>>> IF013 - Fundamentos Teóricos de Informática
>>> Licenciatura de Sistemas - UNPSJB - Sede Trelew

Name: Celia Cintas[†], Pablo Navarro[‡], Samuel Almonacid[§]
Date: August 7, 2017

[†] cintas@cenpat-conicet.gob.ar, cintas.celia@gmail.com, @RTFMCelia
[‡] pnavarro@cenpat-conicet.gob.ar, pablo1n7@gmail.com
[§] almonacid@cenpat-conicet.gob.ar, almonacid.samuel.tw@gmail.com

>>> Unidad 1

1. Autómatas finitos. Reconocedores. Traductores. Diagrama de estados. Autómatas finitos no deterministas.
2. Equivalencia entre autómatas finitos deterministas y no deterministas. Morfismos sobre autómatas. Autómata Cociente.
3. Propiedades de lenguajes aceptados por Autómatas Finitos. Expresiones y lenguajes regulares.
4. Propiedades algebraicas de los lenguajes regulares. Equivalencia entre autómatas finitos y lenguajes regulares.
5. Teorema de Kleene. Gramáticas regulares. Relación entre gramáticas regulares y autómatas finitos.
6. Usos y aplicaciones de los autómatas finitos y lenguajes regulares.

>>> Autómatas Finitos No Determinísticos

Hay dos formas posibles de entender cómo funciona un AFND.

* Cuando hay varias alternativas, el AFND elige alguna de ellas.
* Imaginarse que el AFND está en varios estados a la vez. Si luego de leer la cadena puede estar en un estado final, acepta la cadena.

En cualquier caso, es bueno por un rato no pensar en cómo implementar un AFND.

>>> Autómatas Finitos No Determinísticos

Definición

Un AFND es la 5-upla $M = (K, \Sigma, \delta, S, F)$, donde K, Σ, δ y F tienen el mismo significado que en AFD, pero $\delta : K \times \Sigma \to P(K)$.

Definición

La función de transición se puede generalizar para que acepte cadenas en Σ, es decir $\hat{\delta} : K \times \Sigma^* \to P(K)$.

$$\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$$
$$\hat{\delta}(q, xa) = \{p : \exists r \in \hat{\delta}(q, x) | p \in \delta(r, a)\} \text{ con } x \in \Sigma^* \text{ y } a \in \Sigma$$

>>> Autómatas Finitos No Determinísticos (Cont.)

Definición

Se dice que una cadena x es aceptada por un AFND $M = (K, \Sigma, \delta, S, F)$ si y solo si $\delta(S, x) \cap F \neq \emptyset$

Definición

Dado un AFND $M = (K, \Sigma, \delta, S, F)$, el lenguaje aceptado por M, el cual se denotará $L(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M y se define como:

$$L(M) = \{x : \delta(S, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

>>> Autómatas Finitos No Determinísticos (Cont.)

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y cadenas en conjuntos de estados, es decir:

Definición

Función de transición $\delta : P(K) \times \Sigma^* \to P(K)$, dada por:

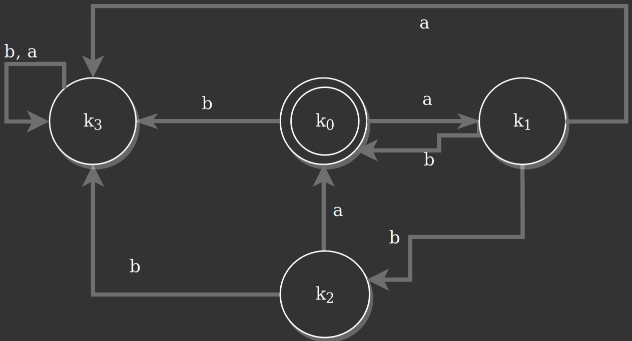
$$\delta(P, x) = \bigcup_{k \in P} \delta(k, x)$$

Para todo AFD existe un AFND y para cada AFND existe un AFD equivalente.

Ejemplo: AFND que acepte el lenguaje de las cadenas formadas por concatenación de 0 o más cadenas de ab o aba (sin importar el orden).

$$M = (K, \Sigma, \delta, S, F)$$
$$K = \{k_0, k_1, k_2, k_3\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$F = \{k_0\}$$
$$S = k_0$$

δ	a	b
k_0	$\{k_1\}$	$\{k_3\}$
k_1	$\{k_3\}$	$\{k_0, k_2\}$
k_2	$\{k_0\}$	$\{k_3\}$
k_3	$\{k_3\}$	$\{k_3\}$

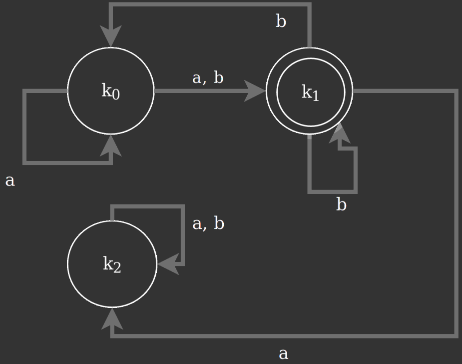


>>> Conversión de AFND a AFD

Sea un AFND $M = (K, \Sigma, \delta, S, F)$ donde:

$$K = \{k_0, k_1, k_2\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$F = \{k_1\}$$
$$S = k_0$$

δ	a	b
k_0	$\{k_0, k_1\}$	$\{k_1\}$
k_1	$\{k_2\}$	$\{k_0, k_1\}$
k_2	$\{k_2\}$	$\{k_2\}$



Obtengamos un AFD M' que reconozca el mismo lenguaje utilizando el teorema anterior.

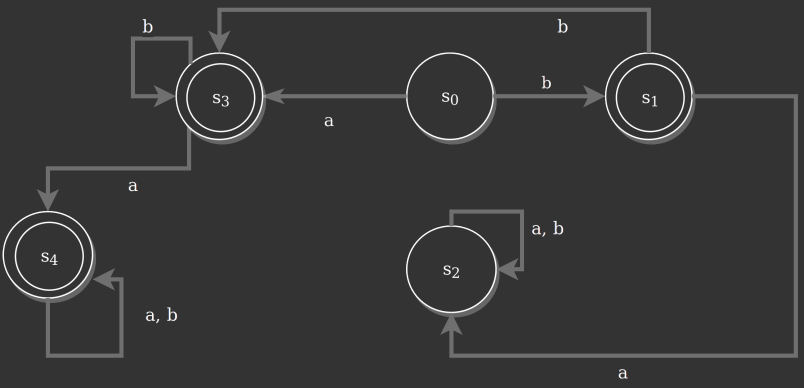
>>> Conversión de AFND a AFD (cont.)

Construyamos un AFD $M' = (K', \Sigma', \delta', S', F')$ donde:

$$K' = \{\{k_0\}, \{k_1\}, \{k_2\}, \{k_0, k_1\}, \{k_0, k_1, k_2\}\}$$
$$\Sigma' = \Sigma$$
$$F' = \{\{k_1\}, \{k_0, k_1\}, \{k_0, k_1, k_2\}\}$$
$$S' = \{k_0\}$$

δ	a	b	Aceptador
$s_0 = \{k_0\}$	$\{k_0, k_1\}$	$\{k_1\}$	0
$s_1 = \{k_1\}$	$\{k_2\}$	$\{k_0, k_1\}$	1
$s_2 = \{k_2\}$	$\{k_2\}$	$\{k_2\}$	0
$s_3 = \{k_0, k_1\}$	$\{k_0, k_1, k_2\}$	$\{k_0, k_1\}$	1
$s_4 = \{k_0, k_1, k_2\}$	$\{k_0, k_1, k_2\}$	$\{k_0, k_1, k_2\}$	1

>>> Conversión de AFND a AFD (cont.)



>>> Equivalencia entre AFD y AFND

Teorema

Sea L un lenguaje aceptado por un autómata finito no determinista, entonces existe un autómata finito determinista que también acepta L.

Demostración

Sea $M = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ un autómata finito no determinista que acepta L. Para probar el teorema debemos probar:

* que podemos construir M' determinista, a partir de M.
* M' acepta el mismo lenguaje que M.

>>> Equivalencia entre AFD y AFND

Demostración

Construimos un autómata finito determinista $M' = (S', \Sigma, \delta', s'_0, F')$ tal que :

* $S' \subseteq P(S)$. Los estados de M' serán identificados con subconjuntos del conjunto de estados de M. Notación: un elemento de S' se notará como $\langle s_1, s_2, \cdots s_i \rangle$ donde $\{s_1, s_2, \cdots, s_i\} \subseteq S$.
* $F' = \{s'_i \in S' | s'_i \supseteq \{s_j\} \; y \; s_j \in F\}$. F' es el conjunto de todos los estados de S' que contengan por lo menos un elemento de F (es decir, un estado aceptador de M).
* Σ es el alfabeto de entrada.
* $s'_0 = \langle s_0 \rangle = \{s_0\}$. s'_0 será el conjunto que contiene como único estado al inicial de M.

>>> Conversión de AFND a AFD (cont.)

Demostración

la función δ' es la extensión de δ a conjuntos:
$\delta'(\langle s_1, s_2, \cdots, s_i \rangle, a) = \langle p_1, p_2, \cdots, p_j \rangle$ si y solo si $\delta(\{s_1, s_2, \cdots, s_i\}, a) = \{p_1, p_2, \cdots, p_j\}$.

$\delta'(\zeta, a) = \bigcup_{i=1}^{n} \delta(s_i, a)$, donde $\zeta = \langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle$

Con esto tenemos definido M' a partir de M.

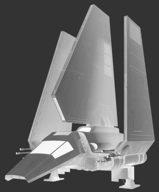
>>> Conversión de AFND a AFD (cont.)

Demostración

Ahora necesitamos probar que $\delta'(s'_0, x) = \langle q_1, q_2, \cdots, q_i \rangle$ si y solo si $\delta(s_0, x) = \{q_1, q_2, \cdots, q_i\}$ para toda cadena x.

* base inductiva: $long(x) = 0$, $x = \lambda$ y la demostración trivial es que $s'_0 = \langle s_0 \rangle$.
* paso inductivo: $long(x) = l$ es decir $\delta'(s'_0, x) = \langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ si y solo si $\delta(s_0, x) = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, sea $a \in \Sigma$, debemos probar que vale para $long(xa) = l + 1$.
  Por definición de δ':
  $\delta'(s'_0, xa) = \delta'(\delta'(s'_0, x), a)$
  por hipótesis de inducción, tenemos:
  $\delta'(s'_0, x) = \langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle$ si y solo si
  $\delta(s_0, x) = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, reemplazando la definición anterior tenemos que :
  $\delta'(\langle p_1, \cdots, p_n \rangle, a) = \langle q_1, \cdots, q_k \rangle$ si y solo si
  $\delta'(\{p_1, \cdots, p_n\}, a) = \{q_1, \cdots, q_k\}$

>>> Autómatas Finitos $AFND - \lambda$



Definición

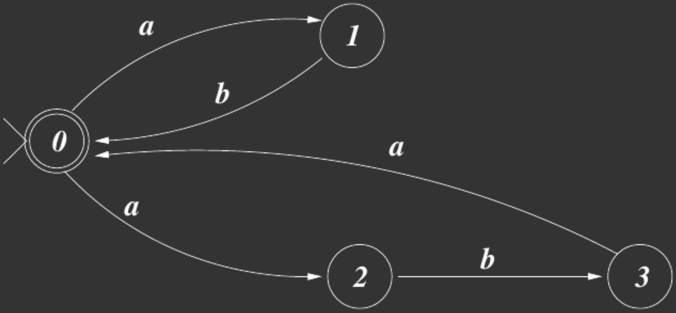
Un Autómata Finito No Deterministico con transiciones λ es una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Donde Q, Σ, q_0, F tienen el mismo significado que en AFND pero δ se define como:

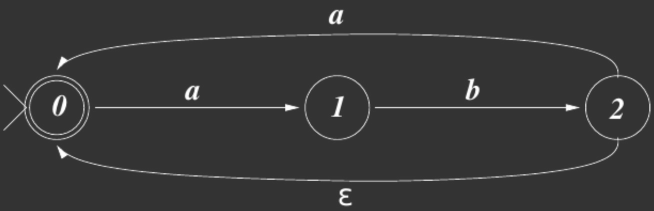
$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \lambda) \to P(Q)$$

Definición

La Clausura-λ de un estado q, se denota como $Cl_\lambda(q)$ es el conjunto de estados alcanzables desde q con transiciones λ. El estado q pertenece a su clausura.

>>> Autómatas Finitos $AFND - \lambda$ (Cont.)





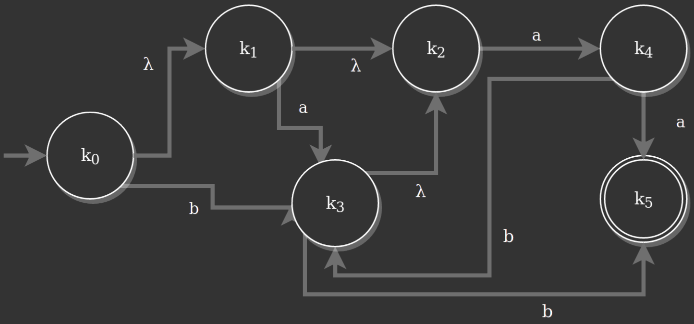
>>> Conversión Autómatas Finitos $AFND - \lambda$ a AFND

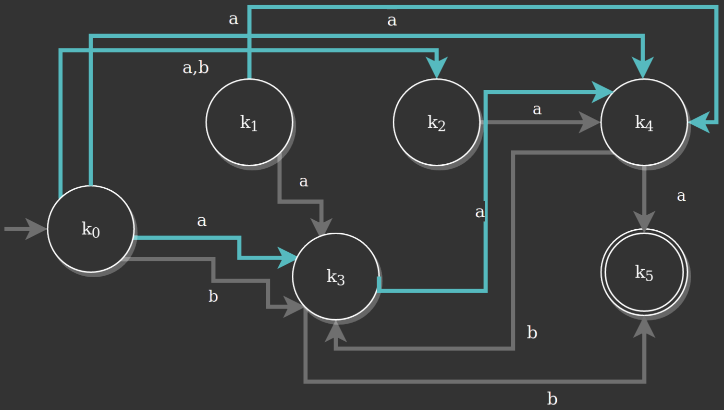
Dado un AFND-λ es posible construir un AFND equivalente sin transiciones vacías que reconoce el mismo lenguaje.

* Estados importantes del AFND$-\lambda$ y estado inicial del AFND$-\lambda$.
* Σ de AFND $=$ Σ de AFND$-\lambda$.
* Estado inicial de AFND = AFND$-\lambda$.
* $\delta(e_i, x) = e_k$ siendo e_i, e_k estados importantes.
* Estados finales del AFND : estados finales del AFND$-\lambda$ y todos los estados e_i del AFND$-\lambda$ para los cuales existe un camino con transiciones λ, en el AFND$-\lambda$, a algún estado final del AFND$-\lambda$.

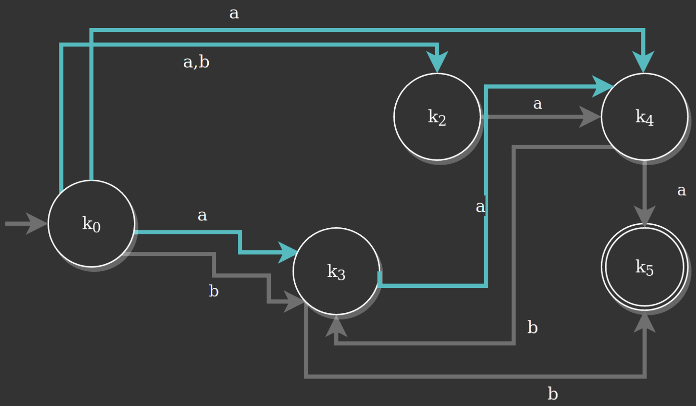
>>> Conversión Autómatas Finitos $AFND - \lambda$ a AFND (Cont.)

Cómo sería este Autómata sin transiciones λ ?




a
a
a,b
k1
k2
a
k4
a
a
a
k0
a
k3
k5
b
b
b

>>> Conversión Autómatas Finitos $AFND - \lambda$ a AFND (Cont.)



>>> Homomorfismos sobre AFD

Definición

Sean $M = (S, \Sigma, s_0, \delta, f_0)$ y $M' = (S', \Sigma, s'_0, \delta', f'_0)$ dos AFD reconocedores.

Un homomorfismo g del autómata finito M al autómata finito M' es una función $g : S \to S'$ tal que para cualquier $i \in \Sigma$ y $s \in S$:

$$\begin{aligned} g(s_0) &= s'_0 \\ g(\delta(s,i)) &= \delta'(g(s), i) \\ f_0(s) &= f'_0(g(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} S \times \Sigma \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"'] & S' \times \Sigma \arrow[d, "\delta'"] \\ S \arrow[r, "g"'] & S' \end{tikzcd}$$

Cómo esta definido f_0?

>>> Autómata Cociente

Definición

Sean $M = (S, \Sigma, s_0, \delta, f_0)$ y M' dos AFR y g un homomorfismo entre los autómatas M y M'. Denominaremos Autómata cociente $M/g = (S'', \Sigma, [s_0], \delta'', f_0'')$ al AFR tal que:

* S'' es el conjunto de estados de M/g, tal que cada uno es una clase de equivalencia $[s]$ de estados de M determinada por g. Todos los elementos de $[s]$ tienen asociado el mismo estado en M y la misma salida.
* Σ el alfabeto de entrada de M.
* El estado inicial $[s_0]$ es la clase del estado inicial de M.
* f_0'' es la función de salida.
* δ'' es la función de próximo estado definida mediante $\delta([s_j], i) = [\delta(s_j, i)]$.

Definición

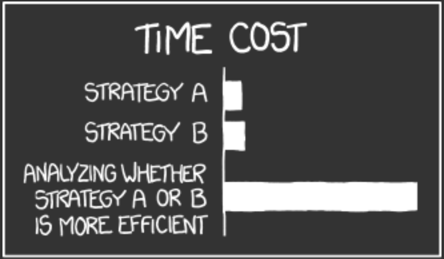
Dado un autómata finito $M = (S, \Sigma, s_0, \delta, f_0)$ y un estado $s_i \in S$ tal que $s_i \neq s_0$, se dice que si es un estado inalcanzable de M si no existe una cadena $w \in \Sigma$ tal que $\delta(s_0, w) = s_i$.

$$M = (S, \Sigma, \delta, s_0, f_0)$$
$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

δ	0	1	f_0
s_0	s_1	s_3	0
s_1	s_3	s_0	0
s_2	s_1	s_3	1
s_0	s_0	s_1	1

>>> Minimización

El objetivo será aprender a establecer un homomorfismo entre dos AFD M y M', lo cual a su vez nos permitirá definir un método para simplificar autómatas. La idea es que dado un AF M, podamos estudiar si existe un AF M' que realize lo mismo que M pero tenga menos estados.



THE REASON I AM SO INEFFICIENT

>>> Algoritmo de Minimización

Entrada: un AF $M = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ determinista completo.

Salida: el AF M minimizado.

1. Eliminar del conjunto de estados S a los estados inalcanzables y llamar a este nuevo conjunto T .
2. Particionar T en dos clases formadas por los estados $0-$equivalentes. Por tratarse de un AF reconocedor tendremos una clase de estados aceptadores y otra de estados no aceptadore
3. Asumir $k = 0$.
4. Repetir:
   * Determinar las clases $(k+1)-$equivalentes como un refinamiento de las k equivalentes, es decir: s_i, s_j son $(k+1)-$equivalentes si y solo si s_i, s_j son $k-$equivalentes y $\delta(s_i, i)$, $\delta(s_j, i)$ son $k-$equivalentes, para todo $i \in \Sigma$.
   * Incrementar k en 1. hasta que las clases $(k+1)-$equivalentes sean iguales a las $k-$equivalentes.
5. Usar las clases $k-$equivalentes determinadas para definir el autómata cociente de M.

>>> Minimización

$$M = (S, \Sigma, \delta, s_0, f_0)$$
$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

δ	0	1	f_0
s_0	s_2	s_3	0
s_1	s_3	s_2	1
s_2	s_0	s_4	0
s_3	s_1	s_5	1
s_4	s_6	s_5	1
s_5	s_2	s_0	0
s_6	s_4	s_0	1

$T = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$
M tiene estados inalcanzables? ($T = S$)

>>> Minimización (Cont.)

$$
\begin{gathered}
K_0 = \{s_0, s_2, s_5\}\{s_1, s_3, s_4, s_6\} \\
K_1 = \{s_0, s_2\}\{s_5\}\{s_1, s_3, s_4, s_6\} \\
K_2 = \{s_0, s_2\}\{s_5\}\{s_1, s_6\}\{, s_3, s_4\} \\
K_3 = \{s_0, s_2\}\{s_5\}\{s_1, s_6\}\{, s_3, s_4\}
\end{gathered}
$$

>>> Método de Thompson: $ER \to AFND - \lambda$

Definición

La función Th convierte ERs en AFNDs según las siguientes reglas:

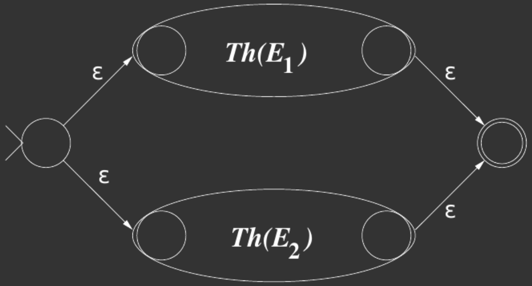
* Para $c \in \Sigma$, $Th(c)$:

* Para $Th(\emptyset)$:

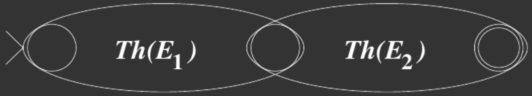
>>> Método de Thompson: $\boldsymbol{ER \rightarrow AFND - \lambda}$ (Cont.)

Definición

* Para $Th(E_1|E_2)$:



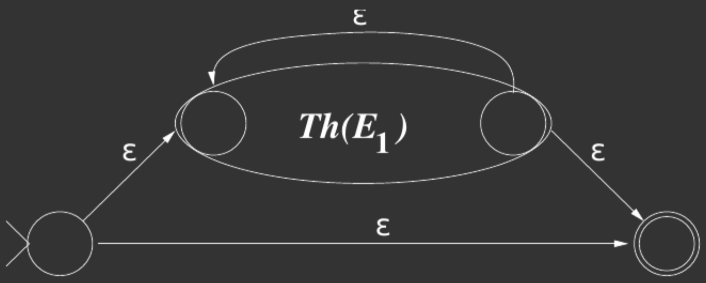
* Para $Th(E_1.E_2)$:



>>> Método de Thompson: $ER \to AFND - \lambda$ (Cont.)

Definición

* $Th(E_1^*)$:



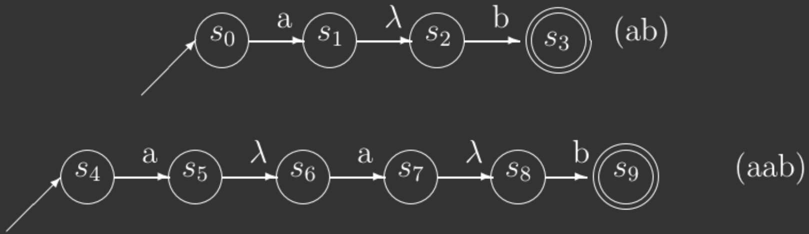
* $Th((E_1)) = Th(E_1)$

>>> Método de Thompson: $ER \rightarrow AFND - \lambda$ (Cont.)

$$(ab|aab)^*$$

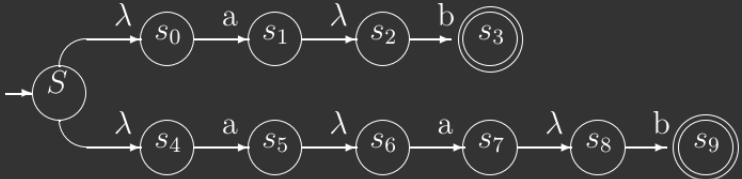
* a, b:

* concatenación para obtener ab y aab:

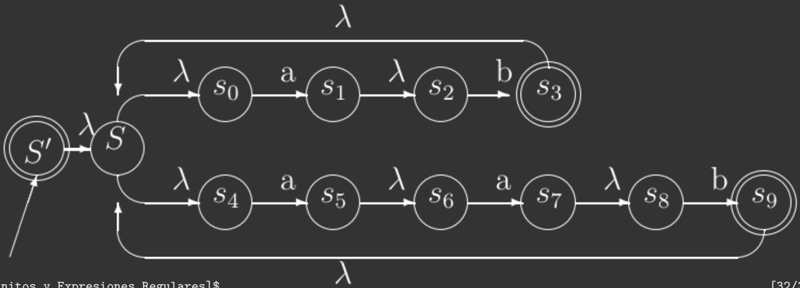


$$(ab|aab)^*$$

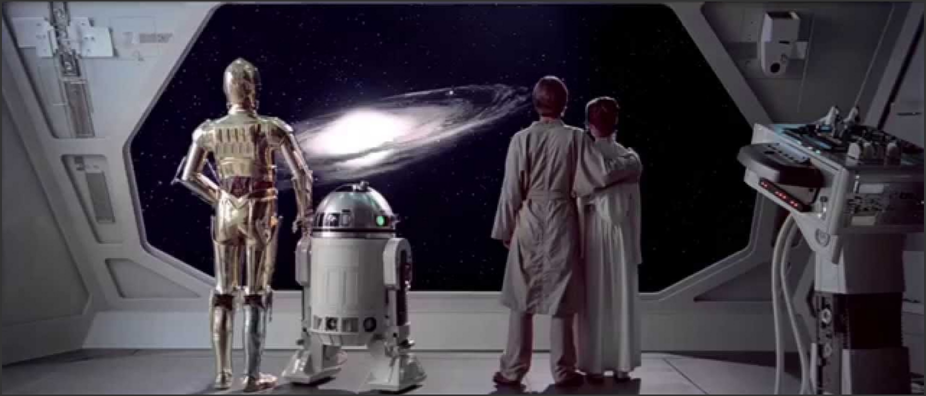
* unión para obtener $(ab + aab)$:



* estrella de Kleene para obtener $(ab + aab)^*$



>>> Gracias!



Bibliografía

1. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation - Hopcroft et. al 2007 (3er ed.)
2. Teoría de la Computación - Gonzalo Navarro 2011.
3. Fundamentos de Cs. de la Computación - Juan Carlos Augusto 1995.