T. C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

LİSANS TEZİ

EĞRİLER TEORİSİ

HAZIRLAYAN

Yaren ÇELİK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

Haziran 2018

GİRİŞ

Diferansiyel Geometrinin belki de en ilginç ve onu iyi temsil eden çalışma alanı eğriler teorisidir. Eğrilerin yerel özelliklerinin incelenmesi farklı ve önemli sonuçlar verir. Bu teorinin lineer ve non-lineer diferansiyel denklemler ve fizikte çok farklı uygulamaları vardır. Eğriler teorisinin en fazla kullanılan ve doğal yapısını temsil eden konularının başında ise Frenet denklemleri gelmektedir. Bu denklemler geometride oldukça elit bir statüde olup birçok faklı alanda kullanım yerine sahiptir. Bu formüller ilk önce 1852 yılında Frenet tarafından bulunmuş ve yayınlanmıştır. Ondan habersiz olarak Serret, 1851 yılında aynı formülleri hesaplamıştır. Bundan dolayı bu formüllere bugün her ikisinin adı verilerek Frenet-Serret formüleri olarak adlandırılır. IR^n deki herhangi Frenet eğrisi ile bağlantılı olan dikkate değer iki eğri vardır. Bu eğrilerin ilki; küresel teğet göstergesidir. Bir Frenet eğrisinin küresel teğet göstergesinin yay uzunluğu yardımıyla, bu Frenet eğrisinin yeni parametrizosyonu, eğrinin özelliklerinin incelenmesinde kullanılır.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanması boyunca bilgilerini ve desteklerini esirgemeyen, bilimsel disiplin ve bakış açısı kazanmamı sağlayan değerli danışmanım Prof.Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'A lisans eğitimim süresince bana emeği geçen bütün Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim.

Her türlü imkânı sağlayan, sevgilerini ve güvenlerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yaren ÇELİK

Haziran, 2018

İÇİNDEKİLER

İçindekiler

1.EĞRİLER TEORİSİ

1.1. EĞRİ

Tanım 1.1.1: I , IR nin açık bir aralığı olsun.

$$\alpha:\ I \subset IR \rightarrow E^n$$
$$t \rightarrow \alpha(t)$$

fonksiyonu diferansiyellenebilir ve regüler bir fonksiyon olmak üzere $\alpha(t) \subset E^n$ cümlesine E^n de diferansiyellenebilir bir eğri denir. $I \subseteq IR$ cümlesine eğrinin parametre aralığı, $t \in I$ değişkeni eğrinin parametreleri denir.

$$\alpha : I \subseteq IR \rightarrow IR$$
$$t \rightarrow \alpha_i(t) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t))$ fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir.

E^n in koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ise eğrinin koordinatlarını bulalım.

$$\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t)\big)$$

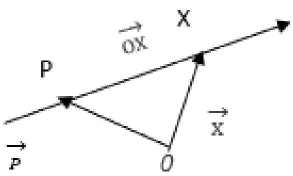
diferansiyellenebilir bir eğri ise $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \cdots, \alpha_n'(t))$ vektörüne α eğrisinin α(t) noktasındaki teğet (hız) vektörü denir.

$\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0 = (0,0,\cdots,0)$ ise α eğrisine regüler eğri denir. Eğer $\alpha(t)$ noktasınan α eğrisi singülerdir denir.

Örnek 1.1.1: (Doğru)

$$\alpha:\ IR \rightarrow E^n$$
$$t \rightarrow \alpha(t) = p_1 + tv_{1,} p_2 + tv_2 \cdots, p_n + tv_n$$

şeklinde tanımlı eğriye P = $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots v_n)$ olan bir doğru denklemidir.



E^n de P noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{v}$ olan doğru d olmak üzere d üzerindeki X temsili nokta için $\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$ veya $\vec{x} = P + t\vec{v}$ yazılabilir.

$$\alpha:\ IR \rightarrow E^n$$
$$t \rightarrow \alpha(t) = p_1 + tv_{1,} p_2 + tv_2 \cdots, p_n + tv_n$$

şeklindedir.

Örnek 1.1.2: (Çember)

$\mathrm{I} = \{t|0 \leq t \leq 2\pi\}$ olmak üzere,

$$\alpha : \mathrm{I} \subset \mathrm{IR} \rightarrow E^2$$
$$\mathrm{t} \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (cost\,, sint\,)$$

şeklinde tanımlı eğri E^2 de bir çemberdir.

Örnek 1.1.3: (Elips)

$\mathrm{I} = \{t|0 \leq t \leq 2\pi\}$ olmak üzere,

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^2$$
$$\mathrm{t} \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (cost\,, sint\,); a \neq b$$

şeklinde tanım tanımlı E^2 de bir elipstir.

Örnek 1.1.4: (Helis)

$$\alpha : \mathrm{IR} \rightarrow IR^2$$
$$\mathrm{t} \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (cost\,, sint, t\,)$$

diferansiyellenebilir bir eğridir.

$$\alpha'(\mathrm{t}) = (-\mathrm{sint}, \mathrm{cost}, 1)$$

Dolayısıyla $\forall t \in I$ için $\alpha'(\mathrm{t}) \neq 0$ regülerdir.

Örnek 1.1.5: (Cusp (Uç, Sivri, Çıkıntı))

$$\alpha : \mathrm{IR} \rightarrow IR^2$$
$$\mathrm{t} \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (t^3\,, t^2\,)$$

Diferansiyellenebilir bir eğri;

$\Rightarrow$ $\alpha'(\mathrm{t}) = (3t^2, 2t)$ olmak üzere $\mathrm{t} = 0$ için $\alpha'(0)$ noktasında $\alpha'(0) = (0{,}0)$ $\mathrm{t} = 0$ anında α eğrisi singülerdir.

Örnek 1.1.6: (Düğüm)

$$\alpha : \mathrm{IR} \rightarrow IR^2$$
$$\mathrm{t} \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (t^3 - t\,, t^2 - 1\,)$$

diferansiyellenebilir bir eğri

$$\Rightarrow \alpha'(\mathrm{t}) = (3t^2 - 1\,, 2t)$$

$\forall t \in I$ için $\alpha'(\mathrm{t}) \neq 0$ ve α regülerdir.

$\Rightarrow$ $\alpha(-1) = \alpha(1) = (0{,}0)$ dır.

Tanım 1.1.2: $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow IR^3$ bir eğri olsun. α fonksiyonu periyodik ise eğriye periyodik eğri denir. Yani $\alpha(\mathrm{t} + \mathrm{r}) = \alpha\,(\mathrm{t})$ olacak şekilde bir $\mathrm{T} > 0$ varsa α eğrisine periyodiktir denir. Bu özelliği sağlayan en küçük T değerine eğrinin periyodu denir.

Örnek 1.1.7: $\alpha(\mathrm{t}) = (\mathrm{acost}, \mathrm{asint}, 0)$ a> 0 eğrisi için T = 2π için α (t + 2π) = α(t) olduğundan α eğrisinin periyodu T= 2πdir.

Sonuç 1.1: $\alpha(\mathrm{t} + \mathrm{r}) = \alpha\,(\mathrm{t})$ ise eğri kendini keser. $\mathrm{I} = [\,O, T]$ olmak üzere eğri T periyotlu bir eğri ise $\alpha(0) = \alpha(\mathrm{T})$ olup eğri için periyodik olma kapalı anlamına gelir.

Tanım 1.1.3: α (I) ⊂ E^n eğrisi

$$\alpha : I \subset IR \rightarrow E^n$$

fonksiyonu ile verilsin. α eğrisinin koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t))$ dir.

$$\frac{d\alpha}{dx}|_t = (\frac{d\alpha_1}{dx}|_t, \frac{d\alpha_2}{dx}|_t, \cdots, \frac{d\alpha_n}{dx}|_t)$$

vektörüne $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörüdür.

Yani; $(\alpha'(t), \alpha(t)) = \alpha'(t)|_t \in T_{E^n}$

Örnek 1.1.8:

a) $\alpha : I \rightarrow E^3$

$t \rightarrow \alpha(t) = (t, t^2, 0)$ eğrisinin hız vektörünü bulunuz.

$$\alpha(t) = (t, t^2, 0)$$

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 0)|_t$$

b) $\alpha : I \rightarrow E^3$, $t \rightarrow \alpha(t) = (acost, bsint, bt)$ eğrisinin hız vektörünü bulunuz.

$$\alpha(t) = (acost, bsint, bt)$$

$$\alpha'(t) = (-asint, bcost, b)|_t$$

Tanım 1.1.4: E^n de bir α eğrisi verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow IR$$

$$t \rightarrow \|\alpha'(t)\|$$

olarak tanımlı fonksiyona α eğrisinin skaler hız fonksiyonu denir.$\|\alpha'\| \in IR$ sayısına α *eğrisinin* α(t) noktasındaki skaler hızı denir.

Örnek 1.1.9: $\alpha(t) = (t, t^2)$ eğrisinin t= 0, t =1, t = 2 için skaler hızını bulunuz.

$\alpha(t) = (t, t^2) \Rightarrow \alpha = (1, 2t)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ skaler hız fonksiyonu

t = 0 için 1

t = 1 için $\sqrt{5}$

t = 2 için $\sqrt{17}$

Tanım 1.1.5: Hız vektörü birim ise yani $\|\alpha'(t)\| = 1$ eğriye birim hızlı eğri denir.

Not: Birim hızlı eğriye s∈ I parametresiyle ifade edilebilir.

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$s \rightarrow \alpha(s)$$

olmak üzere $s \in I$ parametresine yay parametresi denir.

Tanım 1.1.6: Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Her t için $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ oluyorsa ise α ya regüler eğri denir.$\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ veya $< \alpha(t), \alpha'(t) > 0$ regülerdir.

Örnek 1.1.10:

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$\beta : I \rightarrow E^n$$

İki eğri olmak üzere; $< \alpha(t), \beta(t) >' = ?$, $(\|\alpha(t)\|)' = ?$

$$< \alpha(t), \beta(t) >' = < \alpha'(t), \beta(t) > + < \alpha(t), \beta'(t) >$$

$(\|\alpha(t)\|)' = (\sqrt{< \alpha(t), \alpha(t) >})'$

$$= \frac{< \alpha'(t), \alpha(t) > + < \alpha(t), \alpha'(t) >}{2\sqrt{< \alpha(t), \alpha(t) >}}$$

$$= \frac{2 < \alpha(t), \alpha'(t) >}{2\sqrt{< \alpha(t), \alpha(t) >}}$$

$$= \frac{< \alpha(t), \alpha'(t) >}{\|\alpha(t)\|}$$

Örnek 1.1.11: α birim hızlı eğri ise $< \alpha'(t), \alpha''(t) > = 0$ dır. Gösteriniz.

α birim hızlı $\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = 1$

$$\sqrt{< \alpha'(t), \alpha'(t) >} = 1$$

$$< \alpha'(t), \alpha'(t) > = 1$$

$$< \alpha'(t), \alpha''(t) > + < \alpha''(t), \alpha'(t) > = 0$$

$$< \alpha'(t), \alpha''(t) > = 0$$

1.2.PARAMETRE DEĞİŞİMİ

Tanım 1.2.1:

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

diferansiyellenebilir bir eğri olsun. J , IR bir açık alt aralığı olmak üzere; $h: J \longrightarrow I$

i) h diferansiyellenebilir bir fonksiyon

ii) $h'(t) \neq 0, \forall t \in J$

iii)$h(t) = I$

özelliklerini sağlıyorsa h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir.

Not:

i)$h'(t) > 0$ β eğrisine α nın yönünü koruyan bir yeniden parametrizasyonu,

ii)$h'(t) < 0$ β eğrisine α nın yönünü değiştiren bir yeniden parametrizasyondur.

Teorem 1.2.1: $\alpha : I \rightarrow E^n$ diferansiyellenebilir bir eğri ve $j \subseteq IR$ olsun.

$$h = \alpha^{-1} o\, \beta : J \rightarrow I$$

$$s \rightarrow h(s) = t$$

Parametre değişim fonksiyonu ise $\beta'(s) = \frac{dh}{ds}\Big|_{s'} . \alpha'\big(h(s)\big) dir.$

İspat:

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta \;\Rightarrow\; \beta(s) \Rightarrow (\alpha\, o\, h\,)(s)$$

$$\Rightarrow\ \beta(s) \Rightarrow \alpha(h(s))$$
$$\Rightarrow\ \beta(s) = \alpha(t)\text{dir.}$$
$$\Rightarrow\ \beta(s) \Rightarrow \alpha(h(s)) \text{ ise } \frac{d\beta}{ds} = \beta'(s) = \frac{dh}{ds} \cdot \alpha'(h(t))$$

Sonuç 1.2: E^n de bir α eğrisinin bir $\alpha(t)$ noktasında birden fazla teğet vektörü vardır ve bu teğet vektörleri lineer bağımlıdır.

Teorem 1.2.2: E^n de regüler bir M eğrisi ve M nin

$$\alpha : I \to M$$

parametresi verilsin. $T_M\big(\alpha(t)\big) = \big\{\alpha'(t)|_{\alpha(t)} ; t \in I\ \big\} : T_{E^n}(\alpha(t))$ nın 1-boyutlu alt uzayıdır.

$T_M\big(\alpha(t)\big)$, M nin α parametrelenmesinden bağımsızdır.

İspat: $\alpha : I \subseteq IR \to M$, $\quad \beta : J \to M$

$t \to \alpha(t) \quad s \to \beta(s)$ olmak üzere ;

$$h = \alpha^{-1} o\ \beta \Rightarrow\ \beta(s) \Rightarrow \alpha(h(s))$$
$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds} \cdot \alpha'(h(s)) = Sp\{\beta'(s)\}$$
$$= Sp\{\alpha'(t)\}$$
$$\Rightarrow T_M\big(\alpha(t)\big) = T_M\big(\beta(t)\big)$$

Tanım 1.2.2: $\alpha : I \to E^n$, $t \to \alpha(t)$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $u_0 \in IR$ olmak üzere; $l(t) = \int_{u_0}^{u} \|\alpha'(t)\| dt$ sayısına α eğrisine u_0'dan u ya yay uzunluğu denir.

Örnek 1.2.1: $\alpha : I \to E^3$, $t \to \alpha(t) = (2t,0,\ t)$ eğrisinin t=0 dan t=1'e kadar olan yay uzunluğunu bulunuz.

$$l = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt$$
$$\alpha'(t) = (2,0,1) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{5}$$
$$l = \int_0^1 \sqrt{5} dt = \sqrt{5}\Big|_0^1 = \sqrt{5}$$

Örnek 1.2.2: $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t^{3\backslash 2})$ eğrisinin $0 \leq t \leq\ 3$ aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

$$\mathrm{L} = \int_0^3 \|\alpha'(t)\| dt$$
$$\alpha'(t) = (-3sint, 3cost, 3\sqrt{t})$$
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9sin^2t + 9cos^2t + 9t})$$
$$= 3\sqrt{1+t}$$
$$\mathrm{L} = 3\int_0^3 \sqrt{1+t} dt$$

$$L = 3(\frac{2}{3}(1+t)^{3\backslash 2})|_0^3$$

$= 3(\frac{2}{3}(4^{3\backslash 2)} - \frac{2}{3})$=14

1.3.DÜZLEMDE EĞRİLER

$$\alpha : I \to IR$$

$$s \to \alpha(s)$$

s yay parametresi ile verilmiş düzlemsel bir eğri olsun. $\alpha'(t) = t(s)$ olmak üzere $< t(s), t(s) >= 1$ dir.($t(s)$: α eğrisinin α(t) $noktasındaki\ teğet\ vekt$örü)

Tanım 1.3.1: n(s)vektörü α eğrisinin α(s) noktasındaki birim normal vektör olmak üzere $t(s)$ vektörünün saat yönünün tersinde $\frac{\pi}{2}$ döndürülmesiyle elde edilir.

$t(s)$ =($t_1(s), t_2(s)$) $\Rightarrow n(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \end{pmatrix} = (-t_2(s), t_1(s))$ dir.

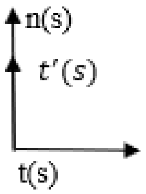
Not: α birim hızlı düzlemsel bir eğri olmak üzere

$$\|t(s)\| = 1 \Rightarrow < t(s), t(s) > = 1$$

$$\Rightarrow 2 < t'(s), t(s) >= 0$$

$$\Rightarrow < t'(s), t(s) >= 0$$

O halde t(s) ve $t'(s)$ vektörleri birbirine diktir. Dolayısıyla $t'(s) \,//\, n(s)$ dir.



Tanım 1.3.2: α : I $\to IR^2$ **,** K : I → IR eğriliği $t'(s) = k(s).n(s)$ ile tanımlanır.

Not:

$$t'(s) = k(s).n(s)$$

her iki tarafı n(s) ile çarpalım.

$$< t'(s), n(s) >= k(s) < n(s), n(s) >$$

$k(s) =< t'(s), n(s) >$ dir.

Tanım 1.3.3: α : I $\to E^2$ Regüler eğrisi verilsin. α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği

$$K(t) = \frac{< \alpha'', J\alpha'' >}{\| \alpha'(t) \|^3} ,$$

J saat yönünün tersine 90° lik dönme yaptıran matris ile tanımlanır.$\frac{1}{k}$ pozitif fonksiyona α nın eğrilik yarıçapı adı verilir.

Teorem 1.3.1: α : I $\to E^2$ **,** α(t) $= (X(t), Y(t))$ regüler eğrisi verilsin. α eğrisinin eğriliği

$$K(t) = \frac{(x'(t), y''(t) - x''(t), y'(t))}{(x'(t)^2, y'(t)^2)^{3/2}} \text{ dir.}$$

Teorem 1.3.2: $\alpha : I \to E^2$ **,** $t \to \alpha(t)$ bir regüler eğri $\beta(s) = \alpha(h(s))$ de α eğrisinin bir parametrizosyonu olsun. O halde α nın bir $h : (c,d) \to (a,b)$ **,** s→ $h(s) = t$parametrelendirilmesi için $h'(s) \neq 0$ olmak üzere

$$K_\beta(s) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} K_\alpha(t) \text{ dir.}$$

Frenet Formülleri:

Tanım 1.3.4: α , E^2 de birim hızlı bir eğri olsun.$t(s) = \alpha'(s)$ vektörü α nın birim teğet vektör olmak üzere $t'(s) = k(s).n(s)$ olduğunu biliyoruz.$\{t(s), n(s)\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir.

$$\Rightarrow n'(s) \in Sp\{t(s), n(s)\}$$

$$\Rightarrow n'(s) = \lambda_1 t(s) + \lambda_2 n(s) \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in IR \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow < t(s), n'(s) >= \lambda_1$$

$$\Rightarrow < n(s), n'(s) >= \lambda_2$$

$$\lambda_1 \Rightarrow < t(s), n(s) >= 0$$

$$\Rightarrow < t'(s), n(s) > + \langle t(s), n'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle t(s), n'(s) \rangle = K(s)$$

$$\lambda_2 \Rightarrow < n(s), n(s) >= 1 \;\; \Rightarrow < n'(s), n(s) >= 0 \text{ dır.}$$

Matris gösterimi:

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \end{bmatrix}$$

Frenet formülleri matris gösterimidir.

E^n UZAYINDA EĞRİLER

SERRET -FRENET VEKTÖRLERİ:

E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu verilsin.M nin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(t)|_{\alpha(t)} \epsilon\, T_M(\alpha(t))$ise E^ndeki Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere; $\alpha'(t)|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} |_{\alpha(t)}$ yazılabilir.$\alpha' : M \to \cup T_m(\alpha(t))$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan $\alpha' \epsilon\, x(M)$ dır.D, E^n de kovaryant türev operatörü olmak üzere $D: X(E^n)\, x\, X(E^n) \to X(E^n)$ dönüşümünden $X(M) \subset X(E^n)$ alt cümlesine kısıtlarsak;

$$D|_{X(M)}: X(M)\, x\, X(M) \to X(M)$$

Şeklinde ifade edilir.$D_{\alpha'}(t) = \frac{d}{dt}$ olmak üzere; $D_{\alpha'}\alpha'(t) = \frac{d\alpha'}{dt}$ dır.

$$\Rightarrow D_{\alpha'}\alpha'(t) = \left(\alpha'(t)\left[\frac{d\alpha_1}{dt}\right], \cdots, \alpha'(t)\left[\frac{d\alpha_n}{dt}\right]\right) = \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \cdots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2}\right)$$

$$= \left(\alpha''_1(t), \cdots, \alpha''_n(t)\right) = \alpha''(t) \epsilon X(M) \text{ dır.}$$

Benzer şekilde devam edilirse;

$D_{\alpha'}\alpha''(t) = \alpha'''$
$\vdots$ elde edilir.
$D_{\alpha'}\alpha^{n-1}(t) = \alpha^n$

$$\alpha'(t), \alpha''(t), \cdots, \alpha^n(t) \in X(M)$$

Bu türev vektör alanlarına eğrinin yüksek mertebeden türevleri denir. Bu türev vektör alanlarından r tanesinin maksimal lineer bağımsız vektör sistemi olduğunu kabul edelim. Yani; $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^r \in X(M)$ olmak üzere; $S = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^r\}$ lineer bağımsız olsun ve $\alpha^{(r+1)}, \dots, \alpha^{(r)} \in Sp\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^r\}$ sağlansın. Bu durumda α nın temel çatısı denir. S sistemine Gram – Schmidt metodu uygularsak;

$$E_1 = \alpha'$$

$$E_2 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1$$

$$E_3 = \alpha''' - \frac{\langle \alpha''', E_2 \rangle}{\langle E_2, E_2 \rangle} E_2$$

$$E_r = \alpha^{(r)} - \frac{\langle \alpha^{(r)}, E_k \rangle}{\langle E_k, E_k \rangle} E_k$$

$\{E_1, E_2, \cdots, E_r\}$ Sistemi ortogoneldir.

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|}$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|}$$

$$V_r = \frac{E_r}{\|E_r\|}$$

$(V_1, V_2, \cdots V_r)$ sistemi elde edilir.

Tanım 1.3.5: E_n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^r\}$ temel çatısından elde edilen $(V_1, V_2, \cdots V_r)$ ortonormal vektör alanları sistemine M nin α(t) noktasındaki Serret – Frenet, r ayaklısı veya kısaca Frenet çatısı denir. Burada V_i vektörlerinin her birine Frenet vektör denir.

Örnek 1.3.1: $\alpha : I \to E^2$, $t \to \alpha(t) = (cost, sint)$ eğrisinin Frenet 2 ayaklısını bulunuz.

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= (-sint, cost) \\
\alpha'' &= (-cost, -sint) \\
\alpha''' &= (sint, -cost) \\
\alpha^{(4)} &= (cost, sint) \\
\alpha^{(5)} &= (-sint, cost)
\end{aligned}\right\} \qquad
\begin{aligned}
\alpha(t)' &= -\alpha'''(t) \\
\alpha(t)'' &= -\alpha^{(4)}(t) \\
\alpha(t)' &= -\alpha^{(5)}(t) \\
\alpha(t)'' &= -\alpha^{(6)}(t)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ α nın temel çatısı S = $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ dir.

$$(\alpha'''(t), \dots, \alpha^{(n)} \in \mathrm{Sp}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$$

$$\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha'(t) \perp \alpha''(t) \text{ dir.}$$

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = (-sint, cost)$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = (cost, -sint)$$

Frenet 2-ayaklı $\{(V_1, V_2\}$

1.4.BİR EĞRİNİN OSKÜLATÖR HİPERDÜZLEMLERİ

Tanım 1.4.1: M $\in E^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. $\alpha : I \to E^n$ Eğrisinin Frenet r-ayaklısı $(V_1, V_2, \cdots V_r)$; $r \leq n$ olsun. $p \leq r$ olmak üzere ; $Sp\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ vektör uzayına (hiperdüzlem) , α nın α(s) noktasındaki p. Oskülatör hiperdüzlemi denir.

Özel olarak $r = n$ ve $p = n - 1$ halinde $Sp\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$ uzayı determinant yardımıyla kolayca bulunabilir. $(n-1)$ Hiperdüzleminde temsili bir nokta Y olsun o halde $\overrightarrow{\alpha(s)Y} \in Sp\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$ dir. Bu ise $\overrightarrow{\alpha(s)Y}$ ise $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$ nin lineer bağımlı olması demektir.

Yani; $\det\left[\overrightarrow{\alpha(s)Y}, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\right] = 0$ dır.

Not: M nin bir $\alpha(s) \epsilon M$ noktasındaki $(n-1)$ düzlemi $\det\left[\overrightarrow{\alpha(s)Y}, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\right] = 0$ olsun. M eğrisi yüksek mertebeden lineer bağımsız türev vektörleri $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}, \alpha^n$ olsun. Bu lineer bağımsız vektörlere Gram – Schmidt metodu gereği $Sp\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)}\} = Sp\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ yazılabilir. Bundan dolayı; $\det\left[\overrightarrow{\alpha(s)Y}, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\right] = 0$ ifadesindeki $\mathrm{Sp}\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$ uzayı ile $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}\}$ uzayları eşittir.

$\Longrightarrow (n-1)$ Oskülatör düzleminin denklemi;

$$\det\left[\overrightarrow{\alpha(s)Y}, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}\right] = 0$$

Örnek 1.4.1: $\alpha : IR \to E^3$, $t \longrightarrow \alpha(t) = (t, t^2, t + t^2)$ eğrisinin Oskülatör hiperdüzlemini bulunuz.

$$\alpha' = (1,2t, 1 + 2t)$$

$$\alpha'' = (0,2,2)$$

Hiperdüzlemi temsili nokta Y olsun. Y= (y_1, y_2, y_3)

$$\det\left[\overrightarrow{\alpha(s)Y}, \alpha', \alpha''\right] = 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1 - t & y_2 - t^2 & y_3 - t - t^2 \\ 1 & 2t & 1 + 2t \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

1.5.EĞRİLİKLER, EĞRİLİK EKSENLERİ

Tanım 1.5.1: M $\in E^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. s $\in$ I olmak üzere α(s)ϵM noktasındaki Frenet 2 – ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ olarak verilsin. $1 \leq$ i $\leq$ r olmak üzere;

$$k_i: I \to IR$$

s $\to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}'(s)\rangle$ şeklinde tamamlanan fonksiyona M eğrisinin i. Frenet eğrilik fonksiyonu $k_i \epsilon IR$ sayısında M eğrisinin α(s) noktasındaki i. Frenet eğriliği denir.

Teorem 1.5.1: M $\in E^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. s $\in$ I yay parametresi olmak üzere Frenet ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ olarak verilsin. Eğrinin α(s) noktasındaki eğrilik fonksiyonları k_i ise; $1 \leq$ i $\leq$ r ;

i)$V_1{}'(s) = k_1(s)V_2(s)$

ii)$V_2{}'(s) = -k_1(s)V_1(s) + k_2(s)V_3(s)$

iii)$V_i{}'(s) = -k_i(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s)$

iv)$V_1{}'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$ Eşitlikleri elde edilir.

E^3 UZAYINDA EĞRİLER

Frenet formülleri ve eğrilikler:

Teorem 1.5.2: E^3 uzayında bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin parametresi $s \in I$, eğrinin yay parametresi olsun. Bu durumda

$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = T = \alpha'$ (T: Eğrinin asli teğet vektör alanı)

$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ (N: Eğrinin asli normal vektör alanı)

$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = B = T\ x\ N$ (N: Eğrinin asli bi-normal vektör alanı)

İspat: α : I $\to E^3$birim hızlı bir eğri olduğundan $\|\alpha'\| = 1 \Rightarrow T = V_1 = \alpha'$ dir.

$$\|\alpha'\| = 1$$

$$\Longrightarrow \langle \alpha', \alpha''\rangle = 1$$

$$\Longrightarrow \langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$$

$$\alpha' \perp \alpha'' \; dir.$$

$$\Rightarrow N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \quad \text{dir.}$$

Ayrıca; B= T x N olarak tanımlanırsa $\{T, N, B\}$ ortonormal sistemi elde edilir.

Gerçekten;

$$\langle B, T \rangle = \langle TXN, T \rangle = 0$$

$$B \perp N \; dir.$$

Ayrıca; $\|B\|$=$\|T \; x \; N\|$ = $\|T\|$. $\|N\|$. sin 90 = 1 dir.

Tanım 1.5.2: $\forall \; s \; \in I$ için $K(s) = \|T'\|$ şeklinde tanımlı K fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu $K(s) \in IR$ reel sayısında α nın α(s) noktasındaki eğriliği denir.

Sonuç: $\forall \; s \; \in I$ için $K(s) \geq 0$ dır. T, N, B Frenet vektörlerinin T', N', B' vektörleri ile arasındaki ilişkiler

$$T' = a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B$$

$$N' = a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B$$

$$B' = a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B \text{ yazılabilir.}$$

a_{11}=$\langle T, T' \rangle = 0$

a_{12}=$\langle T', N \rangle = K$

a_{13}=$\langle T', B \rangle$ ve $N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \Longrightarrow$ N= $\frac{T'}{K} \Longrightarrow T' = K.N$ dir.

$a_{13} = K\langle N, B \rangle$

$a_{13} = 0$

$\Longrightarrow T' = K.N$

a_{21}=$\langle T, N' \rangle = -\langle T', N \rangle = K = -k_1$

a_{22}=$\langle N, N' \rangle = 0$

a_{23}=$\langle B, N' \rangle$ = $\langle B', N \rangle = \tau = k_2$

$\Longrightarrow N' = KT + \tau B$

a_{31}=$\langle T, B' \rangle = -\langle T', B \rangle = -K\langle N, B \rangle = 0$

a_{32}=$\langle N, B' \rangle = -\langle N', B \rangle = -\tau$

a_{33}=$\langle B', B \rangle$ = 0

$\Longrightarrow B' = -\tau N$

Teorem 1.5.3: α , I : IR $\rightarrow E^3$ eğrisi $k > 0$ eğrilikle ve τ burulmalı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda eğri Frenet vektörleri T, N, B için

$$T' = \text{K. N}$$

$$N' = -KT + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

Veya

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu formüllere Frenet formülleri denir.

Not:

Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$

Eğrilikleri $K\ ve\ \tau$

Frenet elemanları $\{T, N, B, K, \tau\}$ dir.

Teorem 1.5.4: α , E^3 de birim hızlı bir eğri, α nın $k > 0$ eğriliği ve τ burulması için

$$K = \|\alpha''\|, \tau = \frac{\langle \alpha', \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2} \text{ dir.}$$

İspat:

i) α birim hızlı bir eğri olmak üzere

$$\text{T(s)= } \alpha'(s) \Longrightarrow T'(s) = \alpha''(s) = K(s).N(s) \text{ dir.}$$

$$\Longrightarrow \|\alpha''(s)\| = K(s) \text{ dir.}$$

ii) $\alpha''(s) = K(s).N(s)$ olduğundan

$$\alpha'''^{(s)} = K'(s).N(s) + K(s).N'(s)$$

$$= K'(s).N(s) + K(s)\{= -K(s).T(s) + \tau(s)B(s)\}$$

$$= -K^2(s).T(s) + K'(s).N(s) + K(s)\,\tau(s)B(s)$$

$$\langle \alpha', \alpha'' \text{x}\, \alpha''' \rangle = \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') \text{ dir.}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K(s) & 0 \\ -K^2(s) & K'(s) & K(s)\,\tau(s) \end{vmatrix} = K^2\tau$$

$K(s) = \|\alpha''\|$ olmak üzere,

$$\tau = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \text{x}\, \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|} \text{ dür.}$$

Örnek 1.5.1: $c^2(a^2 + b^2) = 1$, $a > 0$ Olmak üzere a, b, c sabitleri için $\alpha(s) = (\text{acoscs}, \text{asincs}, \text{bcs})$ Dairesel helis eğrisi verilsin.

- **i)** α Eğrisinin birim hızlı olduğunu gösteriniz.
- **ii)** T, N, B Frenet vektörlerini bulunuz.
- **iii)** K eğriliği ve τ burulmasını bulunuz.

i)

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

$$\alpha'(s) = (-acsincs, \text{acoscs}, \text{bc})$$

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{(ac)^2 sin^2 cs + (ac)^2 cos^2 cs + (bc)^2}$$

$$= \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2} = \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{1} = 1$$

Olduğundan eğri birim hızlıdır.

ii)

$$T = \alpha'$$

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$B = T\ x\ N$

$$\mathrm{T} = (\ -acsincs, \mathrm{acoscs}, \mathrm{bc}\ )$$

$$\alpha''(s) = (-ac^2coscs, -ac^2sincs, 0)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \sqrt{a^2c^4cos^2cs + a^2c^4sin^2cs}$$

$$= \sqrt{a^2c^4} = ac^2$$

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = (-\mathrm{coscs}, -\mathrm{sincs}, 0)$$

$B = T\ x\ N$

$$= (\mathrm{bcsincs}, -\mathrm{bccoscs}, \mathrm{ac})$$

iv) $$\langle T', N\rangle = K$$

$$\langle N', B\rangle = \tau$$

Frenet formülleri:

T'= K. N

N'=$-KT + \ \tau B$

B'=$-\tau N$

$$K = \ \langle(-ac^2coscs, -ac^2sincs, 0), (-\mathrm{coscs}, -\mathrm{sincs}, 0)\rangle = \ ac^2cos^2cs + ac^2sin^2cs$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{ac}^2$$

$$\tau = \langle(-\mathrm{csincs}, -\mathrm{ccoscs}, 0), (\mathrm{bcsincs}, -\mathrm{bccoscs}, \mathrm{ac})\rangle$$

$$= (\mathrm{bc}^2\mathrm{sinc}^2\mathrm{s} + \mathrm{bccos}^2\mathrm{cs})$$

$$\tau = bc^2$$

Örnek 1.5.2: $\alpha(t) = (\frac{4}{5}cost, 1 - sint\ , -\frac{3}{5}cost)$

i) Regüler eğri olup olmadığını bulunuz.

ii) T, N, B, K, **τ** Frenet elemanlarını bulunuz.

iii) Düzlemsel olup olmadığını bulunuz.

i) $$\alpha'(t) = \ (\ -\frac{4}{5}sint, -\mathrm{cost}, \frac{3}{5}sint))$$

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{16}{25}sin^2t, +\cos^2\mathrm{t} + \frac{9}{25}sin^2t} = 1 \neq 0$$

Regüler eğri ve birim hızlı eğridir.

ii) $\mathrm{T} = (\ -\frac{4}{5}sint, -\mathrm{cost}, \frac{3}{5}sint))$

$$\|\alpha''\| = \left(-\frac{4}{5}cost, \mathrm{sint}, \frac{3}{5}cos\boldsymbol{t}\right)$$

$$\|\alpha''\| = 1$$

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = (-\frac{4}{5}cost, \text{sint}, \frac{3}{5}cos\boldsymbol{t})$$

$B = T\ x\ N$

$$\text{B} = \langle (-\frac{4}{5}sint, -\text{cost}, \frac{3}{5}sint)(-\frac{4}{5}cost, \text{sint}, \frac{3}{5}cos\boldsymbol{t})\ \rangle$$

$$\text{B}\ = (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$$

$$K = \langle T', N \rangle = 1$$

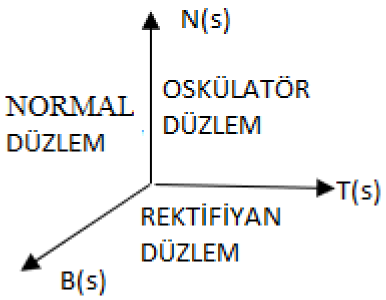
$$\tau = \langle N', B \rangle$$

$$= \langle \frac{4}{5}sint, \text{cost}, -\frac{3}{5}sint), (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}) \rangle$$

$$= -\frac{12}{25}sint + \frac{12}{25}sint = 0$$

iii) τ = 0 ise eğri düzlemsel eğrilerdir.

ÖZEL DÜZLEMLER



Tanım 1.5.3: $\text{Sp}\{\text{T}(\text{s}), \text{N}(\text{s})\}$ düzlemine α eğrisinin α(s) noktasındaki oskülatör düzlemi denir. Oskülatör düzlem üzerindeki herhangi bir nokta X olmak üzere;

$$\det\left[\overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, T(s), N(s)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, T(s)\ xN(s) \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, B(s) \rangle = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 1.5.4: $\text{Sp}\{\text{N}(\text{s}), \text{B}(\text{s})\}$ düzlemine α eğrisinin α(s) noktasındaki normal düzlemi denir. Normal düzlem üzerindeki herhangi bir nokta X olmak üzere;

$$\det\left[\overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, N(s), B(s)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, N(s)\ xB(s) \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, T(s) \rangle = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 1.5.5:$\text{Sp}\{\text{T}(\text{s}), \text{B}(\text{s})\}$ düzlemine α eğrisinin α(s) noktasındaki rektifiyan düzlemi denir. Rektifiyan düzlem üzerindeki herhangi bir nokta X olmak üzere;

$$\det\left[\overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, T(s), B(s)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, T(s)\ xB(s) \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(\text{s})\text{X}}, N(s) \rangle = 0 \text{ dır}$$

$K\ ve\ \tau$ eğriliklerinin geometrik yorumu;

$\alpha :\ I \to E^3$ birim hızlı bir eğri, $\alpha(s_0)$ noktasında ki Frenet elemanları $\{T_0, N_0, K_0, \tau_0\}$ olsun.

h = s- s_0 olmak üzere α nın s_0 noktasının komşuluğnda Taylor Seri Açılımı yapılırsa;

$$\overrightarrow{\alpha(s)-\alpha(s_0)} = h.\alpha'(s_0) + \frac{h^2}{2!}.\alpha''(s_0) + \frac{h^3}{3!}.\alpha'''(s_0) + \cdots$$

Burada;

$$\alpha'(s_0) = T(s_0) = T_0$$

$$\alpha''(s_0) = T'(s_0) = T'_0 = K_0.N_0$$

$$\alpha'''(s_0) = -K_0^2.T_0 + K_0'.N_0 + K_0.\tau_0.B_0 \text{ olur.}$$

Buna göre; $\overrightarrow{\alpha(s)-\alpha(s_0)} = \left(h - \frac{h^3}{6}K_0^2\right)T_0 + \left(\frac{h^2}{2}K_0 + \frac{h^3}{6}K_0'\right)N_0 + \left(\frac{h^3}{6}K_0'\tau_0\right)B_0$

s_0 ın öyle bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunu şeçelim ki h≠0, h^2≠0 .

Fakat; $h^3 = h^4 = \cdots = h^n = \ldots = 0$ olsun.

Bu durumda;

$\overrightarrow{\alpha(s)-\alpha(s_0)}$ nün $\{T, N, B\}$ çatısına göre koordinatları (x, y, z) olmak üzere

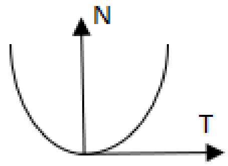
$$x = h$$

$$y = \frac{h^2}{2}K_0$$

$$z = 0$$

$$y = \frac{x^2}{2}K_0$$

Yani; α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasının bir komşuluğunda, eğrinin oskülatör düzlemindeki izdüşümü bir paraboldür. $K_0 > 0$ olduğu bu parabolün kolları N_0 ın pozitif yönünde bükülmüştür.



K_0 sayısı büyüdükçe parabolün kolları N_0 vektörüne yaklaşır. Yani teğeti olan T_0 dan uzaklaşır.

K_0 sayısı küçüldükçe parabolün kolları N_0 vektöründen uzaklaşır. Yani; teğeti olan T_0 vektörüne yaklaşır. O halde; K_0 sayısının büyüklüğü eğrinin α(s) noktasında T_0 teğet doğrultusunda ne kadar ayrıldığının (saptığının) bir ölçüsüdür.

Sonuç: $K_0 \to 0$ için eğri bir doğruya yaklaşır. $K_0 = 0$ halinde eğri bir doğrudur.

Şimdi; S_0 ın öyle bir komşuluğunu seçelim ki $h = h^2 = h^3 \neq 0$,

Fakat $h^4 = h^5 = \cdots = h^n = \cdots = 0$ olsun.

Bu eğri üç boyutlu uzayda $\alpha(s_0)$noktasından geçen bir eğridir.

$$x = \left(h - \frac{h^3}{6}K_0^2\right)$$

$$y = \left(\frac{h^2}{2}K_0 + \frac{h^3}{6}K_0'\right)$$

$$z = \left(\frac{h^3}{6}K_0'\tau_0\right)$$

olan eğridir. $K_0 \neq 0$ olmak üzere,$\tau_0 = 0$ için bu eğri $\alpha(s_0)$ noktasındaki oskülatör düzlemde yatar, Aksi halde bu düzlemden uzaklaşır. O halde τ_0 torsiyonu eğrisini bir düzlemden ne kadar ayrıldığını ölçer. $\tau_0 = 0$ için eğri düzlemseldir.

Teorem 1.5.4: E^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile $s\epsilon I$ eğrinin yay parametresi olmak üzere, eğrinin bir doğru olması için ⟺ K=0 olmasıdır.

İspat:(⟸): K=0 olsun. ⇒ K = $\|T'(s)\| = 0$ dır.

⇒ $T'(s) = 0$ dır.

⇒ T(s)= sabit =$\vec{A}$ bulunur.

Eğri yay parametresi ile verildiğinden

T(s) = $\alpha'(s) = \vec{A}$ dir.

$\Longrightarrow \alpha(s) = \vec{A}s + B$; $\vec{A}\epsilon IR^3, B\epsilon\ E^3$ dir.

(⟹): Kabul edelim ki M bir doğru olsun. M nin vektörel denklemi $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{BX}$ dir.

Ya da; $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \lambda\vec{A}$ yazılabilir.

Burada; $\alpha(s)$ için $\alpha(s) = \vec{A}s + B$ yazılabilir.

$$\Longrightarrow \alpha'(s) = \vec{A}$$

$$\Longrightarrow T(s) = \vec{A}$$

$$\Longrightarrow T'(s) = 0$$

$$\Longrightarrow K = \|T'(s)\| = 0$$

Teorem 1.5.5: E^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile $s\epsilon I$ eğrinin yay parametresi olsun. M eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart τ=0 olmasıdır.

İspat: (⟹): Kabul edelim ki M bir düzlemsel olsun. $\alpha(s)\epsilon M$ olmak üzere, $\langle \overrightarrow{\alpha(s) - p}, \vec{q} \rangle = 0$ olacak şekilde bir p noktası ve $\vec{q}$ sabit vektörü vardır. Bu ifadede s ye göre türev alınırsa

$$\Longrightarrow \langle \alpha'(s), \vec{q} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle T(s), \vec{q} \rangle = 0 \quad ; \ T(s) \perp \vec{q}$$

$$\Longrightarrow \langle T'(s), \vec{q} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow K(s)\langle N(s), \vec{q} \rangle = 0 \quad ; \ N(s) \perp \vec{q}$$

$\vec{q}$, $\vec{\alpha}$ eğrisinin üzerinde bulunduğu düzleme dik olduğundan $\vec{q}$ $Sp\{\vec{T}, \vec{N}\}$ düzleminde değildir

⇒ α϶ $Sp\{\vec{T}, \vec{N}\}$ dir.B=TxN ve $T(s) \perp \vec{q}$ ve $N(s) \perp \vec{q}$ olduğundan B(s)// $\vec{q}$

B(s)= $\vec{q} / \|\vec{q}\|$ yazılabilir.

$$\vec{q} = sabit$$

$$\Longrightarrow B'(s) = 0$$

$$\Rightarrow -\tau(s).N(s) = 0$$

$$\Rightarrow \tau(s) = 0$$

($\Leftarrow$):Kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun.

$\Rightarrow B'(s) = 0$ dır.

$$\Rightarrow B(s) = Sabit$$

$\forall s$ için;

$$\overrightarrow{\alpha(s) - \alpha(0)} \perp B(s) \ldots \text{(?)}$$

Eğer bu sağlanıyorsa; α∊ $Sp\{\vec{T}, \vec{N}\}$ dir.

Bir; $f(s) = \langle \overrightarrow{\alpha(s) - \alpha(0)}, B(s) \rangle$ fonksiyonunu tanımlayalım.

S ye türev alalım.

$$\frac{df}{ds} = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle = \langle T, B(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{df}{ds} = 0 \Rightarrow f(s) = a; a \in IR$$

şeklinde sabit bir fonksiyondur.

$\forall s \in I$ için;

S= 0 için

$$f(0) = \langle \overrightarrow{\alpha(0) - \alpha(0)}, B(0) \rangle = 0,$$

O halde ; a = 0

$\Rightarrow \forall s \in I$ için; $f(s) = \langle \overrightarrow{\alpha(s) - \alpha(0)}, B(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{\alpha(s) - \alpha(0)} \perp B(s)$ dir. α∊ $Sp\{\vec{T}, \vec{N}\}$ dir.

Tanım 1.5.6: α: (a, b) $\rightarrow E^3$ bir regüler eğri olmak üzere α yay parametresi ile ifade edilen birim hızlı eğrisi $\tilde{\alpha}$: (c, d) $\rightarrow E^3$ olsun. s(t) yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere; α(t)= $\tilde{\alpha}$(s(t)) yazılabilir. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}, \tilde{K}, \tilde{\tau}\}$ olsun.

O halde;

$$K(t) = K((s(t))$$

$$\tau(t) = \tilde{\tau}(s(t))$$

$$T(t) = \tilde{T}(s(t))$$

$$N(t) = \tilde{N}(s(t))$$

$$B(t) = \tilde{B}(s(t))$$

NOT: α(t)= $\tilde{\alpha}$(s(t)) için $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} dir.$

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} \right\| \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = 1 \text{ olduğundan } \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \theta \text{ dır.}$$

Teorem 1.5.6: α:(a, b) $\rightarrow E^3$, $v = \|\alpha''\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$ hızlı bir regüler olsun.

$$T' = vKN$$

$$N' = -vKT + v\,\tau B$$

$$B' = -v\tau N \text{ olur.}$$

İspat: α nın yay parametresi s = s(t) olsun.

$T(t) = \widetilde{T}\left(s(t)\right)$ için $T'(t) = s'(t).\widetilde{T}\,'\big(s(t)\big) = v\widetilde{T}\left(s(t)\right) = v\widetilde{K}\big(s(t)\big)\widetilde{N}\big(s(t)\big) = vK(t).N(t)$

$N(t) = \widetilde{N}\big(s(t)\big)$ için $N'(t) = s'(t).\widetilde{N}\,'\big(s(t)\big) = v(-\widetilde{K}\big(s(t)\big)\widetilde{T}\left(s(t)\right) + \tilde{\tau}\big(s(t)\big)\widetilde{B}\left(s(t)\right)$

$$= -v\widetilde{K}(t)T(t) + v\tau(t)B(t) = vK(t).N(t)$$

$B(t) = \widetilde{B}\left(s(t)\right)$ için $B'(t) = s'(t).\widetilde{B}\,'\big(s(t)\big) = v(-\tilde{\tau}(s(t))\widetilde{N}\big(s(t)\big) = -v\tau(t)N(t)\ dir.$

Teorem 1.5.7: Bir regüler α eğrisinin α' hızı ve α'' ivmesi için

$$\alpha' = vT$$

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt}.T + K.v^2.N \text{ olur.}$$

İspat: $\tilde{\alpha}$, α eğrisinin birim hızlı parametresizyonu olmak üzere

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$$

$$\alpha'(t) = \tilde{\alpha}'\big(\mathrm{s(t)}\big).S'(t) = v(t).\widetilde{T}\left(s(t)\right) = v(t).T(t)$$

$$\alpha' = vT$$

$$\alpha'' = v'.T + v.T' = v'.T + v.v.K.N = v'.T + v^2K.N \text{ dir.}$$

Teorem 1.5.8: α:(a, b) $\rightarrow E^3$ bir regüler olsun. k≠0

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},\ B = \frac{\alpha' X \alpha''}{\|\alpha' X \alpha''\|},\ N = B\ x\ T\ ,\ K = \frac{\|\alpha' X \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},\ \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' X \alpha''\|^2}$$

İspat: α bir regüler eğri ise

$$\alpha' = vT$$

$$\alpha'' = v'.T + v^2K.N \text{ dir.}$$

$$\alpha' x\ \alpha'' = (\ vT)\ x\ (v'.T + v^2K.N)$$

$$= v^3K.B$$

$$\|\alpha' X \alpha''\| = v^3K$$

O halde;

$$B = \frac{\alpha' X \alpha''}{\|\alpha' X \alpha''\|} \text{ dir.}$$

$$\alpha''' = v'.T + (v^2K.N)' = v'''.T + v'.T' + (K'v^2 + 2Kvv')N + Kv^2N'$$

$$\alpha''' = (v'' - K^2v^3)T + (3Kv.v' + K'v^2)N + K\tau v^3B$$

Olmak üzere;

$$\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle \alpha'\ x\ \alpha'', \alpha''' \rangle$$

$$= Kv^3\langle B, \alpha''' \rangle = K^2v^6\tau$$

$$\|\alpha' x\ \alpha''\|^2 = K^2v^6 \text{ dır.}$$

$$\frac{\det(\alpha',\alpha'',\alpha''')}{\|\alpha' X\alpha''\|^2}=\frac{K^2v^6\tau}{K^2v^6}=\tau$$

Örnek 1.5.3: r$\in IR^2, \alpha(t)=rcost, rsint,$ 1) Frenet düzlemlerini bulunuz?

α'(t)=(-rsint,rcost,0)

α''(t)=(-rcost,-rsint,0)

$\|\alpha'(\mathrm{t})\|$=r≠0 olduğundan birim değildir.

$$T=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}=\frac{(-\mathrm{rsint,rcost,0})}{r}=(-\mathrm{sint},\mathrm{cost},0)$$

$$\mathrm{B}=\frac{\alpha' X\alpha''}{\|\alpha' X\alpha''\|}=(0,0,r^2)$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{B}\,\mathrm{x}\,\mathrm{T}=(-cost,sint,0)$$

Oskülatör düzlem ⟺$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},B\rangle=0$

y=(y_1,y_2,y_3)

$$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},(0,0,1)\rangle=0$$

$$\langle(y_1-rcost,y_2-rsint,y_3-1)((0,0,1))\rangle=0$$

$$y_3-1=0$$

Normal düzlem ⟺$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},T\rangle=0$

y=(y_1,y_2,y_3)

$$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},T\rangle=0$$

$$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},(-\mathrm{sint},\mathrm{cost},0)\rangle=0$$

$$-y_1sint+y_2cost=0$$

Rektifiyan düzlem ⟺$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},N\rangle=0$

y=(y_1,y_2,y_3)

$$\langle\overrightarrow{\alpha(t)y},(-cost,-sint,0)\rangle=0$$

$$\mathrm{r}-\mathrm{ycost}-\mathrm{ysint}=0$$

1.6.EĞRİLİK MERKEZLERİ VE EĞRİLİK KÜRELERİ

Bir $M\,\epsilon\,E^3$ eğrisinin bir $\alpha(s_0)\epsilon\, M$ noktasında, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yerini gösterelim.

Teorem 1.6.1:M ⊂ E^3 eğrisi (I , α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin α (s) noktasındaki Frenet üç ayaklısı; $\{V_1(s),V_2(s),V_3(s)\}$ olmak üzere M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri;

$a(s)=\alpha(s)+M_2V_2(s)$+$\lambda V_3(s)$ dir.

Burada: $M_2:I\ \rightarrow IR$, $M_2(s)=\frac{1}{k_1(s)}$ $ve\ \lambda\,\epsilon\, IR$ dır.

İspat: (I, α) koordinat komşuluğu, M eğrisi için yay parametresi olarak verilsin. M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürenin merkezi a ve yarıçapı r olsun.

Bu durumda; $f(s) = \langle a - \alpha(s) \rangle - r^2$ fonksiyonunu ele alalım.$\alpha(s)$ noktasında

$\delta^2 = \{x | x \epsilon E^3, \langle x - a, x - a \rangle\} = r^2$ küreleri ile M eğrisinin sonsuz yakın üç ortak noktası olması için, $f(s) = f'(s) = f''(s) = 0$ olmalıdır.

Buna göre; $f(s) = 0 \Longrightarrow \langle a - \alpha(s) \rangle = r^2$dir.

$$f'(s) = 0 \Longrightarrow \langle v_1(s), a - \alpha(s) \rangle - \langle a - \alpha(s), v_1(s) \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle v_1(s), a - \alpha(s) \rangle = 0$$

$$f''(s) = 0 \Longrightarrow \langle v_2(s), a - \alpha(s) \rangle - \langle v_1(s), v_1(s) \rangle = 0$$

Diğer taraftan $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ baz ise,

$=M_1\,(s)V_1(s) + M_2V_2(s) + M_3V_3(s)$; $M(s) \,\epsilon\, IR$ yazılabilir.

$$M_1\,(s) = \langle v_1(s), \overrightarrow{a - \alpha(s)} \rangle \Longrightarrow M_1\,(s) = 0 \;\; (f'(s) = 0)$$

$$M_2\,(s) = \langle v_2(s), \overrightarrow{a - \alpha(s)} \rangle \Longrightarrow M_2\,(s) = \frac{1}{k_1(s)}\; dir. (f'(s) = 0)$$

$f(s) = 0 = M_1\,^2(s) + M_2\,^2(s) + M_3\,^2(s) = r^2)$ dir.

$$M_3\,^2(s) = \sqrt{r^2 - \frac{1}{k_1{}^2}}$$

$$a - \alpha(s) = \frac{1}{k_1{}^2} V_2 +) + \lambda V_3 \;;\; \lambda = M_3 \in IR$$

$$a = \alpha(s) + M_2V_2 +) + \lambda V_3 \text{ dür.}$$

Sonuç 1.6.1: $\alpha(s) \in M$ noktasında sonsuz yakın üç ortak nokta olan kürelerin merkezleri bir doğru üzerindedir.

$a(s) = \alpha(s) + M_2V_2(s) + \lambda V_3(s)$ olup;

$\lambda \in IR$ parametresi ile bu denklem $C(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_1}V_2$ (Eğrilik merkezi) noktasından geçen ve V_3 vektörüne paralel olan bir doğru gösterir.

Tanım 1.6.1:M $\in E^3$ eğrisiyle M noktasında sonsuz yakın dört ortak noktası olan küreye, M nin $m \,\epsilon\, M$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi denir.

Teorem 1.6.2: M $\subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezi a ise;

$$a = \alpha(s) + M_2(s)V_2(s) + M_3(s)V_3(s) \text{ dir.}$$

$$M_2(s) = \frac{1}{k_1(s)}\,,\; M_3(s) = \frac{m_2'(s)}{k_2(s)} = \left(\frac{1}{k_1(s)}\right)' \text{ dir.}$$

İspat: $\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezi a ve yarıçapı r olsun.

O halde; $f(s) = \langle a - \alpha(s) \rangle - r^2$ fonksiyonunu ele alalım.

$\alpha(s) \in M$ noktasındaki oskülatör küre ile eğrinin sonsuz yakın dört ortak noktası olduğundan

$f(s) = f'(s) = f''(s) = f'''(s)$ ve $f'^{V}(s) \neq 0$ dır.

$$M_1\,(s) = 0\,, M_2(s) = \frac{1}{k_1(s)}, M_3(s) = \sqrt{r^2 - \frac{1}{{k_1}^2}}$$

$$f''(s) = K_1(s)\langle v_2(s), a - \alpha(s)\rangle - 1$$

$f'''(s) = {K_1}'(s)\langle v_2(s), a - \alpha(s)\rangle + K_1(s)\{-K_1(s)\langle v_1(s), a - \alpha(s)\rangle + K_2(s)\langle v_3(s), a - \alpha(s)\rangle - \langle v_2(s) v_1(s)\rangle\}$ olmak üzere;

$$f'''(s) = 0 \Longrightarrow {K_1}'(s)M_2(s) + K_1(s)K_2(s)M_3(s) = 0 \text{ dır.}$$

$$M_3(s) = \frac{{K_1}'(s)}{K_1(s)K_2(s)} M_2\ dir.$$

$$\Longrightarrow M_3(s) = \frac{-{K_1}'(s)}{{K_1}^2(s)K_2(s)}$$

$$\Longrightarrow M_3(s) = \left(\frac{1}{k_1(s)}\right)' \frac{1}{k_2(s)} \text{ dir.}$$

Sonuç 1.6.2: M ∈ E^3 eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Oskülatör kürenin yarıçapı r ise

$$r = [M_2 V_2]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)' \frac{1}{k_2(s)}\right)^2\right]^{1/2} \text{ dir.}$$

Örnek 1.6.1: α: IR $\rightarrow$ IR **,** $\alpha(\mathrm{t}) = (\mathrm{cost}, \mathrm{sint}, \mathrm{t})$ eğrisinin $\alpha(\frac{\pi}{2})$ de eğrilik merkezi, eğrilik yarıçapı ve eğrilik eksenini bulunuz.

$$\alpha'(t) = (-sint, cost, 1)$$

$$\alpha''(t) = (-cost, -sint, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (sint, -cost, 0)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} \neq 1$$

Birim hızlı değildir.

$$\mathrm{T} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \mathrm{B} = \frac{\alpha' x\ \alpha''}{\|\alpha' x\ \alpha''\|}, \mathrm{N} = \mathrm{B\,x\,T}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sint, cost, 1)$$

$$\alpha'(t)\ x\ \alpha''(t) = (-sint, cost, 1)\ x\ (-cost, -sint, 0)$$

$$= (\mathrm{sint}, -\mathrm{cost}, 1)$$

$$\|\alpha'(t)\ x\ \alpha''(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(sint, -cost, 1)$$

$$\mathrm{B\,x\,T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ sint & -cost & 1 \\ -sint & cost & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{N} = (-\mathrm{cost}, -\mathrm{sint}, 0)$$

$$k_1 = \frac{\|\alpha'(t)\ x\ \alpha''(t)\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{2}$$

$M_2 = \frac{1}{k_1}$ Eğrilik yarıçapıdır.

Eğrilik merkezi;

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + M_2(\frac{\pi}{2})N(\frac{\pi}{2})$$
$$= (0,1,\tfrac{\pi}{2})+2(0,-1,\tfrac{\pi}{2})$$

Eğrilik ekseni;

$$a(\frac{\pi}{2}) = c\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda B(\frac{\pi}{2})$$
$$= (0,-1,\tfrac{\pi}{2})+ \lambda(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

Tanım 1.6.2: M ∈ E^3 eğrisi ve $S^p \subset E^n$ p- hiperküresi verilsin. Eğer $M \subset S^p$ alt cümlesi ise M ye E^n in bir p- hiperküresel eğri denir .Burada; n=3, p=1 halinde M eğrisi bir çember veya çember yayıdır.

Teorem 1.6.3: S_0^2, O merkezli bir küre ve $M \subset S_0^2$ eğrisiverilsin.

M eğrisinin (I , α) koordinat komşuluğu için $S \in I$ yay parametresi olsun.

M nin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3 ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ olmak üzere;

$\langle\alpha(s), V_i(s)\rangle = -M_i(s)$ dir.$\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in S_0^2$ olduğundan S_0^2 nin yarıçapı r olmak üzere

$$\langle\alpha(s), \alpha(s)\rangle = r^2$$

Bu eşitlikte s'ye göre türev alınırsa

$$2\langle\alpha(s), V_1(s)\rangle = 0 = -M_1\ (s) \text{ dir.}$$

Son eşitlikten tekrar türev alalım.

$$\langle V_1(s), V_1(s)\rangle + k_1(s)\langle\alpha(s), V_2(s)\rangle = 0$$
$$\langle\alpha(s), V_2(s)\rangle = -\frac{1}{k_1(s)} = -M_2\ (s) \text{ dir.}$$

$\langle\alpha(s), V_2(s)\rangle = -M_2\ (s)$ den tekrar türev alınırsa

$$\langle\alpha(s), V_3(s)\rangle = \langle V_1(s), V_2(s)\rangle - k_1(s)\langle\alpha(s), V_1(s)\rangle + k_2(s)\langle\alpha(s), V_3(s)\rangle$$
$$\langle\alpha(s), V_3(s)\rangle = -\frac{M_2{}'(s)}{k_2(s)} = -M_3(s) \text{ dir.}$$

Teorem 1.6.4: $S_0^2 \epsilon E^3$ O merkezli bir küre olsun. Eğer M ∈ S_0^2 ise M eğrisinin her noktasındaki oskülatör küre S_0^2 dir.

İspat: $\alpha(s)$ noktasındaki Oskülatör kürenin a olmak üzere

$$a = \alpha(s) + M_2(s)V_2(s) + M_3(s)V_3(s) \text{ dir.}$$

M ∈ S_0^2 olduğundan bir önceki teoremden

$$\langle\alpha(s), V_i(s)\rangle = -M_i(s) \text{ dir.}$$

O halde; $a = \alpha(s) - \langle\alpha(s), V_2(s)\rangle V_2(s) + \langle\alpha(s), V_3(s)\rangle V_3(s)$ [1]

Yazılabilir. Diğer yandan

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{3}\langle\alpha, V_i\rangle\, V_i \text{ ve } \langle\alpha, V\rangle = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \langle\alpha(s), V_2(s)\rangle V_2(s) + \langle\alpha(s)V_3(s)\rangle V_3(s) \ [2]$$

$$[1], [2] \text{ den } a = \alpha(s) - \alpha(s) = 0$$

O halde $d(\alpha(s), 0) = r$ dir.

Teorem 1.6.5:M $\in E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $M_3(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ olmak üzere; $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Oskülatör kürenin yarıçapı sabittir.$\Leftrightarrow$ Oskülatör kürenin merkezleri aynıdır.

İspat:($\Rightarrow$): $\alpha(s)$ noktasındaki Oskülatör kürenin yarıçapı $r(s)$ ise $r^2(s) \neq M_2^2(s) + M_3^2(s)$ dir.

Eğer r(s) sabit ise; $M_2(s)M_2'(s) + M_3(s)M_3'(s) = 0$ dır.

$M_3(s) = \frac{M_2'(s)}{k_2(s)}$ değeri yerine yazılırsa

$$M_2(s)k_2(s) + M_3(s)M_3'(s) = 0$$

$M_2(s)k_2(s) + M_3'(s) = 0$ elde edilir. [*]

Diğer taraftan;

$$a(s) = \alpha(s) + M_2V_2(s) + \lambda V_3(s) \text{ dir.}$$

$$D_\alpha\, a(s) = V_1(s) + M_2'(s)V_2(s) - k_1(s)M_2(s)V_1(s) + M_2(s)k_2(s)V_3(s) + V_3(s)M_3'(s)$$
$$- M_3(s)k_2(s)V_2(s)$$

$$D_\alpha\, a(s) = V_1(s)\{1 - k_1(s)M_2(s)\} + V_2(s)\{M_2'(s) - M_3(s)k_2(s)\} + V_3(s)\{M_3'(s) + M_2(s)k_2(s)\}$$

Bu eşitlik [*] uygulandığında

$D_\alpha\, a(s) = 0$ dır. $\Rightarrow a(s) =$ sabittir.

($\Leftarrow$): $\forall S \in I$ için $a(s) =$ sabittir.

$$\langle a(s) - a(s), a(s) - a(s)\rangle = r^2 \text{ dan}$$

S ye göre türev alınırsa

$$2\langle V_1(s), a(s) - a(s)\rangle = 2r(s).\frac{dr(s)}{ds} = 0\ , r(s) = \ sabittir.$$

Teorem 1.6.6: M $\in E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $M_3(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ olsun.M bir küresel eğridir. $\Leftrightarrow$ Oskülatör kürenin merkezleri aynıdır.

Teorem 1.6.7: M $\in E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı bir eğri olsun.

$M_3(s) \neq 0\,, k_2(s) \neq 0$ olsun. M bir küresel eğridir. $\Leftrightarrow M_3'(s) + M_2(s)k_2(s) = 0\ dır.$

$$\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)\left(\frac{1}{k_2(s)}\right) + \frac{1}{k_1(s)}k_2(s) = 0$$

Kaynakça

Hacısalihoglu, H. H. (1998). *Diferensiyel Geometri.* Ertem Matbaası.

Sabuncuoğlu, A. (2006). *Diferansiyel Geometri .* Ankara: Nobel Yayın .

Yüce, S. (2013). *Diferansiyel Geometri .* İstanbul: Sürat Yayınları.