Logos (grec) : le langage, le raisonnement

Définitions :

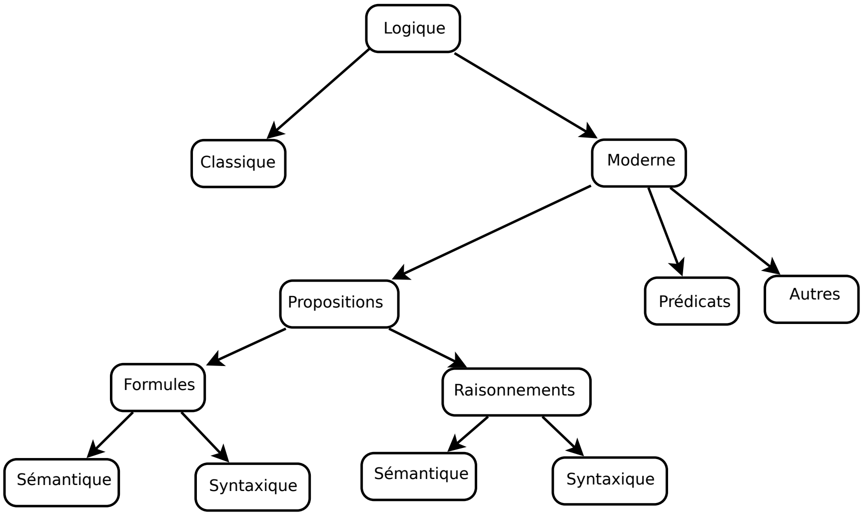
- Etude du discours rationnel
- Etude de la raison dans le langage
- Science des conditions de vérité (d'une formule / d'un raisonnement)

Logique classique : Socrate, Platon, Aristote jusqu'au début du XIX^{eme} siècle. Analyse de la grammaire, prédominence de la logique aristotélicienne.

Logique moderne : Symbolique et axiomatique. Mathématisée et algébrisée, elle repose sur un système hypothético-déductif et sur un système de réécriture.

Personnages importants : Aristote, De Morgan, Boole, Gentzen, Russel

Méthodes : L'étude des conditions de vérité d'une formule ou d'un raisonnement peut se faire par des méthodes **sémantiques** ou **syntaxiques**.



Ordre 0 : Logique des propositions

Ordre 1 : Logique des prédicats

Autres : Logique d'ordre supérieur (quantification des prédicats), logique déviantes (fonctions de vérité à valeurs dans un ensemble de cardinal strictement supérieur à 2)

Proposition : Une proposition ou énoncé ou affirmation est ce qui est vrai ou faux.

Opérateurs : $\urcorner, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

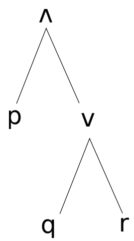
Séparateurs : $(,), \{, \}, [,]$

Formules bien formées (fbf ou wff) : C'est le plus petit ensemble tel que :

- Toute proposition est une formule (**formule atomique**)
- Si A et B sont des formules, alors :
  $\urcorner A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ sont des formules.

Attention Ne pas confondre langage et méta-langage.

Représentation arborescente (exemple : $(p \wedge (q \vee r))$)



Domaine sémantique (domaine d'interprétation, domaine de discours) : $\{0,1\}$. **Interpréter une fbf** consiste à lui attribuer une valeur de $\{0,1\}$

Une assignation sur n propositions est un ensemble d'interprétations de ces propositions (un $n-$uplet). Une assignation = un monde possible = une ligne de la table de vérité (pour n proposition il y a 2^n assignations possibles et 2^{2^n} fonctions de vérité possibles).

Un modèle pour une fbf donnée est une assignation qui la rend vraie.

Méthode Pour déterminer la sémantique d'une formule, on dresse sa table de vérité.

Théorème de substitution Si une formule est valide (resp. inconsistante), la formule obtenue en substituant chaque occurence d'un schéma de formule par une fbf quelconque est également valide (resp. inconsistante).

Métalangage $\models$ A signifie A est valide.

Formules de De Morgan :

- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Formule sans nom : $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$

Equivalence $A \Leftrightarrow B$ si et seulement si $\models A \leftrightarrow B$

Définition : $(\mathcal{B}, \wedge, \vee, \neg)$ où $\mathcal{B} = \{0; 1\}$ avec 0 est la classe d'équivalence de $p \wedge \neg p$ et 1 est la classe d'équivalence de $p \vee \neg p$ pour la relation $\Leftrightarrow$

Propriétés

- Idempotence : $A \wedge A \Leftrightarrow A; A \vee A \Leftrightarrow A$
- Non contradiction : $A \wedge \neg A \Leftrightarrow O$ (symétrique pour $\wedge$)
- Tiers exclu : $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ (symétrique pour $\vee$)
- Bivalence : $\neg 1 \Leftrightarrow 0$ et $\neg O \Leftrightarrow 1$
- Double négation : $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- Eléments neutres : $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ et $A \vee 0 \Leftrightarrow A$
- Eléments absorbants : $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ et $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
- Commutativité de $\wedge$ et $\vee$
- Associativité de $\wedge$ et $\vee$
- Distributivité : $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ et $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Lois d'absorbtion : $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ et $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

Equivalences fondamentales

- Loi de De Morgan

- $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Clause : Est une disjonction de variables propositionnelles éventuellement niées. (suppression des parenthèses à l'intérieur de la clause)

FNC Une forme normale conjonctive est une conjonction de clauses (utile pour montrer qu'une formule est valide).

FND Une forme normale disjonctive est une disjonction de conjonctions de variables propositionnelles éventuellement niées (utile pour montrer qu'une formule est inconsistante).

Théorème Pour toute formule il existe une FND et une FNC équivalentes. (preuve par algorithme)

FND complète Chaque conjonction contient une et une seule occurence de chaque variable propositionnelle. Pour une formule donnée elle est utile (aux commutations près).

Remarque Les termes de la FND complète correspondent aux modèles de la formule. Valide : 2^n termes ; Inconsistante : 0 termes.

Règles de réécriture

$$\begin{array}{c} A \land B \\ | \\ A \\ B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \lor B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \land B) & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \lor B) \\ | \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & A \\ \neg B & & B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ | \\ A \\ \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ \neg B & & B \end{array}$$

Méthode

- On ferme un chemin dès qu'il contient une formule et sa négation.
- Les chemins non fermés donnent un terme de la FND
- Si tous les chemins sont fermés, c'est une contradiction