - f(x-\Delta x, t) = 2\Delta x \partial_x f(x,t) + \theta(\Delta x^3)$$

$$\frac{f(x+\Delta x, t) - f(x-\Delta x, t)}{2\Delta x} = \partial_x f(x,t) + \theta(\Delta x^2)$$

$$\partial_x f^n_k = \frac{f^n_{k+1} - f^n_{k-1}}{2\Delta x}$$

$$\partial_x(a(x)\partial u(x,t)) = \frac{1}{\Delta x}(a_{k+\frac{1}{2}}\partial_x u^n_{k+\frac{1}{2}} - a_{k-\frac{1}{2}}\partial_x u^n_{k-\frac{1}{2}})$$

$$\partial_x(a(x)\partial u(x,t))^n_k = \frac{1}{\Delta x}(a_{k+\frac{1}{2}}(\frac{u^n_{k+1} - u^n_k}{\Delta x}) - a_{k-\frac{1}{2}}(\frac{u^n_k - u^n_{k-1}}{\Delta x}))$$

$$\partial_x(a(x)\partial u(x,t)) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(a_{k+\frac{1}{2}}u^n_{k+1} - (a_{k+\frac{1}{2}} + a_{k-\frac{1}{2}})u^n_k + a_{k-\frac{1}{2}}u^n_{k-1})$$

de ce fait on a le système suivant :

$n \in [0, J-1]$ et $k \in [1, N-1]$

$$\begin{cases} \frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2}(a_{k+\frac{1}{2}}u^n_{k+1} - (a_{k+\frac{1}{2}} + a_{k-\frac{1}{2}})u^n_k + a_{k-\frac{1}{2}}u^n_{k-1}) = f^n_k \\ a(x)\partial_x u^n_0 = 0 \leftrightarrow \partial_x u^n_0 = 0 \\ \partial_x u^n_N = 0 \\ a_N \partial_x u^n_N = 0 \end{cases}$$

$$u_k^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(a_{k+\frac{1}{2}}u^n_{k+1} - (a_{k+\frac{1}{2}} + a_{k-\frac{1}{2}})u^n_k + a_{k-\frac{1}{2}}u^n_{k-1}) + f^n_k + u^n_k$$

$$u_k^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}a_{k-\frac{1}{2}}u^n_{k-1} + (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(a_{k-\frac{1}{2}} + a_{k+\frac{1}{2}}))u^n_k + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}a_{k+\frac{1}{2}}u^n_{k+1} + f^n_k$$

$$\partial_x(a(x)\partial u(x,t))^n_0 = \frac{2}{\Delta x}a_{\frac{1}{2}}\partial_x u^n_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Delta x}a_{\frac{1}{2}}\frac{u^n_1 - u^n_0}{\Delta x}$$

$$\partial_x(a(x)\partial u(x,t))^n_N = 0 - \frac{a_{N-\frac{1}{2}}\partial_x u^n_{N-\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\frac{2}{\Delta x}a_{N-\frac{1}{2}}\frac{u^n_N - u^n_{N-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^{n_0}}{\Delta x} - \frac{2}{(\Delta x)^2}a_{N-\frac{1}{2}}(\frac{u^n_N - u^n_{N-1}}{\Delta x}) = f^n_k$$

pour k= 0 :

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^{n_0}}{\Delta x} - \frac{2}{(\Delta x)^2}a_{\frac{1}{2}}(u^n_1 - u^n_0) = f^n_0$$

## 2.2 Méthodes de travail

Nous allons présenter dans cette partie comment nous avons travaillé en groupe afin de résoudre le projet.

Le problème rencontré est la différence de niveau en informatique au sein du groupe.

Afin de surmonter ce problème, il a été décidé que nous résoudrons le projet par compétences. La partie programmation a été résolu par ceux qui avaient des compétences en informatiques. La partie théorique, comme la résolution de l'équation de la chaleur, et l'écriture du rapport a été élaboré par ceux qui ne savaient pas programmer. Il nous a paru clair que cette méthode était la plus efficace au niveau gain de temps. Le problème pouvant être la répartition de la charge de travail qui était affecté par les lacunes en informatique de certains membres du groupe.

## 2.3 Modèle

Le système linéaire du minimal model :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bigtriangledown(D \bigtriangledown U) - (J_{fi} + J_{so} + Jsi) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{(1 - H(u - \theta_v)(v_\infty - v))}{\tau_v^-} - \frac{H(u - \theta_v)v}{\theta_v^+} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{(1 - H(u - \theta_w)(w_\infty - w))}{\tau_w^-} - \frac{H(u - \theta_w)w}{\theta_w^+} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\frac{1+tanh(k_s(u-u_s)}{2-s}}{\tau_s} \tag{2.9}$$

Avec :

$J_si = \frac{-vH(u-\theta_v)(u-\theta_v)(u_u-u)}{\tau_{fi}}$

$J_so = \frac{\frac{u-u_0}{1-H(U-\theta_w)}}{\tau_{so}}$

$J_si = \frac{-H(u-\theta_w)ws}{\tau_{si}}$